САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Олимпиада школьников СПбГУ по математике

Задания заключительного этапа

2017/2018 учебный год

Олимпиада школьников СПбГУ по математике.

Заключительный этап. 2017/2018 учебный год.

Задания для 10-11 классов

(Правильное и полное решение каждой задачи оценивается в 20 баллов)

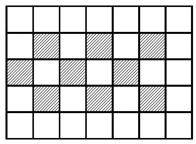
Олимпиада школьников СПбГУ по математике.
Заключительный этап. 2017/2018 учебный год. 10 – 11 классы.

Вариант 1

1. *На клетчатой доске 5×7 отмечено 9 клеток. Назовем пару клеток с общей стороной интересной, если хотя бы одна клетка из пары отмечена. Какое наибольшее количество интересных пар может быть?*

   Ответ: 35.

   Решение. Назовем *соседними* две клетки с общей стороной. Число интересных пар, содержащих заданную отмеченную клетку, не больше 4, а для граничной клетки — не больше 3. Тогда общее число интересных пар не превосходит $9\cdot 4 = 36$. При этом если среди отмеченных клеток есть две соседние, то содержащая их интересная пара считается дважды. Заметим, что среди 9 клеток из прямоугольника 3×5 обязательно есть две соседних. Поэтому среди отмеченных клеток имеется либо граничная, либо две соседних. Таким образом, общее число интересных пар не превосходит 35. Пример разметки с 35 интересными парами приведен ниже. $\square$



2. *Даны положительные числа a, b, c, d. Найдите минимальное значение выражения*

$$A = \left(\frac{a+b}{c}\right)^4 + \left(\frac{b+c}{d}\right)^4 + \left(\frac{c+d}{a}\right)^4 + \left(\frac{d+a}{b}\right)^4.$$

   Ответ: 64.

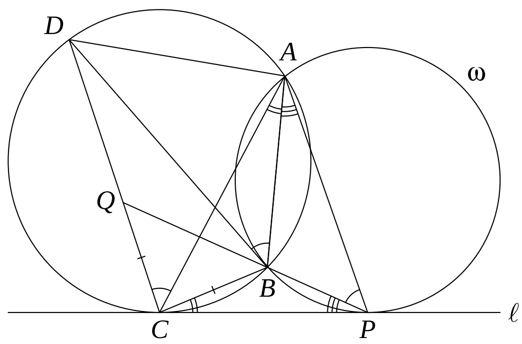
   Решение. В силу неравенств Коши для средних

$$A \geqslant 4\cdot\frac{(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)}{abcd} = 64\cdot\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}\cdot\frac{b+c}{2\sqrt{bc}}\cdot\frac{c+d}{2\sqrt{cd}}\cdot\frac{d+a}{2\sqrt{da}} \geqslant 64.$$

Равенство реализуется при $a = b = c = d = 1$. $\square$

3. *Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. В точке C к этой окружности проведена касательная ℓ. Окружность ω проходит через точки A и B и касается прямой ℓ в точке P. Прямая PB пересекает отрезок CD в точке Q. Найдите отношение $\frac{BC}{CQ}$, если известно, что BD — касательная к окружности ω.*

   Ответ: 1.



Решение. Угол между касательной BD и хордой AB окружности ω равен вписанному в нее углу, который опирается на AB, поэтому $\angle APB = \angle ABD = \angle ACD$. Тогда четырехугольник $APCQ$ вписанный, откуда $\angle CQB = \angle CAP$. Применяя еще два раза теорему о касательной и хорде, мы получим также равенства $\angle BCP = \angle BAC$ и $\angle BPC = \angle BAP$. Тогда

$$\angle CBQ = 180^\circ - \angle CBP = \angle BCP + \angle BPC = \angle BAC + \angle BAP = \angle CAP = \angle CQB.$$

Таким образом, треугольник BCQ равнобедренный, откуда $BC = CQ$. $\square$

4. *На доске написано произведение чисел $\overline{\text{ИКС}}$ и $\overline{\text{КСИ}}$, где буквы соответствуют различным ненулевым десятичным цифрам. Это произведение шестизначное и оканчивается на С. Вася стер с доски все нули, после чего там осталось ИКС. Что было написано на доске?*

Ответ: $100\,602 = 162 \cdot 621$.

Решение. Положим $p = \overline{\text{ИКС}} \cdot \overline{\text{КСИ}}$. В десятичную запись p входят три нуля, И, К и С. Тогда числа $(\text{И}+\text{К}+\text{С})^2$ и $(\text{И}+\text{К}+\text{С})$ дают при делении на 9 одинаковые остатки, откуда $(\text{И}+\text{К}+\text{С}) \,\vdots\, 9$ или $(\text{И}+\text{К}+\text{С}-1) \,\vdots\, 9$. Так как число $\text{И}+\text{К}+\text{С}$ лежит между 6 и 24, оно принадлежит множеству $\{9, 10, 18, 19\}$. Младшая цифра С числа p равна остатку от деления $\text{С} \cdot \text{И}$ на 10. Поэтому $\text{С} \cdot (\text{И}-1) \,\vdots\, 10$. Возможны три случая.

1) *И* $= 1$. Тогда $\text{К}+\text{С} \in \{8, 9, 17\}$. Предпоследняя цифра числа p равна остатку от деления $\text{С}^2 + \text{К}$ на 10. Поскольку С^2 не делится на 10, эта цифра отлична от К. Значит, она равна нулю, откуда

$$(\text{С}^2 + \text{К}) \,\vdots\, 10 \iff (\text{С}^2 - \text{С} + \text{К} + \text{С}) \,\vdots\, 10.$$

Остатки от деления $\text{С}^2 - \text{С}$ на 10 принимают только значения 0, 2 и 6. Поэтому $\text{К}+\text{С} = 8$ и

$$(\text{С}^2 - \text{С} + 8) \,\vdots\, 10 \iff (\text{С}^2 - \text{С} - 2) \,\vdots\, 10 \iff (\text{С}+1)(\text{С}-2) \,\vdots\, 10.$$

Так как цифра К отлична от С и 1, мы получаем $\text{С} = 2$ и $\text{К} = 6$. Этот вариант нам подходит, поскольку $162 \cdot 621 = 100\,602$.

2) *И* $= 6$ *и цифра С четна.* Тогда $\text{К}+\text{С} \in \{3, 4, 12, 13\}$. По условию старшая цифра p равна И, то есть 6. Поэтому

$$600\,000 \leqslant p \leqslant (\text{И}+1) \cdot (\text{К}+1) \cdot 10\,000 = (\text{К}+1) \cdot 70\,000,$$

откуда $\text{К} \geqslant 8$. Ввиду четности С пара $(\text{К}, \text{С})$ равна $(8, 4)$ или $(9, 4)$. Это нам не подходит, поскольку $684 \cdot 846 = 578\,664$ и $694 \cdot 946 = 656\,524$.

3) *С* $= 5$, *а цифра И нечетна и отлична от 1.* Тогда $\text{И}+\text{К} \in \{4, 5, 13, 14\}$. Так как

$$p < (\text{И}+1) \cdot (\text{К}+1) \cdot 10\,000 \leqslant 900\,000,$$

старшая цифра числа p меньше 9, то есть $\text{И} \leqslant 7$. Случай $\text{И} = 5$ невозможен, поскольку $\text{И} \neq \text{С}$. Если $\text{И} = 3$, то К равно 1 или 2, и число p оказывается пятизначным. Если $\text{И} = 7$, то $\text{К} = 6$ ввиду условия $\text{К} \neq \text{И}$. Поскольку $765 \cdot 657 = 502\,605$, этот случай нам также не подходит. $\square$

5. *На окружности отмечено n точек ($n \geqslant 5$). Петя и Вася по очереди (начиная с Пети) проводят по одной хорде, соединяющей пары этих точек. Любые две проведенные хорды должны пересекаться (возможно, концевыми точками). Проигрывает игрок, не имеющий хода. При каких n Петя выиграет вне зависимости от действий Васи?*

Ответ: при нечетных n.

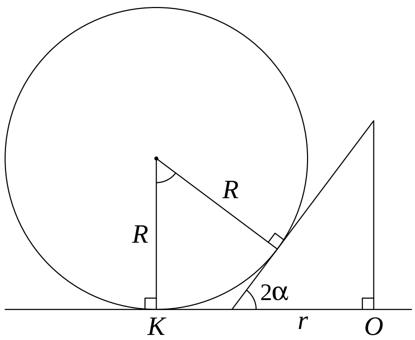
Решение. Докажем вначале следующее утверждение: *если в итоговом множестве хорд можно выделить треугольник, две стороны которого — соседние точки, то при нечетном n победителем* *окажется Петя, а при четном — Вася.* Действительно, обозначим треугольник через ABC, где A и B — соседние точки окружности. Тогда любая из остальных хорд должна пересекать стороны треугольника ABC. Значит, либо она выходит из точки A и пересекает сторону BC, либо выходит из B и пересекает AC. Число таких хорд равно количеству точек, отличных от вершин ABC, то есть $n-3$. С учетом сторон ABC общее число хорд равно n. Поэтому при нечетных n последний ход будет за Петей, а при четных — за Васей.

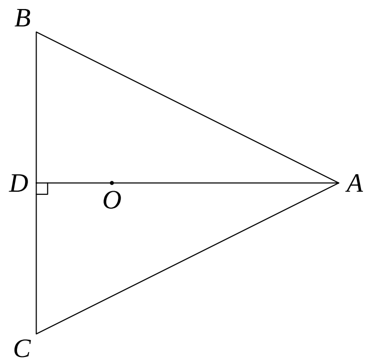
Покажем, что Петя может гарантировать наличие треугольника. Первым ходом он должен соединить две соседние точки (скажем, A и B). Ответным ходом Васи будет хорда, выходящая из A или B (например, AC). Тогда Петя проводит отрезок BC, и треугольник построен.

Покажем, что и Вася всегда может обеспечить наличие требуемого треугольника. Пусть первый ход — хорда AC. В ответ Вася проводит отрезок AB, где B — соседняя с A точка. Если Петя проведет хорду BC — треугольник готов. В противном случае ответом Пети будет отрезок BD, пересекающий AC. Но тогда Вася может сам провести хорду BC, так как она пересекает все три уже построенные хорды. $\square$

6. *На столе находятся три шара и конус (основанием к столу), касаясь друг друга внешним образом. Радиусы шаров равны 5, 4 и 4, а высота конуса относится к радиусу его основания как* $4:3$. *Найдите радиус основания конуса.*

Ответ: $\frac{169}{60}$.





Решение. Пусть O — центр основания конуса, r — его радиус, 2α — угол наклона образующих конуса к столу. По условию $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{4}{3}$, откуда

$$\sin 2\alpha = \frac{4}{5}, \quad \cos 2\alpha = \frac{3}{5}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{1}{2}.$$

Рассмотрим сечение, проходящее через ось симметрии конуса и центр одного из шаров (см. левый рисунок). Пусть K — точка касания шара со столом, R — радиус шара. Тогда

$$OK = R\cdot\operatorname{tg}\alpha + r = \tfrac{1}{2}R + r. \qquad (*)$$

Обозначим через A, B, C точки касания шаров со столом (см. правый рисунок). Из условия касания шаров $BC = 8$ и

$$AB = AC = \sqrt{(5+4)^2-(5-4)^2} = \sqrt{80}.$$

Значит, высота AD треугольника ABC является серединным перпендикуляром к BC. Из $(*)$ вытекает, что точка O равноудалена от B и C, то есть она лежит на AD, и $OA = \frac{5}{2}+r$. Заметим, что

$$BD = 4, \qquad AD = \sqrt{AB^2-BD^2} = 8, \qquad OD = AD - OA = \tfrac{11}{2} - r.$$

Равенство $(*)$ дает $OB = 2 + r$, и по теореме Пифагора

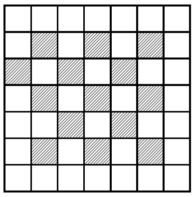
$$OB^2 = OD^2 + BD^2 \Longleftrightarrow (2+r)^2 = \left(\tfrac{11}{2}-r\right)^2 + 16 \Longleftrightarrow r = \tfrac{169}{60}. \quad \square$$

Вариант 2

1. *На клетчатой доске 7×7 отмечено 14 клеток. Назовем пару клеток с общей стороной интересной, если хотя бы одна клетка из пары отмечена. Какое наибольшее количество интересных пар может быть?*

Ответ: 55.

Решение. Назовем *соседними* две клетки с общей стороной. Число интересных пар, содержащих заданную отмеченную клетку, не больше 4, а для граничной клетки — не больше 3. Тогда общее число интересных пар не превосходит $14 \cdot 4 = 56$. При этом если среди отмеченных клеток есть две соседние, то содержащая их интересная пара считается дважды. Заметим, что среди 14 клеток из квадрата 5×5 обязательно есть две соседних. Поэтому среди отмеченных клеток имеется либо граничная, либо две соседних. Таким образом, общее число интересных пар не превосходит 55. Пример разметки с 55 интересными парами приведен ниже. $\square$



2. *Даны положительные числа a, b, c, d. Найдите минимальное значение выражения*

$$A = \left(\frac{a^2+b^2}{cd}\right)^4 + \left(\frac{b^2+c^2}{ad}\right)^4 + \left(\frac{c^2+d^2}{ab}\right)^4 + \left(\frac{d^2+a^2}{bc}\right)^4.$$

Ответ: 64.

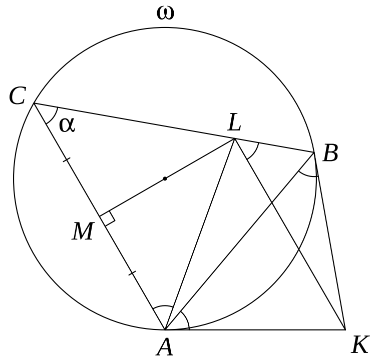
Решение. В силу неравенств Коши для средних

$$A \geqslant 4 \cdot \frac{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+d^2)(d^2+a^2)}{cd \cdot ad \cdot ab \cdot bc} = 64 \cdot \frac{a^2+b^2}{2ab} \cdot \frac{b^2+c^2}{2bc} \cdot \frac{c^2+d^2}{2cd} \cdot \frac{d^2+a^2}{2da} \geqslant 64.$$

Равенство реализуется при $a = b = c = d = 1$. $\square$

3. *Вокруг треугольника ABC описана окружность ω. Касательные к окружности, проведенные в точках A и B, пересекаются в точке K. Точка M — середина стороны AC. Прямая, проходящая через точку K параллельно AC, пересекает сторону BC в точке L. Найдите угол AML.*

Ответ: $90°$.



Решение. Положим $\alpha = \angle ACB$. Угол между касательной AK и хордой AB окружности ω равен вписанному в нее углу, который опирается на AB, откуда $\alpha = \angle BAK = \angle ABK$. Так как

$AC \parallel KL$, мы получаем $\angle BLK = \angle ACB = \angle BAK$. Значит, четырехугольник $ALBK$ — вписанный. Тогда

$$\angle ALC = 180^\circ - \angle ALB = \angle AKB = 180^\circ - 2\alpha \quad \text{и} \quad \angle LCA = \alpha = 180^\circ - \angle ALC - \alpha = \angle LAC.$$

Поэтому треугольник ALC равнобедренный, а его медиана LM является также и высотой. Таким образом, $\angle AML = 90^\circ$. $\square$

4. *На доске написано произведение чисел $\overline{\text{ИКС}}$ и $\overline{\text{КСИ}}$, где буквы соответствуют различным ненулевым десятичным цифрам. Это произведение шестизначное и оканчивается не на ноль. Петя стер с доски все нули и одну цифру С, после чего там осталось ИКС. Что было написано на доске?*

Ответ: $206\,032 = 632 \cdot 326$.

Решение. Положим $p = \overline{\text{ИКС}} \cdot \overline{\text{КСИ}}$. В десятичную запись p входят цифры И, К входят по одному разу, а цифры С и 0 — по два раза. Тогда числа $(\text{И} + \text{К} + \text{С})^2$ и $(\text{И} + \text{К} + 2\text{С})$ дают при делении на 9 одинаковые остатки, откуда $\text{С} \bmod 9 = (\text{И}+\text{К}+\text{С})(\text{И}+\text{К}+\text{С}-1) \bmod 9$. Зависимость между числами n и $n(n-1) \bmod 9$ приведена в таблице:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n(n-1) \bmod 9$	0	2	6	3	2	3	6	2	0

(далее остатки будут циклически повторяться). Таким образом, $\text{С} \in \{2, 3, 6, 9\}$. Младшей цифрой числа p является С, так как p оканчивается не на ноль. С другой стороны, младшая цифра p равна остатку от деления $\text{С} \cdot \text{И}$ на 10. Поэтому $\text{С} \cdot (\text{И} - 1) \,\vdots\, 10$. Поскольку цифра С не делится на 5, возможны два случая.

1) $\text{И} = 1$. Предпоследняя цифра числа p равна остатку от деления $\text{С}^2 + \text{К}$ на 10. Поскольку С^2 не делится на 10, эта цифра отлична от К. Значит, она равна С или 0. Пусть вначале она равна С. Тогда $\text{С}^2 - \text{С} + \text{К} \,\vdots\, 10$. Остатки от деления $\text{С}^2 - \text{С}$ на 10 принимают только значения 0, 2 и 6, откуда К равно 4 или 8. При $\text{К} = 4$

$$(5 + \text{С})^2 - 5 - 2\text{С} \,\vdots\, 9 \iff \text{С}^2 + 8\text{С} - 7 \,\vdots\, 9 \iff \text{С}\,(\text{С} - 1) \bmod 9 = 7,$$

что невозможно (см. таблицу). Если $\text{К} = 8$, то $\text{И} + \text{К} = 9$ и $(\text{С}^2 - 2\text{С}) \,\vdots\, 9$, откуда $\text{С} = 2$ или $\text{С} = 9$. Эти случаи нам не подходят, поскольку $189 \cdot 891 = 168\,399$ и $182 \cdot 821 = 149\,422$.

Пусть теперь предпоследняя цифра числа p равна нулю. Тогда $\text{С}^2 + \text{К}$ делится на 10. Поскольку $\text{С}^2 \bmod 10 \in \{1, 4, 6, 9\}$ и цифры И, К, С различны, пара $(\text{К}, \text{С})$ может быть равна $(6, 2)$ или $(4, 6)$. Так как $162 \cdot 621 = 100\,602$ и $146 \cdot 461 = 67\,306$, эти случаи также не подходят.

2) $\text{И} = 6$ и цифра С четна. Тогда $\text{С} = 2$, поскольку $\text{С} \neq \text{И}$. Из таблицы мы получаем

$$\text{И} + \text{К} + \text{С} \in \{11, 14, 17\} \iff 8 + \text{К} \in \{11, 14, 17\} \iff \text{К} \in \{3, 9\},$$

так как $\text{К} \neq \text{И}$. Если $\text{К} = 9$, то $692 \cdot 926 = 640\,792$, что нам не подходит. В случае $\text{К} = 3$ мы получаем $632 \cdot 326 = 206\,032$, что и дает ответ. $\square$

5. *На окружности отмечено n точек ($n \geqslant 5$). Петя и Вася по очереди (начиная с Пети) проводят по одной хорде, соединяющей пары этих точек, не являющихся соседними. Любые две проведенные хорды могут пересекаться только концевыми точками. Проигрывает игрок, не имеющий хода. При каких n Петя выиграет вне зависимости от действий Васи?*

Ответ: при четных n.

Решение 1. Действия игроков можно описать так: они проводят в n-угольнике диагонали, пересекающиеся разве что концами. Для удобства мы можем считать этот n-угольник правильным. Пусть n четно, то есть $n = 2m$. Победу Пете обеспечит следующая стратегия. Первым ходом он должен провести диагональ, разбивающую n-угольник на два одинаковых $(m+1)$-угольника. Далее любая хорда, проведенная Васей, будет проходить в одном из двух $(m+1)$-угольников. В ответ Петя может провести такую же хорду в другом $(m+1)$-угольнике. Таким образом, у Пети всегда есть ход, и он выиграет.

Пусть n нечетно. Назовем *ключевой* позицию, в которой исходный n-угольник разбит на несколько многоугольников (возможно, один) с нечетным числом вершин. Докажем следующее утверждение: *если Петя делает ход в ключевой позиции, то Вася может ответить так, чтобы вновь возникла ключевая позиция.* Действительно, любой ход Пети — диагональ в одном из многоугольников (скажем, Δ), на которые разбит n-угольник. Эта диагональ разрезает Δ на два многоугольника с четным и нечетным числом вершин. В ответ Вася должен провести хорду, отрезающую треугольник от многоугольника с четным числом сторон. Таким образом, Δ распадется на три многоугольника с нечетным числом вершин, и вновь возникнет ключевая позиция.

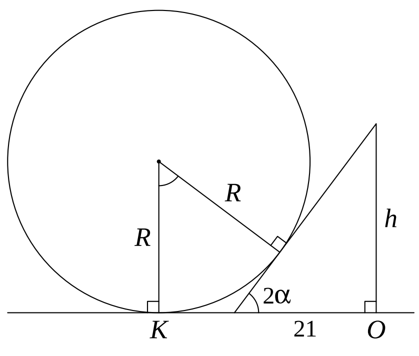
Заметим, что исходная позиция — ключевая. Следуя описанной выше стратегии, Вася всегда может сделать ответный ход, поэтому он выиграет. $\square$

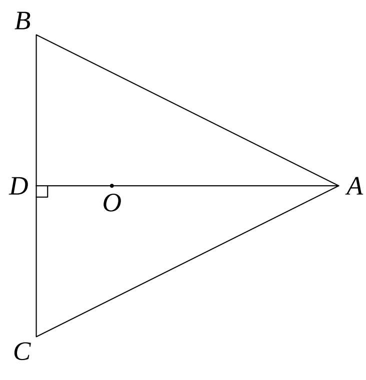
Решение 2. Действия игроков можно описать так: они проводят в n-угольнике диагонали, пересекающиеся разве что концами. Для удобства мы можем считать этот n-угольник правильным. Пусть n четно, то есть $n = 2m$. Победу Пете обеспечит следующая стратегия. Первым ходом он должен провести диагональ, разбивающую n-угольник на два одинаковых $(m+1)$-угольника. Далее любая хорда, проведенная Васей, будет проходить в одном из двух $(m+1)$-угольников. В ответ Петя может провести такую же хорду в другом $(m+1)$-угольнике. Таким образом, у Пети всегда есть ход, и он выиграет.

Пусть n нечетно, то есть $n = 2m + 1$. Докажем по индукции, что при любом m у Васи есть победная стратегия. База индукции очевидна: в треугольнике у Пети нет ходов. Пусть при любом $k < m$ такая стратегия существует для $(2k + 1)$-угольника. Первая хорда, проведенная Петей, разделит исходный многоугольник на два: Δ с четным числом вершин и Δ' с нечетным. Заметим, что при игре только в Δ победу может себе гарантировать первый игрок (так как число вершин в Δ четно), а при игре только в Δ' — второй игрок (по индукционному предположению). Опишем выигрышную стратегию Васи. Первый его ход должен быть в Δ, а затем каждый раз Вася проводит хорду в том же многоугольнике (Δ или Δ'), что перед этим Петя. Покажем, что у Васи всегда найдется ход. Действительно, игра идет параллельно в двух многоугольниках, причем в Δ начинает Вася, а в Δ' — Петя. Поэтому для Δ и Δ' у Васи есть победные стратегии и, следуя им, он всегда сможет сделать очередной ход. $\square$

6. *На столе находятся три шара и конус (основанием к столу), касаясь друг друга внешним образом. Радиусы шаров равны* 20, 40 *и* 40, *а радиус основания конуса равен* 21. *Найдите высоту конуса.*

Ответ: 28.





Решение. Пусть O — центр основания конуса, h — его высота, 2α — угол наклона образующих конуса к столу. Рассмотрим сечение, проходящее через ось симметрии конуса и центр одного из шаров (см. левый рисунок). Пусть K — точка касания шара со столом, R — радиус шара. Тогда

$$OK = R \cdot \operatorname{tg}\alpha + 21. \qquad (*)$$

Обозначим через A, B, C точки касания шаров со столом (см. правый рисунок). Из условия касания шаров $BC = 80$ и

$$AB = AC = \sqrt{(40+20)^2 - (40-20)^2} = 40\sqrt{2}.$$

Значит, высота AD треугольника ABC является серединным перпендикуляром к BC. Из $(*)$ вытекает, что точка O равноудалена от B и C, то есть она лежит на AD, и $OA = 20\operatorname{tg}\alpha + 21$. Заметим, что

$$BD = 40, \qquad AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = 40, \qquad OD = AD - OA = 19 - 20\operatorname{tg}\alpha.$$

Равенство $(*)$ дает $OB = 40\operatorname{tg}\alpha + 21$, и по теореме Пифагора

$$OB^2 = OD^2 + BD^2 \iff \left(40\operatorname{tg}\alpha + 21\right)^2 = \left(19 - 20\operatorname{tg}\alpha\right)^2 + 40^2 \iff 30\operatorname{tg}^2\alpha + 61\operatorname{tg}\alpha - 38 = 0 \iff \operatorname{tg}\alpha = \tfrac{1}{2}.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{4}{3} \quad \text{и} \quad h = 21 \cdot \operatorname{tg}2\alpha = 28. \quad \square$$

Вариант 3

1. *Каждая клетка таблицы 5×6 окрашена в один из трех цветов: синий, красный или жёлтый. При этом в каждой строке таблицы число красных клеток не меньше числа синих клеток и не меньше числа жёлтых клеток, а в каждом столбце таблицы число синих клеток не меньше числа красных клеток и не меньше числа жёлтых клеток. Сколько жёлтых клеток может быть в такой таблице? Приведите пример соответствующей раскраски.*

Ответ: 6.

