Олимпиада школьников СПбГУ по математике.

Заключительный этап. 2018/2019 учебный год.

Задания для 8-9 классов

(Правильное и полное решение каждой задачи оценивается в 20 баллов)

9 класс. Первый вариант

1. Маша на свой день рождения принесла в школу конфеты, оставила несколько конфет себе, а остальные раздала шестерым своим подружкам. Оказалось, что у всех девочек разное число конфет, и количество конфет у любых четырех девочек больше, чем у трех оставшихся. Какое наименьшее количество конфет Маша могла оставить себе?

Ответ: 10

Решение. Пусть у девочек a, b, c, d, e, f конфет, где $a < b < c < d < e < f < g$. Тогда $e \geqslant d+1$, $f \geqslant d+2$ и $g \geqslant d+3$. Аналогично $c \leqslant d-1$ и $b \leqslant d-2$. По условию $a+3d-3 \geqslant a+b+c+d > e+f+g \geqslant 3d+6$, поэтому $a > 9$. Следовательно, $a \geqslant 10$. Десять конфет у Маши могло остаться, например, если у остальных девочек было 11, 12, 13, 14, 15 и 16 конфет. Тогда $10+11+12+13 = 46 > 45 = 14+15+16$.

2. При каких a квадратные трехчлены x^2+ax-2 и $2x^2-3x+2a$ имеют общий корень?

Ответ: $a = -1$, $a = \frac{-3-\sqrt{17}}{4}$, $a = \frac{-3+\sqrt{17}}{4}$

Решение. Пусть $f(x) = x^2 + ax - 2$ и $g(x) = 2x^2 - 3x + 2a$. Если $f(u) = g(u) = 0$, то $0 = g(u) - 2f(u) = (2u^2 - 3u + 2a) - 2(u^2 + au - 2) = -(3+2a)u + (2a+4)$. Стало быть, $3 + 2a \neq 0$ и $u = \frac{2a+4}{3+2a}$. Нам осталось найти все a, при которых такое u будет корнем трехчлена f. Тогда

$$0 = f(u) = f\Big(\frac{2a+4}{3+2a}\Big) = \Big(\frac{2a+4}{3+2a}\Big)^2 + a\cdot\frac{2a+4}{3+2a} - 2 =$$
$$= \frac{(2a+4)^2 + a(2a+4)(3+2a) - 2(3+2a)^2}{(3+2a)^2} = \frac{2(2a^3+5a^2+2a-1)}{(3+2a)^2}.$$

Поэтому $2a^3 + 5a^2 + 2a - 1 = 0$, откуда $a = -1$ или $2a^2 + 3a - 1 = 0$. Из последнего уравнения и находим оставшиеся ответы.

3. На столе лежит 2019 камней. Петя и Вася играют в игру по следующим правилам. Ходят по очереди, начинает Петя. За один ход можно взять со стола 1 или 2 камня, но один и тот же игрок два раза подряд не может брать 2 камня. Проигрывает не имеющий хода. Кто из игроков сможет обеспечить себе победу вне зависимости от игры противника?

Ответ: выигрывает Петя.

Решение. Опишем стратегию Пети. Первым ходом он возьмет 1 камень. Это не наложит ограничений на его второй ход, поэтому он сможет дополнить ход Васи так, чтобы этого осталось 2015 камней. Дальше Петя будет действовать так, чтобы за две пары ходов было взято ровно 5 камней. Вася своими двумя ходами сможет в сумме взять 2 или 3 камня, поэтому Петя сначала возьмет 1 камень (это не наложит ограничений на его второй ход), а потом, когда уже будет знать, что сделал Вася, дополнит его ход до 5 в сумме. При разборе каждой пятерки последний ход остается за Петей. Поэтому, в частности, он возьмет последний камень и выиграет.

4. Для любых положительных чисел a, b и c докажите неравенство

$$\frac{a}{2a^2+b^2+c^2}+\frac{b}{a^2+2b^2+c^2}+\frac{c}{a^2+b^2+2c^2}\leqslant\frac{9}{4(a+b+c)}.$$

Решение. Поскольку $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$, знаменатель первой дроби не меньше $a^2+ab+bc+ca=(a+b)(a+c)$. Аналогичную оценку допускают и другие знаменатели. Поэтому нам достаточно доказать, что

