Олимпиада школьников СПбГУ по математике.
Заключительный этап. 2018/2019 учебный год. 10 – 11 классы.

Вариант 1

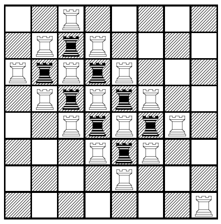
1. *Имеется 8 черных ладей и n белых. При каком наибольшем n их можно расставить на шахматной доске так, чтобы одноцветные ладьи не били друг друга? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.*

Ответ: 16.

Решение. Пусть в i-й строке доски стоит n_i черных ладей. Тогда в этой строке можно расположить не более $n_i + 1$ белых ладей, не бьющих друг друга. Поэтому

$$n \leqslant (n_1 + 1) + (n_2 + 1) + \ldots + (n_8 + 1) = (n_1 + \ldots + n_8) + 8 = 8 + 8 = 16.$$

Расстановка для 16 белых ладей показана на рисунке. □



2. *Даны положительные числа x, y, z. Найдите максимальное значение выражения*

$$A = \frac{xyz\,(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4 + (yz)^4 + (xz)^4}}\,.$$

Ответ: $\sqrt{3}$.

Решение. Для оценки числителя A воспользуемся неравенством Коши для средних:

$$xy \cdot xz + xy \cdot yz + xz \cdot yz \leqslant \frac{(xy)^2 + (xz)^2}{2} + \frac{(xy)^2 + (yz)^2}{2} + \frac{(xz)^2 + (yz)^2}{2} = (xy)^2 + (yz)^2 + (xz)^2.$$

Используя неравенство $\big((xy)^2 + (yz)^2 + (xz)^2\big)^2 \leqslant 3\big((xy)^4 + (yz)^4 + (xz)^4\big)$, мы получим

$$A^2 \leqslant \frac{3\left((xy)^4 + (yz)^4 + (xz)^4\right)}{(xy)^4 + (yz)^4 + (xz)^4} = 3 \quad \text{и} \quad A \leqslant \sqrt{3}.$$

Равенство реализуется при $x = y = z$. □

3. *Дан треугольник ABC с меньшей стороной AB. На сторонах AB и AC выбраны соответственно точки X и Y так, что $BX = CY$. Под каким углом прямая, проходящая через центры описанных окружностей треугольников ABC и AXY, пересекает прямую BC, если $\angle ABC = \beta$ и $\angle BCA = \gamma$?*

Ответ: $90^\circ + \frac{\gamma-\beta}{2}$.

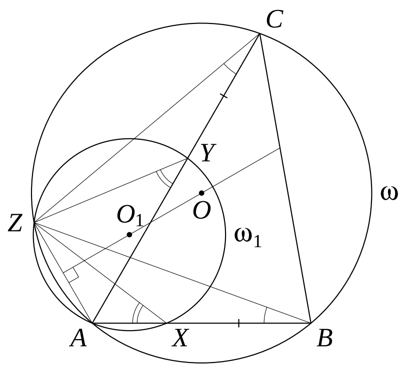
Решение. Пусть ω и ω_1 — описанные окружности треугольников ABC и AXY, O и O_1 — их центры, Z — отличная от A точка пересечения ω и ω_1. Заметим, что $\angle ABZ = \angle ACZ$ поскольку эти углы вписаны в ω и опираются на общую дугу. Аналогично проверяется равенство $\angle AXZ = \angle AYZ$.

Поэтому $\triangle XBZ = \triangle YCZ$, откуда $BZ = CZ$. Тогда равны и дуги окружности ω, стягиваемые хордами BZ и CZ. Следовательно,

$$\breve{BAZ} = \breve{ZC} = \tfrac{1}{2}\ \breve{BAC} = \tfrac{1}{2}\,(2\beta + 2\gamma) = \beta + \gamma, \quad \text{откуда} \quad \angle BAZ = 180^\circ - \tfrac{1}{2}\,(\beta + \gamma).$$

Отрезок AZ является общей хордой окружностей ω и ω_1. Значит, O и O_1 лежат на серединном перпендикуляре к AZ и, в частности, $AZ \perp OO_1$. Поскольку $\angle ABC = \beta$ и $\angle BAZ = 180^\circ - \frac{\beta+\gamma}{2}$, угол между прямыми OO_1 и BC будет равен

$$360^\circ - \angle ABC - \angle BAZ - 90^\circ = 270^\circ - \beta - \bigl(180^\circ - \tfrac{1}{2}\,(\beta + \gamma)\bigr) = 90^\circ + \tfrac{1}{2}(\gamma - \beta). \quad \square$$



4. *Десятичная запись квадрата натурального числа x представляет собой два одинаковых соседних блока из n цифр. Может ли n равняться 20182019?*

Ответ: Да.