С	С	С	К	К	К
К	К	К	С	С	С
Ж	Ж	К	К	С	С
С	С	Ж	Ж	К	К
К	К	С	С	Ж	Ж

Решение. Так как в каждой строке красных клеток не меньше, чем синих, их не меньше и во всей таблице. Тогда красных и синих клеток поровну в каждом столбце. Действительно, если в одном из столбцов красных клеток меньше, чем синих, то их будет меньше и во всей таблице, поскольку в остальных столбцах их не больше, чем синих. Кроме того, число синих клеток в каждом столбце не меньше $\frac{5}{3}$, то есть оно по крайней мере 2. Значит, таблица содержит как минимум 12 синих клеток и столько же красных. Поэтому в таблице имеется не более 6 желтых клеток. С другой стороны, в каждом столбце общее число красных и синих клеток четно, поэтому в нем имеется хотя бы одна желтая клетка. Значит, таблица содержит не менее 6 желтых клеток. Пример раскраски с шестью желтыми клетками приведен на рисунке. $\square$

2. *Даны числа $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Найдите максимальное значение выражения*

$$A = \frac{\sqrt{\cos x \cos y}}{\sqrt{\operatorname{ctg} x} + \sqrt{\operatorname{ctg} y}}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Решение. Заметим, что $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leqslant \sqrt{2(a+b)}$ при любых $a, b \geqslant 0$. Применяя неравенство для среднего гармонического и среднего арифметического, мы получим

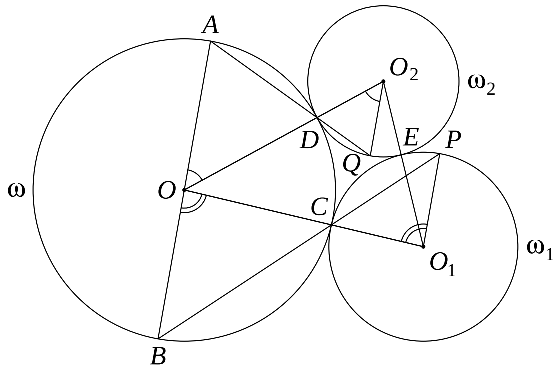
$$A \leqslant \frac{1}{4}\sqrt{\cos x \cos y}\left(\sqrt{\operatorname{tg} x} + \sqrt{\operatorname{tg} y}\right) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{\sin x \cos y} + \sqrt{\cos x \sin y}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{\sin x \cos y + \cos x \sin y} = \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{\sin(x+y)} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Равенство реализуется при $x = y = \frac{\pi}{4}$. $\square$

3. *Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность ω, центр которой лежит на стороне AB. Окружность ω_1 касается внешним образом окружности ω в точке C. Окружность ω_2 касается окружностей ω и ω_1 в точках D и E соответственно. Прямая BC вторично пересекает окружность ω_1 в точке P, а прямая AD вторично пересекает окружность ω_2 в точке Q. Известно, что точки P, Q и E различны. Найдите угол PEQ.*

Ответ: 180°.

Решение 1. Так как $\angle BCO = \angle PCO_1$, равнобедренные треугольники BOC и PO_1C подобны, откуда $\angle BOC = \angle PO_1C$. Аналогично проверяется, что $\angle AOD = \angle QO_2D$. Тогда отрезки O_1P и O_2Q параллельны прямой AB и, значит, друг другу. Поэтому $\angle PO_1E = \angle QO_2E$. Таким образом, равнобедренные треугольники PO_1E и QO_2E подобны, откуда $\angle O_1EP = \angle O_2EQ$. Значит, точка E лежит на отрезке PQ, что и дает ответ. $\square$



Решение 2. Отметим полезное свойство касающихся окружностей: *если секущая UV проходит через точку T касания двух окружностей, то вписанные углы, опирающиеся на высекаемые ей дуги, равны.* Действительно, поскольку вписанный угол равен углу между касательной и секущей, справедливы равенства $\angle UU_1T = \angle UTY = \angle XTV = \angle VV_1T$ (см. левый рисунок ниже).

Обозначим точку пересечения AD и BC через R, а вторую точку пересечения AC с окружностью ω_1 через S. Пусть $\angle OO_1O_2 = 2\alpha$ и $\angle OO_2O_1 = 2\beta$. Из равнобедренности треугольников O_1CE и O_2DE мы получаем, что

$$\angle O_1EC = 90^\circ - \alpha, \quad \angle O_2ED = 90^\circ - \beta \quad \text{и} \quad \angle CED = 180^\circ - \angle O_1EC - \angle O_2ED = \alpha + \beta.$$

С другой стороны, из суммы углов треугольника OO_1O_2 находим, что $\angle COD = 180^\circ - 2\alpha - 2\beta$. Вписанный угол $\angle CAD$ — половина центрального угла $\angle COD$. Тогда

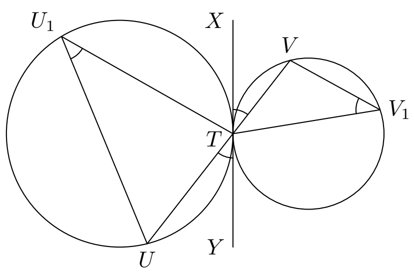
$$\angle CAD = 90^\circ - \alpha - \beta, \quad \angle ACR = \angle ACB = 90^\circ, \quad \text{откуда} \quad \angle CRD = \alpha + \beta.$$

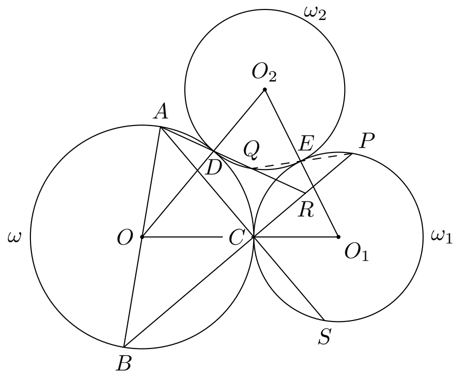
Таким образом, $\angle CRD = \angle CED$. Из вписанности четырехугольника $PECS$ вытекает, что

$$\angle PEC = 180^\circ - \angle PSC = 180^\circ - \angle CAB = 90^\circ + \angle RBA.$$

Кроме того, $\angle DEQ = \angle DBA = 90^\circ - \angle RAB$. Теперь мы можем найти угол PEQ:

$$\angle PEQ = \angle PEC + \angle CED - \angle DEQ = \angle PEC + \angle CRD - \angle DEQ =$$
$$= (90^\circ + \angle RBA) + (180^\circ - \angle RAB - \angle RBA) - (90^\circ - \angle RAB) = 180^\circ. \quad \square$$





4. *На доске написано произведение трехзначных чисел $\overline{КСИ}$ и $\overline{ИСК}$, где буквы соответствуют различным десятичным цифрам. Запись этого произведения состоит из трех пар одинаковых соседних цифр. Что написано на доске?*

Ответ: $22\,44\,55 = 385 \cdot 583$.

Решение. Поскольку задача не меняется при перестановке И и К, мы будем считать И $<$ К. Пусть $\overline{\text{КСИ}} \cdot \overline{\text{ИСК}} = \overline{xxyyzz}$. Очевидно, что правая часть кратна 11. Так как

$$\overline{\text{КСИ}} \bmod 11 = (\text{И} + \text{К} - \text{С}) \bmod 11 = \overline{\text{ИСК}} \bmod 11,$$

числа $\overline{\text{КСИ}}$ и $\overline{\text{ИСК}}$ делятся на 11, а их произведение делится на 121. Поскольку $\overline{xxyyzz} = 11 \cdot \overline{x0y0z}$, мы получаем $x + y + z \,\vdots\, 11$, откуда $x + y + z$ равно 11 или 22. Заметим, что

$$(\text{И} + \text{К} + \text{С})^2 \bmod 9 = \overline{\text{КСИ}} \cdot \overline{\text{ИСК}} \bmod 9 = \overline{xxyyzz} \bmod 9 = 2\,(x + y + z) \bmod 9.$$

Зависимость между числами n и $n^2 \bmod 9$ приведена в таблице:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n^2 \bmod 9$	1	4	0	7	7	0	4	1	0

(далее остатки будут циклически повторяться). Так как $44 \bmod 9 = 8$, случай $x + y + z = 22$ невозможен. Если $x + y + z = 11$, мы получаем $(\text{И} + \text{К} + \text{С})^2 \bmod 9 = 22 \bmod 9 = 4$, и из таблицы $(\text{И} + \text{К} + \text{С}) \bmod 9 \in \{2, 7\}$. Кроме того, $\text{И} + \text{К} - \text{С}$ кратно 11, откуда либо $\text{С} = \text{И} + \text{К}$, либо $\text{С} = \text{И} + \text{К} - 11$. Рассмотрим эти случаи.

1) Пусть $\text{С} = \text{И} + \text{К}$. Тогда $2\text{С} \bmod 9 \in \{2, 7\}$. Если $2\text{С} \bmod 9 = 2$, то $\text{С} = 1$, что невозможно, поскольку $\text{И} + \text{К} \geqslant 2$. Пусть $2\text{С} \bmod 9 = 7$. Тогда $\text{С} = 8$, и пара $(\text{И}, \text{К})$ может принимать значения $(1, 7)$, $(2, 6)$, $(3, 5)$. Так как $781 \cdot 187 = 14\,60\,47$, $682 \cdot 286 = 19\,50\,52$, $583 \cdot 385 = 22\,44\,55$, нам подходит только третий случай.

2) Пусть $\text{С} = \text{И} + \text{К} - 11$. Тогда $\text{С} \leqslant 9 + 8 - 11 = 6$. Так как

$$2\,(\text{С} + 1) \bmod 9 = (2\text{С} + 11) \bmod 9 = (\text{И} + \text{К} + \text{С}) \bmod 9 \in \{2, 7\},$$

мы получим $\text{С} = 9$ или $\text{С} = 7$, что невозможно. $\square$

5. *По краю круглого стола стоят n пустых стаканов ($n \geqslant 3$). Петя и Вася по очереди (начиная с Пети) наливают в них квас. Петя в свой ход наливает квас в выбранный им пустой стакан, у которого оба соседних с ним стакана либо пустые, либо полные. Вася в свой ход наливает квас в выбранный им пустой стакан, у которого один соседний с ним стакан пустой, другой — полный. Проигрывает игрок, не имеющий хода. При каких n Петя выиграет вне зависимости от действий Васи?*

Ответ: $n \neq 4$.

Решение. Очевидно, что $n = 3$ нам подходит. Случай $n = 4$ не подходит. Действительно, первым ответным ходом Вася заполняет стакан рядом с тем, что налил Петя, после чего у Пети нет ходов.

Пусть $n > 4$. Назовем *звеном* блок из нескольких последовательных заполненных стаканов, а набор звеньев, разделенных одним пустым стаканом, — *цепочкой*. Сделаем два наблюдения.

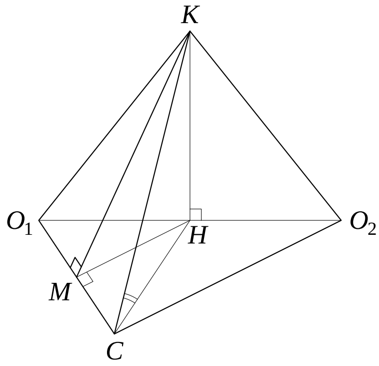
1) Если перед ходом Васи заполненные стаканы образовывали цепочку, то и после его хода цепочка сохранится с тем же числом звеньев.

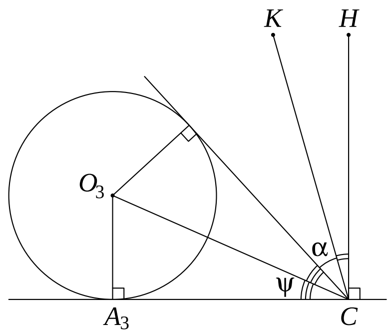
2) Если Петя наливает квас стакан, стоящий через один от крайнего звена цепочки, то снова получается цепочка, у которой становится на одно звено больше.

Победная стратегия Пети состоит в следующем. Первый ход он делает произвольно, получая однозвенную цепочку. Если у Васи нет хода — он проиграл, иначе после хода Васи в силу 1) сохраняется цепочка. Тогда Петя заполняет стакан, стоящий через один от крайнего звена цепочки, если это возможно. Допустим, что после $2k$ ходов так действовать уже нельзя. С учетом 2) это значит, что образовалась цепочка, у которой зазор между крайними звеньями не превосходит двух стаканов. К этому моменту имеется $2k$ полных стаканов и не более $k+1$ пустых. Тогда $3k+1 \geqslant n > 4$, откуда $k \geqslant 2$. Внутри цепочки есть $k-1 \geqslant 1$ пустых стаканов, и в один из них Петя может налить квас. Если зазор между крайними звеньями цепочки содержит всего один стакан, то у Васи нет хода и он проиграл. Если таких стаканов два, то в один из них Вася сможет налить квас, но другой окажется окруженным полными стаканами. Таким образом, у Пети появится еще один ход, а у Васи их уже нет. $\square$

6. *На столе лежат шары радиусов 2, 2, 1, касаясь друг друга внешним образом. Вершина конуса находится посередине между точками касания одинаковых шаров со столом, а сам конус касается внешним образом всех шаров. Найдите угол при вершине конуса. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении.)*

Ответ: $2\operatorname{arcctg} 8$.





Решение. Пусть O_1, O_2, O_3 — центры шаров, A_1, A_2, A_3 — точки касания шаров со столом, C — вершина конуса, 2α — угол при его вершине, $\varphi = \angle O_1CA_1$, $\psi = \angle O_3CA_3$. Из условия касания шаров

$$CA_1 = 2 \quad \text{и} \quad A_1A_3 = A_2A_3 = \sqrt{(2+1)^2-(2-1)^2} = \sqrt{8}.$$

Тогда

$$CA_3 = \sqrt{A_1A_3{}^2 - CA_1{}^2} = 2 \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}\psi = \frac{O_3A_3}{CA_3} = \frac{1}{2}.$$

Кроме того, $O_1A_1 = 2 = CA_1$, откуда $\varphi = 45^\circ$.

Выберем на оси симметрии конуса точку K так, что ее проекция H на плоскость CO_1O_2 попадает на отрезок O_1O_2 (см. левый рисунок). Образующие, по которым конус касается одинаковых шаров, лежат в плоскостях KCO_1 и KCO_2, откуда

$$\angle KCO_1 = \angle KCO_2 = \varphi + \alpha = 45^\circ + \alpha.$$

Кроме того, $CO_1 = 2\sqrt{2} = CO_2$. Отметим несколько простых фактов.

1) *H — точка касания равных шаров.* Действительно, треугольники KCO_1 и KCO_2 равны, откуда $KO_1 = KO_2$. Так как $KH \perp O_1O_2$, мы получим $HO_1 = HO_2$.

2) *Плоскость KCH перпендикулярна O_1O_2.* Действительно, треугольник O_1CO_2 равнобедренный, а H — середина O_1O_2, откуда $CH \perp O_1O_2$. Очевидно также, что $KH \perp O_1O_2$.

3) *Если KM — перпендикуляр, опущенный из точки K на CO_1, то $MH \perp CO_1$.* Это вытекает из обратной теоремы о трех перпендикулярах.

Пусть KM — перпендикуляр, опущенный из точки K на CO_1. Из 1) и 2) вытекает, что прямая CH касается равных шаров, поэтому $\angle O_1CH = \angle O_1CA_1 = 45^\circ$. Тогда в силу 3)

$$\cos\angle HCK = \frac{CH}{CK} = \frac{CM}{\cos\angle O_1CH} : \frac{CM}{\cos\angle KCO_1} = \frac{\cos\angle KCO_1}{\cos\angle O_1CH} = \frac{\cos(45^\circ+\alpha)}{\cos 45^\circ} = \cos\alpha - \sin\alpha.$$

С другой стороны, в силу 1) и 2) плоскость HCK состоит из точек, равноудаленных от O_1 и O_2. Значит, HCK содержит точку O_3. Тогда (см. правый рисунок)

$$\cos\alpha - \sin\alpha = \cos\angle HCK = \cos(90^\circ - 2\psi - \alpha) = \sin(2\psi + \alpha) = \sin 2\psi \cos\alpha + \cos 2\psi \sin\alpha,$$

откуда

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1 - \sin 2\psi}{1 + \cos 2\psi} = \frac{(\sin\psi - \cos\psi)^2}{2\cos^2\psi} = \frac{(\operatorname{tg}\psi - 1)^2}{2} = \frac{1}{8}. \quad \square$$

Вариант 4

1. *Каждая клетка таблицы 5×5 окрашена в один из трех цветов: синий, красный или жёлтый. При этом в каждой строке таблицы число жёлтых клеток не меньше числа красных клеток и не меньше числа синих клеток, а в каждом столбце таблицы число красных клеток не меньше числа жёлтых клеток и не меньше числа синих клеток. Сколько синих клеток может быть в такой таблице? Приведите пример соответствующей раскраски.*

Ответ: 5.

С	К	К	Ж	Ж
Ж	С	Ж	К	К
К	К	С	Ж	Ж
К	Ж	Ж	С	К
Ж	Ж	К	К	С

Решение. Так как в каждой строке желтых клеток не меньше, чем красных, их не меньше и во всей таблице. Тогда желтых и красных клеток поровну в каждом столбце. Действительно, если в одном из столбцов желтых клеток меньше, чем красных, то их будет меньше и во всей таблице, поскольку в остальных столбцах их не больше, чем красных. Кроме того, число красных клеток в каждом столбце не меньше $\frac{5}{3}$, то есть оно по крайней мере 2. Значит, таблица содержит как минимум 10 красных клеток и столько же желтых. Поэтому в таблице имеется не более 5 синих клеток. С другой стороны, в каждом столбце общее число желтых и красных клеток четно, поэтому в нем имеется хотя бы одна синяя клетка. Значит, таблица содержит не менее 5 синих клеток. Пример раскраски с пятью синими клетками приведен на рисунке. $\square$

2. *Даны числа $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Найдите максимальное значение выражения*

$$A = \frac{\sqrt[4]{\sin x \sin y}}{\sqrt[4]{\operatorname{tg} x} + \sqrt[4]{\operatorname{tg} y}}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt[4]{8}}{4}$.

Решение. Заметим, что $\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b} \leqslant \sqrt[4]{8(a+b)}$ при любых $a, b \geqslant 0$, поскольку

$$\left(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}\right)^4 \leqslant \left(2\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\right)^2 \leqslant 8\,(a+b)^4.$$

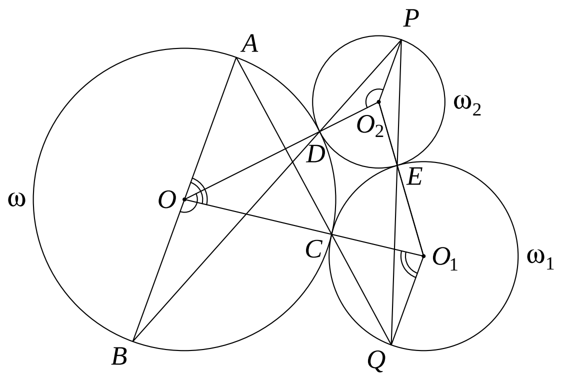
Применяя неравенство для среднего гармонического и среднего арифметического, мы получим

$$A \leqslant \frac{1}{4}\sqrt[4]{\sin x \sin y}\left(\sqrt[4]{\operatorname{ctg} x} + \sqrt[4]{\operatorname{ctg} y}\right) = \frac{1}{4}\left(\sqrt[4]{\sin x \cos y} + \sqrt[4]{\cos x \sin y}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\sqrt[4]{8}}{4}\sqrt[4]{\sin x \cos y + \cos x \sin y} = \frac{\sqrt[4]{8}}{4}\sqrt[4]{\sin(x+y)} \leqslant \frac{\sqrt[4]{8}}{4}.$$

Равенство реализуется при $x = y = \frac{\pi}{4}$. $\square$

3. *Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность ω, центр которой лежит на стороне AB. Окружность ω_1 касается внешним образом окружности ω в точке C. Окружность ω_2 касается окружностей ω и ω_1 в точках D и E соответственно. Прямая BD вторично пересекает окружность ω_2 в точке P, а прямая AC вторично пересекает окружность ω_1 в точке Q. Найдите угол PEQ.*

Ответ: 180°.



Решение 1. Так как $\angle ACO = \angle QCO_1$, равнобедренные треугольники AOC и QO_1C подобны, откуда $\angle AOC = \angle QO_1C$. Аналогично проверяется, что $\angle BOD = \angle PO_2D$. Тогда отрезки O_1Q и O_2P параллельны прямой AB и, значит, друг другу. Поэтому $\angle O_1QE = \angle O_2PE$, что эквивалентно $\angle O_1EQ = \angle O_2EP$. Значит, точка E лежит на отрезке PQ, откуда $\angle PEQ = 180^\circ$. $\square$

Решение 2. Отметим полезное свойство касающихся окружностей: *если секущая UV проходит через точку T касания двух окружностей, то вписанные углы, опирающиеся на высекаемые ей дуги, равны.* Действительно, поскольку вписанный угол равен углу между касательной и секущей, справедливы равенства $\angle UU_1T = \angle UTY = \angle XTV = \angle VV_1T$ (см. левый рисунок ниже).

Обозначим точку пересечения AD и BC через R. Пусть $\angle OO_1O_2 = 2\alpha$ и $\angle OO_2O_1 = 2\beta$. Тогда из равнобедренности треугольников O_1CE и O_2DE мы получаем, что

$$\angle O_1EC = 90^\circ - \alpha, \quad \angle O_2ED = 90^\circ - \beta \quad \text{и} \quad \angle CED = 180^\circ - \angle O_1EC - \angle O_2ED = \alpha + \beta.$$

С другой стороны, из суммы углов треугольника OO_1O_2 находим, что $\angle COD = 180^\circ - 2\alpha - 2\beta$. Вписанный угол $\angle CAD$ — половина центрального угла $\angle COD$. Тогда

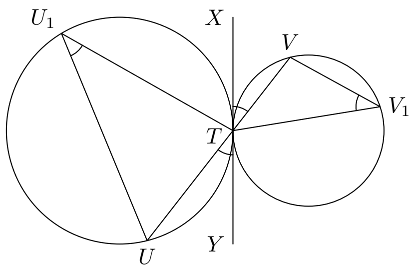
$$\angle DAC = 90^\circ - \alpha - \beta, \quad \angle ACR = \angle ACB = 90^\circ, \quad \text{откуда} \quad \angle DRC = \alpha + \beta.$$

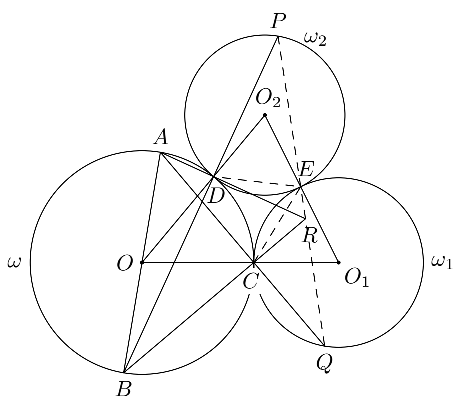
Таким образом, $\angle DRC = \angle DEC$. В силу доказанного выше утверждения

$$\angle PED = \angle BAD = \angle RAB \quad \text{и} \quad \angle CEQ = \angle ABC = \angle RBA.$$

Теперь мы можем найти угол PEQ:

$$\angle PEQ = \angle PED + \angle DEC + \angle CEQ = \angle PED + \angle DRC + \angle CEQ =$$
$$= \angle PED + 180^\circ - \angle RAB - \angle RBA + \angle CEQ = 180^\circ. \quad \square$$





4. *Имеются четырехзначные числа m и n, получаемые друг из друга записью цифр в обратном порядке. Известно, что число mn делится на 100, а его десятичная запись состоит из четырех пар одинаковых соседних цифр. Найдите m и n.*

Ответ: $6325 \cdot 5236 = 33\,11\,77\,00$.

Решение. Запишем
$$m = \overline{abcd}, \quad n = \overline{dcba}, \quad mn = \overline{xxyyzz00}.$$
Ясно, что одно из чисел m и n оканчивается на 5 (пусть это будет m). Тогда $d = 5$, цифра a четна. Очевидно, что mn кратно 11. Так как
$$m \bmod 11 = (b + d - a - c) \bmod 11 = (-n) \bmod 11,$$
числа m и n делятся на 11, а их произведение делится на 121. Поскольку $\overline{xxyyzz} = 11 \cdot \overline{x0y0z}$, мы получаем $x + y + z \,\vdots\, 11$, откуда $x + y + z$ равно 11 или 22. Заметим, что
$$(a + b + c + d)^2 \bmod 9 = mn \bmod 9 = \overline{xxyyzz00} \bmod 9 = 2\,(x + y + z) \bmod 9.$$
Зависимость между числами p и $p^2 \bmod 9$ приведена в таблице:

p	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$p^2 \bmod 9$	1	4	0	7	7	0	4	1	0

(далее остатки будут циклически повторяться). Так как $44 \bmod 9 = 8$, случай $x + y + z = 22$ невозможен. Если $x + y + z = 11$, с учетом $d = 5$ мы получаем $(a + b + c + 5)^2 \bmod 9 = 22 \bmod 9 = 4$. Кроме того, $b + 5 - a - c$ кратно 11. Рассмотрим два случая.

1) *Пусть* $a + c = b + 5 \pm 11$. Тогда
$$4 = (a + b + c + 5)^2 \bmod 9 = \bigl(2(b + 5) \pm 11\bigr)^2 \bmod 9 = 4(b + 5 \pm 1)^2 \bmod 9 \Longleftrightarrow (b + 5 \pm 1)^2 = 1 \bmod 9,$$
и по таблице $b + 5 \pm 1$ равно 8 или 10. В случае плюса $a + c$ будет равно 18 или 20, что невозможно. При минусе $a + c$ окажется неположительным, чего ввиду $a > 0$ также быть не может.