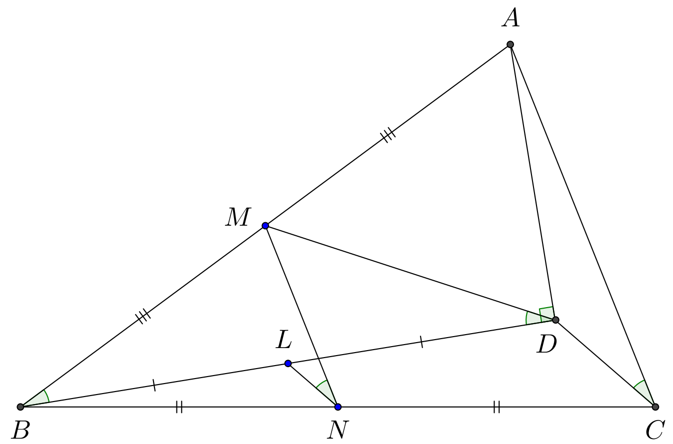
$$\frac{a}{(a+b)(a+c)}+\frac{b}{(b+c)(b+a)}+\frac{c}{(c+a)(c+b)}\leqslant\frac{9}{4(a+b+c)}.$$

Это равносильно неравенству $8(a+b+c)(ab+bc+ca)\leqslant 9(a+b)(b+c)(c+a)$, которое после раскрытия скобок превращается неравенство $6abc\leqslant a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b$. Но оно уже очевидно:

$$(a^2b+c^2b)+(a^2c+b^2c)+(b^2a+c^2a)\geqslant 2abc+2abc+2abc=6abc.$$

5. Внутри треугольника ABC выбрана такая точка D, что $\angle ABD=\angle ACD$ и $\angle ADB=90°$. Точки M и N середины сторон AB и BC соответственно. Найдите угол $\angle DNM$.

Ответ: 90°



Решение. Пусть L — середина отрезка BD. Тогда LN — средняя линия в треугольнике BCD, поэтому $LN\parallel DC$. Аналогично MN — средняя линия в треугольнике ABC, поэтому $MN\parallel AC$. Следовательно, $\angle MNL=\angle ACD=\angle ABD$. Поскольку M — середина гипотенузы прямоугольного треугольника ABD, $AM=MB=MD$. Поэтому треугольник BMD равнобедренный и $\angle MBD=\angle MDB$. Стало быть, $\angle MNL=\angle MDB$ и, значит, четырехугольник $MLND$ — вписанный. Тогда $\angle MND=\angle MLD$, так как они опираются на одну дугу. Осталось заметить, что поскольку ML — средняя линия в прямоугольном треугольнике ABD, $ML\parallel AD$ и, значит, $\angle MND=\angle MLD=\angle MLB=\angle ADB=90°$.

6. Найдите все пары простых чисел p и q, для которых $p^2 + pq + q^2$ является точным квадратом.

Ответ: $p = 3$ и $q = 5$ или $p = 5$ и $q = 3$.

Решение. Если $p = q$, то $p^2 + pq + q^2 = 3p^2$, что не может быть точным квадратом, поскольку $3p^2$ либо равно 27, либо делится на 3, но не делится на 9. Следовательно, $p \neq q$. Пусть $q = 2$. Тогда $(p+1)^2 < p^2 + pq + q^2 < (p+2)^2$ и, значит, $p^2 + pq + q^2$ не является точным квадратом. Стало быть, p и q — различные нечетные простые. Будем считать, что $p < q$. Пусть $p^2 + pq + q^2 = n^2$. Обозначим для удобства $k = p + q$. Тогда

$$(k-n)(k+n) = k^2 - n^2 = (p+q)^2 - (p^2 + pq + q^2) = pq,$$

т. е. pq является произведением двух натуральных чисел. Поэтому либо $k-n = 1$ и $k+n = pq$, либо $k-n = p$ и $k+n = q$. Второй случай невозможен, так как $k+n = p+q+n > q$. Тогда $2(p+q) = 2k = (k+n)+(k-n) = pq-1$. Стало быть, $(p-2)(q-2) = pq - 2p - 2q + 4 = 3$. Но $p \geqslant 3$ и $q \geqslant 5$, поэтому $p = 3$ и $q = 5$. Этот вариант подходит: $3^2 + 3 \cdot 5 + 5^2 = 49 = 7^2$.

9 класс. Второй вариант

1. Из нескольких одинаковых белых кубиков Петя сложил большой куб и покрасил его грани в черный цвет. Оказалось, что число кубиков с одной черной гранью равно числу полностью белых кубиков. Сколько маленьких кубиков ровно с двумя черными гранями?