Решение. Число x^2 должно иметь вид $(10^n + 1)\,a$, где a — некоторое n-значное число. Для нечетных n по формуле для суммы геометрической прогрессии

$$10^n + 1 = (10+1)b = 11b, \quad \text{где } b = 1 - 10 + 10^2 - \ldots + 10^{n-1}.$$

Заметим, что $10^k \bmod 11 = (-1)^k$ для неотрицательных целых k, откуда $b \bmod 11 = n \bmod 11$. Значит, $(10^n + 1) \vdots 121$ для нечетных n, кратных 11, и, в частности, для $n = 20182019$. Положим

$$x = \tfrac{10}{11}\,(10^n + 1), \quad a = \tfrac{100}{121}\,(10^n + 1).$$

По доказанному числа a и x натуральные. Отметим два простых факта.

1) $a < 10^n$. Действительно,

$$a < \frac{100\left(10^n + 10^{n-1}\right)}{121} = \frac{100 \cdot 10^{n-1} \cdot 11}{121} = \frac{10}{11} \cdot 10^n < 10^n.$$

2) $a > 10^{n-1}$, поскольку $a > \dfrac{10^n + 1}{10} > 10^{n-1}$.

Из 1) и 2) вытекает, что число a является n-значным. Кроме того,

$$x^2 = \tfrac{100}{121}\,(10^n + 1)^2 = \tfrac{100}{121}\,(10^n + 1) \cdot (10^n + 1) = (10^n + 1)\,a.$$

Поэтому число x удовлетворяет условию задачи. $\square$

5. *На однокруговой турнир по настольному теннису подало заявку 16 человек. Когда было сыграно n матчей, оказалось, что среди любых трех теннисистов найдутся двое, уже сыгравших между собой. При каком наименьшем n такое возможно?*

Ответ: 56.

Решение. Пусть теннисист A провел ровно k матчей, а все остальные участники — не менее k матчей. Разобьем теннисистов на две группы: в первой — сам A и те, с кем он сыграл, во второй — те, с кем A не играл. Первая группа содержит $k+1$ человек, и каждый из них провел не менее k игр. Тогда участники из этой группы провели не менее $\frac{1}{2}k(k+1)$ матчей (в сумме каждая игра учитывается не более двух раз). Во вторую группу входит $15-k$ человек. Поскольку ни один из них не играл с A, они все должны были сыграть друг с другом, то есть провести по крайней мере $\frac{1}{2}(15-k)(14-k)$ матчей. Поэтому общее число игр не меньше, чем

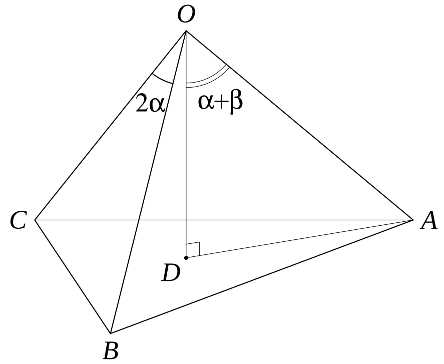
$$\tfrac{1}{2}k(k+1)+\tfrac{1}{2}(15-k)(14-k)=k^2-14k+105=(k-7)^2+56\geqslant 56.$$

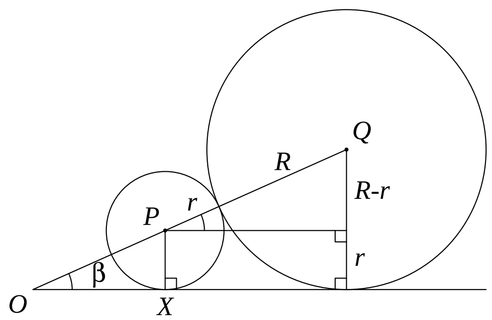
Таким образом, $n<56$ нам не подходит.