2) *Пусть* $a + c = b + 5$. Тогда по таблице $b + 5$ равно 8 или 10, то есть b равно 3 или 5. Вычисляя предпоследнюю цифру mn, мы получим
$$0 = \bigl(5b + ac + \tfrac{a}{2}\bigr) \bmod 10 = \bigl(5 + ac + \tfrac{a}{2}\bigr) \bmod 10. \qquad (*)$$
Так как a четно, допустимыми парами (a, c) при $b = 3$ будут $(2, 6)$, $(4, 4)$, $(6, 2)$, $(8, 0)$, а при $b = 5$ — $(2, 8)$, $(4, 6)$, $(6, 4)$, $(8, 2)$. Подставляя эти пары в правую часть $(*)$, мы получим
$$8,\ 3,\ 0,\ 9,\ 2,\ 1,\ 2,\ 5.$$
Значит, условию $(*)$ удовлетворяет только $m = 6325$. Поскольку $6325 \cdot 5263 = 33\,11\,77\,00$, это число и дает ответ. $\square$

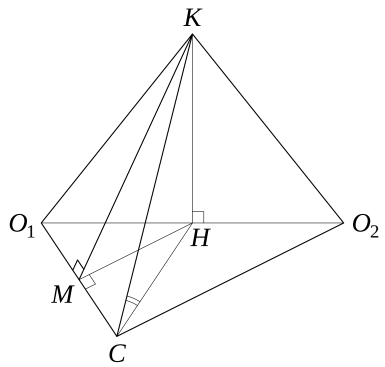
5. *По краю круглого стола стоит n пустых стаканов ($n \geqslant 3$). Петя и Вася по очереди (начиная с Пети) наливают в них напитки: Петя — квас, Вася — морс. За один ход игрок может заполнить один пустой стакан на свой выбор так, чтобы после его хода не образовалось двух соседних стаканов с одинаковым напитком. Если в результате действий игроков заполняются все стаканы, то игра заканчивается вничью. В противном случае проигрывает игрок, не имеющий хода. При каких n Петя выиграет вне зависимости от действий Васи?*

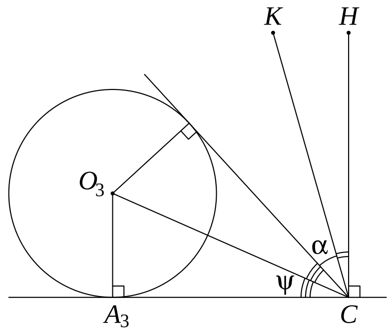
Ответ: ни при каких.

Решение. Стратегия Васи заключается в следующем: на каждом шаге он должен заполнять стакан, следующий по часовой стрелке за тем, что предыдущим ходом наполнил Петя. Покажем, что это всегда можно сделать. Воспользуемся индукцией по числу ходов Пети. Так как $n \geqslant 3$, база индукции очевидна. Допустим, что для k шагов эта стратегия проходит. Перед $(k+1)$-м ходом Пети стаканы с квасом и морсом образуют соседние пары: по часовой стрелке морсу предшествует квас. Пусть Петя налил квас в очередной стакан. По условию в следующем стакане не может быть квас. Не может быть там и морс, так как морсу всегда предшествует стакан с квасом, и Петя заполнил бы его повторно. Значит, следующий стакан пуст. Наконец, в стакане, находящемся через один от налитого Петей, морса нет, поскольку предшествующий морсу стакан обязательно заполнен. Таким образом, Вася может сделать следующий ход. $\square$

6. *На столе лежат шары радиусов 2, 2, 5, касаясь друг друга внешним образом. Вершина конуса находится посередине между точками касания одинаковых шаров со столом, а сам конус касается внешним образом всех шаров. Найдите угол при вершине конуса. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении.)*

Ответ: $2\operatorname{arcctg} 72$.





Решение. Пусть O_1, O_2, O_3 — центры шаров, A_1, A_2, A_3 — точки касания шаров со столом, C — вершина конуса, 2α — угол при его вершине, $\varphi = \angle O_1CA_1$, $\psi = \angle O_3CA_3$. Из условия касания шаров

$$CA_1 = 2 \quad \text{и} \quad A_1A_3 = A_2A_3 = \sqrt{(5+2)^2 - (5-2)^2} = \sqrt{40}.$$

Тогда

$$CA_3 = \sqrt{A_1A_3{}^2 - CA_1{}^2} = 6 \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}\psi = \frac{O_3A_3}{CA_3} = \frac{5}{6}.$$

Кроме того, $O_1A_1 = 2 = CA_1$, откуда $\varphi = 45^\circ$.

Выберем на оси симметрии конуса точку K так, что ее проекция H на плоскость CO_1O_2 попадает на отрезок O_1O_2 (см. левый рисунок). Образующие, по которым конус касается одинаковых шаров, лежат в плоскостях KCO_1 и KCO_2, откуда

$$\angle KCO_1 = \angle KCO_2 = \varphi + \alpha = 45^\circ + \alpha.$$

Кроме того, $CO_1 = 2\sqrt{2} = CO_2$. Отметим несколько простых фактов.

1) *H — точка касания равных шаров.* Действительно, треугольники KCO_1 и KCO_2 равны, откуда $KO_1 = KO_2$. Так как $KH \perp O_1O_2$, мы получим $HO_1 = HO_2$.

2) *Плоскость KCH перпендикулярна O_1O_2.* Действительно, треугольник O_1CO_2 равнобедренный, а H — середина O_1O_2, откуда $CH \perp O_1O_2$. Очевидно также, что $KH \perp O_1O_2$.

3) *Если KM — перпендикуляр, опущенный из точки K на CO_1, то $MH \perp CO_1$.* Это вытекает из обратной теоремы о трех перпендикулярах.

Пусть KM — перпендикуляр, опущенный из точки K на CO_1. Из 1) и 2) вытекает, что прямая CH касается равных шаров, поэтому $\angle O_1CH = \angle O_1CA_1 = 45^\circ$. Тогда в силу 3)

$$\cos\angle HCK = \frac{CH}{CK} = \frac{CM}{\cos\angle O_1CH} : \frac{CM}{\cos\angle KCO_1} = \frac{\cos\angle KCO_1}{\cos\angle O_1CH} = \frac{\cos(45^\circ+\alpha)}{\cos 45^\circ} = \cos\alpha - \sin\alpha.$$

С другой стороны, в силу 1) и 2) плоскость HCK состоит из точек, равноудаленных от O_1 и O_2. Значит, HCK содержит точку O_3. Тогда (см. правый рисунок)

$$\cos\alpha - \sin\alpha = \cos\angle HCK = \cos(90^\circ - 2\psi - \alpha) = \sin(2\psi+\alpha) = \sin 2\psi\cos\alpha + \cos 2\psi\sin\alpha,$$

откуда

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1-\sin 2\psi}{1+\cos 2\psi} = \frac{(\sin\psi - \cos\psi)^2}{2\cos^2\psi} = \frac{(\operatorname{tg}\psi - 1)^2}{2} = \frac{1}{72}. \quad \square$$

Вариант 5

1. *В клетках таблицы 5×5 расставлены натуральные числа так, что все десять сумм этих чисел в строках и столбцах таблицы различны. Найдите наименьшее возможное значение суммы чисел во всей таблице.*

Ответ: 48.

Решение. Так как элементы таблицы — натуральные числа, суммы по строкам и по столбцам таблицы не меньше 5. Поскольку все эти суммы различны, минимально возможный набор их значений равен $\{5, 6, \ldots, 13, 14\}$. Складывая суммы по строкам и столбцам таблицы, мы получим удвоенную сумму S всех чисел таблицы, так как каждое из них учитывается дважды — в строке и в столбце. Тогда

$$S \geqslant \tfrac{1}{2}(5+6+\ldots+13+14) = \tfrac{1}{2}\cdot 95 = 47\tfrac{1}{2}\,, \quad \text{то есть} \quad S \geqslant 48.$$

Пример для $S = 48$ приведен ниже. $\square$

1	1	1	1	1
1	1	1	2	2
1	1	2	3	3
1	2	2	3	3
2	3	3	3	4

2. *Даны положительные числа a, b, c, d. Найдите минимальное значение выражения*

$$A = \left(a+\frac{1}{b}\right)^3 + \left(b+\frac{1}{c}\right)^3 + \left(c+\frac{1}{d}\right)^3 + \left(d+\frac{1}{a}\right)^3.$$

Ответ: 32.

Решение 1. Воспользуемся неравенством Коши для средних вначале в каждой скобке, а затем для всей суммы. Мы получим

$$A \geqslant \left(2\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^3 + \left(2\sqrt{\frac{b}{c}}\right)^3 + \left(2\sqrt{\frac{c}{d}}\right)^3 + \left(2\sqrt{\frac{d}{a}}\right)^3 \geqslant 32\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{d}{a}\right)^{3/8} = 32.$$

Равенство реализуется при $a = b = c = d = 1$. $\square$

Решение 2. Воспользуемся неравенством $x^3 + y^3 \geqslant \frac{1}{4}(x+y)^3$, верным для $x, y > 0$. Применяя его трижды, мы получим

$$x^3+y^3+z^3+w^3 \geqslant \tfrac{1}{4}\left((x+y)^3+(z+w)^3\right) \geqslant \tfrac{1}{16}(x+y+z+w)^3 \quad \text{при} \quad x, y, z, w > 0.$$

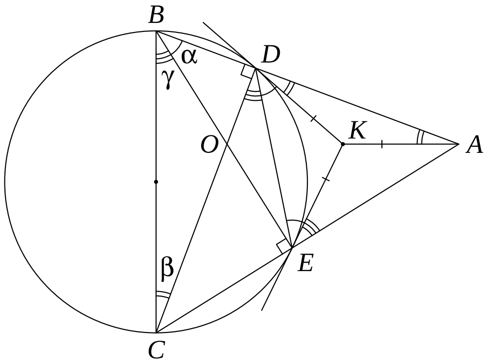
Тогда в силу неравенства Коши для средних

$$A \geqslant \frac{1}{16}\left(a+\frac{1}{b}+b+\frac{1}{c}+c+\frac{1}{d}+d+\frac{1}{a}\right)^3 \geqslant \frac{1}{16}\left(8\sqrt[8]{a\cdot\frac{1}{b}\cdot b\cdot\frac{1}{c}\cdot c\cdot\frac{1}{d}\cdot d\cdot\frac{1}{a}}\right)^3 = \frac{8^3}{16} = 32.$$

Равенство реализуется при $a = b = c = d = 1$. $\square$

3. *Дан остроугольный треугольник ABC. Окружность с диаметром BC пересекает стороны AB и AC в точках D и E соответственно. Касательные, проведенные к окружности в точках D и E, пересекаются в точке K. Найдите угол между прямыми AK и BC.*

Ответ: 90°.



Решение 1. Пусть $\alpha = \angle DBE$, $\beta = \angle BCD$, $\gamma = \angle CBE$, O — точка пересечения отрезков CD и BE. Угол между касательной DK и хордой DE равен вписанному углу, который опирается на DE, откуда

$$\angle DEK = \angle EDK = \alpha.$$

Кроме того, $\angle CDE = \gamma$. В силу вписанности четырехугольника $BDEC$

$$\angle AEK = \angle AED - \alpha = \angle CBD - \alpha = \gamma \quad \text{и, аналогично} \quad \angle ADK = \beta.$$

Так как $\alpha + \beta + \gamma = \angle ADC = 90^\circ$, мы получим

$$\angle DAE = 180^\circ - 2\alpha - \beta - \gamma = 90^\circ - \alpha = \tfrac{1}{2}\,(180^\circ - 2\alpha) = \tfrac{1}{2}\,\angle DKE.$$

Заметим, что около четырехугольника $ADOE$ можно описать окружность ω. Тогда угол DAE вписан в ω, а точка K лежит на серединном перпендикуляре к хорде BE, то есть на диаметре ω. Поэтому K — центр ω, откуда

$$\angle DAK = \angle ADK = \beta = 90^\circ - \alpha - \gamma = 90^\circ - \angle CBD.$$

Таким образом, $AK \perp BC$. $\square$

Решение 2. Положим

$$\alpha = \angle DBE,\ \ \beta = \angle BCD,\ \ \gamma = \angle CBE,\ \ \varphi = \angle DAK,\ \ \psi = \angle EAK.$$

Угол между касательной DK и хордой DE равен вписанному углу, который опирается на DE, откуда

$$\angle DEK = \angle EDK = \alpha.$$

Кроме того, $\angle CDE = \gamma$. В силу вписанности четырехугольника $BDEC$

$$\angle AEK = \angle AED - \alpha = \angle CBD - \alpha = \gamma \quad \text{и, аналогично} \quad \angle ADK = \beta.$$

Так как $\alpha + \beta + \gamma = \angle ADC = 90^\circ$, мы получим

$$\gamma = 90^\circ - \alpha - \beta, \quad \psi = 180^\circ - 2\alpha - \beta - \gamma - \varphi = 90^\circ - \alpha - \varphi.$$

Теорема синусов для треугольников DAK и EAK дает

$$\frac{AK}{\sin\beta} = \frac{DK}{\sin\varphi}, \qquad \frac{AK}{\sin\gamma} = \frac{EK}{\sin\psi}.$$

Так как $DK = EK$, из этих равенств можно исключить стороны. Мы получим

$$\sin\gamma\sin\varphi = \sin\beta\sin\psi \iff \cos(\alpha+\beta)\sin\varphi = \sin\beta\cos(\alpha+\varphi) \iff$$
$$\iff \sin(\alpha+\beta+\varphi)+\sin(\varphi-\alpha-\beta) = \sin(\alpha+\beta+\varphi)+\sin(\beta-\alpha-\varphi) \iff 2\sin(\varphi-\beta)\cos\alpha = 0.$$

Тогда

$$\angle DAK = \varphi = \beta = 90^\circ - \alpha - \gamma = 90^\circ - \angle CBD,$$

откуда $AK \perp BC$. $\square$

4. *На доске написано произведение чисел $\overline{ИКС}$ и $\overline{КИС}$, где буквы соответствуют различным ненулевым десятичным цифрам. Средними цифрами этого произведения являются И, К, С и 0, записанные в некотором порядке, а крайние цифры равны между собой и отличны от средних. Что написано на доске?*

   Ответ: $169\,201 = 269 \cdot 629$ или $193\,501 = 359 \cdot 539$.

   Решение. Так как задача не меняется при перестановке И и К, мы можем считать, что И $<$ К. Пусть $p = \overline{ИКС} \cdot \overline{КИС}$, Ц — крайние цифры p. Числа $(И + К + С)^2$ и $(И + К + С + 2Ц)$ дают при делении на 9 одинаковые остатки, откуда $Ц \bmod 9 = \frac{(И+К+С)(И+К+С-1)}{2} \bmod 9$. Зависимость между числами n и $\frac{n(n-1)}{2} \bmod 9$ приведена в таблице:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\frac{n(n-1)}{2} \bmod 9$	0	1	3	6	1	6	3	1	0

(далее остатки будут циклически повторяться). Таким образом, Ц $\in \{1, 3, 6, 9\}$. Так как Ц является младшей цифрой числа p, она равна остатку от деления С^2 на 10, который всегда отличен от 3. Кроме того, Ц является также старшей цифрой p и $p < (И + 1) \cdot (К + 1) \cdot 10\,000 \leqslant 900\,000$, откуда Ц < 9. Заметим, что

$$Ц \geqslant \left[\frac{И \cdot К}{10}\right] \quad и \quad Ц \leqslant \frac{(И+1)(К+1)}{10} \leqslant \frac{И \cdot К + 18}{10}. \qquad (*)$$

Рассмотрим два случая.

1) Ц $= 1$. Так как Ц $=$ С$^2 \bmod 10$ и Ц $\neq$ С, цифра С равна 9. Из таблицы мы находим, что И $+$ К $+ 9 \in \{14, 17, 20, 23\}$, то есть И $+$ К $\in \{5, 8, 11, 14\}$. Первое из неравенств $(*)$ дает И $\cdot$ К $\leqslant 19$. Цифры И и К отличны от С, то есть не равны 9. Если И $+$ К $\geqslant 11$, то И $\cdot$ К $\geqslant 3 \cdot 8 > 19$, что невозможно. В случае И $+$ К $= 8$ пара (И, К) равна $(2, 6)$ или $(3, 5)$. Так как $269 \cdot 629 = 169\,201$ и $359 \cdot 539 = 193\,501$, оба варианта нам подходят. Если И $+$ К $= 5$, то (И, К) $= (2, 3)$. Этот случай не годится, поскольку число p будет пятизначным.

2) Ц $= 6$. Так как Ц $=$ С$^2 \bmod 10$ и Ц $\neq$ С, цифра С равна 4. Из таблицы мы находим, что И $+$ К $+ 4 \in \{13, 15\}$, то есть И $+$ К $\in \{9, 11\}$. Если И $+$ К $= 9$, то И $\cdot$ К $\leqslant 20$, и второе неравенство в $(*)$ дает Ц $\leqslant 3$, что невозможно. Пусть И $+$ К $= 11$. Так как И и К отличны от С и Ц, для пары (И, К) возможны только значения $(2, 9)$ или $(3, 8)$. Они оба не подходят, поскольку $294 \cdot 924 = 271\,656$ и $384 \cdot 834 = 320\,256$. $\square$

5. *По краю круглого стола стоят $2n$ пустых стаканов ($n \geqslant 2$). Петя и Вася по очереди (начиная с Пети) наливают в пустые стаканы апельсиновый и яблочный сок. За один ход каждый игрок выбирает два пустых стакана и наливает в один из них апельсиновый сок, а в другой — яблочный. Игра заканчивается, когда все стаканы заполнены. Петя хочет добиться того, чтобы оказалось три стакана подряд с одинаковым напитком. При каких n он может добиться своей цели вне зависимости от действий Васи?*

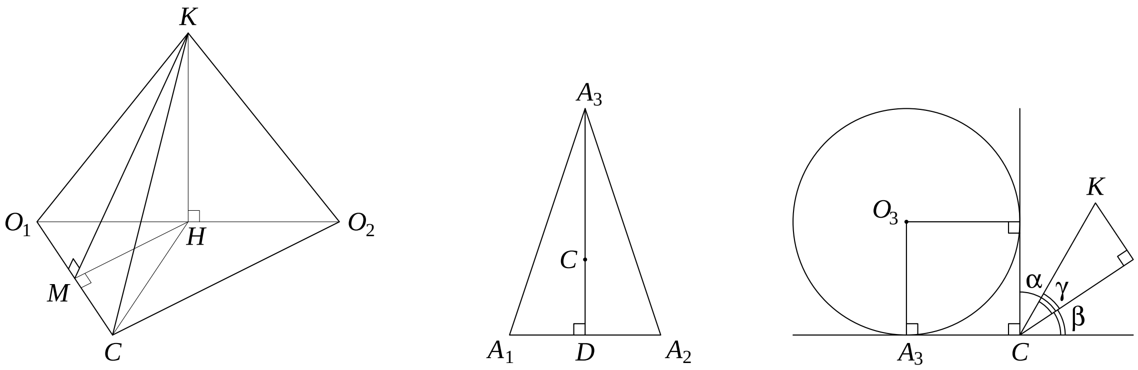
   Ответ: ни при каких.

Решение. Разобьем весь набор стаканов на пары соседних. Чтобы нарушить планы Пети, Вася должен придерживаться следующей стратегии. Если Петя заполняет два стакана из одной пары, то Вася — два стакана из другой пары. Пусть Петя заполняет стаканы из двух разных пар: из первой — апельсиновым соком, из второй — яблочным. Тогда Вася заполняет два других стакана из этих же пар: из первой — яблочным соком, из второй — апельсиновым.

В результате таких действий Васи на каждом шаге если оба стаканы одной пары заполнены, то разными напитками. Заметим, что три последовательных заполненных стакана обязательно содержат целую пару. Поэтому одинаковых напитков в них быть не может. □

6. *На столе лежат шары радиусов 2, 2, 1, касаясь друг друга внешним образом. Вершина конуса C находится на столе, а сам конус касается внешним образом всех шаров. Точка C равноудалена от центров двух равных шаров, а третьего шара конус касается образующей, перпендикулярной столу. Найдите угол при вершине конуса. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении.)*

Ответ: $2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}-2}{3}$.



Решение. Пусть O_1, O_2, O_3 — центры шаров, A_1, A_2, A_3 — точки касания шаров со столом, 2α — угол при вершине конуса, $\varphi = \angle O_1CA_1$. Прямая, проходящая через C перпендикулярно столу, касается шара с центром O_3, откуда $\angle A_3CO_3 = 45^\circ$ и $A_3C = 1$. Пусть A_3D — высота треугольника $A_1A_2A_3$ (см. средний рисунок). Из условия касания шаров

$$A_1A_3 = A_2A_3 = \sqrt{(2+1)^2-(2-1)^2} = \sqrt{8}, \quad A_1D = 2,$$

откуда

$$A_3D = \sqrt{A_1A_3{}^2 - A_1D^2} = 2, \quad \text{и} \quad CD = A_3D - A_3C = 1.$$

Так как $A_1C = 2\operatorname{ctg}\varphi$, из теоремы Пифагора мы получим

$$A_1C^2 = A_1D^2 + CD^2 \Longleftrightarrow 4\operatorname{ctg}^2\varphi = 5 \Longleftrightarrow \operatorname{ctg}\varphi = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Выберем на оси симметрии конуса точку K так, что ее проекция H на плоскость CO_1O_2 попадает на отрезок O_1O_2 (см. левый рисунок). Положим $\gamma = \angle HCK$, β — угол между CH и столом. Образующие, по которым конус касается одинаковых шаров, лежат в плоскостях KCO_1 и KCO_2, откуда

$$\angle KCO_1 = \angle KCO_2 = \varphi + \alpha.$$

Кроме того, по условию $CO_1 = CO_2$. Отметим несколько простых фактов.

1) *H — точка касания равных шаров.* Действительно, треугольники KCO_1 и KCO_2 равны, откуда $KO_1 = KO_2$. Так как $KH \perp O_1O_2$, мы получим $HO_1 = HO_2$.

2) *Плоскость HCK перпендикулярна O_1O_2.* Действительно, треугольник O_1CO_2 равнобедренный, а H — середина O_1O_2, откуда $CH \perp O_1O_2$. Очевидно также, что $KH \perp O_1O_2$.

3) *Если KM — перпендикуляр, опущенный из точки K на CO_1, то $MH \perp CO_1$.* Это вытекает из обратной теоремы о трех перпендикулярах.

Пусть KM — перпендикуляр, опущенный из точки K на CO_1. Из 1) и 2) вытекает, что прямая CH касается равных шаров. Тогда $\angle O_1CH = \angle O_1CA_1 = \varphi$, и в силу 3)

$$\cos\gamma = \frac{CH}{CK} = \frac{CM}{\cos\angle O_1CH} : \frac{CM}{\cos\angle KCO_1} = \frac{\cos(\varphi+\alpha)}{\cos\varphi} = \cos\alpha - \operatorname{tg}\varphi\sin\alpha = \cos\alpha - \frac{2}{\sqrt{5}}\sin\alpha.$$

Поскольку CH и CA_1 — отрезки касательных к сфере, мы получаем

$$CH = CA_1 = 2\operatorname{ctg}\varphi = \sqrt{5}, \quad \text{откуда} \quad \sin\beta = \frac{2}{CH} = \frac{2}{\sqrt{5}} \ \text{ и } \ \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

В силу 1) и 2) плоскость HCK состоит из точек, равноудаленных от O_1 и O_2, поэтому она содержит точку O_3. Значит, $\gamma = 90^\circ - \beta - \alpha$ (см. правый рисунок). Тогда

$$\cos\alpha - \frac{2}{\sqrt{5}}\sin\alpha = \cos\gamma = \sin(\beta+\alpha) = \sin\beta\cos\alpha + \cos\beta\sin\alpha = \frac{\sin\alpha + 2\cos\alpha}{\sqrt{5}},$$

откуда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{5}-2}{3}$. $\square$

Вариант 6

1. *В клетках таблицы 4×6 расставлены натуральные числа так, что все десять сумм этих чисел в строках и столбцах таблицы различны. Найдите наименьшее возможное значение суммы чисел во всей таблице.*

Ответ: 43.

Решение. Так как элементы таблицы — натуральные числа, суммы по строкам и по столбцам таблицы не меньше 4. Поскольку все эти суммы различны, минимально возможный набор их значений равен $\{4, 5, \ldots, 12, 13\}$. Складывая суммы по строкам и столбцам таблицы, мы получим удвоенную сумму S всех чисел таблицы, так как каждое из них учитывается дважды — в строке и в столбце. Тогда

$$S \geqslant \tfrac{1}{2}\,(4+5+\ldots+12+13) = \tfrac{1}{2}\cdot 85 = 42\tfrac{1}{2}\,, \quad \text{то есть} \quad S \geqslant 43.$$

Пример для $S = 43$ приведен ниже. $\square$

1	1	1	1	1	2
1	1	1	2	2	3
1	1	2	3	3	2
1	2	2	2	3	4

2. *Даны положительные числа a, b, c, d. Найдите минимальное значение выражения*

$$A = \left(a^2 + \frac{1}{bc}\right)^3 + \left(b^2 + \frac{1}{cd}\right)^3 + \left(c^2 + \frac{1}{da}\right)^3 + \left(d^2 + \frac{1}{ab}\right)^3.$$

Ответ: 32.

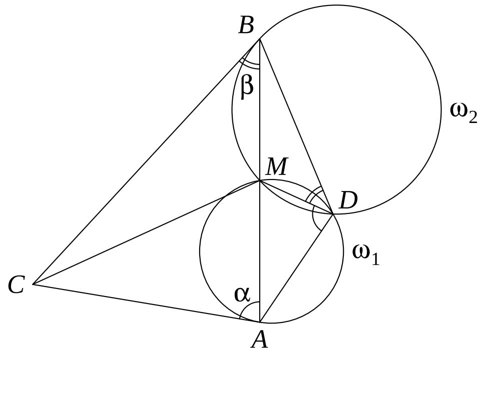
Решение. Воспользуемся неравенством Коши для средних вначале в каждой скобке, а затем для всей суммы. Мы получим

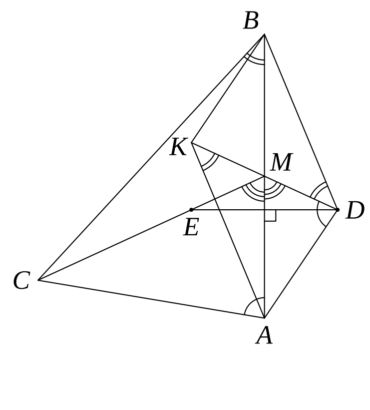
$$A \geqslant \left(\frac{2a}{\sqrt{bc}}\right)^3 + \left(\frac{2b}{\sqrt{cd}}\right)^3 + \left(\frac{2c}{\sqrt{da}}\right)^3 + \left(\frac{2d}{\sqrt{ab}}\right)^3 \geqslant 32\,\left(\frac{a^2}{bc}\cdot\frac{b^2}{cd}\cdot\frac{c^2}{da}\cdot\frac{d^2}{ab}\right)^{3/8} = 32.$$

Равенство реализуется при $a = b = c = d = 1$. $\square$

3. *Точка M — середина стороны AB треугольника ABC. Через точки A и M проведена окружность ω_1, касающаяся прямой AC, а через точки B и M — окружность ω_2, касающаяся прямой BC. Окружности ω_1 и ω_2 вторично пересекаются в точке D. Точка E лежит внутри треугольника ABC и симметрична точке D относительно прямой AB. Найдите угол CEM.*

Ответ: 180°.





