САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Олимпиада школьников СПбГУ по математике

Примеры заданий отборочного этапа

2017/2018 учебный год

Олимпиада школьников СПбГУ по математике
Примеры заданий отборочного этапа
2017/2018 учебный год

Задания для 6–9 классов

1. (10 баллов) *В мастерской имеются бусины двух форм — «кубики» и «пирамидки». «Кубики» зеленого и синего цветов, а «пирамидки» — красного и синего цветов. Традиции требуют, чтобы в любых украшениях рядом располагающиеся бусины были разных форм и разных цветов. Ювелир сделал ожерелье в форме кольца, использовав все четыре типа бусин и в соответствии с традициями. Сколько бусин может быть в таком ожерелье?*

а) 7;   б) 8;   в) 10;   г) 11.

Ответ: б) и в).

Решение: Докажем, что решением задачи являются числа вида $6 + 2k$, где k — целое неотрицательное число. Договоримся обозначать зеленые и синие кубики как К и К, а красные и синие пирамидки — как П и П.

Прежде всего заметим, что количество бусинок четно. Действительно, кубики и пирамидки не могут стоять рядом. Поэтому они представлены в ожерелье поровну и, значит, общее число бусинок равно удвоенному количеству кубиков.

Покажем, что минимальное число бусинок равно 6. По условию в ожерелье обязательно должен быть синий кубик К. Слева и справа от него могут стоять только красные пирамидки, то есть ожерелье содержит комбинацию П К П. Также по условию должны быть задействованы зеленый кубик К и синяя пирамидка П. Таким образом, в ожерелье должно быть не менее 5 бусинок, а с учетом четности — не менее 6. Комбинация П К П К П К дает пример традиционного ожерелья из 6 бусинок.

Осталось заметить, что между П и К можно вставлять пару этих же бусинок любое количество раз. Поэтому числа вида $6 + 2k$ при неотрицательном целом k являются решениями задачи.

2. (10 баллов) *Известно, что одна из четырех монет фальшивая и отличается от настоящих весом. Требуется определить, какая из монет является фальшивой, с помощью весов без гирь. Какие из перечисленных утверждений являются верными?*

а) Фальшивую монету можно определить за 2 взвешивания.

б) Фальшивую монету можно определить за 3 взвешивания.

в) Фальшивую монету можно определить за 4 взвешивания.

г) Среди перечисленных ответов нет верного.

Ответ: а)

Решение: Выберем из имеющихся монет две и взвесим их (одну на одной чашке весов, другую — на другой). Таким образом мы определим, в какой паре находится фальшивая монета (если весы оказались в равновесии, то фальшивая находится среди оставшихся двух монет, иначе — среди выбранных).

Теперь возьмем одну монету из той пары, где обе монеты настоящие, и одну монету из той пары, где есть фальшивая, и взвесим их, запомнив, на какую чашку весов положили настоящую монету. Если весы оказались в равновесии, то есть мы взвесили две настоящих монеты, то фальшивой является оставшаяся монета в той паре, в которой были одна настоящая и одна фальшивая. Если же весы показали разный вес, то фальшивой является вторая монета на весах.

3. (20 баллов) *Во время жеребьевки перед математическим марафоном капитанам команд было предложено назвать наименьшую возможную сумму цифр в десятичной записи числа $n+1$, если известно, что сумма цифр числа n равна 2017. Какой ответ дал капитан команды, победившей в жеребьевке?*

Ответ: 2.

Решение: Покажем вначале, что ответ не меньше 2. Если сумма цифр числа $n+1$ равна 1, то $n+1 = 10\ldots0$, а десятичная запись n состоит из одних девяток. Тогда число n кратно 9 и сумма его цифр, значит, тоже. Но это невозможно, поскольку 2017 не делится на 9.

Осталось привести пример числа $n+1$, сумма цифр которого равна 2. Поскольку $2017 = 224 \cdot 9 + 1$, мы можем положить $n = 19\ldots9$, где девятка повторяется 224 раза. Действительно, в этом случае $n+1 = 20\ldots0$.