Покажем теперь, что $n=56$ удовлетворяет условию задачи. Разобьем теннисистов на две группы по 8 человек, и пусть в обеих группах все участники сыграют друг с другом. В сумме получится ровно 56 матчей. Среди любых трех теннисистов найдутся двое из одной группы, и, значит, они уже сыграли между собой. □

6. *Три конуса с общей вершиной, касающихся друг друга внешним образом, имеют высоту 2 и радиус основания $\sqrt{3}$. Два шара касаются внешним образом друг друга и всех конусов. Найдите отношения радиусов шаров (большего к меньшему).*

Ответ: $4:3$.





Решение. Пусть O — общая вершина конусов, 2α — их угол при вершине, P и Q — центры меньшего и большего шаров, r и R — их радиусы. Заметим, что точка X касания меньшего шара с одним из конусов лежит в плоскости, проходящей через P и ось симметрии этого конуса. Положим $\beta=\angle XOP$. Этот угол одинаков для всех конусов, поскольку $\sin\beta=\frac{r}{OP}$. Значит, луч OP образует угол $\alpha+\beta$ с осями симметрии всех конусов. Аналогично доказывается, что на этом луче лежит и точка Q.

Отложим на осях симметрии конусов отрезки OA, OB, OC единичной длины. Тогда $OABC$ — правильная пирамида с плоскими углами 2α при вершине O. Пусть D — центр треугольника ABC. Точки P и Q лежат на луче OD. По условию $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Поэтому

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\angle AOD=\frac{AD}{OA}=AD=\frac{AB}{\sqrt{3}}=\frac{2\sin\alpha}{\sqrt{3}}=\cos\alpha=\sin\left(\tfrac{\pi}{2}-\alpha\right).$$

Поскольку $\alpha,\beta<\frac{\pi}{2}$, мы получим $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$, откуда $\beta=\frac{\pi}{2}-2\alpha$ и

$$\operatorname{ctg}\beta=\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=4\sqrt{3}\Longrightarrow\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2\beta+1}}=\frac{1}{7}.$$

Положим $t = \frac{R}{r}$. Тогда

$$R - r = (R + r)\sin\beta \Longleftrightarrow t - 1 = \frac{1}{7}\,(t + 1) \Longleftrightarrow t = \frac{4}{3}. \quad \square$$

Вариант 2

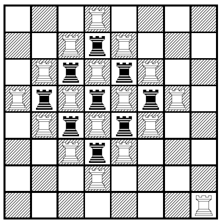
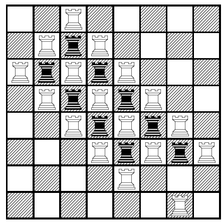
1. *Имеется 9 черных ладей и n белых. При каком наибольшем n их можно расставить на шахматной доске так, чтобы одноцветные ладьи не били друг друга? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.*

   Ответ: 17.

   Решение. Пусть в i-й строке доски стоит n_i черных ладей. Тогда в этой строке можно расположить не более $n_i + 1$ белых ладей, не бьющих друг друга. Поэтому

$$n \leqslant (n_1 + 1) + (n_2 + 1) + \ldots + (n_8 + 1) = (n_1 + \ldots + n_8) + 8 = 9 + 8 = 17.$$

Возможные расстановки для 17 белых ладей показаны на рисунке. $\square$

2. *Даны положительные числа x, y, z. Найдите максимальное значение выражения*

$$A = \frac{xyz\,(x+y+z)}{x^4+y^4+z^4}\,.$$

   Ответ: 1.

   Решение. Для оценки числителя A воспользуемся неравенством Коши для средних:

$$xy\cdot xz + xy\cdot yz + xz\cdot yz \leqslant \frac{(xy)^2+(xz)^2}{2} + \frac{(xy)^2+(yz)^2}{2} + \frac{(xz)^2+(yz)^2}{2} = (xy)^2+(yz)^2+(xz)^2.$$

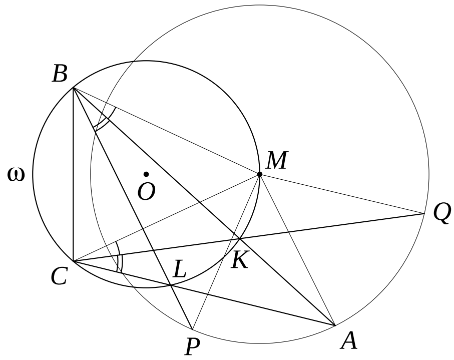
Используя неравенство $x^4+y^4+z^4 \geqslant x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2$, мы получим

$$A \leqslant \frac{(xy)^2+(yz)^2+(xz)^2}{(xy)^2+(yz)^2+(xz)^2} = 1.$$

Равенство реализуется при $x = y = z$. $\square$

3. *Окружность ω единичного радиуса проходит через вершины B и C треугольника ABC и вторично пересекает его стороны AB и AC в точках K и L соответственно. На лучах BL и CK отмечены соответственно такие точки P и Q, что $BP = AC$ и $CQ = AB$. Найдите расстояние между центрами описанных окружностей треугольников APQ и KBC.*

   Ответ: 1.