Решение 1. Угол между касательной AC и хордой AM окружности ω_1 равен вписанному в ω_1 углу, который опирается на AM, то есть $\angle CAB = \angle ADM$. Аналогичные рассуждения для ω_2 дают $\angle ABC = \angle BDM$. Достроим треугольник ADB до параллелограмма $ADBK$ (см. правый рисунок). Треугольники ACB и DAK подобны по двум углам. Точка M — середина отрезков AB и DK, поэтому треугольники ACM и DAM тоже подобны (по углу и пропорциональным сторонам). Значит, $\angle AMC = \angle AMD$. Кроме того, из симметрии точек D и E относительно AB вытекает, что $\angle AME = \angle AMD$. Таким образом, точка E лежит на отрезке CM. $\square$

Решение 2. По свойствам касательных $\angle ADM = \angle CAM$ и $\angle MDB = \angle CBM$. Следовательно,

$$\angle ADB = \angle ADM + \angle MDB = \angle CAM + \angle CBM = 180^\circ - \angle ACB,$$

и четырехугольник $ACBD$ вписанный. Тогда

$$\angle BDC = \angle BAC = \angle MDA \quad \text{и} \quad \angle BCD = \angle BAD = \angle MAD.$$

Значит, треугольники BDC и MDA подобны по двум углам, откуда

$$\frac{BD}{MD} = \frac{BC}{MA} = \frac{CB}{MB}.$$

Поэтому треугольники BDM и CBM подобны по углу и отношению сторон и, в частности, равны углы $\angle CMB$ и $\angle DMB$. В силу симметрии точек D и E относительно AB мы получаем

$$\angle EMB = \angle DMB = \angle CMB.$$

Значит, точка E лежит на прямой CM, откуда $\angle CEM = 180^\circ$. $\square$

Решение 3. Положим

$$\alpha = \angle CAB, \ \ \beta = \angle ABC, \ \ \varphi = \angle AMD, \ \ \psi = \angle AMC.$$

Угол между касательной AC и хордой AM окружности ω_1 равен вписанному в ω_1 углу, который опирается на AM, то есть $\angle CAB = \angle ADM$. Аналогичные рассуждения для ω_2 дают равенство $\angle ABC = \angle BDM$. Заметим, что

$$\angle DAM = 180^\circ - \alpha - \varphi \quad \angle DMB = 180^\circ - \beta - (180^\circ - \varphi) = \varphi - \beta.$$

Тогда теорема синусов для треугольников ADM и DMB дает

$$\frac{AM}{\sin\alpha} = \frac{DM}{\sin(\alpha+\varphi)}, \qquad \frac{BM}{\sin\beta} = \frac{DM}{\sin(\varphi-\beta)}.$$

Так как $AM = BM$, из этих равенств можно исключить стороны. Мы получим

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{\sin(\varphi-\beta)}{\sin(\alpha+\varphi)}.$$

Аналогичные рассуждения для треугольников ACM и CMB дают

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{\sin(\psi-\beta)}{\sin(\alpha+\psi)}.$$

Исключая левую часть этих соотношений, мы получим

$$\sin(\varphi-\beta)\sin(\psi+\alpha) = \sin(\psi-\beta)\sin(\varphi+\alpha) \Longleftrightarrow \cos(\varphi-\beta-\alpha-\psi) - \cos(\varphi-\beta+\alpha+\psi) =$$
$$= \cos(\psi-\beta-\alpha-\varphi) - \cos(\varphi-\beta+\alpha+\psi) \Longleftrightarrow 2\sin(\alpha+\beta)\sin(\varphi-\psi) = 0,$$

откуда $\varphi = \psi$. Кроме того, из симметрии точек D и E относительно AB вытекает, что $\angle AME = \varphi$. Таким образом, точка E лежит на отрезке CM. $\square$

4. *На доске написано произведение чисел $\overline{ИКС}$ и $\overline{КСИ}$, где буквы соответствуют различным ненулевым десятичным цифрам. Это произведение содержит три цифры С и по одной И, К и 0, причем старшая его цифра равна С. Что написано на доске?*

Ответ: $112\,015 = 521 \cdot 215$.

Решение. Положим $p = \overline{ИКС} \cdot \overline{КСИ}$. Числа $(И+К+С)^2$ и $(И+К+3С)$ дают при делении на 9 одинаковые остатки, откуда $С \bmod 9 = \frac{(И+К+С)(И+К+С-1)}{2} \bmod 9$. Зависимость между числами n и $\frac{n(n-1)}{2} \bmod 9$ приведена в таблице:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\frac{n(n-1)}{2} \bmod 9$	0	1	3	6	1	6	3	1	0

(далее остатки будут циклически повторяться). Таким образом, $С \in \{1, 3, 6, 9\}$. Случай $С = 9$ невозможен, поскольку С является старшей цифрой p и $p < (И+1) \cdot (К+1) \cdot 10\,000 \leqslant 900\,000$. Справедливы неравенства

$$С \geqslant \left[\frac{И \cdot К}{10}\right] \quad \text{и} \quad С \leqslant \frac{(И+1)(К+1)}{10}. \qquad (*)$$

Рассмотрим три случая.

1) $С = 1$. Из таблицы мы находим, что $И+К+1 \in \{8, 11, 14, 17\}$, то есть $И+К \in \{7, 10, 13, 16\}$. Обозначим через Ц предпоследнюю цифру p. Тогда $Ц = (1 + И \cdot К) \bmod 10$. Заметим, что $Ц \neq И$, поскольку И — младшая цифра p. Кроме того, $Ц \neq 0$, так как произведение различных цифр И и К не может оканчиваться на 9. Если $Ц = К$, то $1 + (И-1) \cdot К \,\vdots\, 10$, поэтому $(И-1) \cdot К$ оканчивается на 9. Допустимыми парами $(И, К)$ будут $(4, 3)$, $(8, 7)$, $(2, 9)$. Подходящее значение $И+К$ получится только для пары $(4, 3)$, но она нам не подходит, так как $431 \cdot 314 = 135\,334$. Таким образом, $Ц = С = 1$, откуда $И \cdot К \,\vdots\, 10$. Первое из неравенств $(*)$ дает $И \cdot К \leqslant 19$. Поэтому $И \cdot К = 10$, то есть пара $(И, К)$ равна $(2, 5)$ или $(5, 2)$. Поскольку $251 \cdot 512 = 128\,512$ и $521 \cdot 215 = 112\,015$, нам подходит только второй случай.

2) $С = 3$. Из таблицы мы находим, что $И+К+3 \in \{7, 12, 16\}$, то есть $И+К \in \{9, 13\}$, поскольку цифры И, К, С различны. Пусть $И+К = 9$. Второе из неравенств $(*)$ дает $(И+1)(К+1) \geqslant 30$, откуда пара $(И, К)$ равна $(4, 5)$ или $(5, 4)$. Первый случай невозможен, так как p будет оканчиваться на 2, а во втором мы получим $543 \cdot 435 = 236\,205$, что нам также не подходит. Пусть $И+К = 13$. Из первого неравенства $(*)$ вытекает, что $И \cdot К \leqslant 39$, поэтому пара $(И, К)$ равна $(4, 9)$ или $(9, 4)$. Тогда p будет оканчиваться на 7 или 2, что невозможно.

3) $С = 6$. Из таблицы мы находим, что $И+К+6 \in \{13, 15, 22\}$, откуда $И+К \in \{7, 9, 16\}$. В первых двух случаях $(И+1)(К+1) \leqslant 30$, что невозможно в силу $(*)$. Поэтому $И+К = 16$, то есть пара $(И, К)$ равна $(7, 9)$ или $(9, 7)$. Тогда p будет оканчиваться на 2 или 4, что невозможно. $\square$

5. *По краю круглого стола стоят $2n$ пустых стаканов ($n \geqslant 2$). Петя и Вася по очереди (начиная с Пети) наливают в пустые стаканы апельсиновый и яблочный сок. За один ход каждый игрок выбирает два пустых стакана и заполняет их одинаковым видом сока (на свой выбор). Игра заканчивается, когда все стаканы заполнены. Петя хочет добиться того, чтобы по окончании игры образовался такой стакан, что в соседние с ним стаканы налит сок противоположного вида. При каких n он может добиться своей цели вне зависимости от действий Васи?*

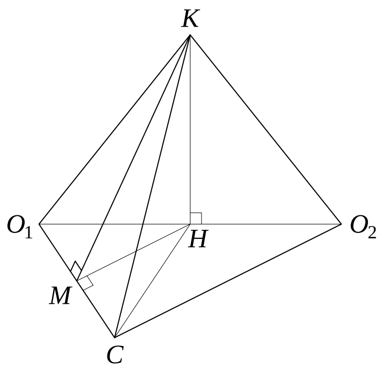
Ответ: ни при каких.

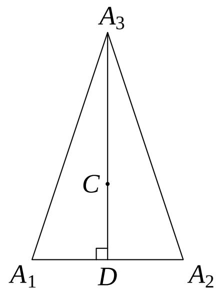
Решение. Разобьем весь набор стаканов на пары соседних. Чтобы нарушить планы Пети, Вася должен придерживаться следующей стратегии. Если Петя заполняет два стакана из одной пары, то Вася — два стакана из другой пары. Если же Петя заполняет стаканы из двух разных пар, то Вася заполняет два других стакана из этих же пар тем же соком, что и Петя.

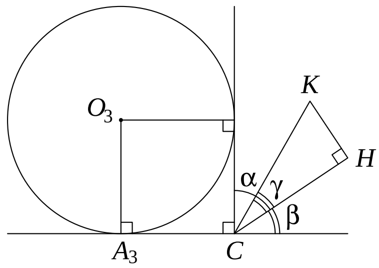
В результате таких действий Васи на каждом шаге если оба стаканы одной пары заполнены, то одинаковыми напитками. Заметим, что три последовательных заполненных стакана обязательно содержат целую пару. Поэтому тройки стаканов, в которой любые два соседних напитка различны, получиться не может. □

6. *На столе лежат шары радиусов 4, 4, 5, касаясь друг друга внешним образом. Вершина конуса C находится на столе, а сам конус касается внешним образом всех шаров. Точка C равноудалена от центров двух равных шаров, а третьего шара конус касается образующей, перпендикулярной столу. Найдите угол при вершине конуса. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении.)*

Ответ: $2\operatorname{arcctg} 7$.







Решение. Пусть O_1, O_2, O_3 — центры шаров, A_1, A_2, A_3 — точки касания шаров со столом, 2α — угол при вершине конуса, $\varphi = \angle O_1CA_1$. Прямая, проходящая через C перпендикулярно столу, касается шара с центром O_3, откуда $\angle A_3CO_3 = 45^\circ$ и $A_3C = 5$. Пусть A_3D — высота треугольника $A_1A_2A_3$ (см. средний рисунок). Из условия касания шаров

$$A_1A_3 = A_2A_3 = \sqrt{(5+4)^2 - (5-4)^2} = \sqrt{80}, \quad A_1D = 4,$$

откуда

$$A_3D = \sqrt{A_1A_3{}^2 - A_1D^2} = 8, \quad \text{и} \quad CD = A_3D - A_3C = 3.$$

Так как $A_1C = 2\operatorname{ctg}\varphi$, из теоремы Пифагора мы получим

$$A_1C^2 = A_1D^2 + CD^2 \iff 16\operatorname{ctg}^2\varphi = 25 \iff \operatorname{ctg}\varphi = \tfrac{5}{4}.$$

Выберем на оси симметрии конуса точку K так, что ее проекция H на плоскость CO_1O_2 попадает на отрезок O_1O_2 (см. левый рисунок). Положим $\gamma = \angle HCK$, β — угол между CH и столом. Образующие, по которым конус касается одинаковых шаров, лежат в плоскостях KCO_1 и KCO_2, откуда

$$\angle KCO_1 = \angle KCO_2 = \varphi + \alpha.$$

Кроме того, по условию $CO_1 = CO_2$. Отметим несколько простых фактов.

1) *H — точка касания равных шаров.* Действительно, треугольники KCO_1 и KCO_2 равны, откуда $KO_1 = KO_2$. Так как $KH \perp O_1O_2$, мы получим $HO_1 = HO_2$.

2) *Плоскость HCK перпендикулярна O_1O_2.* Действительно, треугольник O_1CO_2 равнобедренный, а H — середина O_1O_2, откуда $CH \perp O_1O_2$. Очевидно также, что $KH \perp O_1O_2$.

3) *Если KM — перпендикуляр, опущенный из точки K на CO_1, то $MH \perp CO_1$.* Это вытекает из обратной теоремы о трех перпендикулярах.

Пусть KM — перпендикуляр, опущенный из точки K на CO_1. Из 1) и 2) вытекает, что прямая CH касается равных шаров. Тогда $\angle O_1CH = \angle O_1CA_1 = \varphi$, и в силу 3)

$$\cos\gamma = \frac{CH}{CK} = \frac{CM}{\cos\angle O_1CH} : \frac{CM}{\cos\angle KCO_1} = \frac{\cos(\varphi+\alpha)}{\cos\varphi} = \cos\alpha - \operatorname{tg}\varphi\,\sin\alpha = \cos\alpha - \frac{4}{5}\sin\alpha.$$

Поскольку CH и CA_1 — отрезки касательных к сфере, мы получаем

$$CH = CA_1 = 4\operatorname{ctg}\varphi = 5, \quad \text{откуда} \quad \sin\beta = \frac{4}{CH} = \frac{4}{5} \text{ и } \cos\beta = \frac{3}{5}.$$

В силу 1) и 2) плоскость HCK состоит из точек, равноудаленных от O_1 и O_2, поэтому она содержит точку O_3. Значит, $\gamma = 90^\circ - \beta - \alpha$ (см. правый рисунок). Тогда

$$\cos\alpha - \tfrac{4}{5}\sin\alpha = \cos\gamma = \sin(\beta+\alpha) = \sin\beta\cos\alpha + \cos\beta\sin\alpha = \tfrac{4}{5}\cos\alpha + \tfrac{3}{5}\sin\alpha,$$

откуда $\operatorname{ctg}\alpha = 7$. $\square$

Вариант 7

1. *Какое наименьшее количество клеток нужно отметить в таблице 7×7 так, чтобы в каждой вертикальной или горизонтальной полоске 1×4 была хотя бы одна отмеченная клетка?*

Ответ: 12.

Решение. Рассмотрим более общую задачу, когда таблица имеет размер $(2n-1)\times(2n-1)$, а полоска — $1\times n$. Назовем n-ю строку и n-й столбец *центральными*, а отмеченные на них клетки, отличные от центра доски, — *осевыми*. Пусть в центральной строке имеется k осевых клеток, а в центральном столбце — m осевых клеток. В строках и столбцах, не содержащих осевых клеток, должно быть отмечено не менее двух клеток. Всего в таких строках будет отмечено не менее $2\cdot(2n-2-m)=4(n-1)-2m$ клеток, а в столбцах — не менее $4(n-1)-2k$ клеток. При этом каждая клетка будет посчитана не более двух раз. С учетом осевых клеток мы получаем, что отмечено не менее

$$\tfrac{1}{2}\big(4(n-1)-2m+4(n-1)-2k\big)+k+m=4(n-1)\ \text{клеток.}$$

Значение $4(n-1)$ реализуется, если отметить все клетки центральных строки и столбца, кроме центра доски. Полагая $n=4$, мы получим ответ. $\square$

2. *Даны числа $x,y,z\in\big[0,\frac{\pi}{2}\big]$. Найдите минимальное значение выражения*

$$A=\cos(x-y)+\cos(y-z)+\cos(z-x).$$

Ответ: 1.

Решение. Мы можем считать, что $x\leqslant y\leqslant z$, поскольку выражение A не меняется при попарных перестановках переменных. Заметим, что

$$\cos(x-y)+\cos(z-x)=2\cos\big(\tfrac{z-y}{2}\big)\cos\big(\tfrac{z+y}{2}-x\big).$$

Первый косинус в правой части положителен и не зависит от x, а аргумент второго лежит на $\big[0,\frac{\pi}{2}\big]$, так как $\frac{\pi}{2}\geqslant\frac{z+y}{2}\geqslant x$. Значит, правая часть будет наименьшей при $x=0$. В этом случае

$$A=\cos y+\cos z+\cos(y-z)=\cos z+2\cos\tfrac{z}{2}\cdot\cos\big(y-\tfrac{z}{2}\big).$$

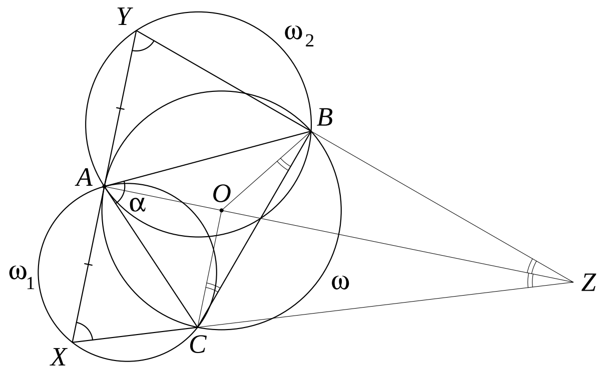
Заметим, что $-\frac{z}{2}\leqslant y-\frac{z}{2}\leqslant\frac{z}{2}$, откуда $\cos\big(y-\frac{z}{2}\big)\geqslant\cos\frac{z}{2}$. Поэтому

$$A\geqslant\cos z+2\cos^2\tfrac{z}{2}=2\cos z+1\geqslant 1.$$

Равенство реализуется при $x=0$, $y=z=\frac{\pi}{2}$. $\square$

3. *Вокруг треугольника ABC описана окружность ω. Окружность ω_1 касается прямой AB в точке A и проходит через точку C, а окружность ω_2 касается прямой AC в точке A и проходит через точку B. В точке A к окружности ω проведена касательная, которая вторично пересекает окружность ω_1 в точке X и вторично пересекает окружность ω_2 в точке Y. Найдите отношение $\frac{AX}{XY}$.*

Ответ: $\frac{1}{2}$.



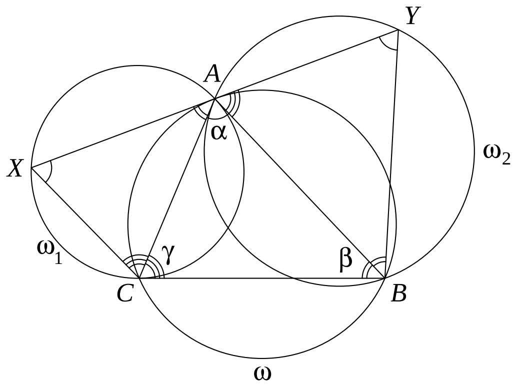
Решение 1. Пусть O — центр ω, $\alpha = \angle BAC$. Угол между касательной AB и хордой AC окружности ω_1 равен вписанному в нее углу, который опирается на AC, то есть $\angle AXC = \alpha$. Аналогичным образом получается равенство $\angle AYB = \alpha$. Достроим четырехугольник $CXYB$ до треугольника XYZ (см. рисунок). Заметим, что

$$\angle BOC = 2\angle BAC = 2\alpha = \angle ZXY + \angle ZYX = 180^\circ - \angle XZY,$$

то есть четырехугольник $OBZC$ — вписанный. Тогда

$$\angle OZB = \angle OCB = \angle OBC = \angle OZC.$$

Поэтому луч ZO — биссектриса равнобедренного треугольника XZY, которая является также медианой и высотой. Радиус OA окружности ω перпендикулярен ее касательной XY и, значит, параллален ZO. Таким образом, точка A лежит на луче ZO, откуда $AX = AY$ и $\frac{AX}{XY} = \frac{1}{2}$. $\square$



Решение 2. Прямая XY касается окружности ω, откуда

$$\angle BAY = \angle BCA \quad \text{и} \quad \angle CAX = \angle CBA.$$

Поскольку прямая AB касается окружности ω_1, а прямая AC касается окружности ω_2, мы получаем также

$$\angle AYB = \angle BAC = \angle AXC.$$

Значит, треугольники ABC, XAC и YBA подобны по двум углам. Поэтому

$$\frac{AX}{AC} = \frac{BA}{BC} \quad \text{и} \quad \frac{AY}{AB} = \frac{CA}{CB}.$$

Таким образом,

$$AX = \frac{AB \cdot AC}{BC} = AY \quad \text{и} \quad \frac{AX}{XY} = \frac{AX}{AX + AY} = \frac{1}{2}. \quad \square$$

Решение 3. Обозначим радиусы окружностей ω, ω_1 и ω_2 через r, r_1, r_2 соответственно. Положим также

$$\alpha = \angle BAC, \quad \beta = \angle ABC, \quad \gamma = \angle ACB.$$

Угол между касательной AB и хордой AC окружности ω_1 равен вписанному в нее углу, который опирается на AC, то есть $\angle AXC = \angle BAC = \alpha$. Аналогичным образом получаются равенства

$$\angle AYB = \alpha, \quad \angle XAC = \beta, \quad \angle YAB = \gamma.$$

Тогда треугольники AXC и AYB подобны ABC по двум углам, откуда $\angle ACX = \gamma$ и $\angle ABY = \beta$. По теореме синусов

$$AC = 2r_1 \sin\alpha = 2r\sin\beta \iff \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{r}{r_1} \quad \text{и} \quad AB = 2r_2\sin\alpha = 2r\sin\gamma \iff \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{r_2}{r}.$$

Поэтому

$$\frac{AX}{AY} = \frac{r_1\sin\gamma}{r_2\sin\beta} = \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{r}{r_1}\cdot\frac{r_2}{r} = 1,$$

откуда и получается ответ. $\square$

4. *На доске написано произведение чисел $\overline{\text{ИКС}}$ и $\overline{\text{ИСК}}$, где буквы соответствуют различным ненулевым десятичным цифрам, из которых ровно одна четна. Это произведение пятизначное и одинаково читается слева направо и справа налево. Что написано на доске?*

Ответ: $29392 = 167 \cdot 176$.

Решение. Так как задача не меняется при перестановке К и С, мы можем считать, что К $<$ С. Положим $p = \overline{\text{ИКС}} \cdot \overline{\text{ИСК}}$. Число p пятизначное и $p \geqslant 10\,000 \cdot \text{И}^2$, откуда И $\leqslant 3$. Рассмотрим три случая.

1) И $= 1$. Так как $p < 40\,000$, старшая цифра p не превосходит 3. Она совпадает с младшей цифрой p, которая равна $\text{К}\cdot\text{С} \bmod 10$. По условию К $\cdot$ С четно, откуда $\text{К}\cdot\text{С} \bmod 10 = 2$. Так как цифры К и С отличны от И и имеют разную четность, для пары (К, С) возможны значения $(3,4)$, $(6,7)$, $(8,9)$. Поскольку

$$134 \cdot 143 = 19162, \quad 167 \cdot 176 = 29392, \quad 189 \cdot 198 = 37422,$$

нам подходит только пара $(6,7)$.

2) И $= 2$. Старшая цифра p лежит между 4 и 8. Она совпадает с младшей цифрой p, которая равна $\text{К}\cdot\text{С} \bmod 10$ и по условию нечетна. Поэтому $\text{К}\cdot\text{С} \bmod 10$ равно 7 или 5. В первом случае пара (К, С) может быть $(1,7)$ или $(3,9)$. Поскольку $217 \cdot 271 = 58807$ и $237 \cdot 273 = 64701$, оба варианта нам не подходят. Пусть $\text{К}\cdot\text{С} \bmod 10 = 5$. Тогда одна из цифр К и С равна 5. Заметим, что $p \geqslant 40\,000 + 2000\,(\text{К} + \text{С})$. Отсюда К $+$ С $\leqslant 9$, иначе старшая цифра p будет больше 5. Поэтому пара (К, С) равна $(1,5)$ или $(3,5)$. Так как $215 \cdot 251 = 53965$ и $235 \cdot 253 = 59455$, оба случая нам не подходят.

3) И $= 3$. Тогда $p \geqslant 90\,000 + 3000\,(\text{К} + \text{С})$, откуда К $+$ С $\leqslant 3$ и (К, С) $= (1,2)$. Но произведение $312 \cdot 321$ шестизначное, что нас не устраивает. $\square$

5. *В вершинах правильного $2n$-угольника расставлены пустые чашки. Петя и Вася по очереди (начиная с Пети) наливают в чашки чай. За один ход можно налить чай либо в одну пустую чашку, либо в две симметричные относительно центра $2n$-угольника чашки, если они обе пустые. Проигрывает игрок, не имеющий хода. При каких n Петя выиграет вне зависимости от действий Васи?*

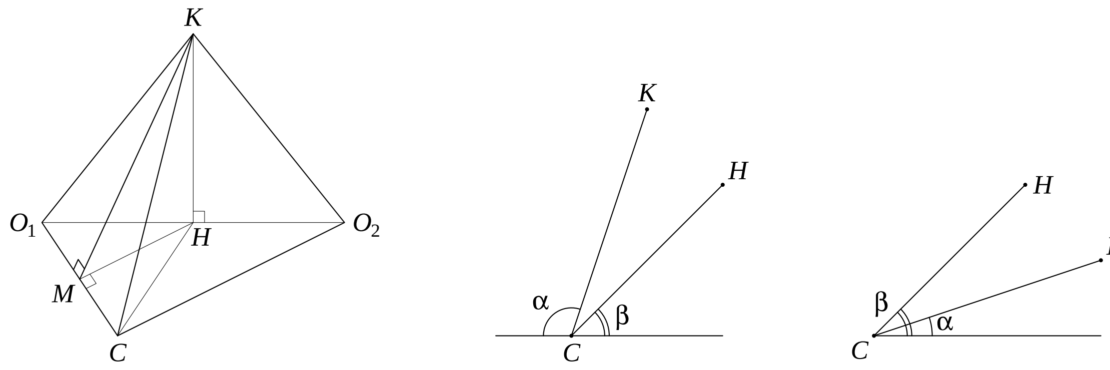
Ответ: при нечетных n.

Решение. Пусть вначале n нечетно. Победу Пете обеспечит следующая стратегия. Первым ходом он наливает чай в две диаметрально противоположные чашки. Затем на каждом шаге он заполняет чашки, симметричные относительно этого диаметра тем чашкам, в которые перед этим налил чай Вася. Перед ходом Васи любые две симметричные чашки одновременно свободны или нет. Если Вася заполнил две диаметрально противоположные чашки, то симметричная пара диаметрально противоположных чашек останется пуста, поскольку при нечетном n никакой диаметр не симметричен самому себе. Таким образом, ответный ход Васи всегда возможен, и он победит.