4. (20 баллов) *Перед уроком учительница математики выписала на доске девять последовательных чисел, но дежурные одно из них случайно стерли. Когда начался урок, выяснилось, что сумма оставшихся восьми чисел равна 1703. Какое число стерли дежурные?*

Ответ: 214.

Решение: Обозначим среднее исходных чисел через a. Тогда эти числа можно записать в симметричной форме:

$$a-4, a-3, a-2, a-1, a, a+1, a+2, a+3, a+4.$$

Стертое число имеет вид $a+b$, где $-4 \leqslant b \leqslant 4$, а сумма остальных чисел равна $9a - (a+b) = 8a - b$. С другой стороны, эта же сумма равна $1703 = 8 \cdot 213 - 1$. Поэтому

$$8 \cdot 213 - 1 = 8a - b, \quad \text{откуда} \quad 8(a-213) = b - 1.$$

Тогда число $b-1$ кратно 8 и лежит в промежутке $[-5, 3]$. Значит, $b = 1$, $a = 213$, а дежурные стерли число $213 + 1 = 214$.

5. (20 баллов) *Алексей придумал следующую игру. Сначала он выбирает число x такое, что $2017 \leqslant x \leqslant 2117$. Затем он проверяет, делится ли x на 3, 5, 7, 9 и 11 без остатка. Если x делится на 3, то Алексей присуждает числу 3 очка, если на 5 — то 5 очков, ..., если на 11 — то 11 очков. Набранные очки для числа суммируются. Какое число следует выбрать в такой игре, чтобы набрать наибольшее количество очков?*

Ответ: $2079 = 11 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 3$.

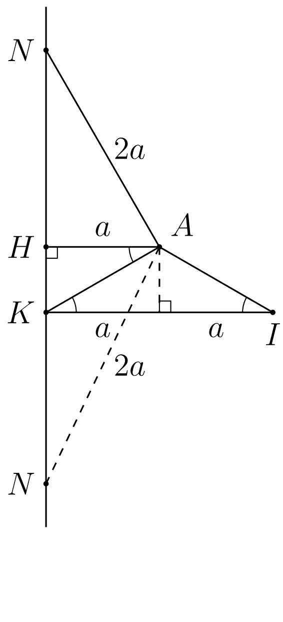
Решение: Заметим, что делимость x на 9 дает сразу 12 баллов, поскольку влечет и делимость на 3. Если число x не кратно 11, оно получит не более $9 + 7 + 5 + 3 = 24$ балла, а если не кратно 9 — не более $11 + 7 + 5 + 3 = 26$ баллов. Если число делится одновременно на 11 и 9, то оно кратно 99. В заданном диапазоне единственным таким числом будет 2079. Поскольку 2079 делится еще и на 7, оно дает $11 + 9 + 7 + 3 = 30$ баллов.

Осталось заметить, что более 30 баллов получить нельзя. Действительно, такой результат может дать только число, которое делится на 3, 5, 7, 9 и 11 одновременно. Наименьшим таким числом является $11 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 = 3465$, но оно больше 2117.

6. (30 баллов) *В треугольнике KIA углы K и I равны $30°$. На прямой, проходящей через точку K перпендикулярно стороне KI, отмечена точка N так, что AN равно KI. Найдите величину угла KAN.*

Ответ: $90°$ или $30°$.

Решение: Пусть $KI = 2a$, а точка H — основание перпендикуляра из вершины A на



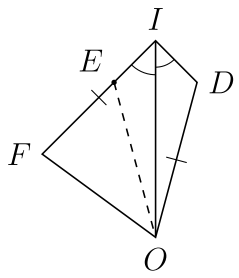
прямую KN. Согласно условию, $\triangle KIA$ — равнобедренный с основанием KI, следовательно, A лежит на серединном перпендикуляре к KI, откуда имеем, что $AH = a$.