Решение. Пусть O — центр ω, M — середина дуги BKC. Хорды BM и CM стягивают одинаковые дуги и потому равны. Кроме того, $CQ = AB$ по условию и $\angle ABM = \angle QCM$ как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу. Тогда $\triangle ABM = \triangle QCM$, откуда $AM = QM$. Аналогичным образом проверяется, что $\triangle ACM = \triangle PBM$ и, значит, $AM = PM$. Таким образом, точка M равноудалена от A, P, Q, то есть она является центром описанной окружности треугольника APQ. Так как треугольник KBC вписан в ω, нам требуется найти расстояние OM. Поскольку точка M лежит на ω, отрезок OM — радиус ω, откуда $OM = 1$. $\square$

4. *Шестнадцатиричная запись квадрата натурального числа x представляет собой два одинаковых соседних блока из n цифр. Может ли n равняться 2023?*

Ответ: Да.

Решение. Число x^2 должно иметь вид $(16^n + 1)\,a$, где a — некоторое n-значное число. Для нечетных n по формуле для суммы геометрической прогрессии

$$16^n + 1 = (16 + 1)b = 17b, \quad \text{где } \ b = 1 - 16 + 16^2 - \ldots + 16^{n-1}.$$

Заметим, что $16^k \bmod 17 = (-1)^k$ для неотрицательных целых k, откуда $b \bmod 17 = n \bmod 17$. Значит, $(16^n + 1) \vdots 289$ для нечетных n, кратных 17, и, в частности, для $n = 2023$. Положим

$$x = \tfrac{16}{17}\,(16^n + 1), \quad a = \tfrac{256}{289}\,(16^n + 1).$$

По доказанному числа a и x натуральные. Отметим два простых факта.

1) $a < 16^n$. Действительно,

$$a < \frac{256\left(16^n + 16^{n-1}\right)}{289} = \frac{256 \cdot 16^{n-1} \cdot 17}{289} = \frac{16}{17} \cdot 16^n < 16^n.$$

2) $a > 16^{n-1}$, поскольку $a > \dfrac{16^n + 1}{16} > 16^{n-1}$.

Из 1) и 2) вытекает, что число a является n-значным. Кроме того,

$$x^2 = \tfrac{256}{289}\,(16^n + 1)^2 = \tfrac{256}{289}\,(16^n + 1) \cdot (16^n + 1) = (16^n + 1)\,a.$$

Поэтому число x удовлетворяет условию задачи. $\square$

5. *В однокруговом турнире по настольному теннису участвует $2k$ спортсменов. В каждом туре все участники проводят по одному матчу. Какое наименьшее число туров надо сыграть, чтобы при любом расписании игр обязательно нашлось трое теннисистов, сыгравших друг с другом?*

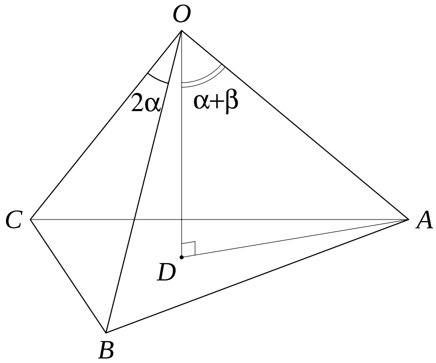
Ответ: $k + 1$.