Пусть теперь n четно, то есть $n = 2m$. Разобьем весь набор чашек на m четверок, образующих вершины квадратов. Чтобы не проиграть, Вася должен следовать такому плану. Если Петя заполняет две чашки, то они находятся в вершинах одного из квадратов, и Вася наливает чай в две другие чашки того же квадрата. Если Петя наливает чай только одну из чашек, то Вася заполняет чашку, находящуюся в соседней вершине того же квадрата. В любом случае у Васи найдется ответный ход, поэтому он выиграет. $\square$

6. *На столе лежат два шара радиуса 4, касаясь друг друга внешним образом. Конус касается боковой поверхностью стола и обоих шаров (внешним образом). Расстояния от вершины конуса до точек касания шаров со столом равны 5. Найдите угол при вершине конуса. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении.)*

   Ответ: 90° или $2\operatorname{arcctg} 4$.



Решение. Пусть O_1, O_2 — центры шаров, A_1, A_2 — точки касания шаров со столом, C — вершина конуса, 2α — угол при его вершине, $\varphi = \angle O_1CA_1$. По условию $\operatorname{tg}\varphi = \frac{4}{5}$. Выберем на оси симметрии конуса точку K так, что ее проекция H на плоскость CO_1O_2 попадает на отрезок O_1O_2 (см. левый рисунок). Образующие, по которым конус касается одинаковых шаров, лежат в плоскостях KCO_1 и KCO_2, откуда

$$\angle KCO_1 = \angle KCO_2 = \varphi + \alpha.$$

Кроме того, $CO_1 = CO_2$. Отметим несколько простых фактов.

1) *H — точка касания шаров.* Действительно, треугольники KCO_1 и KCO_2 равны, откуда $KO_1 = KO_2$. Так как $KH \perp O_1O_2$, мы получим $HO_1 = HO_2$.

2) *Плоскость HCK перпендикулярна O_1O_2.* Действительно, треугольник O_1CO_2 равнобедренный, а H — середина O_1O_2, откуда $CH \perp O_1O_2$. Очевидно также, что $KH \perp O_1O_2$.

3) *Если KM — перпендикуляр, опущенный из точки K на CO_1, то* $MH \perp CO_1$. Это вытекает из обратной теоремы о трех перпендикулярах.

Пусть KM — перпендикуляр, опущенный из точки K на CO_1. Из 1) и 2) вытекает, что прямая CH касается обоих шаров. Тогда $\angle O_1CH = \angle O_1CA_1 = \varphi$, и в силу 3)

$$\cos\angle KCH = \frac{CH}{CK} = \frac{CM}{\cos\angle O_1CH} : \frac{CM}{\cos\angle KCO_1} = \frac{\cos(\varphi+\alpha)}{\cos\varphi} = \cos\alpha - \operatorname{tg}\varphi\sin\alpha = \cos\alpha - \frac{4}{5}\sin\alpha.$$

Пусть β — угол между CH и столом. Так как отрезок O_1O_2 параллелен столу, из 2) вытекает, что β есть угол между CH и линией пересечения плоскости HCK со столом. Поскольку CH и CA_1 — отрезки касательных к сфере, мы получаем

$$\sin\beta = \frac{4}{CH} = \frac{4}{CA_1} = \frac{4}{5} \text{ и } \cos\beta = \frac{3}{5}.$$

Возможны два случая.

1) $\angle KCH = 180^\circ - \alpha - \beta$ (см. средний рисунок). Тогда

$$\cos\alpha - \tfrac{4}{5}\sin\alpha = \cos\angle KCH = -\cos(\alpha+\beta) = \sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta = \tfrac{4}{5}\sin\alpha - \tfrac{3}{5}\cos\alpha,$$

откуда $\sin\alpha = \cos\alpha$ и $\alpha = 45^\circ$.

2) $\angle KCH = \beta - \alpha$ (см. правый рисунок). Тогда

$$\cos\alpha - \tfrac{4}{5}\sin\alpha = \cos\angle KCH = \cos(\beta - \alpha) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \tfrac{3}{5}\cos\alpha + \tfrac{4}{5}\sin\alpha,$$

откуда $\operatorname{ctg}\alpha = 4$. $\square$

Вариант 8

1. *Какое наименьшее количество клеток нужно отметить в таблице 9×9 так, чтобы в каждой вертикальной или горизонтальной полоске 1×5 была хотя бы одна отмеченная клетка?*

Ответ: 16.

Решение. Рассмотрим более общую задачу, когда таблица имеет размер $(2n-1)\times(2n-1)$, а полоска — $1\times n$. Назовем n-ю строку и n-й столбец *центральными*, а отмеченные на них клетки, отличные от центра доски, — *осевыми*. Пусть в центральной строке имеется k осевых клеток, а в центральном столбце — m осевых клеток. В строках и столбцах, не содержащих осевых клеток, должно быть отмечено не менее двух клеток. Всего в таких строках будет отмечено не менее $2\cdot(2n-2-m)=4(n-1)-2m$ клеток, а в столбцах — не менее $4(n-1)-2k$ клеток. При этом каждая клетка будет посчитана не более двух раз. С учетом осевых клеток мы получаем, что отмечено не менее

$$\tfrac{1}{2}\big(4(n-1)-2m+4(n-1)-2k\big)+k+m=4(n-1)\ \text{ клеток.}$$

Значение $4(n-1)$ реализуется, если отметить все клетки центральных строки и столбца, кроме центра доски. Полагая $n=5$, мы получим ответ. $\square$

2. *Даны числа $x, y, z\in[0,\pi]$. Найдите минимальное значение выражения*

$$A=\cos(x-y)+\cos(y-z)+\cos(z-x).$$

Ответ: -1.

Решение. Мы можем считать, что $x\leqslant y\leqslant z$, поскольку выражение A не меняется при попарных перестановках переменных. Заметим, что

$$\cos(x-y)+\cos(z-x)=2\cos\big(\tfrac{z-y}{2}\big)\cos\big(\tfrac{z+y}{2}-x\big).$$

Первый косинус в правой части неотрицателен и не зависит от x, а аргумент второго лежит на отрезке $[0,\pi]$, так как $\pi\geqslant\frac{z+y}{2}\geqslant x$. Значит, правая часть будет наименьшей при $x=0$. В этом случае

$$A=\cos y+\cos z+\cos(y-z)=\cos z+2\cos\tfrac{z}{2}\cdot\cos\big(y-\tfrac{z}{2}\big).$$

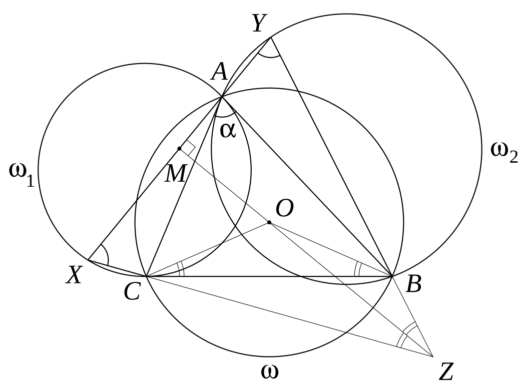
Заметим, что $-\frac{\pi}{2}\leqslant-\frac{z}{2}\leqslant y-\frac{z}{2}\leqslant\frac{z}{2}\leqslant\frac{\pi}{2}$, откуда

$$A=\cos z+2\cos\tfrac{z}{2}\cdot\cos\big(y-\tfrac{z}{2}\big)\geqslant\cos z\geqslant-1.$$

Равенство реализуется при $x=0$, $y=z=\pi$. $\square$

3. *Вокруг треугольника ABC описана окружность ω с центром в точке O. Окружность ω_1 касается прямой AB в точке A и проходит через точку C, а окружность ω_2 касается прямой AC в точке A и проходит через точку B. Через точку A проведена прямая, вторично пересекающая окружность ω_1 в точке X и окружность ω_2 в точке Y. Точка M — середина отрезка XY. Найдите угол OMX.*

Ответ: 90°.



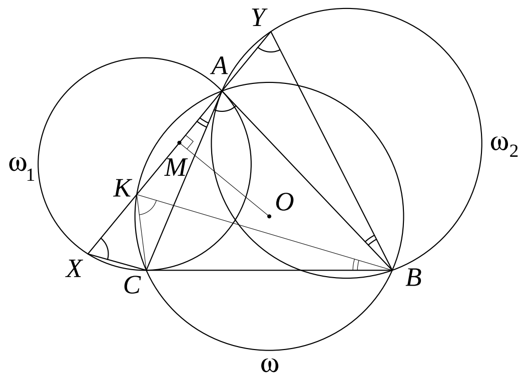
Решение 1. Положим $\alpha = \angle BAC$. Угол между касательной AB и хордой AC окружности ω_1 равен вписанному в нее углу, который опирается на AC, то есть $\angle AXC = \angle BAC = \alpha$. Аналогичным образом получается равенство $\angle AYB = \alpha$. Достроим четырехугольник $CXYB$ до треугольника XYZ (см. рисунок). Заметим, что

$$\angle BOC = 2\,\angle BAC = 2\alpha = \angle ZXY + \angle ZYX = 180^\circ - \angle XZY,$$

то есть четырехугольник $OBZC$ — вписанный. Тогда

$$\angle OZB = \angle OCB = \angle OBC = \angle OZC.$$

Поэтому луч ZO — биссектриса равнобедренного треугольника XZY, которая является также медианой и высотой. Таким образом, точка M лежит на луче ZO и $\angle OMX = 90^\circ$. $\square$



Решение 2. Пусть прямая XY вторично пересекает окружность ω в точке K. Поскольку прямая AC касается окружности ω_2,

$$\angle BYK = \angle BYA = \angle BAC.$$

Угол YBA опирается на дугу YA окружности ω_2, не содержащую точку B. Значит, он равен углу между хордой YA и касательной к ω_2 в точке A, то есть углу XAC. С учетом вписанности четырехугольника $ABCK$ мы получаем

$$\angle YBA = \angle XAC = \angle KAC = \angle KBC,$$

откуда $\angle YBK = \angle ABC$. Поэтому треугольники YBK и ABC подобны по двум углам. Тогда

$$\frac{YK}{AC} = \frac{BK}{BC} \Longleftrightarrow YK = \frac{AC \cdot BK}{BC}.$$

Аналогично проверяется, что треугольники CAX и CBK подобны и $\frac{AX}{BK} = \frac{AC}{BC}$. Значит,

$$AX = \frac{AC \cdot BK}{BC} = YK.$$

Отсюда вытекает, что точка M является серединой отрезка AK. Заметим, что точка O — центр описанной окружности треугольника AKB и, значит, лежит на серединном перпендикуляре к стороне AK. Поэтому $\angle OMX = \angle OMK = 90^\circ$. $\square$

4. *Даны девятизначные числа m и n, получаемые друг из друга записью цифр в обратном порядке. Оказалось, что произведение mn состоит из нечетного числа цифр и одинаково читается слева направо и справа налево. Найдите наибольшее число m, для которого это возможно.*

Ответ: 220 000 001.

Решение. Пусть $m = \overline{a_8 \dots a_0}$, $n = \overline{a_0 \dots a_8}$. Так как число mn содержит нечетное количество цифр, оно является семнадцатиразрядным. Запишем $mn = \overline{b_{16} \dots b_0}$. Покажем по индукции, что

$$b_k = a_0 a_{8-k} + a_1 a_{9-k} + \dots + a_{k-1} a_7 + a_k a_8 \quad \text{для любого} \quad k \in \{0, \dots, 8\}. \qquad (*)$$

Ясно, что $b_0 = a_0 a_8 \bmod 10$. Так как $10^{17} > mn \geqslant a_0 a_8 \cdot 10^{16}$, мы получим $a_0 a_8 \leqslant 9$, то есть $b_0 = a_0 a_8$. Предположим, что для некоторого $k < 8$ равенство $(*)$ доказано. Запишем

$$a_0 a_{7-k} + a_1 a_{8-k} + \dots + a_k a_7 + a_{k+1} a_8 = 10p + r, \quad \text{где} \quad r \in \{0, \dots, 9\}.$$

Заметим, что $b_{k+1} = r$, а p не превосходит переноса из $(15-k)$-го разряда в $(16-k)$-й при умножении m на n. Но $b_{16-k} = b_k$, и по индукционному предположению этот перенос должен быть нулевым. Поэтому $p = 0$, что и дает $(*)$ с заменой k на $k+1$.

Применяя $(*)$ для $k = 8$, мы получим $b_8 = a_0^2 + \dots + a_8^2$. Поскольку $b_8 \leqslant 9$, правая часть тоже не превосходит 9. По условию a_0 и a_8 отличны от нуля, поэтому все цифры m не больше 2. Значит, две максимально возможные старшие цифры m равны 2. Так как $a_0 > 0$, мы получаем $a_0 = 1$ и $a_k = 0$ при $k = 1, \dots, 6$. Число $m = 220\,000\,001$, очевидно, удовлетворяет условию задачи. □

5. *В вершинах правильного $2n$-угольника расставлены пустые чашки. Петя и Вася по очереди (начиная с Пети) наливают в чашки чай. За один ход можно налить чай в две пустые чашки, которые либо стоят рядом, либо симметричны относительно центра $2n$-угольника. Проигрывает игрок, не имеющий хода. При каких n Петя выиграет вне зависимости от действий Васи?*

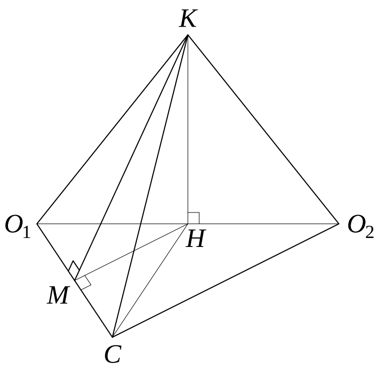
Ответ: при нечетных n.

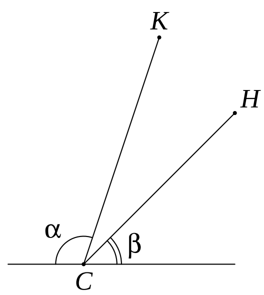
Решение. Назовем *парой* две чашки, симметричные относительно центра $2n$-угольника. Пусть n четно. Это означает, что количество пар четно. Победу Васе обеспечит следующая стратегия. Если Петя наливает чай в чашки из одной пары, то Вася наполняет чашки из какой-нибудь другой пары. Пусть Петя заполнил две соседние чашки. Тогда симметричные им чашки тоже стоят рядом, и Вася наливает чай в них. После четного числа ходов чашки любой пары будут одновременно либо полными, либо пустыми. Поэтому процесс будет продолжаться до тех пор, пока все чашки не заполнятся. В силу четности n пустых чашек не останется после хода Васи, и он выиграет.

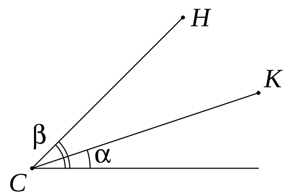
Пусть теперь n нечетно. Петя должен первым ходом заполнить чашки из какой-то пары. После этого количество свободных пар станет четным, и задача сведется к уже разобранной с переменой ролями Пети и Васи. Используя описанную ранее стратегию Васи, Петя добьется победы. □

6. *На столе лежат два шара радиуса 12, касаясь друг друга внешним образом. Конус касается боковой поверхностью стола и обоих шаров (внешним образом). Расстояния от вершины конуса до точек касания шаров со столом равны 13. Найдите угол при вершине конуса. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении.)*

Ответ: $2 \operatorname{arcctg} \frac{4}{3}$ или $2 \operatorname{arcctg} 3$.







Решение. Пусть O_1, O_2 — центры шаров, A_1, A_2 — точки касания шаров со столом, C — вершина конуса, 2α — угол при его вершине, $\varphi = \angle O_1CA_1$. По условию $\operatorname{tg}\varphi = \frac{12}{13}$. Выберем на оси симметрии конуса точку K так, что ее проекция H на плоскость CO_1O_2 попадает на отрезок O_1O_2 (см. левый рисунок). Образующие, по которым конус касается одинаковых шаров, лежат в плоскостях KCO_1 и KCO_2, откуда

$$\angle KCO_1 = \angle KCO_2 = \varphi + \alpha.$$

Кроме того, $CO_1 = CO_2$. Отметим несколько простых фактов.

1) *H — точка касания шаров.* Действительно, треугольники KCO_1 и KCO_2 равны, откуда $KO_1 = KO_2$. Так как $KH \perp O_1O_2$, мы получим $HO_1 = HO_2$.

2) *Плоскость HCK перпендикулярна O_1O_2.* Действительно, треугольник O_1CO_2 равнобедренный, а H — середина O_1O_2, откуда $CH \perp O_1O_2$. Очевидно также, что $KH \perp O_1O_2$.

3) *Если KM — перпендикуляр, опущенный из точки K на CO_1, то $MH \perp CO_1$.* Это вытекает из обратной теоремы о трех перпендикулярах.

Пусть KM — перпендикуляр, опущенный из точки K на CO_1. Из 1) и 2) вытекает, что прямая CH касается обоих шаров. Тогда $\angle O_1CH = \angle O_1CA_1 = \varphi$, и в силу 3)

$$\cos\angle KCH = \frac{CH}{CK} = \frac{CM}{\cos\angle O_1CH} : \frac{CM}{\cos\angle KCO_1} = \frac{\cos(\varphi+\alpha)}{\cos\varphi} = \cos\alpha - \operatorname{tg}\varphi\,\sin\alpha = \cos\alpha - \frac{12}{13}\sin\alpha.$$

Пусть β — угол между CH и столом. Так как отрезок O_1O_2 параллелен столу, из 2) вытекает, что β есть угол между CH и линией пересечения плоскости HCK со столом. Поскольку CH и CA_1 — отрезки касательных к сфере, мы получаем

$$\sin\beta = \frac{12}{CH} = \frac{12}{CA_1} = \frac{12}{13} \quad \text{и} \quad \cos\beta = \frac{5}{13}.$$

Возможны два случая.

1) $\angle KCH = 180^\circ - \alpha - \beta$ (см. средний рисунок). Тогда

$$\cos\alpha - \tfrac{12}{13}\sin\alpha = \cos\angle KCH = -\cos(\alpha+\beta) = \sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta = \tfrac{12}{13}\sin\alpha - \tfrac{5}{13}\cos\alpha,$$

откуда $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{4}{3}$.

2) $\angle KCH = \beta - \alpha$ (см. правый рисунок). Тогда

$$\cos\alpha - \tfrac{12}{13}\sin\alpha = \cos\angle KCH = \cos(\beta-\alpha) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \tfrac{5}{13}\cos\alpha + \tfrac{12}{13}\sin\alpha,$$

откуда $\operatorname{ctg}\alpha = 3$. $\square$

Вариант 9

1. *В таблице 3×3 расставлены 9 чисел так, что все шесть произведений этих чисел в строках и в столбцах таблицы различны. Какое наибольшее количество чисел в этой таблице может равняться единице?*

Ответ: 5.

Решение. Назовем *индексом* таблицы общее число ее строк и столбцов, состоящих из единиц. По условию индекс не превосходит 1. Пусть n — элемент таблицы, отличный от 1. Тогда в одной строке или в одном столбце с n есть еще одно число, не равное 1 (иначе произведения в строке и столбце, содержащих n, равны n). Значит, неединичные элементы встречаются парами. Таких пар по крайней мере две, иначе индекс таблицы не меньше 3. Если пар ровно две, то они не пересекаются, в противном случае индекс таблицы равен 2. Таким образом, таблица содержит не менее 4 чисел, отличных от 1, а количество единиц не превосходит 5. Пример таблицы с 5 единицами приведен ниже. $\square$

1	1	1
1	2	3
5	7	1

2. *Даны числа $x, y, z \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Найдите максимальное значение выражения*

$$A = \sin(x-y) + \sin(y-z) + \sin(z-x).$$

Ответ: $\sqrt{2}-1$.

Решение. Мы можем считать, что $x \leqslant y$ и $x \leqslant z$, поскольку выражение A не меняется при циклической перестановке переменных. Заметим, что

$$\sin(x-y) + \sin(z-x) = 2\sin\left(\tfrac{z-y}{2}\right)\cos\left(\tfrac{z+y}{2} - x\right).$$

Аргумент синуса из правой части лежит на $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, а косинуса — на $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, так как $\frac{\pi}{2} \geqslant \frac{z+y}{2} \geqslant x$. Рассмотрим два случая.

1) $z > y$. Наибольшей правая часть будет при максимально возможном x, то есть при $x = y$, и значение A окажется нулевым.

2) $z \leqslant y$. При фиксированных y и z правая часть достигнет максимума при $x = 0$. В этом случае

$$A = \sin z - \sin y + \sin(y-z) = -\sin y + 2\sin\tfrac{y}{2}\cdot\cos\left(\tfrac{y}{2} - z\right) \leqslant 2\sin\tfrac{y}{2} - \sin y = 2\sin\tfrac{y}{2}\cdot\left(1 - \cos\tfrac{y}{2}\right).$$

Выражение в правой части увеличивается с ростом y, поэтому его максимум достигается при $y = \frac{\pi}{2}$ и равен $\sqrt{2}-1$. Таким образом, $A \leqslant \sqrt{2}-1$. Равенство реализуется при $x = 0$, $y = \frac{\pi}{2}$, $z = \frac{\pi}{4}$. $\square$

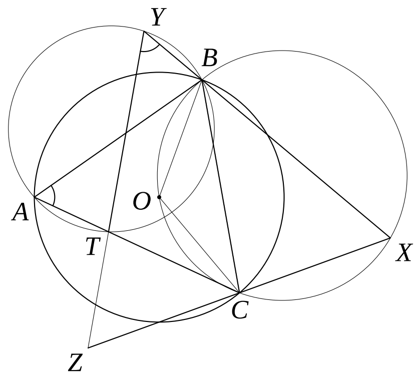
3. *Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC. На описанной окружности треугольника BOC вне треугольника ABC выбрана точка X. На лучах XB и XC за точками B и C выбраны такие точки Y и Z соответственно, что $XY = XZ$. Описанная окружность треугольника ABY пересекает сторону AC в точке T. Найдите угол $\angle YTZ$.*

Ответ: 180°.

Решение. Заметим, что $\angle BYT = \angle BAT$ как вписанные углы, опирающиеся на общую дугу. Поскольку четырехугольник $BOCX$ вписанный, мы получим

$$180^\circ - \angle BXC = \angle BOC = 2\angle BAC = 2\angle BYT.$$

С другой стороны, треугольник YXZ равнобедренный, откуда $180^\circ - \angle YXZ = 2\angle XYZ$. Поэтому $\angle XYT = \angle XYZ$, то есть точка T лежит на отрезке YZ. $\square$



4. *На доске написано произведение трехзначных чисел $\overline{\text{ИКС}}$ и $\overline{\text{КСИ}}$, где буквы соответствуют различным ненулевым десятичным цифрам. Это произведение одинаково читается слева направо и справа налево, две его цифры равны 4, а остальные четыре цифры совпадают с И. Что написано на доске?*

Ответ: $477\,774 = 762 \cdot 627$ или $554\,455 = 593 \cdot 935$.

Решение. Положим $p = \overline{\text{ИКС}} \cdot \overline{\text{КСИ}}$. Из условия на p вытекает, что $p \,\vdots\, 11$ и, значит, один из множителей p кратен 11. Пусть вначале $\overline{\text{ИКС}} \,\vdots\, 11$. Это означает, что $\text{И} + \text{С} - \text{К} \,\vdots\, 11$, откуда либо $\text{И} + \text{С} = \text{К}$, либо $\text{И} + \text{С} = \text{К} + 11$. Заметим также, что числа $(\text{И} + \text{К} + \text{С})^2$ и $4\text{И} + 8$ дают при делении на 9 одинаковые остатки. Рассмотрим два случая.

1) $\text{И} + \text{С} = \text{К}$. Тогда $(2\text{К})^2 \bmod 9 = (4\text{И} + 8) \bmod 9$, то есть $\text{К}^2 \bmod 9 = (\text{И} + 2) \bmod 9$. Зависимость между числами n и $n^2 \bmod 9$ приведена в таблице:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n^2 \bmod 9$	1	4	0	7	7	0	4	1	0

(далее остатки будут циклически повторяться). Поэтому $(\text{И} + 2) \bmod 9 \in \{0, 1, 4, 7\}$ и $\text{И} \in \{7, 8, 2, 5\}$. Подставляя $(\text{И} + 2) \bmod 9$ в нижнюю строку таблицы, мы будем получать К в верхней. Если $\text{И} = 5$, то К равно 4 или 5, что невозможно. Для $\text{И} = 8$ мы получим $\text{К} = 8 = \text{И}$, что не подходит по условию. Значениям $\text{И} = 7$ и $\text{И} = 2$ соответствуют пары $(\text{К}, \text{С}) = (9, 2)$ и $(\text{К}, \text{С}) = (7, 5)$. Так как

$$792 \cdot 927 = 734\,184, \quad 275 \cdot 752 = 206\,800,$$

эти случаи нам тоже не подходят.

2) $\text{И} + \text{С} = \text{К} + 11$. Тогда

$$(4\text{И} + 8) \bmod 9 = (2\text{К} + 11)^2 \bmod 9 = 4\,(\text{К} + 1)^2 \bmod 9 \Longleftrightarrow (\text{К} + 1)^2 \bmod 9 = (\text{И} + 2) \bmod 9,$$

и снова $\text{И} \in \{7, 8, 2, 5\}$. Случаи $\text{И} = 2$ и $\text{И} = 8$ не подходят: при допустимых значениях К из равенства $\text{С} = \text{К} - \text{И} + 11$ мы получим $\text{С} \geqslant 10$. Для остальных И по таблице находятся следующие тройки $(\text{И}, \text{К}, \text{С})$: $(5, 3, 9)$, $(7, 2, 6)$, $(7, 5, 9)$. Так как

$$539 \cdot 395 = 212\,905, \quad 726 \cdot 267 = 193\,842, \quad 759 \cdot 597 = 453\,123,$$

они нам тоже не подходят.