Ответ: 72

Решение. Пусть большой куб сложен из n^3 маленьких. Тогда $(n-2)^3$ кубиков полностью белые. К ровно одной фиксированной грани примыкает $(n-2)^2$ кубиков, поэтому всего есть $6(n-2)^2$ кубиков с единственной черной гранью. Следовательно, $(n-2)^3 = 6(n-2)^2$, откуда $n = 8$. Кубики с двумя черными гранями должны примыкать к ребру большого куба, поэтому их $12(n-2) = 72$.

2. Найдите все такие квадратные трехчлены $ax^2 + bx + c$ с целыми коэффициентами, графики которых проходят через точки (a, b), (b, c) и (c, a) (среди этих точек могут быть совпадающие).

Ответ: $-x^2 - x - 1$

Решение. По условию $b = a^3 + ab + c$, $c = ab^2 + b^2 + c$ и $a = ac^2 + bc + c$. Из второго уравнения следует, что $b = 0$ или $a = -1$.

Рассмотрим первый случай. Перепишем первое и третье уравнения: $a^3 + c = 0$ и $a = ac^2 + c$. Тогда $c = -a^3$ и $a^7 - a^3 = a$. Следовательно, $a^6 - a^2 = 1$. Но это уравнение не имеет целых корней. Действительно, $a^2 \neq 0, 1$ и, значит, $a^2 \geqslant 4$, но тогда $a^6 - a^2 = a^2(a^4 - 1) \geqslant 4 \cdot 15 > 1$.

Рассмотрим второй случай. Перепишем первое и третье уравнения: $b = -1 - b + c$ и $-1 = -c^2 + bc + c$. Тогда $b = \frac{c-1}{2}$ и $c^2 - \frac{1}{2}c(c-1) - c - 1 = 0$. Следовательно, $c^2 - c - 2 = 0$. Поэтому $c = -1$ или $c = 2$. В первом случае $a = b = c = -1$, во втором b получается нецелым.

3. Том Сойер и Гекльберри Финн играют в игру, заключающуюся в покраске забора, состоящего из 1000 неокрашенных дощечек, в синий и красный цвета. Начинает Том, ходы делаются по очереди. За один ход игрок выбирает одну из неокрашенных дощечек и цвет, а затем красит эту дощечку в выбранный цвет. Игра заканчивается, когда будут покрашены все дощечки. Том хочет, чтобы по окончании игры было как можно больше пар соседних разноцветных дощечек, а Гек хочет, чтобы было как можно меньше пар соседних разноцветных дощечек. Какое максимальное число таких пар Том может обеспечить вне зависимости от игры Гека?

Ответ: 499.

Решение. Всего соседних пар дощечек 999. Если Гек будет каждым ходом красить дощечку, соседнюю с уже покрашенной, в тот же цвет, то за свои 500 ходов он сделает 500 одноцветных пар. Поэтому Том не сможет гарантировать больше 499 разноцветных пар. Покажем как Том может обеспечить 499 разноцветных пар. Каждым своим ходом, кроме первого он будет красить какую-нибудь дощечку, соседнюю с уже покрашенной, в противоположный цвет. Тогда он каждым ходом со 2-го по 500-й увеличивает количество разноцветных пар на 1.

4. Вещественные числа a, b, c и d удовлетворяют соотношениям $a + b + c + d = 0$ и $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 12$. Найдите наименьшее и наибольшее значения произведения $abcd$.

Ответ: $\min = -3$, $\max = 9$

Решение. Найдем сначала максимум $abcd$. По неравенству о средних

$$\sqrt{|abcd|} = \sqrt[4]{a^2b^2c^2d^2} \leqslant \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4} = 3.$$

Следовательно, $abcd \leqslant |abcd| \leqslant 9$. Равенство достигается, например, когда $a = b = -c = -d = \sqrt{3}$. Поэтому наибольшее значение произведения $abcd$ равно 9. Найдем теперь минимум $abcd$. Из чисел a, b, c и d какие-то два одного знака. Пусть для определенности это a и b, тогда $ab \geqslant 0$. Заметим, что $c^2 + d^2 = (c + d)^2 - 2cd = (a + b)^2 - 2cd$. Тогда

$$12 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = a^2 + b^2 + (a + b)^2 - 2cd,$$

откуда

$$cd = \frac{a^2 + b^2 + (a + b)^2 - 12}{2} = a^2 + b^2 + ab - 6 \geqslant 3ab - 6$$