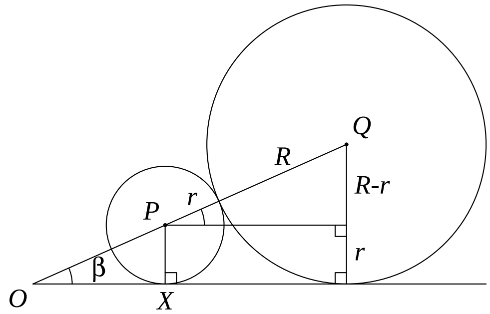
Решение. Покажем, что $k + 1$ туров достаточно. Пусть теннисисты A и B сыграли между собой в первом туре. В следующих k турах они играли с кем-то из остальных $2k - 2$ участников и провели в общей сложности $2k$ матчей. Значит, найдется теннисист C, сыгравший и с A, и с B. Тогда тройка $\{A, B, C\}$ удовлетворяет условию задачи.

Покажем теперь, что k туров не хватит. Разобьем всех участников на две группы по k человек. Пусть каждый теннисист сыграл со всеми соперниками из другой группы, а с теннисистами из своей группы не играл. Среди любых трех участников найдутся двое из одной группы, и, значит, они еще не играли между собой. $\square$

6. *Имеется три одинаковых конуса с общей вершиной, касающихся друг друга внешним образом, а также два шара, касающихся внешним образом друг друга и всех конусов. Радиусы шаров относятся как $1:3$. Найдите угол при вершине конусов. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении).*

Ответ: $\frac{2\pi}{3}$.





Решение. Пусть O — общая вершина конусов, 2α — их угол при вершине, P и Q — центры меньшего и большего шаров, r и R — их радиусы. Заметим, что точка X касания меньшего шара с одним из конусов лежит в плоскости, проходящей через P и ось симметрии этого конуса. Положим $\beta = \angle XOP$. Этот угол одинаков для всех конусов, поскольку $\sin\beta = \frac{r}{OP}$. Значит, луч OP образует угол $\alpha+\beta$ с осями симметрии всех конусов. Аналогично доказывается, что на этом луче лежит и точка Q. Положим $t = \frac{R}{r}$. Тогда

$$R - r = (R + r)\sin\beta \iff t - 1 = (t + 1)\sin\beta \iff \sin\beta = \frac{t-1}{t+1} = \frac{1}{2} \iff \beta = \frac{\pi}{6}.$$

Отложим на осях симметрии конусов отрезки OA, OB, OC единичной длины. Пусть D — центр треугольника ABC. Точки O, P, Q равноудалены от A, B, C и, значит, лежат на перпендикуляре к плоскости ABC, проходящем через точку D. Тогда $\angle AOD = \alpha + \beta$ и

$$\sin\left(\alpha + \tfrac{\pi}{6}\right) = \sin(\alpha + \beta) = \frac{AD}{OA} = AD = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{2\sin\alpha}{\sqrt{3}}.$$

Поэтому

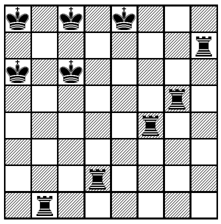
$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin\alpha + \frac{1}{2}\cdot\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\sin\alpha \iff \operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3} \iff 2\alpha = \frac{2\pi}{3}. \quad \square$$

Вариант 3

1. *При каком наибольшем n на шахматной доске можно расставить n королей и n ладей так, чтобы никакая фигура не была под боем?*

Ответ: 5.

Решение. Короли могут стоять только в клетках на пересечении горизонтали и вертикали, свободных от ладей. Таких клеток всего $(8-n)^2$. Поскольку на доске должно быть n королей, мы получаем неравенство $(8-n)^2 \geqslant n$, из которого $n \leqslant 5$. Пример расстановки 5 королей и 5 ладей показан на рисунке. $\square$



2. *Даны числа $x, y > 0$. Найдите максимальное значение выражения*

$$A = \frac{xy\,(x+y)}{\sqrt{x^6+y^6}}\,.$$

Ответ: $\sqrt{2}$.

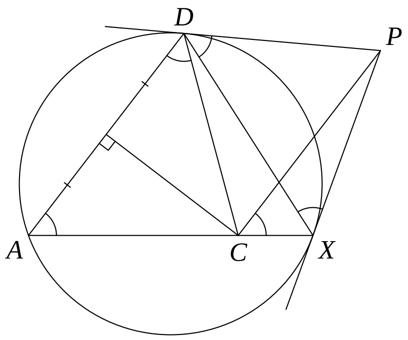
Решение. Заметим, что $x^6+y^6 \geqslant \frac{1}{2}\bigl(x^3+y^3\bigr)^2$. Поэтому