Пусть теперь $\overline{\text{КСИ}} \vdots 11$. Это означает, что либо $\text{И}+\text{К}=\text{С}$, либо $\text{И}+\text{К}=\text{С}+11$. Переставляя в предыдущих рассуждениях К и С, мы получим, что тройка $(\text{И},\text{К},\text{С})$ принимает одно из следующих значений: $(2,5,7)$, $(7,2,9)$, $(7,9,5)$, $(7,6,2)$, $(5,9,3)$. Так как

$$257\cdot 572=147\,004,\quad 729\cdot 297=216\,513,\quad 795\cdot 957=760\,815,\quad 762\cdot 627=477\,774,\quad 593\cdot 935=554\,455,$$

нам подходят только две последние тройки. $\square$

5. *На столе стоят в ряд n пустых стаканов. Петя и Вася по очереди (начиная с Пети) наливают в них напитки: Петя — лимонад, Вася — компот. За один ход игрок может заполнить один пустой стакан на свой выбор так, чтобы после его хода не образовалось два соседних стакана с одинаковым напитком. Если в результате действий игроков заполняются все стаканы, то игра заканчивается вничью. В противном случае проигрывает игрок, не имеющий хода. При каких n Вася выиграет вне зависимости от действий Пети?*

Ответ: $n \notin \{1,2,4,6\}$.

Решение. Занумеруем стаканы слева направо числами от 1 до n. При $n=1$ и $n=2$, очевидно, будет ничья. Если n равно 4 или 6, то Петя первым ходом наливает лимонад в первый стакан. При $n=4$ Петя сможет еще заполнить один из двух последних стаканов и, значит, не проиграет. В случае $n=6$ Петя вторым ходом заполняет последний стакан (если он пуст), а затем — один из двух средних; если же последний стакан заполнил Вася, то Петя наливает компот в третий стакан, а затем — в пятый. В любом случае Петя не проиграет.

Рассмотрим теперь $n \notin \{1,2,4,6\}$. Докажем два утверждения.

1) *Если Вася своим первым ходом заполняет стакан с номером 1, то далее у него всегда будут ходы.* Назовем *сегментом* набор стаканов, стоящих между двумя последовательными стаканами с лимонадом. По условию каждый сегмент непуст, а любой стакан сегмента либо не заполнен, либо содержит компот. Пусть $k \geqslant 2$. После k-го хода Пети образуется $k-1$ сегмент. Вася на этот момент заполнил $k-1$ стакан, в том числе первый, который не входит ни в один сегмент. Тогда найдется такой сегмент, что все входящие в него стаканы пусты. В один из них Вася и может налить компот.

2) *Если Вася своим первым ходом заполняет стакан с номером 1, то он не может проиграть.* Действительно, в силу 1) Вася всегда будет иметь ход и, значит, добьется как минимум ничьей.

Опишем победную стратегию Васи. Своим первым ходом Вася всегда наливает компот в крайний стакан (можно считать, что в первый, иначе перенумеруем стаканы в обратном порядке). В силу 2) достаточно показать, что Вася сможет избежать ничьей. Рассмотрим два случая.

а) *n нечетно.* Вася может играть произвольным образом. Ничья невозможна, поскольку в этом случае последний стакан заполнил бы Петя, что противоречит 1).

б) *$n=2m$ при $m \geqslant 4$.* Своим вторым ходом Вася должен заполнить стакан с четным номером, бо́льшим 2. Это возможно, так как имеется не менее трех стаканов с такими номерами и, значит, один из них пуст. Далее Вася может играть произвольным образом. Допустим, что игра завершилась вничью. Тогда m стаканов с лимонадом разместились на позициях $2,3,\ldots,2m$. Они должны располагаться на четных местах, поскольку никакие два стакана не стоят рядом. Но это невозможно, так как четных мест всего m и одно из них уже использовал Вася. $\square$

6. *На столе лежат два шара радиусов 4 и 1 с центрами O_1 и O_2, касаясь друг друга внешним образом. Конус касается боковой поверхностью стола и обоих шаров (внешним образом). Вершина C конуса находится на отрезке, соединяющем точки касания шаров со столом. Известно, что лучи CO_1 и CO_2 образуют равные углы со столом. Найдите угол при вершине конуса. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении.)*

Ответ: $2\operatorname{arctg}\frac{2}{5}$.

Решение. Пусть A_1, A_2 — точки касания шаров со столом, 2α — угол при вершине конуса. По условию углы O_1CA_1 и O_2CA_2 равны, обозначим их общее значение через φ. Заметим, что точки

O_1, O_2, A_1, A_2, C лежат в одной плоскости, поскольку $O_1A_1 \parallel O_2A_2$, а C принадлежит отрезку A_1A_2. Тогда

$$4\operatorname{ctg}\varphi + \operatorname{ctg}\varphi = A_1C + CA_2 = A_1A_2 = \sqrt{(4+1)^2 - (4-1)^2} = 4 \Longleftrightarrow \operatorname{ctg}\varphi = \tfrac{4}{5}.$$

Выберем на оси симметрии конуса точку K так, что ее проекция H на плоскость CO_1O_2 попадает на отрезок O_1O_2 (см. левый рисунок). Образующие, по которым конус касается одинаковых шаров, лежат в плоскостях KCO_1 и KCO_2, откуда

$$\angle KCO_1 = \angle KCO_2 = \varphi + \alpha.$$

Опустим из точки K перпендикуляры KM и KN на CO_1 и CO_2 соответственно. Прямоугольные треугольники KCM и KCN равны, поэтому $CM = CN$. Отметим несколько простых фактов.

1) *$MH \perp CO_1$ и $NH \perp CO_2$.* Это вытекает из обратной теоремы о трех перпендикулярах.

2) *$\angle MCH = \angle NCH$.* Действительно, в силу 1) прямоугольные треугольники MCH и NCH равны по гипотенузе и катету, поэтому и их соответствующие углы равны. Обозначим общее значение углов MCH и NCH через ψ.

3) *Прямая CH перпендикулярна столу.* Действительно,

$$180^\circ = 2\varphi + 2\psi, \quad \text{откуда} \quad \angle A_1CH = \varphi + \psi = 90^\circ. \qquad (*)$$

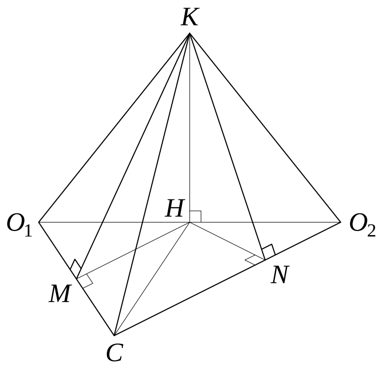
Поэтому прямая CH параллельна A_1O_1 и, значит, перпендикулярна столу.

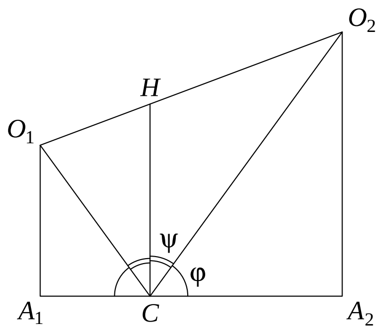
Из 1) с учетом $(*)$ мы получаем

$$\cos\angle KCH = \frac{CH}{CK} = \frac{CM}{\cos\angle O_1CH} : \frac{CM}{\cos\angle KCO_1} = \frac{\cos(\varphi+\alpha)}{\cos\psi} = \frac{\cos(\varphi+\alpha)}{\sin\varphi} = \operatorname{ctg}\varphi\cos\alpha - \sin\alpha.$$

Луч CK образует со столом угол α, и из 3) вытекает, что $\angle KCH = 90^\circ - \alpha$. Поэтому

$$\sin\alpha = \cos\angle KCH = \operatorname{ctg}\varphi\cos\alpha - \sin\alpha = \tfrac{4}{5}\cos\alpha - \sin\alpha \Longleftrightarrow \operatorname{tg}\alpha = \tfrac{2}{5}. \quad \square$$





Вариант 10

1. *В таблице 3×4 расставлены 12 чисел так, что все семь сумм этих чисел в строках и в столбцах таблицы различны. Какое наибольшее количество чисел в этой таблице может равняться нулю?*

Ответ: 8.

Решение. Назовем *индексом* таблицы общее число ее нулевых строк и столбцов. По условию индекс не превосходит 1. Пусть n — ненулевой элемент таблицы. Тогда в одной строке или в одном столбце с n есть еще одно ненулевое число (иначе суммы в строке и столбце, содержащих n, равны n). Значит, ненулевые элементы встречаются парами. Таких пар по крайней мере две, иначе индекс таблицы не меньше 4. Если пар ровно две, то они не пересекаются, в противном случае индекс таблицы равен 3. Таким образом, таблица содержит не менее 4 ненулевых чисел, а количество нулей не превосходит 8. Пример таблицы с 8 нулями приведен ниже. $\square$

0	0	0	0
1	2	0	0
0	0	4	5

2. *Даны числа $x, y, z \in [0, \pi]$. Найдите максимальное значение выражения*

$$A = \sin(x - y) + \sin(y - z) + \sin(z - x).$$

Ответ: 2.

Решение 1. Мы можем считать, что $x \leqslant y$ и $x \leqslant z$, поскольку выражение A не меняется при циклической перестановке переменных. Заметим, что

$$\sin(x - y) + \sin(z - x) = 2\sin\left(\tfrac{z-y}{2}\right)\cos\left(\tfrac{z+y}{2} - x\right).$$

Аргумент синуса из правой части лежит на $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, а косинуса — на $[0, \pi]$, так как $\pi \geqslant \frac{z+y}{2} \geqslant x$. Рассмотрим два случая.

1) $z > y$. Наибольшей правая часть будет при максимально возможном x, то есть при $x = y$, и значение A окажется нулевым.

2) $z \leqslant y$. При фиксированных y и z правая часть достигнет максимума при $x = 0$. В этом случае

$$A = \sin z - \sin y + \sin(y - z) = -\sin y + 2\sin\tfrac{y}{2}\cdot\cos\left(\tfrac{y}{2} - z\right) \leqslant 2\sin\tfrac{y}{2} - \sin y \leqslant 2.$$

Таким образом, $A \leqslant 2$. Равенство реализуется при $x = 0$, $y = \pi$, $z = \frac{\pi}{2}$. $\square$

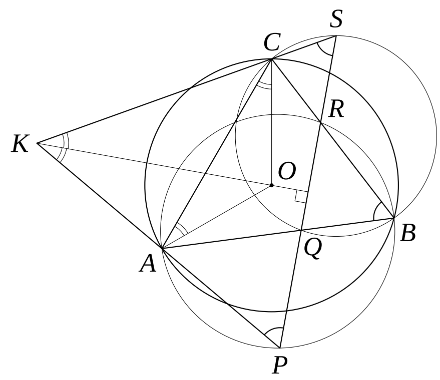
Решение 2. Положим $a = x - y$, $b = y - z$, $c = z - x$. Сумма чисел a, b, c равна нулю, поэтому хотя бы одно из них неположительно. Пусть, например, $c \leqslant 0$. Тогда $c \in [-\pi, 0]$, откуда $\sin c \leqslant 0$. Поэтому

$$A = \sin a + \sin b + \sin c \leqslant \sin a + \sin b \leqslant 2.$$

Равенство реализуется при $x = 0$, $y = \pi$, $z = \frac{\pi}{2}$. $\square$

3. *Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC. На сторонах AB и BC выбраны точки Q и R соответственно. Прямая QR вторично пересекает описанную окружность треугольника ABR в точке P и вторично пересекает описанную окружность треугольника BCQ в точке S. Прямые AP и CS пересекаются в точке K. Найдите угол между прямыми KO и QR.*

Ответ: 90°.



Решение. Заметим, что $\angle CSQ = \angle CBQ$ и $\angle APR = \angle ABR$ как вписанные углы, опирающиеся на общую дугу. Поэтому $\angle KSP = \angle KPS$, то есть треугольник PKS — равнобедренный. Поскольку

$$180^\circ - \angle AKC = 2\,\angle KSP = 2\,\angle ABC = \angle AOC,$$

четырехугольник $AOCK$ — вписанный. Так как треугольник AOC равнобедренный, мы получим

$$\angle AKO = \angle ACO = \angle CAO = \angle CKO.$$

Поэтому прямая KO является биссектрисой равнобедренного треугольника PKS, а значит, и его высотой. Таким образом, $KO \perp QR$. $\square$

4. *На доске написано произведение трехзначных чисел $\overline{\text{КСИ}}$ и $\overline{\text{ИСК}}$, где буквы соответствуют различным десятичным цифрам. Это произведение шестизначное, его крайние цифры равны, а между ними находятся две пары одинаковых соседних цифр. Что написано на доске?*

Ответ: $633\,556 = 847 \cdot 748$.

Решение. Поскольку задача не меняется при перестановке И и К, мы будем считать И $<$ К. Пусть $p = \overline{\text{КСИ}} \cdot \overline{\text{ИСК}}$, d — младшая цифра p. Так как $d = \text{И} \cdot \text{К} \bmod 10$, запишем $\text{И} \cdot \text{К} = 10m + d$, где m — целое число. По условию d будет также старшей цифрой p. Тогда

$$(d+1) \cdot 100\,000 > p \geqslant \text{И} \cdot \text{К} \cdot 10\,000 > m \cdot 100\,000.$$

Отсюда $d \geqslant m$, причем равенства быть не может, иначе $\text{И} \cdot \text{К} \;\vdots\; 11$. Кроме того, справедливо неравенство $p < (\text{И}+1)(\text{К}+1) \cdot 10\,000$, откуда

$$m < d \leqslant \left[\frac{\text{И} \cdot \text{К} + \text{И} + \text{К} + 1}{10}\right] = m + \left[\frac{d + \text{И} + \text{К} + 1}{10}\right]. \qquad (*)$$

Из условия вытекает, что p кратно 11. Тогда на 11 делится $\overline{\text{КСИ}}$ или $\overline{\text{ИСК}}$, что эквивалентно $\text{И} + \text{К} - \text{С} \;\vdots\; 11$. Поэтому либо $\text{С} = \text{И} + \text{К}$, либо $\text{С} = \text{И} + \text{К} - 11$. Рассмотрим эти случаи.

1) Пусть $\text{С} = \text{И} + \text{К}$. Так как $d + \text{И} + \text{К} + 1 = d + 1 + \text{С} < 20$, из $(*)$ мы получаем $d = m + 1$, то есть $\text{И} \cdot \text{К} = 11m + 1$. Кроме того, $\text{И} + \text{К} \leqslant 9$, откуда $\text{И} \cdot \text{К} \leqslant 20$. Поэтому $\text{И} \cdot \text{К} = 12$, и пара $(\text{И}, \text{К})$ равна $(2, 6)$ или $(3, 4)$. Поскольку $682 \cdot 286 = 195\,052$ и $473 \cdot 374 = 176\,902$, эти случаи нам не подходят.

2) Пусть $\text{С} = \text{И} + \text{К} - 11$. Так как $d + \text{И} + \text{К} + 1 \leqslant 27 < 30$, из $(*)$ мы получаем $d = m + 1$ или $d = m + 2$, откуда $\text{И} \cdot \text{К} \bmod 11$ равно 1 или 2. Кроме того, $\text{И} + \text{К} \geqslant 11$, откуда $\text{И} \cdot \text{К} \geqslant 18$. Поэтому $\text{И} \cdot \text{К}$ может принимать значения 24, 35, 45, 56, а пара $(\text{И}, \text{К})$ — $(3, 8)$, $(5, 7)$, $(5, 9)$, $(7, 8)$. Поскольку

$$308 \cdot 803 = 247\,324, \quad 715 \cdot 517 = 369\,655, \quad 935 \cdot 539 = 503\,965 \quad 847 \cdot 748 = 633\,556,$$

нам подходит только последний случай. □

5. *По краю круглого стола стоят n пустых стаканов ($n \geqslant 3$). Петя и Вася по очереди (начиная с Пети) наливают в них компот или лимонад. За один ход игрок может заполнить один пустой стакан любым из двух напитков на свой выбор. Игрок, после чьего хода образовался стакан с лимонадом, у которого оба соседних стакана с компотом, выигрывает. Если игроку не досталось пустого стакана, то он проигрывает. При каких n Петя выиграет вне зависимости от действий Васи?*

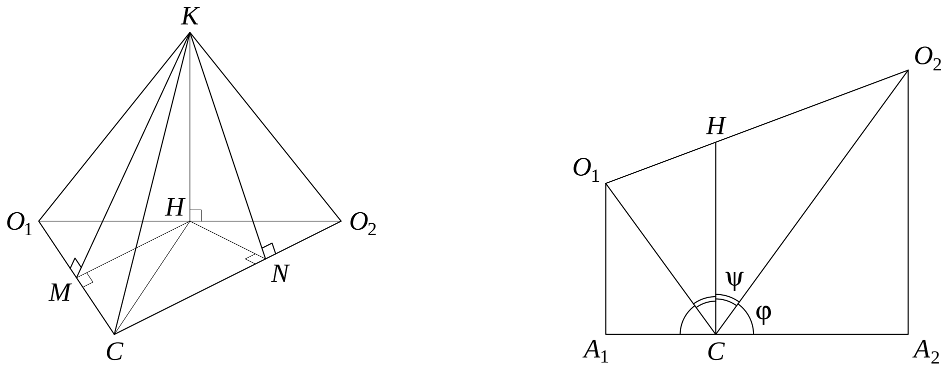
Ответ: при нечетных n.

Решение. Пусть n нечетно. Победная стратегия Пети заключается в следующем. Первый стакан он выбирает произвольно. Допустим, что очередным ходом Вася заполнил стакан, отстоящий от первого на k позиций, считая по кратчайшей дуге. Если у Пети после этого появляется победный ход — он выигрывает. В противном случае Петя наливает тот же напиток в стакан, отстоящий от первого на k позиций в другую сторону. Из симметрии ясно, что у Васи победного хода тоже не появится. В силу нечетности n последний пустой стакан заполнит Петя, если он не выиграет досрочно. В любом случае Вася проигрывает.

Пусть теперь n четно. Будем считать, что стаканы стоят в вершинах правильного n-угольника. Назовем *ключевой тройкой* такие три последовательных стакана, что, заполнив один из них подходящим напитком, можно получить победную комбинацию. Стратегия Васи состоит в следующем: если Петя заполнил очередной стакан и не образовалось ключевой тройки — Вася наливает тот же напиток в стакан, симметричный стакану Пети относительно центра n-угольника. Ввиду четности n Петя может победить лишь досрочно. Покажем, что этого не произойдет. Пусть после хода Васи образовалась ключевая тройка T, а до этого таких троек не было. Тогда в T входит последний стакан, заполненный Васей. По построению стаканы тройки T', симметричной T относительно центра n-угольника, заполнены так же, как в T, но в обратном порядке. Значит, T' тоже является ключевой тройкой. Но она существовала еще до хода Васи, что невозможно. □

6. *На столе лежат два шара, касаясь друг друга внешним образом. Конус касается боковой поверхностью стола и обоих шаров (внешним образом). Вершина конуса находится на отрезке, соединяющем точки касания шаров со столом. Известно, что лучи, соединяющие вершину конуса с центрами шаров, образуют равные углы со столом. Найдите максимально возможный угол при вершине конуса. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении.)*

Ответ: $2\operatorname{arcctg} 2$.



Решение. Пусть O_1 и O_2 — центры шаров, R и r — радиусы шаров, A_1 и A_2 — точки касания шаров со столом, C — вершина конуса, 2α — угол при вершине. По условию $\angle O_1CA_1 = \angle O_2CA_2$, обозначим общее значение этих углов через φ. Заметим, что точки O_1, O_2, A_1, A_2, C лежат в одной плоскости, поскольку $O_1A_1 \parallel O_2A_2$, а C принадлежит отрезку A_1A_2. Тогда

$$R\operatorname{ctg}\varphi + r\operatorname{ctg}\varphi = A_1C + CA_2 = A_1A_2 = \sqrt{(R+r)^2-(R-r)^2} = 2\sqrt{Rr} \Longleftrightarrow \operatorname{ctg}\varphi = \frac{2\sqrt{Rr}}{R+r}.$$

Выберем на оси симметрии конуса точку K так, что ее проекция H на плоскость CO_1O_2 попадает на отрезок O_1O_2 (см. левый рисунок). Образующие, по которым конус касается одинаковых шаров, лежат в плоскостях KCO_1 и KCO_2, откуда

$$\angle KCO_1 = \angle KCO_2 = \varphi + \alpha.$$

Опустим из точки K перпендикуляры KM и KN на CO_1 и CO_2 соответственно. Прямоугольные треугольники KCM и KCN равны, поэтому $CM = CN$. Отметим несколько простых фактов.

1) *$MH \perp CO_1$ и $NH \perp CO_2$.* Это вытекает из обратной теоремы о трех перпендикулярах.

2) *$\angle MCH = \angle NCH$.* Действительно, в силу 1) прямоугольные треугольники MCH и NCH равны по гипотенузе и катету, поэтому и их соответствующие углы равны. Обозначим общее значение углов MCH и NCH через ψ.

3) *Прямая CH перпендикулярна столу.* Действительно,

$$180^\circ = 2\varphi + 2\psi, \quad \text{откуда} \quad \angle A_1CH = \varphi + \psi = 90^\circ. \tag{$*$}$$

Поэтому прямая CH параллельна A_1O_1 и, значит, перпендикулярна столу.

Из 1) с учетом $(*)$ мы получаем

$$\cos\angle KCH = \frac{CH}{CK} = \frac{CM}{\cos\angle O_1CH} : \frac{CM}{\cos\angle KCO_1} = \frac{\cos(\varphi+\alpha)}{\cos\psi} = \frac{\cos(\varphi+\alpha)}{\sin\varphi} = \operatorname{ctg}\varphi\cos\alpha - \sin\alpha.$$

Луч CK образует со столом угол α, и из 3) вытекает, что $\angle KCH = 90^\circ - \alpha$. Поэтому

$$\sin\alpha = \cos\angle KCH = \operatorname{ctg}\varphi\cos\alpha - \sin\alpha = \frac{2\sqrt{Rr}}{R+r}\cos\alpha - \sin\alpha \Longleftrightarrow \operatorname{ctg}\alpha = \frac{R+r}{\sqrt{Rr}}.$$

По неравенству Коши $\operatorname{ctg}\alpha \geqslant 2$, то есть $\alpha \leqslant \operatorname{arcctg} 2$. Равенство реализуется в случае $R = r$. $\square$

Олимпиада школьников СПбГУ по математике.

Заключительный этап. 2017/2018 учебный год.

Задания для 8-9 классов

(Правильное и полное решение каждой задачи оценивается в 20 баллов)

Олимпиада школьников СПбГУ по математике.
Заключительный этап. 2017/2018 учебный год. 8-9 классы.

Вариант 1

1. Можно ли все натуральные числа от 1 до 2018 так расставить по кругу, что сумма любых трёх подряд стоящих чисел была нечётным числом?

Ответ: нет.

Решение. В каждой сумме трёх подряд стоящих чисел одно или три нечётных слагаемых. Во всех суммах по одному нечётному слагаемому быть не может. Действительно, весь круг покрывается 673 тройками, а всего он содержит 1009 нечётных чисел. Значит, хотя бы в одной тройке нечётных чисел не меньше двух, то есть три. Итак, есть тройка с тремя нечётными числами. Рассмотрим такую тройку и пойдём от нее по часовой стрелке, пока не встретим первое чётное число. Оно с двумя предыдущими нечётными даёт чётную сумму — противоречие.

2. Даны ненулевые вещественные числа a, b и c. Парабола $y = ax^2 + bx + c$ расположена выше прямой $y = cx$. Докажите, что парабола $y = cx^2 - bx + a$ расположена выше прямой $y = cx - b$.

Решение. То, что парабола $y = ax^2 + bx + c$ расположена выше прямой $y = cx$, равносильно двум условиям: ветви параболы направлены вверх, т. е. $a > 0$, и парабола не пересекается с прямой, т. е. уравнение $ax^2+bx+c = cx$ не имеет решений. Значит, дискриминант уравнения отрицателен, т. е. $(b-c)^2-4ac < 0$. В частности, это означает, что $c > 0$. Тогда ветви параболы $y = cx^2 - bx + a$ также направлены вверх, и нам нужно лишь доказать, что у нее нет пересечений с прямой, т. е. что уравнение $cx^2 - bx + a = cx - b$ не имеет решений. Для этого нужно проверить отрицательность его дискриминанта. Но он равен

$$\begin{aligned}(-b-c)^2 - 4c(a+b) &= b^2 + 2bc + c^2 - 4ac - 4bc = \\ &= b^2 - 2bc + c^2 - 4ac = (b-c)^2 - 4ac < 0.\end{aligned}$$

3. Произведение положительных чисел a, b, c и d равно 1. Докажите неравенство

$$\frac{a^4+b^4}{a^2+b^2} + \frac{b^4+c^4}{b^2+c^2} + \frac{c^4+d^4}{c^2+d^2} + \frac{d^4+a^4}{d^2+a^2} \geqslant 4.$$

Первое решение. Поскольку $2(a^4+b^4) \geqslant (a^2+b^2)^2$, справедливо неравенство

$$\frac{a^4+b^4}{a^2+b^2} \geqslant \frac{\frac{1}{2}(a^2+b^2)^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2+b^2}{2}.$$

Сложив его с тремя аналогичными неравенствами, получим, что левая часть доказываемого неравенства не меньше, чем $a^2+b^2+c^2+d^2 \geqslant 2ab+2cd \geqslant 4\sqrt{abcd} = 4$.

Второе решение. Заметим, что $\frac{a^4+b^4}{a^2+b^2} \geqslant ab$. Действительно, это неравенство после домножения на знаменатель превращается в неравенство

$$(a^3-b^3)(a-b) = a^4+b^4-a^3b-ab^3 \geqslant 0.$$

Но в таком виде оно очевидно, поскольку скобки в левой части имеют одинаковый знак, и их произведение неотрицательно.

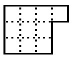
Следовательно,

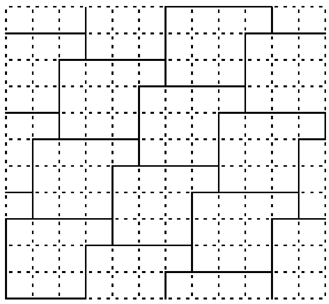
$$\frac{a^4+b^4}{a^2+b^2}+\frac{b^4+c^4}{b^2+c^2}+\frac{c^4+d^4}{c^2+d^2}+\frac{d^4+a^4}{d^2+a^2} \geqslant ab+bc+cd+da \geqslant 4.$$

В последнем неравенстве мы дважды воспользовались неравенством о средних для двух чисел: $ab+cd \geqslant 2\sqrt{ab\cdot cd}=2$ и $bc+da \geqslant 2\sqrt{bc\cdot da}=2$.