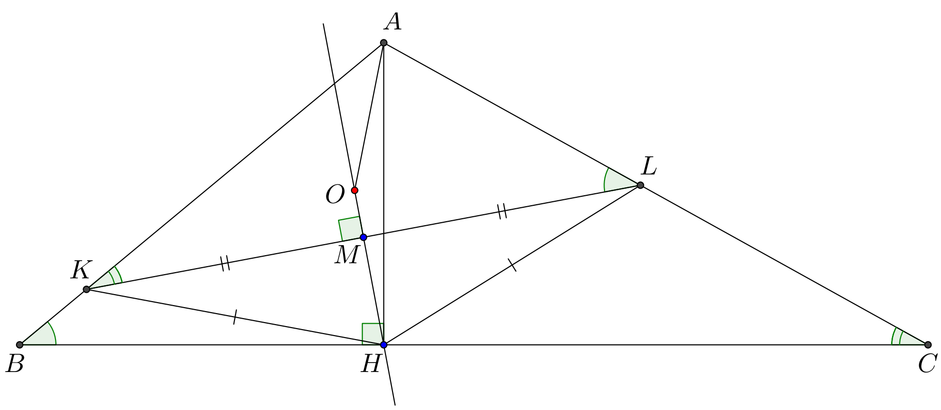
и, значит, $abcd \geqslant 3ab(ab - 2) \geqslant -3$. Равенство достигается когда $a = b = c = 1$ и $d = -3$. Поэтому наибольшее значение произведения $abcd$ равно -3.

Замечание. Поскольку $d = -(a+b+c)$, нижняя оценка $abcd$ равносильна неравенству $abc(a + b + c) \leqslant 3$. Проверим его другим способом. Поскольку $3abc(a+b+c) \leqslant (ab+bc+ca)^2$, достаточно установить, что $ab+bc+ca \leqslant 3$. По условию

$$\begin{aligned} 12 &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = a^2 + b^2 + c^2 + (a + b + c)^2 = \\ &= 2(a^2 + b^2 + c^2) + 2(ab + bc + ca) \geqslant \\ &\geqslant 2(ab + bc + ca) + 2(ab + bc + ca) = 4(ab + bc + ca). \end{aligned}$$

Стало быть, $ab + bc + ca \leqslant 3$.

5. Дан неравнобедненный остроугольный треугольник ABC. На лучах AB и AC выбраны соответственно такие точки K и L, что четырехугольник $KBCL$ вписанный. Точка H — основание высоты, опущенной из вершины A на сторону BC. Докажите, что если $KH = LH$, то H — центр описанной окружности треугольника AKL.



Решение. Пусть M — середина отрезка KL, а O — центр описанной окружности треугольника AKL. Докажем, что точки O и H совпадают. Поскольку $KH = LH$ и $KO = LO$, точки H и O лежат на серединном перпендикуляре к отрезку KL. Стало быть, точки H, M и O лежат на одной прямой. Так как четырехугольник $KBCL$ вписанный, $\angle ABC = \angle ALK$ и $\angle ACB = \angle AKL$. Отсюда, в частности, следует, что $AK \neq AL$, в противном случае $\angle ACB = \angle AKL = \angle ALK = \angle ABC$ и треугольник ABC — равнобедренный. Центральный угол $\angle AOK$ в два раза больше вписанного угла $\angle ALK$, поэтому

$$\angle OAK = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle AOK = 90^\circ - \angle ALK = 90^\circ - \angle ABC = \angle HAB.$$

Следовательно, точки A, O и H лежат на одной прямой, причем эта прямая не совпадает с серединным перпендикуляром к отрезку KL, поскольку $AK \neq AL$. Таким образом, точки O и H лежат на пересечении двух различных прямых и, значит, $O = H$.

6. Найдите все пары простых чисел p и q, для которых $p^2 + q^3$ является точным кубом.

Ответ: $p = 13$, $q = 7$.

Решение. Если $p^2 + q^3 = n^3$, то $p^2 = n^3 - q^3 = (n-q)(n^2 + nq + q^2)$. Поскольку первая скобка всегда меньше второй, а их произведение — квадрат простого числа, $n - q = 1$ и $n^2 + nq + q^2 = p^2$. Стало быть,

$$p^2 = (q+1)^2 + (q+1)q + q^2 = 3q^2 + 3q + 1 = (2q+1)^2 - q(q+1).$$

Следовательно,

$$0 < q(q+1) = (2q+1)^2 - p^2 = (2q+p+1)(2q-p+1).$$

Одна из скобок в правой части делится на q. Если первая, то $p+1$ делится на q, а если вторая, то $p-1$ делится на q. Но $p < 2q+1$, поэтому возможны три варианта: $p - 1 = q$, $p + 1 = q$ и $p + 1 = 2q$. В первом случае $p = 3$ и $q = 2$, что не подходит, так как $3^2 + 2^3 = 17$. Во втором случае $p = 2$ и $q = 3$, что также не подходит, ибо $2^2 + 3^3 = 31$. Наконец, в третьем случае получаем $q(q+1) = (2q+2q)(2q-2q+2) = 8q$, откуда $q = 7$ и $p = 13$. Этот вариант подходит: $13^2 + 7^3 = 512 = 8^3$.