Легко заметить, что $\triangle AHN$ — прямоугольный, в котором катет AH в два раза меньше гипотенузы AN. Следовательно, $\angle HAN = 60°$. А поскольку $AH \| KI$, то $\angle KAH =$

$= \angle AKI$. Отсюда получаем, что, поскольку точка N может быть расположена по разные стороны от прямой KI, то либо $\angle KAN = \angle HAN + \angle HAK = 60^\circ + 30^\circ$, либо $\angle KAN = \angle HAN - \angle HAK = 60^\circ - 30^\circ$.

7. (30 баллов) *В выпуклом четырехугольнике $FIDO$ противоположные стороны FI и DO равны между собой и больше стороны DI. Известно, что $\angle FIO = \angle DIO$. Докажите, что FO больше DI.*

Решение:



Отметим на отрезке FI такую точку E, что $IE = ID$ (это можно сделать, поскольку $FI > DI$). Треугольники IDO и IEO равны по двум сторонам и углу (IO — их общая сторона, $IE = ID$, $\angle FIO = \angle DIO$). Поэтому $EO = DO = FI$. По неравенству треугольника для $\triangle FOE$ имеем $FO + FE > EO$. Тогда

$$FO > EO - FE = FI - FE = EI = ID,$$

что и требовалось доказать.

8. (40 баллов) *Шаман племени Солнцелюбов каждую полночь высчитывает, будет ли грядущий день счастливым: в соответствии с верованиями племени, день с номером D от начала времен будет счастливым, если число*

$$\left(D^2+4\right)\left(R^2+4\right) - 2D\left(R^2+4\right) - 2R\left(D^2+4\right)$$

неотрицательно, где R – номер дня, когда родился вождь племени. Бывают ли у Солнцелюбов дни, не являющиеся счастливыми?

Ответ: Нет, не бывают.

Решение: Легко заметить, что вопрос задачи эквивалентен следующему: "Существуют ли такие натуральные $D \geqslant R$, что значение указанного в условии выражения отрицательно?". Преобразуем уменьшаемое:

$$\left(D^2+4\right)\left(R^2+4\right) = \frac{2}{2} \cdot \left(D^2+4\right)\left(R^2+4\right) = \frac{\left(D^2+4\right)}{2}\left(R^2+4\right) + \left(D^2+4\right)\frac{\left(R^2+4\right)}{2}.$$

Поскольку $a^2 - 4a + 4 = (a-2)^2 \geqslant 0$ для любого натурального a, то $\frac{D^2+4}{2} \geqslant 2D$ и $\frac{R^2+4}{2} \geqslant 2R$. Отсюда получаем, что исходное выражение всегда неотрицательно.

9. (40 баллов) *Даны следующие числа: 20172017, 20172018, 20172019, 20172020 и 20172021. Есть ли среди них число, взаимно простое со всеми остальными? Если есть, то какое?*

Ответ: 20172017, 20172019.

Решение: Заданные числа являются пятью последовательными натуральными числами. Четные числа 20172018 и 20172020 не подходят.

Соседние числа всегда взаимно простые:

$$n = mq, \quad n+1 = mp, \quad 1 = m(p-q) \;\Rightarrow\; m = 1.$$

Соседние нечетные числа тоже всегда взаимно простые:

$$2k+1 = mq, \quad 2k+3 = mp, \quad 2 = m(p-q), \quad m \neq 2 \;\Rightarrow\; m = 1.$$

Значит, число 20172019 гарантированно является взаимно простым с остальными.

Осталось проверить числа 20172017 и 20172021. Число 20172021, как и число 20172018, делится на 3, следовательно, оно не подходит. А вот $20172017 = 2017 \cdot 137 \cdot 7$ тоже взаимно простое с остальными.

Олимпиада школьников СПбГУ по математике
Примеры заданий отборочного этапа
2017/2018 учебный год

Задания для 10–11 классов

1. (10 баллов) *На уроке арифметики дети изучали некоторые натуральные числа и действия над ними. Учительница выдала детям много карточек с числами 1, 2, 4 и 8 и попросила, используя каждое из чисел, расположить карточки по кругу так, чтобы сумма чисел на любых рядом расположенных карточках делилась на 3, но не делилась на 9. Сколько карточек дети могли бы использовать, чтобы выполнить это задание?*

а) 8;   б) 9;   в) 10;   г) 11.