4. Клетки бесконечного клетчатого листа бумаги красятся в k цветов (каждая клетка красится целиком в один цвет). При каком наибольшем k в каждом клетчатом прямоугольнике со сторонами 3 и 4 встретятся клетки всех этих цветов?

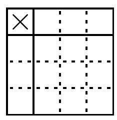
Ответ: 10.

Решение. Разобьем бесконечный клетчатый лист бумаги на десятиклеточные фигурки вида  так, как показано на рисунке.



Требуемая раскраска в 10 цветов получится, если раскрасить одну такую фигуру в 10 цветов, а остальные раскрасить ровно таким же способом.

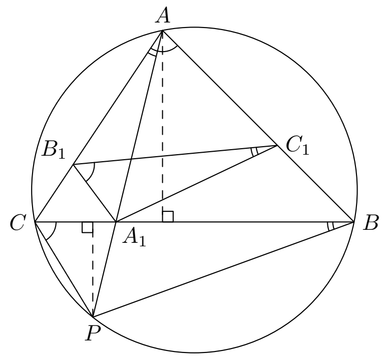
Очевидно, что более чем в 12 цветов требуемым образом покрасить лист нельзя. Пусть есть раскраска в 11 или 12 цветов. Предположим, что нашлась такая раскраска в 11 цветов, что в каждом квадрате 3×3 все цвета различны. Рассмотрим один такой квадрат. В содержащем его прямоугольнике 3×4 имеется лишь 11 различных цветов. Поэтому в дополнительной полоске 3×1 какие-то два цвета совпадают. Тогда в квадрате 3×3, содержащем эту полоску, какие-то два цвета совпадают.



Пусть у нас есть раскраска в n цветов, где n равно 11 или 12. Выберем квадрат 3×3, в котором не более $n-3$ разных цветов. Достроим его до прямоугольников 3×4 и 4×4 так, как показано на рисунке. Тогда в полосках 3×1 и 1×3 представлены одинаковые тройки цветов. Накроем горизонтальным прямоугольником 3×4 клетку, помеченную крестиком. Тогда этот прямоугольник будет содержать 5 клеток из полосок, значит, в нем имеется не менее двух пар клеток одного цвета, поэтому общее количество цветов не превосходит 10. Противоречие.

5. Дан треугольник ABC. На его сторонах BC, CA и AB соответственно выбраны такие точки A_1, B_1 и C_1, что четырехугольник $AB_1A_1C_1$ является вписанным. Докажите, что

$$\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} \leqslant \left(\frac{B_1C_1}{AA_1}\right)^2.$$



Решение. Продлим отрезок AA_1 до пересечения с описанной окружностью треугольника ABC и обозначим точку пересечения через P. Из вписанности четырехугольников $AB_1A_1C_1$ и $ABPC$ имеем равенства углов:

$$\angle A_1B_1C_1 = \angle A_1AC_1 = \angle PAB = \angle PCB \quad \text{и}$$
$$\angle A_1C_1B_1 = \angle A_1AB_1 = \angle PAC = \angle PBC.$$

Следовательно, треугольники $A_1B_1C_1$ и PCB подобны по двум углам. Тогда

$$\frac{S_{\triangle A_1B_1C_1}}{S_{\triangle PCB}} = \frac{B_1C_1^2}{BC^2}.$$

С другой стороны,

$$\frac{S_{\triangle PCB}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{PA_1}{AA_1},$$

поскольку основания у них общие, а отношение высот равно отношению отрезков AA_1 и PA_1. Таким образом,

$$\frac{S_{\triangle A_1B_1C_1}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{S_{\triangle A_1B_1C_1}}{S_{\triangle PCB}} \cdot \frac{S_{\triangle PCB}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{B_1C_1^2}{BC^2} \cdot \frac{PA_1}{AA_1} \leqslant \frac{1}{4} \cdot \frac{B_1C_1^2}{AA_1^2}.$$

Последнее неравенство после сокращений и домножения на знаменатели приводится к виду $4 \cdot PA_1 \cdot AA_1 \leqslant BC^2$. Но из подобия треугольников AA_1C и BA_1P следует, что $PA_1 \cdot AA_1 = BA_1 \cdot CA_1$. Поэтому

$$4 \cdot PA_1A \cdot A_1 = 4 \cdot BA_1 \cdot CA_1 \leqslant (BA_1 + CA_1)^2 = BC^2.$$

6. При некотором натуральном n число $n^5 + n^4 + 1$ имеет ровно шесть различных натуральных делителей. Докажите, что число $n^3 - n + 1$ является квадратом натурального числа.

Решение. Очевидно, что при $n = 1$ и $n = 2$ число $n^5 + n^4 + 1$ не имеет ровно шести различных натуральных делителей. Поэтому $n \geqslant 3$. Ровно шесть делителей могут иметь лишь числа вида p^5 или p^2q, p и q — различные простые числа. Заметим, что $n^5+n^4+1 = (n^3-n+1)(n^2+n+1)$. Пусть d — наибольший общий делитель чисел n^3-n+1 и n^2+n+1. Тогда число $n-2 = (n-1)(n^2+n+1)-(n^3-n+1)$ также делится на d. Следовательно, на d будет делиться и число $7 = (n^2 + n + 1) - (n + 3)(n - 2)$. Стало быть, $d = 1$ или $d = 7$. В первом случае получаем, что один из множителей равен p^2, а другой q. Но число n^2+n+1 не может быть точным квадратом, поскольку $n^2 < n^2+n+1 < n^2+2n+1 = (n+1)^2$. Значит, квадратом будет число n^3-n+1, что и нужно доказать. В случае $d = 7$ число n^5+n^4+1 делится на 7^2, поэтому оно имеет вид 7^2q или 7^5. В случае 7^2q множители равны 7 и $7q$, где $q \neq 7$ — простое число, а в случае 7^5 множители равны 7 и 7^4, поскольку их наибольший общий делитель равен 7. Таким образом, в любом случае один из множителей n^2+n+1 и n^3-n+1 равен 7, что невозможно при $n \geqslant 3$.

Вариант 2

1. Можно ли все натуральные числа от 1 до 2018 так расставить по кругу, что все суммы по 8 стоящих подряд чисел давали различные остатки от деления на 2018?

Ответ: нет.

Решение. Допустим, что так расставить числа удалось. Просуммируем все 2018 групп из 8 стоящих подряд чисел. С одной стороны, остаток от деления этой суммы на 2018 будет равен остатку суммы всех возможных остатков от деления на 2018, т. е. будет нечётным числом. С другой стороны, каждое число на окружности будет посчитано ровно 8 раз, поэтому этот остаток будет чётным. Противоречие.

2. Найдите все такие квадратные трехчлены $ax^2 + bx + c$ с вещественными коэффициентами a, b и c, что если в трехчлене заменить любой из трех коэффициентов на 1, то получившийся квадратный трехчлен будет иметь ровно один корень.

Ответ: $\frac{1}{2} \cdot x^2 \pm \sqrt{2} \cdot x + \frac{1}{2}$.

Решение. По условию трехчлены x^2+bx+c, ax^2+x+c и ax^2+bx+1 имеют ровно по одному корню. Следовательно, у них нулевые дискриминанты. Таким образом,

$$b^2 - 4c = 1 - 4ac = b^2 - 4a = 0.$$

Из того, что первое и третье выражение равны нулю, следует, что $a = c > 0$. Тогда из равенства нулю второго выражения получим, что $a = c = \frac{1}{2}$. Стало быть, $b = \pm\sqrt{2}$.

3. Положительные числа a, b и c удовлетворяют условию $a^3+b^3+c^3 = 3$. Докажите неравенство

$$\frac{1}{a^4+3} + \frac{1}{b^4+3} + \frac{1}{c^4+3} \geqslant \frac{3}{4}.$$

Решение. Поскольку $\frac{a^4}{a^4+3} + \frac{3}{a^4+3} = 1$,

$$\frac{1}{a^4+3} + \frac{1}{b^4+3} + \frac{1}{c^4+3} = \frac{1}{3}\left(3 - \frac{a^4}{a^4+3} - \frac{b^4}{b^4+3} - \frac{c^4}{c^4+3}\right).$$

Следовательно, достаточно доказать, что выражение в скобках не меньше, чем $\frac{9}{4}$. Это равносильно неравенству

$$\frac{a^4}{a^4+3} + \frac{b^4}{b^4+3} + \frac{c^4}{c^4+3} \leqslant \frac{3}{4}.$$

Докажем, что $\frac{a^4}{a^4+3} \leqslant \frac{a^3}{4}$. Действительно, это равносильно неравенству $4a \leqslant a^4 + 3$, которое уже совсем простое:

$$a^4 + 3 = (a^4 + 1) + 2 \geqslant 2\sqrt{a^4} + 2 = 2(a^2 + 1) \geqslant 4a.$$

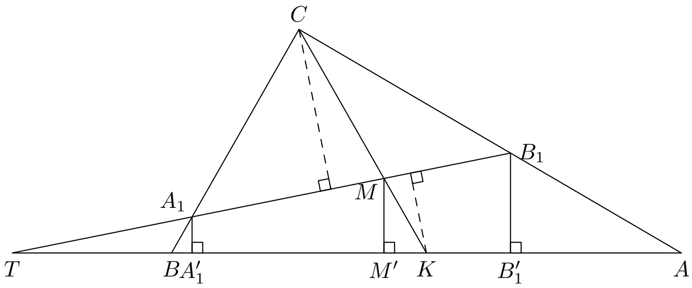
4. Какое наименьшее количество клеток нужно отметить в таблице 50×50 так, чтобы в каждой вертикальной или горизонтальной полоске 1×6 была хотя бы одна отмеченная клетка.

Ответ: 416.

Решение. Квадрат 50×50 легко разрезать на четыре прямоугольника 24×26 и центральный квадрат 2×2. Каждый прямоугольник разрезается на $4 \cdot 26 = 104$ полоски 1×6. В каждой такой полоске должна быть своя отмеченная клетка, поэтому таких клеток будет не менее 416.

Покажем, как нужным образом отметить 416 клеток. Отметим все параллельные друг другу диагонали с длинами 5, 11, 17, 23, 29, 35, 41 и 47. Всего будет отмечено $2 \cdot (5 + 11 + 17 + 23 + 29 + 35 + 41 + 47) = 416$ клеток.

5. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC. Проходящая через M прямая пересекает отрезки BC и CA в точках A_1 и B_1 соответственно. Точка K — середина стороны AB. Докажите, что $9S_{KA_1B_1} \geqslant 2S_{ABC}$.



Решение. Пусть прямые AB и A_1B_1 пересекаются в точке T, и пусть для определенности это произошло за точкой B. Поскольку точка пересечения медиан M делит медиану CK в отношении $2 : 1$, высоты, опущенные из точек C и K на прямую A_1B_1, также относятся как $2 : 1$. Тогда $2S_{\triangle KA_1B_1} = S_{\triangle CA_1B_1}$ и $S_{KA_1CB_1} = S_{\triangle KA_1B_1} + S_{\triangle CA_1B_1} = 3S_{\triangle KA_1B_1}$. Поэтому нужно доказать неравенство $3S_{KA_1CB_1} \geqslant 2S_{\triangle ABC}$. После сокращения общей площади останется неравенство $3(S_{\triangle AA_1K} + S_{\triangle BB_1K}) \leqslant S_{\triangle ABC} = 3S_{\triangle MAB}$ или, что тоже самое, неравенство $S_{\triangle AA_1K} + S_{\triangle BB_1K} \leqslant 2S_{\triangle MAB}$. Если увеличить основания треугольников AA_1K и BB_1K в два раза до отрезка AB, то площадь также увеличится в два раза, поэтому требуемое неравенство примет вид $S_{\triangle AA_1B} + S_{\triangle BB_1A} \leqslant 2S_{\triangle MAB}$. Поскольку это треугольники с одинаковым основанием, достаточно проверить соответствующее неравенство для высот. Пусть высоты, опущенные на прямую AB из точек A_1, B_1 и M, имеют основание A'_1, B'_1 и M' соответственно. Осталось доказать, что $A_1A'_1 + B_1B'_1 \leqslant 2MM'$. Это неравенство из-за подобия треугольников $TA_1A'_1$, $TB_1B'_1$ и TMM' можно переписать в виде $TA_1 + TB_1 \leqslant 2TM$, что верно, поскольку $MB_1 \leqslant MA_1$ (иначе точка пересечения AB и A_1B_1 будет лежать за точкой A).

6. Сколько решений в целых числах имеет уравнение

$$n(n+1)(n+2)(n+3) + m^5 = 5000?$$

Ответ: ни одного.

Решение. Пусть для некоторых натуральных чисел m и n выполняется равенство $n(n+1)(n+2)(n+3)+m^5 = 5000$. Поскольку $n(n+1)(n+2)(n+3) = (n^2+3n+1)^2-1$, равенство можно переписать в виде $k^2 + m^5 = 5001$, где $k = n^2 + 3n + 1$. Рассмотрим остатки от деления на 11 у левой и правой частей равенства $k^2+m^5 = 5001$. Квадраты могут давать остатки лишь 0, 1, 3, 4, 5 и 9, а пятые степени лишь остатки 0, 1 и 10. Но никакие из двух написанных остатков в сумме не дают остаток 6, который будет у числа 5001.

Вариант 3

1. Можно ли все натуральные числа от 1 до 2017 так расставить по кругу, чтобы любые два соседних числа отличались ровно на 17 или на 21?

Ответ: нет.

Решение. Поскольку соседние числа отличаются на нечётное число, они имеют разную чётность. Поэтому чётности чисел по кругу должны чередоваться. Но это невозможно, так как нечётных чисел больше, чем чётных.

2. Даны различные вещественные числа a, b и c. Квадратный трехчлен $f(x)$ удовлетворяет соотношениям $f(a) = bc$, $f(b) = ca$ и $f(c) = ab$. Найдите $f(a + b + c)$.

Ответ: $ab + bc + ca$.

Решение. Пусть $f(x) = px^2 + qx + r$. Тогда из равенств

$$bc = f(a) = pa^2 + qa + r \quad \text{и} \quad ca = f(b) = pb^2 + qb + r$$

следует, что $c(b - a) = p(a^2 - b^2) + q(a - b)$, откуда $c = -p(a + b) - q$, поскольку $a \neq b$. Аналогично получаем соотношение $b = -p(a + c) - q$. Вычтем первое равенство из второго:

$$b - c = p\big(a + b) - (a + c)\big) = p(b - c).$$

Следовательно, $p = 1$. Тогда $q = -(a + b + c)$ и $r = f(a) - pa^2 - qa = ab + bc + ca$. Стало быть,

$$\begin{aligned} f(a + b + c) &= p(a + b + c)^2 + q(a + b + c) + r = \\ &= (a + b + c)^2 - (a + b + c)^2 + (ab + bc + ca) = ab + bc + ca. \end{aligned}$$

3. Сумма положительных чисел a, b и c равна 1. Докажите неравенство

$$\frac{a^4 + b^4}{a^6 + b^6} + \frac{b^4 + c^4}{b^6 + c^6} + \frac{c^4 + a^4}{c^6 + a^6} \leqslant \frac{1}{abc}.$$

Решение. Заметим, что $\frac{a^4+b^4}{a^6+b^6} \leqslant \frac{1}{ab}$. Действительно, это неравенство после домножения на знаменатель примет вид $a^6 + b^6 - a^5b - ab^5 \geqslant 0$, что эквивалентно неравенству $(a^5 - b^5)(a - b) \geqslant 0$. В таком виде оно очевидно, поскольку скобки в левой части одного знака.

Следовательно,

$$\frac{a^4 + b^4}{a^6 + b^6} + \frac{b^4 + c^4}{b^6 + c^6} + \frac{c^4 + a^4}{c^6 + a^6} \leqslant \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = \frac{a + b + c}{abc} = \frac{1}{abc}.$$

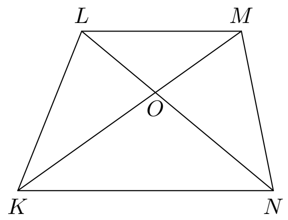
4. На клетчатой доске 50×50 Петя расставляет 50 не бьющих друг друга ладей, а Вася выбирает на доске по клеточкам квадрат $k \times k$ ($k \leqslant 50$). При каких k вне зависимости от действий Пети Вася всегда сможет выбрать квадрат, в котором не будет ни одной ладьи?

Ответ: При $k \leqslant 7$.

Решение. Покажем, как Васе выбрать квадрат 7×7. Заметим, что хотя бы в одном углу доски 50×50 не стоит ладья. Пусть для определенности это правый верхний угол. Тогда в самой верхней строке и в самом правом столбце стоит по ладье. Разобьем остальную часть доски на квадраты 7×7 начиная с левого нижнего угла. Получится 7^2 квадратов, в которых стоит не более чем $7^2 - 1$ ладья. Поэтому какой-то квадрат пустой, и его сможет выбрать Вася.

Покажем, как расставить 50 ладей так, чтобы не было даже пустого квадрата 8×8. Занумеруем строки и столбцы доски 50×50 числами от 0 до 49. Поставим ладьи в клетки с координатами $(8x + y, x + 8y)$ при всех таких целых неотрицательных x и y, при которых они помещаются на доску. Тогда легко видеть, что при любом расположении квадрата 8×8 в нем окажется хотя бы одна ладья. Отметим, что заведомо $0 \leqslant x \leqslant 6$ и $0 \leqslant y \leqslant 6$. Покажем, что среди них нет ладей, стоящих в одном ряду. Действительно, если две ладьи оказались на одной вертикали, то $8x + y = 8x' + y'$, откуда $y' - y$ делится на 8 и, значит, $y = y'$, а тогда и $x = x'$. Аналогично проверяется, что две ладьи не окажутся на одной горизонтали. Поскольку $0 \leqslant x, y \leqslant 6$ поставлено не более 49 ладей. Последовательно доставим недостающее количество ладей на свободные горизонтали и вертикали и получим нужную расстановку.

5. Дана трапеция $ABCD$. На основаниях BC и AD соответственно выбраны точки Q и S. Отрезки AQ и BS пересекаются в точке P, а отрезки CS и DQ пересекаются в точке R. Докажите, что $S_{PQRS} \leqslant \frac{1}{4} S_{ABCD}$.



Первое решение. Сначала докажем следующую лемму:

Пусть трапеция разбита диагоналями на 4 треугольника. Тогда площадь треугольника, имеющего в качестве стороны боковую сторону трапеции, не превосходит четверти площади трапеции.

Доказательство. Пусть диагонали трапеции $KLMN$ пересекаются в точке O, а ее основания — отрезки KL и MN. Тогда

$$\frac{S_{\triangle KOL}}{S_{\triangle KLM}} = \frac{OK}{OK + OM} = \frac{KL}{KL + NM} \quad \text{и} \quad \frac{S_{\triangle KLM}}{S_{\triangle KNM}} = \frac{KL}{NM}.$$

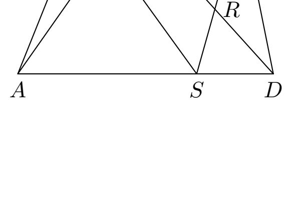
Следовательно,

$$S_{\triangle KOL} = \frac{KL}{KL + NM} \cdot S_{\triangle KLM} = \frac{KL \cdot NM}{(KL + NM)^2} \cdot S_{KLMN} \leqslant \frac{S_{KLMN}}{4}.$$

Лемма доказана.

По лемме $S_{\triangle PQS} \leqslant \frac{1}{4} S_{ABQS}$ и $S_{\triangle QRS} \leqslant \frac{1}{4} S_{CDSQ}$. Тогда

$$S_{PQRS} = S_{\triangle SPQ} + S_{\triangle SRQ} \leqslant \frac{1}{4}(S_{ABQS} + S_{CDSQ}) = \frac{1}{4} S_{ABCD}.$$



Второе решение. Площади треугольников ABS и AQS равны, поскольку у них общее основание и равные высоты. Следовательно,

$$S_{\triangle ABP} + S_{\triangle APS} = S_{\triangle ABS} = S_{\triangle AQS} = S_{\triangle PQS} + S_{\triangle APS}.$$

Стало быть, $S_{\triangle PQS} = S_{\triangle ABP}$ (обозначим их общее значение через s_1). Аналогично, $S_{\triangle PRS} = S_{\triangle CDR}$ (обозначим их общее значение через s_2). С другой стороны,

$$\begin{aligned} s_1^2 = S_{\triangle ABP} S_{\triangle PQS} &= \frac{1}{2} AP \cdot PB \sin \angle APB \cdot \frac{1}{2} QP \cdot PS \sin \angle APB = \\ &= \frac{1}{2} AP \cdot PS \sin \angle APS \cdot \frac{1}{2} BP \cdot PQ \sin \angle APS = S_{\triangle APS} S_{\triangle BPQ}. \end{aligned}$$

Следовательно, $S_{\triangle APS} + S_{\triangle BPQ} \geqslant 2\sqrt{S_{\triangle APS} S_{\triangle BPQ}} = 2s_1$. Аналогично получаем, что $S_{\triangle DRS} + S_{\triangle CRQ} \geqslant 2s_2$. Таким образом,

$$\begin{aligned} S_{ABCD} = \big(2s_1 + S_{\triangle APS} + S_{\triangle BPQ}\big) + \big(2s_2 + S_{\triangle DRS} + S_{\triangle CRQ}\big) \geqslant \\ \geqslant 4s_1 + 4s_2 = 4S_{PQRS}. \end{aligned}$$

6. Найдите все такие натуральные числа a и b, что для всех натуральных n число $(an+1)^6 + b$ делится на n^2+n+1.

Ответ: $a = 2$, $b = 27$.

Решение. Заметим, что $n^3 - 1$ делится на n^2+n+1. Следовательно, число n^3 дает остаток 1 от деления на n^2+n+1. Будем считать остаток от деления числа $(an+1)^6 + b$ на n^2+n+1. Для этого раскроем скобки:

$$(an+1)^6 + b = a^6n^6 + 6a^5n^5 + 15a^4n^4 + 20a^3n^3 + 15a^2n^2 + 6an + 1 + b.$$

Остаток будет равен остатку числа

$$\begin{aligned} a^6 + 6a^5n^2 + 15a^4n + 20a^3 + 15a^2n^2 + 6an + 1 + b = \\ = (6a^5 + 15a^2)n^2 + (15a^4 + 6a)n + (a^6 + 20a^3 + 1 + b) = \\ = An^2 + Bn + C. \end{aligned}$$

Если число $An^2 + Bn + C$ делится на число n^2+n+1, то на него делится и число $(B-A)n + (C-A) = (An^2+Bn+C) - A(n^2+n+1)$. Но при больших n число n^2+n+1 больше, чем $|(B-A)n + (C-A)|$, и делимость возможна лишь в случае, когда $A = B = C$. Равенство $A = B$ означает, что $6a^5 + 15a^2 = 15a^4 + 6a$, откуда либо $a = 1$, либо $5a = 2(a^2+1)$, т. е. $a = 2$. В первом случае равенство $B = C$ невозможно, во втором случае условие $B = C$ равносильно $b = 27$.

Вариант 4

1. Можно ли все натуральные числа от 1 до 2018 так расставить по кругу, чтобы сумма любых четырёх подряд стоящих чисел была нечётным числом?

Ответ: нет.

Решение. В каждой сумме четырёх подряд стоящих чисел одно или три нечётных слагаемых. Во всех суммах ровно по одному чётному (нечётному) слагаемому быть не может. Действительно, весь круг покрывается 505 четвёрками, а всего он содержит 1009 чётных чисел. Значит, хотя бы в одной четвёрке нечётных чисел не меньше двух, то есть три. Значит, есть четвёрка с одним чётным числом и четвёрка с тремя нечётными числами. Рассмотрим такую четвёрку и пойдём от неё по часовой стрелке. Следующая четвёрка получается выбрасыванием одного числа из предыдущей и добавлением одного нового числа. Заметим, что добавленное и выброшенное числа должны быть одной чётности, иначе изменится чётность суммы чисел в четвёрке. Поэтому в следующей четвёрке также ровно три нечётных числа. Рассуждая таким образом, мы получим, что во всех четверках ровно три нечётных числа. Противоречие.

2. Найдите все такие квадратные трехчлены ax^2+bx+c с вещественными коэффициентами a, b и c, что если в трехчлене увеличить любой из трех коэффициентов на 1, то получившийся квадратный трехчлен будет иметь ровно один корень.

Ответ: $\frac{1}{8}\cdot x^2-\frac{3}{4}\cdot x+\frac{1}{8}$.

Решение. По условию трехчлены $(a+1)x^2+bx+c$, $ax^2+(b+1)x+c$ и $ax^2+bx+(c+1)$ имеют ровно по одному корню. Следовательно, у них нулевые дискриминанты. Таким образом,

$$b^2-4(a+1)c=(b+1)^2-4ac=b^2-4a(c+1)=0.$$

Из того, что первое и третье выражение равны нулю, следует, что $a=c$. Тогда из равенства нулю второго выражения получим, что $b+1=\pm 2a$. После исключения b и c из последнего равенства получится уравнение $0=(-1\pm 2a)^2-4a(a+1)=1\mp 4a-4a$. Значит, знак $\mp$ является минусом. Тогда $c=a=\frac{1}{8}$ и $b=-1+2\cdot\frac{1}{8}=-\frac{3}{4}$.

3. Положительные числа a, b и c удовлетворяют условию $a^2+b^2+c^2=3$. Докажите неравенство

$$\frac{a}{a+5}+\frac{b}{b+5}+\frac{c}{c+5}\leqslant\frac{1}{2}.$$

Решение. Заметим, что $\frac{a}{a+5}=1-\frac{5}{a+5}$, поэтому

$$\frac{a}{a+5}+\frac{b}{b+5}+\frac{c}{c+5}=3-\left(\frac{5}{a+5}+\frac{5}{b+5}+\frac{5}{c+5}\right).$$

Следовательно, достаточно доказать, что выражение в скобках не меньше $\frac{5}{2}$. Это равносильно неравенству

$$\frac{1}{a+5}+\frac{1}{b+5}+\frac{1}{c+5}\geqslant\frac{1}{2}$$

или, что тоже самое, неравенству

$$\big((a+5)+(b+5)+(c+5)\big)\left(\frac{1}{a+5}+\frac{1}{b+5}+\frac{1}{c+5}\right)\geqslant\frac{a+b+c+15}{2}. \qquad (*)$$

Но левая часть после раскрытия скобок имеет вид

$$3+\left(\frac{b+5}{a+5}+\frac{a+5}{b+5}\right)+\left(\frac{c+5}{a+5}+\frac{a+5}{c+5}\right)+\left(\frac{c+5}{a+5}+\frac{c+5}{b+5}\right),$$

где каждая скобка не меньше двух, поскольку является суммой взаимо обратных чисел. Таким образом, достаточно доказать, что $9 \geqslant \frac{a+b+c+15}{2}$, то есть $a+b+c \leqslant 3$. Но это неравенство справедливо, поскольку $(a+b+c)^2 \leqslant 3(a^2+b^2+c^2)=9$.