9 класс. Третий вариант

1. По кругу написаны 20 различных натуральных чисел, так что любые два соседних числа отличаются на 2 или на 5. Найдите наибольшую возможную разность между двумя из написанных чисел.

Ответ: 47

Решение. Для удобства изложения будем считать, что числа стоят в вершинах правильного 20-угольника. Рассмотрим наименьшее и наибольшее числа. Обозначим их соответственно a и b. Предположим, что $b - a > 47$. Если между ними по меньшей дуге окружности стоит менее 9 чисел, то $b - a \leqslant 45$. Значит они диаметрально противоположны. Тогда между ними с каждой стороны ровно по 9 чисел. Рассмотрим одну такую девятку. Пойдем по ней от a к b. Отметим, что каждое следующее число не превосходит предыдущего, увеличенного на 5. Если на некотором шаге следующее число не превосходит предыдущего, увеличенного на 2, то уже $b - a \leqslant 47$. Поэтому большее 47 число может получиться лишь когда на дуге стоят числа $a + 5$, $a + 10$, $\ldots$, $a + 45$. Но те же числа должны стоять и на другой дуге между числами a и b. Это противоречит тому, что все числа различны. Стало быть, $b - a \leqslant 47$. Приведем пример расстановки, дающей разность 47:

$$1,\ 6,\ 11,\ 16,\ \ldots,\ 46,\ 48,\ 43,\ 38,\ 33,\ \ldots,\ 8,\ 3.$$

2. Найдите все квадратные трехчлены $f(x) = x^2 + ax + b$, для которых $f(f(-1)) = f(f(0)) = f(f(1))$.

Ответ: $x^2 - x - \frac{1}{2}$, $x^2 + x - \frac{3}{2}$, $x^2 - \frac{1}{2}$.

Решение. Поскольку квадратный трехчлен не может принимать какое-то значение более чем в двух точках, среди чисел $f(-1)$, $f(0)$ и $f(1)$ есть равные.

Пусть $f(-1) = f(0)$. Тогда $1-a+b = b$ и, значит, $a = 1$. Следовательно, $b^2 + 2b = f(b) = f(f(0)) = f(f(1)) = f(b + 2) = b^2 + 6b + 6$, откуда $b = -\frac{3}{2}$.

Пусть $f(1) = f(0)$. Тогда $1+a+b = b$ и, значит, $a = -1$. Следовательно, $b^2 = f(b) = f(f(0)) = f(f(-1)) = f(b + 2) = b^2 + 4b + 2$, откуда $b = -\frac{1}{2}$.

Пусть $f(-1) = f(1)$. Тогда $1 - a + b = 1 + a + b$ и, значит, $a = 0$. Следовательно, $b^2 + b = f(b) = f(f(0)) = f(f(1)) = f(b + 1) = b^2 + 3b + 1$, откуда $b = -\frac{1}{2}$.

3. На столе лежит 2019 камней. Петя и Вася играют в игру по следующим правилам. Ходят по очереди, начинает Петя. За один ход можно взять со стола 1 или 2 камня, но один и тот же игрок два раза подряд не может брать 1 камень. Проигрывает не имеющий хода. Кто из игроков сможет обеспечить себе победу вне зависимости от игры противника?

Ответ: выигрывает Вася.

Решение. Опишем стратегию Васи. Первым ходом он дополнит ход Пети так, чтобы после Васиного хода осталось 2016 камней. Отметим, что 2016 делится на 7. Дальше Вася будет действовать так, чтобы за две пары ходов было взято ровно 7 камней. Петя своими двумя ходами сможет в сумме взять 3 или 4 камня, поэтому Вася сначала возьмет 2 камня (это не наложит ограничений на его второй ход), а потом, когда уже будет знать, что сделал Петя, дополнит его ход до 7 в сумме. При разборе каждой семерки последний ход остается за Васей. Поэтому, в частности, он возьмет последний камень и выиграет.