Ответ: а) и в).

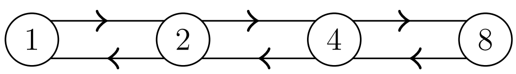
Первое решение: Достаточно доказать, что решением задачи являются числа вида $6 + 2k$, где k — целое неотрицательное.

Покажем вначале, что минимальным ответом будет 6. Рядом с числом 1 может находиться только 2, а рядом с числом 8 — только 4. Так как по условию карточки с числами 1 и 8 используются, в итоговом наборе должны быть тройки 2–1–2 и 4–8–4. Следовательно, меньше 6 карточек использовать нельзя. Поскольку карточки с числами 2 и 4 могут быть рядом, то набор из этих двух троек удовлетворяет условию.

Заметим теперь, что между карточками с числами 2 и 4 можно поместить пару 2–4 или 4–2. Проделав эту операцию k раз, мы получим, что числа вида $6 + 2k$ удовлетворяют условию.

Осталось проверить, что количество карточек обязательно четно. Пусть $A = \{2, 8\}$ и $B = \{1, 4\}$. Очевидно, что элементы множества A не могут стоять рядом друг с другом; аналогично, не могут располагаться рядом элементы множества B. Таким образом, количество использованных карточек из множества A в правильном расположении карточек равно количеству использованных карточек из множества B. Отсюда получаем, что общее количество карточек всегда четно.

Второе решение: Будем считать, что вершины графа соответствуют указанным на



карточках числам. Соединим вершины p и q ориентированным ребром, если карточка с числом q может быть расположена после карточки с числом p. Нас интересует, какой длины может быть замкнутый маршрут, проходящий через все вершины. Легко заметить, что для представленного графа эта величина равна $6 + 2k$ (k — целое неотрицательное).

2. (10 баллов) *В треугольнике ABC на стороне BC отмечена точка D, а на отрезке AD — точка M такая, что треугольники AMB и AMC имеют равную площадь. Какие из перечисленных утверждений являются верными?*

а) Точка D обязательно является серединой стороны BC.

б) Точка D может и не быть серединой стороны BC.

в) Точка M обязательно является серединой отрезка AD.

г) Точка M может и не быть серединой отрезка AD.

Ответ: а), г)

Решение: Перепишем условие задачи в виде

$$1 = \frac{S_{\triangle AMB}}{S_{\triangle AMC}} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot AM \cdot \sin\angle BAM}{\frac{1}{2}AC \cdot AM \cdot \sin\angle CAM} = \frac{AB \cdot \sin\angle BAM}{AC \cdot \sin\angle CAM}.$$

Правая часть этого равенства не зависит от положения точки M на отрезке AD. Отсюда вытекают два вывода. Во-первых, утверждение г) верно, а в) неверно. Во-вторых, условие задачи останется выполненным, если взять $M = D$. У треугольников ABD и ACD общая высота, а их основания равны соответственно BD и CD. Поэтому в силу равенства площадей треугольников $BD = CD$. Таким образом, утверждение а) верно, а б) неверно.

3. (20 баллов) *Пенсионерки одной из планет Альфа Центавра свободное время любят проводить за решением цифровых пасьянсов: выбирают натуральные числа из некоторого промежутка $[A, B]$ таким образом, чтобы сумма любых двух из выбранных чисел не делилась на некое заданное число N. На прошедшей неделе газета “Альфа-Центаврианская панорама” предложила читальницам для решения пасьянс со значениями $A = 1353$, $B = 2134$, $N = 11$. Какое максимальное количество чисел может быть решением такого пасьянса?*

Ответ: 356.