Замечание. Неравенство $(*)$ можно объяснить и другими способами. Например, по неравенству о средних

$$(a+5)+(b+5)+(c+5) \geqslant 3\sqrt[3]{(a+5)(b+5)(c+5)} \quad \text{и}$$

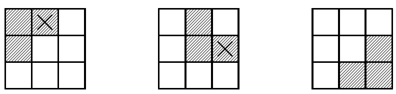
$$\frac{1}{a+5}+\frac{1}{b+5}+\frac{1}{c+5} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{a+5}\cdot\frac{1}{b+5}\cdot\frac{1}{c+5}}=\frac{3}{\sqrt[3]{(a+5)(b+5)(c+5)}},$$

поэтому левая часть не меньше 9. Правая часть не больше 9, поскольку $(a+b+c)^2 \leqslant 3(a^2+b^2+c^2)=9$.

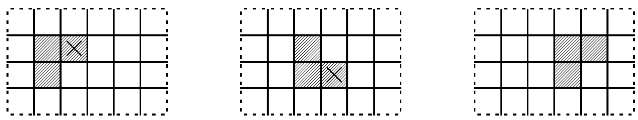
4. Дана клетчатая доска $m \times n$ $(m, n \geqslant 2)$. *Уголком* называется трёхклеточная фигура, состоящая из клетки (назовём её центральной) и двух соседних с ней по стороне клеток (их мы назовем боковыми). Картонный уголок накрывает левый верхний угол и две соседние с ним клетки доски. За одну операцию можно выбрать одну из боковых клеток уголка и повернуть уголок на 90° относительно центра этой клетки, при этом после поворота уголок должен полностью оставаться на доске. При каких m и n с помощью таких операций можно переместить уголок так, что его центральная клетка будет накрывать правый нижний угол доски?

Ответ: при нечётных m и n.

Решение. Покажем как добиться нужного перемещения при нечётных m и n. При $m=n=3$ так сделать можно (на рисунке крестиком отмечена клетка, относительно которой происходит поворот).

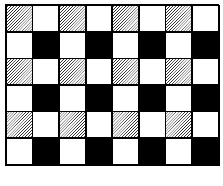


На следующем рисунке показано, как переместить уголок с сохранением его ориентации на две клетки вправо. Проделаем это действие $\frac{m-3}{2}$ раза. Аналогичным действием можно сместить уголок на две клетки вниз



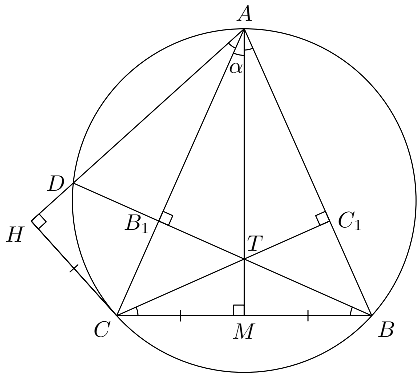
с сохранением его ориентации. Проделаем это действие $\frac{n-3}{2}$ раза. А затем переместим уголок так, как мы это делали для $m=n=3$, и он займет нужную нам позицию.

Пусть теперь одна из сторон доски чётная. Покажем, что выполнить требуемое перемещение не удастся. Предположим, что оно существует. Рассмотрим шахматную раскраску доски, но клетки, у которых обе координаты нечётные, покрасим в серый цвет.



Заметим, что при любом повороте уголка центральная клетка будет располагаться на серой или чёрной клетке доски, а боковые клетки — на белых. Кроме того, при любом повороте цвет, на котором находится центральная клетка, меняется на противоположный (т. е. с серого на чёрный, а с чёрного — на серый). Поскольку в конце уголок нужно повернуть на 180°, в общей сложности будет сделано чётное число поворотов. Следовательно, в конце перемещения центральная клетка снова окажется на серой клетке доски. Поэтому обе её координаты имеют ту же чётность, что и начальная клетка доски. Значит, они нечётны, т. е. m и n нечётны.

5. Окружность ω описана вокруг равнобедренного треугольника ABC. Продолжение высоты BB_1, опущенной на боковую сторону AC, пересекает окружность ω в точке D. Из точки C опущены перпендикуляры CC_1 на боковую сторону AB и CH на прямую AD. Докажите, что $S_{BCB_1C_1} \geqslant S_{HCC_1}$.



Решение. Пусть M — середина основания BC, а T — точка пересечения высот треугольника ABC. Из равнобедренности треугольника ABC отрезок AM является биссектрисой и высотой. Положим $\angle BAC = 2\alpha$. Тогда

$$\angle CAD = \angle CBD = \angle CBB_1 = 90^\circ - \angle BCA = \alpha.$$

Прямоугольные треугольники AMC и AHC равны, поскольку они имеют общую сторону и равные углы $\angle CAM = \alpha = \angle CAH$. В частности, $CH = CM$, и точки M и H симметричны относительно прямой AC. Точки D и T также симметричны относительно прямой AC, поскольку прямоугольные треугольники AB_1D и AB_1T равны. Тогда треугольники DCH и TCM симметричны относительно прямой AC. Поэтому $\angle DCH = \angle TCM$ и

$$\angle HCC_1 = \angle DCB = 180^\circ - \angle DAB = 180^\circ - 3\alpha.$$

С другой стороны, четырехугольник CB_1DH вписанный (у него два противоположных угла прямые), откуда $\angle CHB_1 = \angle CDB_1 = \angle BAC = 2\alpha$. Наконец, четырехугольник BCB_1C_1 также вписанный (так как $\angle BB_1C = \angle CC_1B = 90^\circ$), поэтому $\angle CC_1B = \angle CBB_1 = \alpha$. Стало быть, в четырехугольнике CC_1B_1H сумма трех углов

$$\angle CC_1B + \angle CHB_1 + \angle HCC_1 = \alpha + 2\alpha + (180^\circ - 3\alpha) = 180^\circ.$$

Следовательно, точка B_1 лежит на отрезке HC_1. Поэтому требуемое неравенство можно записать в виде

$$S_{\triangle CC_1B_1} + S_{\triangle CC_1B} = S_{BCB_1C_1} \geqslant S_{\triangle HCC_1} = S_{\triangle HCC_1B_1} = S_{\triangle CC_1B_1} + S_{\triangle CHB_1}.$$

Значит, осталось понять, что $S_{\triangle CC_1B} \geqslant S_{\triangle CHB_1}$. Но треугольники CHB_1 и CMB_1 симметричны относительно прямой AC, поэтому их площади равны, и надо лишь показать, что $S_{\triangle CC_1B} \geqslant S_{\triangle CMB_1}$. Это уже очевидно, поскольку у этих треугольников одинаковые высоты, а основания отличаются в два раза.

6. Найдите все пары натуральных чисел m и n, таких что $m+1$ делится на n и n^2-n+1 делится на m.

Ответ: $(m,n)=(1,1)$, $(1,2)$ и $(3,2)$.

Решение. Если $n=1$, то $m=1$, и такая пара, очевидно, подходит. Будем считать, что $n \geqslant 2$. Пусть $m+1=kn$. Числа m и n взаимно просты, поскольку, если d их общий делитель, то $1=(m+1)-m=kn-m$ делится на d. Кроме того, $m \leqslant n^2-n+1 \leqslant n^2-1$, поэтому $kn=m+1 \leqslant n^2$ и $k \leqslant n$. Заметим, что

$$n(n+k-1)=n^2-n+kn=(n^2-n+1)+(kn-1)$$

делится на m. Тогда на m делится число $n+k-1$. Следовательно, $m \leqslant n+k-1 \leqslant 2n-1$. Стало быть, $m+1$ не превосходит $2n$ и делится на n. Поэтому $m+1=n$ или $m+1=2n$. В первом случае $n^2-n+1=(m+1)^2-(m+1)+1=m^2+m+1$, и из делимости n^2-n+1 на m вытекает, что $m=1$ и $n=2$. Эта пара нам подходит. Во втором случае $m \geqslant 3$ и $n^2-n+1=\left(\frac{m+1}{2}\right)^2-\left(\frac{m+1}{2}\right)+1=\frac{m^2+3}{4}$. Из делимости n^2-n+1 на m мы получаем, что m^2+3 также делится на m и, значит, $m=3$ и $n=2$. Эта пара нам тоже подходит.

Олимпиада школьников СПбГУ по математике.

Заключительный этап. 2017/2018 учебный год.

Задания для 6-7 классов

(Правильное и полное решение каждой задачи оценивается в 20 баллов)

Олимпиада школьников СПбГУ по математике.

Заключительный этап. 2017/2018 учебный год. 6 – 7 классы.

Вариант 1

1. *Докажите, что для любого натурального n существуют такие целые числа x и y, что $x^2 + y^2 - 2017$ делится на n.*

Решение. В качестве x и y можно взять числа 44 и 9. Они годятся для всех n, поскольку $44^2 + 9^2 - 2017 = 0$. $\square$

2. *Костя «объединил» таблицу сложения и таблицу умножения натуральных чисел: он построил таблицу, у которой строки и столбцы соответствуют натуральным числам, и заполнил все клетки: в клетку на пересечении r-й строки и s-го столбца он поместил число $rs + (s + r)$.*

	1	2	3	…
1	1	2	3	…
2	2	4	6	…
…	…			

Таблица умножения

$+$

	1	2	3	…
1	2	3	4	…
2	3	4	5	…
…	…			

Таблица сложения

$=$

	1	2	3	…
1	3	5	7	…
2	5	8	11	…
…	…			

Костина таблица

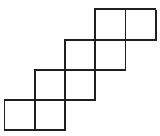
Посмотрев внимательно, Костя обнаружил, что некоторое натуральное число n в таблице отсутствует (оно присутствует только в подписях к n-й строке и n-му столбцу, а в клетках самой таблицы его не оказалось). Докажите, что тогда число $n + 1$ — простое.

Решение. Если число $n + 1$ не простое, то его можно разложить в произведение двух множителей, бо́льших 1. Запишем их в виде $r+1$ и $s+1$, где r и s — натуральные числа. Тогда

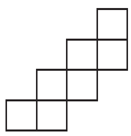
$$n = n + 1 - 1 = (r + 1)(s + 1) - 1 = rs + s + r,$$

то есть число n содержится в таблице. $\square$

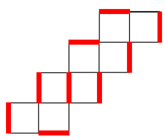
3. *Будем называть лесенкой фигуру, состоящую из клеточек, расположенных в виде ступенек (см. на рисунке пример лесенок из 7 и 8 клеток). На рисунке, изображающем лесенку, нарисуем разметку: обведем красным цветом несколько непересекающихся сторон клеток так, чтобы каждая вершина каждой клетки принадлежала ровно одному красному отрезку. Сколько различных разметок имеется у лесенки из 199 клеток?*



Лесенка из 8 клеток



Лесенка из 7 клеток



Разметка

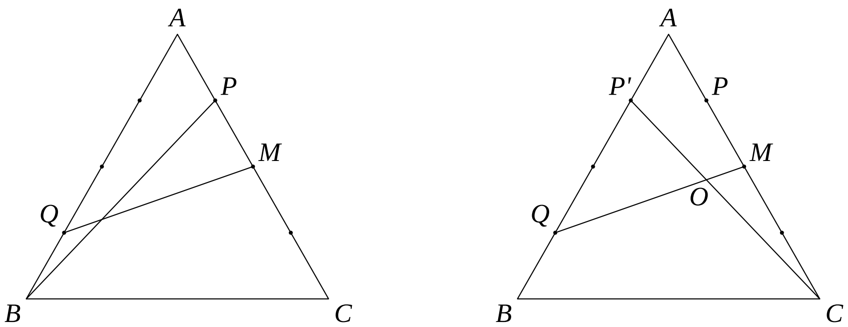
Ответ: 200.

Решение. Обозначим через L_n количество разметок лесенки из n клеток. Пусть точка A — левый нижний угол левой нижней клетки лесенки.

Если красный отрезок, содержащий точку A, вертикальный, то удалим из лесенки левую нижнюю клетку. Оставшаяся фигура представляет собой перевернутую лесенку из $n-1$ клетки. Добавляя к любой из L_{n-1} разметок этой лесенки красный отрезок, содержащий A, мы получаем разметку исходной лесенки. Таким образом, имеется ровно L_{n-1} разметок исходной лесенки, в которых отрезок, содержащий точку A, вертикален. Если же красный отрезок, содержащий точку A, горизонтальный, то, как нетрудно видеть, разметка всей лесенки в этом случае достраивается однозначно.

Таким образом, справедливо соотношение $L_n = L_{n-1} + 1$. Учитывая очевидное краевое условие $L_1 = 2$, мы сразу находим, что $L_n = n + 1$. $\square$

4. *Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием BC. Точка M — середина стороны AC, точка P — середина AM, на стороне AB отмечена точка Q так, что $AQ = 3BQ$. Докажите, что $BP + MQ > AC$.*



Решение 1. По неравенству треугольника

$$MQ + MA > AQ \iff MQ + \tfrac{1}{2}AC > \tfrac{3}{4}AB \iff MQ > \tfrac{1}{4}AC = PA.$$

Тогда

$$BP + MQ > BP + PA > AB = AC. \quad \square$$

Решение 2. Пусть точка P' симметрична P относительно оси симметрии треугольника. Очевидно, $BP = CP'$. Обозначим через O точку пересечения отрезков CP' и MQ. Дважды применяя неравенство треугольника, мы получим

$$CP' + MQ = (CO + OM) + (QO + OP') > CM + QP' = \tfrac{1}{2}AC + \tfrac{1}{2}AB = AC. \quad \square$$

5. *Беговая дорожка представляет собой окружность длиной 1 км. Вдоль дуги, длина которой равна 100 м, построены зрительские трибуны. Можно ли запустить по этой дорожке в одном и том же направлении 10 бегунов, движущихся с постоянными скоростями — 20, 21, …, 29 км/ч — так, чтобы в любой момент времени напротив трибун пробегал хотя бы один из бегунов?*

(Место старта каждого бегуна можно назначить в любом месте, независимо от остальных бегунов.)

Ответ: нет.

Решение. Пусть Δ — интервал дорожки, идущий вдоль трибун (без концевых точек). Рассмотрим промежуток времени, за который каждый из бегунов пробежит целое число кругов (например, 29! часов). Поскольку трибунная дуга составляет $\frac{1}{10}$ длины дорожки, каждый бегун ровно $\frac{1}{10}$ всего этого времени будет находиться возле трибун. Поскольку бегунов ровно 10, требование задачи обеспечивается лишь тогда, когда «трибунные интервалы» бегунов не налегают друг на друга. Иными словами, в промежутке Δ в любой момент времени может быть лишь один бегун. Покажем, что это не так. Пусть A и B — спортсмены, бегущие со скоростями 20 и 21 км/ч соответственно. Допустим, B догнал A в какой-то точке дорожки вне Δ. До начала трибун им надо пробежать не более 900 метров, и бегун A преодолеет это расстояние максимум за 0,045 часа. Когда A добежит до начала трибун, B будет опережать его не более чем на 45 метров. После этого A и B будут некоторое время находиться в Δ вместе. $\square$

6. *На доске написано 10 000 нечетных чисел, не делящихся на 5. Докажите, что можно выбрать несколько чисел так, что их сумма будет оканчиваться на 1379. (Если выбирается одно число, то оно и равно сумме.)*

Решение. Проверим вначале два утверждения.

1) *Если число m взаимно просто с 10 000, а числа p и q дают разные остатки при делении на 10 000, то числа pm и qm также дают разные остатки.* Действительно, $pm-qm=(p-q)m$. Первый множитель не делится на 10 000, а второй взаимно прост с 10 000.

2) *Если число a взаимно просто с 10 000, то существует такое число a', взаимно простое с 10 000, что $aa' \mod 10\,000 = 1$.* Действительно, в силу 1) остатки от деления на 10 000 чисел $a, 2a, \ldots, 9999a$ такие же, как у чисел $1, 2, \ldots, 9999$, поэтому среди них есть 1. Если a' и 10 000 имеют общий делитель, то он будет также делителем единицы и потому равен 1.

Докажем по индукции, что если у нас имеется $n \leqslant 10\,000$ чисел, взаимно простых с 10 000, то всевозможные суммы, составленные из этих чисел, дают не менее n различных остатков по модулю 10 000. База $n=1$ тривиальна. Пусть мы умеем составлять из $n-1$ числа суммы $S_1, \ldots, S_{n-1}$ с различными остатками $b_1, \ldots, b_{n-1}$ (занумеруем остатки по возрастанию). Добавим новое число a. Мы можем считать, что $a=1$. Действительно, пусть для $a=1$ все доказано. В общем случае подберем a' в соответствии с 2) и домножим все числа на a'. Суммы этих чисел также домножатся на a', и в силу 1) количество различных остатков от деления сумм на 10 000 не изменится. При этом число a заменится на $aa' \pmod{10\,000} = 1$, и по предположению различных остатков будет не менее n.

Пусть $a=1$. Если $b_1, \ldots, b_{n-1}$ возрастают с шагом 1, то сумма $S_{n-1}+a$ дает новый остаток $b_{n-1}+1 \pmod{10\,000}$. В противном случае найдется такое $k<n-1$, что $b_{k+1}-b_k \geqslant 2$. Тогда сумма S_k+a дает новый остаток b_k+1. $\square$

Вариант 2

1. *Докажите, что для любого натурального n существуют такие целые числа x и y, что $x^2 + y^2 - 2018$ делится на n.*

Решение. В качестве x и y можно взять числа 43 и 13. Они годятся для всех n, поскольку $43^2 + 13^2 - 2018 = 0$. $\square$

2. *Костя «объединил» таблицу сложения и таблицу умножения натуральных чисел: он построил таблицу, у которой строки и столбцы соответствуют натуральным числам, начиная с 3, и заполнил все клетки: в клетку на пересечении r-й строки и s-го столбца он поместил число $rs - (s + r)$.*

	3	4	5	...
3	9	12	15	...
4	12	16	20	...
...	...			

Таблица умножения

$-$

	3	4	5	...
3	6	7	8	...
4	7	8	9	...
...	...			

Таблица сложения

$=$

	3	4	5	...
3	3	5	7	...
4	5	8	11	...
...	...			

Костина таблица

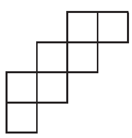
Посмотрев внимательно, Костя обнаружил, что некоторое натуральное число $n > 3$ в его таблице отсутствует (оно присутствует только в подписях к n-й строке и n-му столбцу, а в клетках самой таблицы его не оказалось). Докажите, что тогда число $n + 1$ — простое.

Решение. Если число $n + 1$ не простое, то его можно разложить в произведение двух множителей, бо́льших 1. Запишем их в виде $r - 1$ и $s - 1$, где r и s — натуральные числа, $r, s \geqslant 3$. Тогда

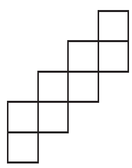
$$n = n + 1 - 1 = (r - 1)(s - 1) - 1 = rs - s - r,$$

то есть число n содержится в таблице. $\square$

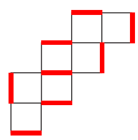
3. *Будем называть лесенкой фигуру, состоящую из клеточек, расположенных в виде ступенек (см. на рисунке пример лесенок из 7 и 8 клеток). На рисунке, изображающем лесенку, нарисуем разметку: обведем красным цветом несколько непересекающихся сторон клеток так, чтобы каждая вершина каждой клетки принадлежала ровно одному красному отрезку. Сколько различных разметок имеется у лесенки из 200 клеток?*



Лесенка из 7 клеток



Лесенка из 8 клеток



Разметка

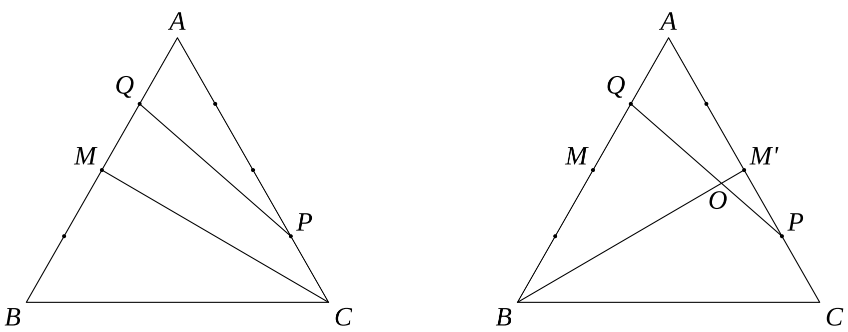
Ответ: 201.

Решение. Обозначим через L_n количество разметок лесенки из n клеток. Пусть точка A — левый нижний угол левой нижней клетки лесенки.

Если красный отрезок, содержащий точку A, горизонтальный, то удалим из лесенки левую нижнюю клетку. Оставшаяся фигура представляет собой перевернутую лесенку из $n-1$ клетки. Добавляя к любой из L_{n-1} разметок этой лесенки красный отрезок, содержащий A, мы получаем разметку исходной лесенки. Таким образом, имеется ровно L_{n-1} разметок исходной лесенки, в которых отрезок, содержащий точку A, горизонтален. Если же красный отрезок, содержащий точку A, вертикальный, то, как нетрудно видеть, разметка всей лесенки в этом случае достраивается однозначно.

Таким образом, справедливо соотношение $L_n = L_{n-1} + 1$. Учитывая очевидное краевое условие $L_1 = 2$, мы сразу находим, что $L_n = n + 1$. $\square$

4. *Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием BC. Точка M — середина стороны AB, точка Q — середина AM, на стороне AC отмечена точка P так, что $AP = 3PC$. Докажите, что $PQ + CM > AB$.*



Решение 1. По неравенству треугольника

$$PQ + QA > AP \iff PQ + \tfrac{1}{4}AB > \tfrac{3}{4}AC \iff PQ > \tfrac{1}{2}AB = MA.$$

Тогда

$$PQ + CM > CM + MA > AC = AB. \quad \square$$

Решение 2. Пусть точка M' симметрична M относительно оси симметрии треугольника. Очевидно, $CM = BM'$. Обозначим через O точку пересечения отрезков BM' и PQ. Дважды применяя неравенство треугольника, мы получим

$$BM' + QP = (BO + OQ) + (PO + OM') > BQ + PM' = \tfrac{3}{4}AB + \tfrac{1}{4}AC = AB. \quad \square$$

5. *Беговая дорожка представляет собой окружность длиной 2 км. Вдоль дуги, длина которой равна 100 м, построены зрительские трибуны. Можно ли запустить по этой дорожке в одном и том же направлении 20 бегунов, движущихся с постоянными скоростями — 10, 11, ..., 29 км/ч — так, чтобы в любой момент времени напротив трибун пробегал хотя бы один из бегунов? (Место старта каждого бегуна можно назначить в любом месте, независимо от остальных бегунов.)*

Ответ: нет.

Решение. Пусть Δ — интервал дорожки, идущий вдоль трибун (без концевых точек). Рассмотрим промежуток времени, за который каждый из бегунов пробежит целое число кругов (например, 29! часов). Поскольку трибунная дуга составляет $\frac{1}{20}$ длины дорожки, каждый бегун ровно $\frac{1}{20}$ всего этого времени будет находиться возле трибун. Поскольку бегунов ровно 20, требование задачи обеспечивается лишь тогда, когда «трибунные интервалы» бегунов не налегают друг на друга. Иными словами, в промежутке Δ в любой момент времени может быть лишь один бегун. Покажем, что это не так. Пусть A и B — спортсмены, бегущие со скоростями 20 и 21 км/ч соответственно. Допустим, B догнал A в какой-то точке дорожки вне Δ. До начала трибун им надо пробежать не более 1900 метров, и бегун A преодолеет это расстояние максимум за 0,095 часа. Когда A добежит до начала трибун, B будет опережать его не более чем на 95 метров. После этого A и B будут некоторое время находиться в Δ вместе. $\square$

6. *На доске написано 1000 нечетных чисел, не делящихся на 5. Докажите, что можно выбрать несколько чисел, так что их сумма будет оканчиваться на 713. (Если выбирается одно число, то оно и равно сумме.)*

Решение. Проверим вначале два утверждения.

1) *Если число m взаимно просто с 10 000, а числа p и q дают разные остатки при делении на 10 000, то числа pm и qm также дают разные остатки.* Действительно, $pm-qm=(p-q)m$. Первый множитель не делится на 10 000, а второй взаимно прост с 10 000.

2) *Если число a взаимно просто с 10 000, то существует такое число a', взаимно простое с 10 000, что $aa' \mod 10\,000 = 1$.* Действительно, в силу 1) остатки от деления на 10 000 чисел $a, 2a, \ldots, 9999a$ такие же, как у чисел $1, 2, \ldots, 9999$, поэтому среди них есть 1. Если a' и 10 000 имеют общий делитель, то он будет также делителем единицы и потому равен 1.

Докажем по индукции, что если у нас имеется $n \leqslant 10\,000$ чисел, взаимно простых с 10 000, то всевозможные суммы, составленные из этих чисел, дают не менее n различных остатков по модулю 10 000. База $n=1$ тривиальна. Пусть мы умеем составлять из $n-1$ числа суммы $S_1, \ldots, S_{n-1}$ с различными остатками $b_1, \ldots, b_{n-1}$ (занумеруем остатки по возрастанию). Добавим новое число a. Мы можем считать, что $a=1$. Действительно, пусть для $a=1$ все доказано. В общем случае подберем a' в соответствии с 2) и домножим все числа на a'. Суммы этих чисел также домножатся на a', и в силу 1) количество различных остатков от деления сумм на 10 000 не изменится. При этом число a заменится на $aa' \pmod{10\,000} = 1$, и по предположению различных остатков будет не менее n.

Пусть $a=1$. Если $b_1, \ldots, b_{n-1}$ возрастают с шагом 1, то сумма $S_{n-1}+a$ дает новый остаток $b_{n-1}+1 \pmod{10\,000}$. В противном случае найдется такое $k < n-1$, что $b_{k+1}-b_k \geqslant 2$. Тогда сумма S_k+a дает новый остаток b_k+1. $\square$