4. Для положительных чисел a, b и c докажите неравенство

$$\frac{a^5}{b^3}+\frac{b^5}{c^3}+\frac{c^5}{a^3}\geqslant\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}.$$

Решение. По неравенству о средних для двух чисел

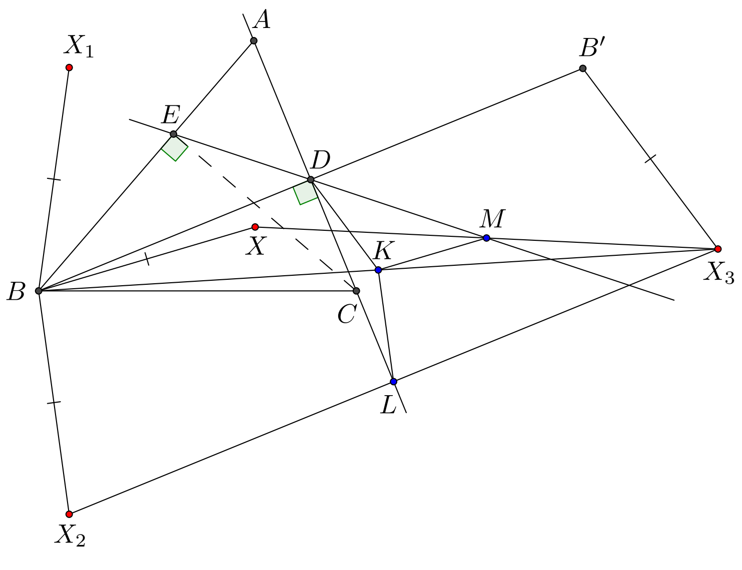
$$\frac{a^5}{b^3}+ab\geqslant 2\sqrt{\frac{a^5}{b^3}\cdot ab}=2\frac{a^3}{b}\quad\text{и}\quad\frac{a^3}{b}+ab\geqslant 2\sqrt{\frac{a^3}{b}\cdot ab}=2a^2.$$

Сложив эти неравенства и сократив на $\frac{a^3}{b}$, получим $\frac{a^5}{b^3}+2ab\geqslant\frac{a^3}{b}+2a^2$. Просуммируем это неравенство с двумя аналогичными:

$$\left(\frac{a^5}{b^3}+\frac{b^5}{c^3}+\frac{c^5}{a^3}\right)+2(ab+bc+ca)\geqslant\left(\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\right)+2(a^2+b^2+c^2)\geqslant$$
$$\geqslant\left(\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\right)+2(ab+bc+ca),$$

поскольку $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$. После сокращения на $2(ab+bc+ca)$ получим требуемое.

5. В остроугольном треугольнике ABC опущены высоты BD и CE. Внутри треугольника взята точка X. Пусть X_1 — точка, симметричная X относительно прямой AB, X_2 — точка, симметричная X_1 относительно прямой BC, а X_3 — точка, симметричная X_2 относительно прямой CA. Точка M — середина отрезка XX_3. Докажите, что точки D, E и M лежат на одной прямой.



Решение. Пусть B' — точка симметричная B относительно AC, K — середина BX_3, а L — середина X_2X_3. Поскольку по условию точки X_2 и X_3 симметричны относительно AC, точка L лежит на прямой AC. По построению KM — средняя линия в треугольнике BXX_3, поэтому $MK = \frac{1}{2}BX$. Аналогично KL — средняя линия в треугольнике BX_2X_3, поэтому $KL = \frac{1}{2}BX_2 = \frac{1}{2}BX$. Наконец, KD — средняя линия в треугольнике $BB'X_3$, поэтому $KD = \frac{1}{2}B'X_3 = \frac{1}{2}BX_2 = \frac{1}{2}BX$, поскольку $B'X_3$ симметрично BX_2 относительно AC. Поэтому точки D, M и L лежат на окружности с центром в точке K. Тогда $\angle LDM = \frac{1}{2}\angle LKM = \frac{1}{2}\angle X_2BX = \angle ABC = \angle ADE$, поэтому M лежит на прямой DE.

6. Существуют ли такие простые числа p, q и r, для которых число $(p^2-7)(q^2-7)(r^2-7)$ является точным квадратом?

Ответ: нет

Решение. Предположим, что какие-то два простых числа равны. Пусть для определенности это p и q. Тогда $(p^2-7)^2(r^2-7)$ является точным квадратом и, значит, r^2-7 также является точным квадратом. Тогда $r^2-7=k^2$ для некоторого натурального k. Следовательно, $7=r^2-k^2=(r-k)(r+k)$, откуда $r-k=1$ и $r+k=7$ и, значит, $r=4$, что невозможно. Поэтому числа p, q и r различны. В силу симметрии можно считать, что $p<q<r$. Если $p=2$, то $q \geqslant 3$ и произведение $(p^2-7)(q^2-7)(r^2-7)$ окажется отрицательным. Следовательно, числа p, q и r нечетные. Тогда их квадраты дают остаток 1 при делении на 4. Поэтому p^2-7, q^2-7 и r^2-7 четны, но не делятся на 4. Тогда произведение $(p^2-7)(q^2-7)(r^2-7)$ делится на 2^3, но не делится на 2^4 и, значит, не является точным квадратом.