Решение: Для $k = 0, 1, \ldots, 10$ обозначим через I_k множество всех чисел из $[A, B)$, дающих при делении на 11 остаток k. Так как A и B кратны 11, все множества I_k содержат равное число элементов. Поэтому все числа из $[A, B)$, не кратные 11, можно разбить на пары вида (x, y), где $x \in I_k$, $y \in I_{11-k}$ при некотором k из $\{1, \ldots, 5\}$. Количество таких пар равно $\frac{2134-1353}{11} \cdot 5 = 355$. Очевидно, из каждой пары в итоговый набор может попасть не более одного числа. Кроме того, этот набор может содержать максимум одно число, кратное 11. Таким образом, в решение входит не более 356 чисел.

Покажем теперь, что набор из 356 чисел реализуется. Включим в него A и все числа, дающие при делении на 11 нечетные остатки. Возьмем в этом наборе числа x и y, отличные друг от друга и от A. Тогда $(x \mod 11) + (y \mod 11)$ — четное число между 2 и 18. Поэтому оно не делится на 11, и $x + y$, значит, тоже. Очевидно, что и $A + x$ не кратно 11. Значит, такой набор удовлетворяет условию задачи. Осталось заметить, что он содержит $\frac{2134-1353}{11} \cdot 5 + 1 = 356$ чисел.

4. (20 баллов) *Перед уроком геометрии учительница выписала на доске значения всех углов (в градусах) некоторого выпуклого многоугольника. Однако, дежурные одно из выписанных чисел стерли. Когда начался урок, оказалось, что сумма оставшихся чисел равна 1703. Какое число стерли дежурные?*

Ответ: 97.

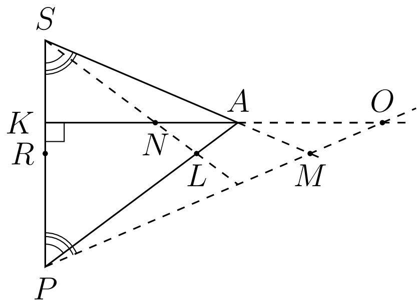
Решение: Пусть у многоугольника было n вершин. Так как n-угольник выпуклый, каждый его угол меньше 180°, а сумма всех углов равна $(n-2)\cdot 180^\circ$. Значит, сумма всех углов многоугольника за вычетом одного лежит в интервале от $180(n-3)$ до $180(n-2)$. Тогда

$$180(n-3) < 1703 < 180(n-2), \quad \text{откуда} \quad n = \left[\tfrac{1703}{180}\right] + 3 = 12.$$

Поэтому недостающий угол равен $180 \cdot 10 - 1703 = 97$ градусов.

5. (30 баллов) *В остроугольном треугольнике SAP проведена высота AK. На стороне PA выбрали точку L, а на продолжении стороны SA за точку A — точку M так, что $\angle LSP = \angle LPS$ и $\angle MSP = \angle MPS$. Прямые SL и PM пересекают прямую AK в точках N и O соответственно. Докажите, что $2ML = NO$.*

Решение: Из равенства углов LSP и LPS следует, что треугольник LSP — равнобед-



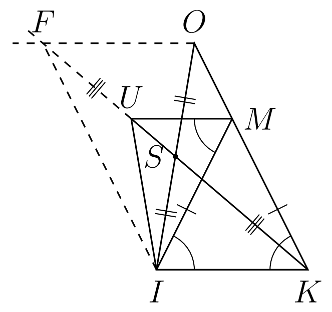
ренный с основанием SP, поэтому его вершина L лежит на серединном перпендикуляре к основанию SP. Аналогично, из равенства углов MSP и MPS получаем, что M также лежит на серединном перпендикуляре к SP. Пусть R — середина SP.