9 класс. Четвертый вариант

1. На свой день рождения Вася принес в класс несколько конфет и все их раздал своим одноклассникам (каждому досталось не менее одной конфеты). Некоторые из них поделились с одноклассниками полученными конфетами. В результате у четверти всего класса оказалось по 2 конфеты, у трети класса — по 1 конфете, у Маши оказалось 6 конфет, а больше ни у кого конфет не осталось. Какое наибольшее количество конфет мог раздать Вася?

Ответ: 36

Решение. Из условия ясно, что количество школьников делится на 12. Пусть их $12n$. Тогда конфет у них оказалось $3n\cdot 2+4n\cdot 1+6=10n+6$. Но у каждого школьника, кроме Васи, было хотя бы по конфете. Следовательно, $10n+6\geqslant 12n-1$, откуда $n\leqslant 3$. Поэтому конфет было не больше 36. Покажем, что 36 конфет могло быть. Пусть Вася дал две конфеты Маше, а остальным по конфете. Рассадим школьников кроме Маши и Васи за 17 парт. Пусть сидящие за девятью партами с левой стороны отдали по своей конфете своим правым соседям, а четверо сидящие за двумя другими партами отдали по своей конфете Маше.

2. При каких a квадратные трехчлены x^2+ax-6 и $2x^2-5x+2a$ имеют общий корень?

Ответ: $a=1$, $a=\frac{-9-\sqrt{57}}{4}$, $a=\frac{-9+\sqrt{57}}{4}$

Решение. Пусть $f(x)=x^2+ax-6$ и $g(x)=2x^2-5x+2a$. Если $f(u)=g(u)=0$, то $0=g(u)-2f(u)=(2u^2-5u+2a)-2(u^2+au-6)=-(5+2a)u+(2a+12)$. Стало быть, $5+2a\neq 0$ и $u=\frac{2a+12}{5+2a}$. Нам осталось найти все a, при которых такое u будет корнем трехчлена f. Тогда

$$0=f(u)=f\Big(\frac{2a+12}{5+2a}\Big)=\Big(\frac{2a+12}{5+2a}\Big)^2+a\cdot\frac{2a+12}{5+2a}-6=$$
$$=\frac{(2a+12)^2+a(2a+12)(5+2a)-6(5+2a)^2}{(5+2a)^2}=\frac{2(2a^3+7a^2-6a-3)}{(5+2a)^2}.$$

Поэтому $2a^3+7a^2-6a-3=0$, откуда $a=1$ или $2a^2+9a+3=0$. Из последнего уравнения и находим оставшиеся ответы.

3. В тетради карандашом нарисована квадратная сетка 2019×2019 клеток (сторона клетки равна 1). Петя и Вася играют в игру по следующим правилам. Ходят по очереди, начинает Петя. За один ход игрок стирает один единичный отрезок этой сетки. Выигрывает тот игрок, после чьего хода образуется клетка, все четыре стороны которой стерты. Кто из игроков может обеспечить себе победу вне зависимости от игры соперника?

Ответ: Вася.

Решение. Отметим центр сетки, назовем его O. Вася будет играть по следующей стратегии. Если он может выиграть одним ходом, то он делает этот ход. В противном случае он стирает отрезок, симметричный относительно точки O отрезку, только что стертому Петей. Таким образом после каждого хода Васи картинка будет симметрична относительно точки O. Предположим, что Петя смог победить. Тогда после какого-то Васиного хода Петя смог стереть последнюю сторону некоторой клетки K. Рассмотрим симметричную ей относительно точки O клетку K'. У нее должны быть стерты три стороны, поскольку лишь только что стертый отрезок не имеет симметричного стертого отрезка, а остальная часть картинки симметрична относительно O. Но тогда и перед ходом Васи либо у клетки K, либо у клетки K' уже были стерты три стороны, поэтому Вася должен был стереть и четвертую сторону. Мы пришли к противоречию. Поэтому Петя не сможет выиграть и, значит, победит Вася.

4. Для положительных чисел a, b и c докажите неравенство

$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\geqslant\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}.$$

Решение. По неравенству о средних для двух чисел

$$\frac{a^3}{b^2}+a\geqslant 2\sqrt{\frac{a^3}{b^2}\cdot a}=2\frac{a^2}{b}\quad\text{и}\quad\frac{a^2}{b}+b\geqslant 2\sqrt{\frac{a^2}{b}\cdot b}=2a.$$

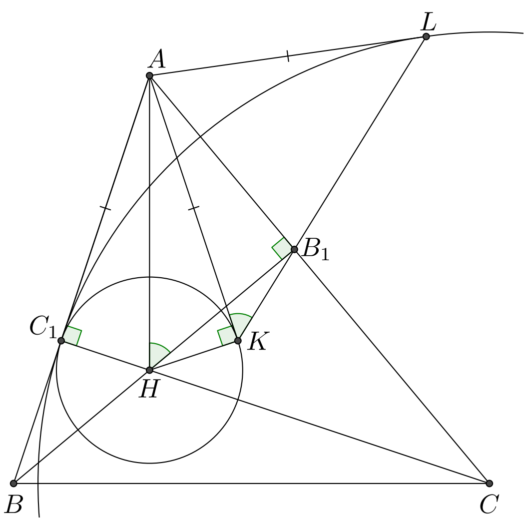
Сложив эти неравенства и сократив на $\frac{a^2}{b}$ и a, получим $\frac{a^3}{b^2}+b\geqslant\frac{a^2}{b}+b$. Просуммируем это неравенство с двумя аналогичными:

$$\left(\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\right)+(a+b+c)\geqslant\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)+(a+b+c).$$

После сокращения на $a+b+c$ получим требуемое.

5. В остроугольном треугольнике ABC с наименьшей стороной AB провели высоты BB_1 и CC_1, они пересеклись в точке H. Через точку C_1 провели окружность ω с центром в точке H и окружность ω_1 с центром в точке C. Через точку A провели касательную к ω, касающуюся ее в точке K, а также касательную к ω_1, касающуюся ее в точке L. Найдите $\angle KB_1L$.

Ответ: $180°$



Решение. Поскольку $\angle AKH = 90^\circ = \angle AB_1H$, четырехугольник AB_1KH вписанный и, значит, $\angle HKB_1 = 180^\circ - \angle HAB_1$. Тогда

$$\angle AKB_1 = \angle HKB_1 - 90^\circ = (180^\circ - \angle HAB_1) - 90^\circ = 90^\circ - \angle HAB_1.$$

Простое вычисление дает

$$\angle KAL = \angle C_1AL - \angle C_1AK = 2\angle C_1AB_1 - 2\angle C_1AH = 2\angle HAB_1.$$

Отрезки AC_1 и AK — касательные, проведенные из точки A к окружности ω, поэтому $AK = AC_1$, а отрезки AC_1 и AL — касательные, проведенные из точки A к окружности ω_1, поэтому $AC_1 = AL$. Следовательно, $AK = AC_1 = AL$ и

$$\angle AKL = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle KAL = 90^\circ - \angle HAB_1 = \angle AHB_1 = \angle AKB_1.$$

Поэтому точки K, B_1 и L лежат на одной прямой и, значит, $\angle KB_1L = 180^\circ$.

6. Найдите все пары простых чисел p и q, для которых $\frac{p^3+1700}{q^3+96} = q^3$.

Ответ: $p = 53$, $q = 7$

Решение. Перепишем уравнение в виде $p^3 + 1700 = q^3(q^3 + 96)$ и перейдем к остаткам от деления на 7, получим $p^3 - 1 \equiv q^3(q^3 - 2) \pmod 7$. Следовательно, $p^3 \equiv (q^3 - 1)^2 \pmod 7$. Если простое число q отлично от 7, то q дает ненулевой остаток от деления на 7 и, значит, q^3 дает остаток 1 или 6. Тогда $(q^3 - 1)^2$ дает остаток 0 или 4 при делении на 7. Перебором остатков легко убедиться, что куб не может давать остаток 4 при делении на 7. Поэтому p делится на 7 и, значит, $p = 7$. Такое число p не подходит. Действительно, $p^3 + 1700 = 7^3 + 1700 = 2043$, что делится на 3. Тогда $q^3(q^3 + 96)$ делится на 3, поэтому либо q, либо $q^3 + 96$ делится на 3. В обоих случаях получаем, что q делится на 3 и, значит, $q = 3$. Но $3^3(3^3 + 96) = 3321 \neq 2043$. Таким образом, q должно равняться 7. В этом случае $p = 53$.