Из подобия треугольников PLM и POA следует, что $\frac{ML}{OA} = \frac{PL}{PA}$. А по теореме Фалеса имеем, что $\frac{PL}{PA} = \frac{PR}{PK}$. Аналогично, из подобия треугольников SAN и SML имеем $\frac{AN}{ML} = \frac{SN}{SL}$, а из теоремы Фалеса, что $\frac{SN}{SL} = \frac{SK}{SR}$. Отсюда, поскольку $SR = PR$, имеем

$$NO = AN + OA = \frac{SK \cdot ML}{SR} + \frac{ML \cdot PK}{PR} = \frac{ML(SK + PK)}{SR} = \frac{ML \cdot SP}{SR} = 2ML.$$

6. (30 баллов) *В треугольнике KOI на стороне KO отмечена точка M так, что $KM = MI$, а на стороне IO отмечена точка S так, что $SI = SO$. На прямой KS отмечена точка U так, что прямая MU параллельна прямой KI. Докажите, что угол KOI равен углу MIU.*

Решение: Заметим, что из параллельности MU и KI следует, что $\angle UMI = \angle MIK$,



а из равенства MI и MK, т.е. равнобедренности треугольника MIK, — что $\angle MIK = = \angle MKI$.

Возьмем на луче KS такую точку F, что $SF = SK$. Таким образом, в четырехугольнике $KOFI$ диагонали точкой пересечения делятся пополам, значит, данный четырехугольник является параллелограммом, т.е. $FO \| KI$. Следовательно, треугольники KMU и KOF подобны и верно соотношение $\frac{MK}{MU} = \frac{OK}{OF}$. Но $MK = MI$ по условию, а $OF = KI$ по построению, поэтому верно и соотношение $\frac{MI}{MU} = \frac{OK}{KI}$. С учетом равенства углов UMI и OKI получаем, что треугольники MIU и KOI подобны, откуда и следует искомое равенство углов.

7. (40 баллов) *В тридевятом царстве 39 городов. Известно, что из каждого города в другие выходит не менее 21 односторонней дороги (из города в город ведет не более одной дороги). Также известно, что ровно 26 городов "транзитные", то есть из них нельзя напрямую (не проезжая другие города) вернуться в тот город, из которого в них приехали. Докажите, что среди оставшихся 13 городов дорогами соединены каждый с каждым.*

Решение: Заметим, что между транзитными городами существует не более $26 \cdot 25/2 = = 325$ дорог, т.к. между любыми двумя транзитными городами может быть не больше одной дороги. Поскольку из каждого города, в том числе и из транзитного, ведет не менее 21 дороги, то из транзитных в нетранзитные ведёт не менее $26 \cdot 21 - 325 = 546 - - 325 = 221$ дороги.

У этих 221 дороги не существует "встречных", т.к. это нарушало бы определение транзитности, поэтому из нетранзитных в транзитные ведёт не более $13 \cdot 26 - 221 = 117$ дорог. А всего из нетранзитных выходит, по условию, не менее $13 \cdot 21 = 273$ дорог. Таким образом, из нетранзитных в нетранзитные ведет не менее $273 - 117 = 156$ дорог, а $156 = 13 \cdot 12$, т.е. нетранзитные города соединены дорогами каждый с каждым.

8. (40 баллов) *В соревнованиях по устному счёту участвовало несколько команд. Каждая команда получала одно натуральное число и должна была найти наибольший и наименьший, но не равный 1, нечётные делители этого числа. Все команды решили свои задачи правильно. При рассмотрении результатов оказалось, что полученное* *любой командой исходное число можно представить в виде* $15M + 11m$*, где* M *— наибольший, а* m *— наименьший начётный делители. Сколько команд участвовало в соревнованиях и для каких чисел команды искали делители?*

Ответ: 4 команды; 528, 880, 1232, 1936.

Решение: Легко видеть, что M делится на m, а $\frac{15M+11m}{M}$ является степенью двойки. Так как $m \leqslant M$,

$$15 < \frac{15M + 11m}{M} \leqslant \frac{15M + 11M}{M} = 26.$$

Среди целых чисел из промежутка $(15, 26]$ только 16 является степенью двойки. Поэтому $15M + 11m = 16M$, откуда $M = 11m$, а исходное число равно $176m$. Поскольку m — его наименьший нечетный делитель, а 176 кратно 11, m может принимать только значения $3, 5, 7, 11$. При этом $176m$ будет соответственно равно 528, 880, 1232, 1936. Проверка показывает, что полученные значения удовлетворяют условию.