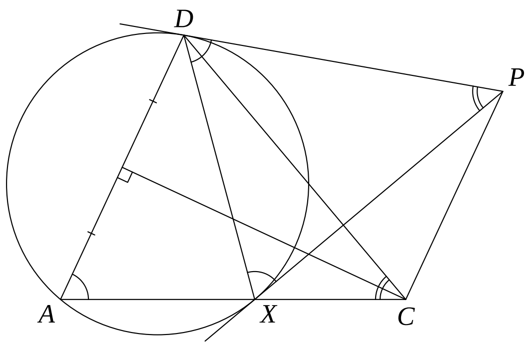
$$A \leqslant \frac{xy\,(x+y)\sqrt{2}}{x^3+y^3} = \frac{xy\sqrt{2}}{x^2-xy+y^2} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-1} \leqslant \sqrt{2}.$$

Равенство реализуется при $x = y$. $\square$

3. *Дан острый угол BAD, где точка D отлична от A. На луче AB произвольным образом выбирается точка X, также отличная от A. Пусть P — точка пересечения касательных к описанной окружности треугольника ADX, проведенных в точках D и X. Найдите геометрическое место точек P.*

Ответ: луч, сонаправленный с лучом AD, начинающийся в точке пересечения AB и серединного перпендикуляра к отрезку AD.





Решение. Обозначим через C точку пересечения серединного перпендикуляра к отрезку AD с лучом AB.

Пусть точка P построена по X в соответствии с условием. Докажем, что она лежит на луче с началом C, сонаправленным с AD. Заметим, что угол между касательной DP и хордой DX равен вписанному углу DAX, опирающемуся на дугу DX. Поэтому

$$\angle ADC = \angle DAC = \angle PDX = \angle PXD.$$

Возможны два случая.

1) *Точка C лежит между A и X* (см. левый рисунок). Тогда

$$180^\circ - \angle DPX = 2\angle PDX = 2\angle DAC = 180^\circ - \angle DCA = \angle DCX.$$

Поэтому четырехугольник $CDPX$ вписанный и $\angle PCX = \angle PDX = \angle DAC$. Значит, $CP \parallel AD$.

2) *Точка X лежит между A и C* (см. правый рисунок). Тогда

$$\angle DCA = 180^\circ - 2\angle DAC = 180^\circ - 2\angle PDX = \angle DPX.$$

Поэтому четырехугольник $CPDX$ вписанный, откуда $180^\circ - \angle PCX = \angle PDX = \angle DAC$. Значит, и в этом случае $CP \parallel AD$.

Пусть теперь точка P лежит на луче с началом C, сонаправленным с AD. Выберем на луче AC точку X так, чтобы она лежала внутри угла ADP и $\angle PDX = \angle DAC$. Покажем, что такая точка X порождает P в соответствии с условием. Пусть $AX > CX$. Так как $\angle PCX = \angle DAC = \angle PDX$, четырехугольник $CDPX$ вписанный, откуда

$$\angle PXD = 180^\circ - \angle PDX - \angle DPX = 180^\circ - \angle CDA - \angle DCA = \angle DAC = \angle PDX.$$

Проведем через точки A, D, X окружность. Она касается прямой DP, так как $\angle PDX = \angle DAC$, и прямой XP, поскольку $\angle PXD = \angle PDX$. Значит, точка X порождает точку P в соответствии с условием задачи. Случай $AX \leqslant CX$ разбирается аналогично. $\square$

4. *Дано натуральное число x, десятичная запись которого n-значная и не содержит нулей. Числа x и x^2 в десятичной системе одинаково читаются слева направо и справа налево. Найдите все n, при которых такое x существует.*

Ответ: $n \in \{1, 2, \ldots, 9\}$.

Решение. Если $n \leqslant 9$, то нам подходит $x = 1\ldots1$, поскольку

$$1\ldots1^2 = \overline{12\ldots(n-1)n(n-1)\ldots1}.$$

Предположим теперь, что требуемое число x существует, и запишем его в десятичной системе: $x = \overline{a_{n-1}\ldots a_0}$. Из симметрии чисел a_k вытекает, что $x^2 = b_0 + 10b_1 + \ldots + 10^{2n-2}b_{2n-2}$, где

$$b_k = a_0a_k + a_1a_{k-1} + \ldots + a_ka_0, \quad b_{2n-2-k} = b_k \quad \text{при} \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Нам достаточно показать, что $b_k \leqslant 9$ для всех $k = 0, 1, \ldots, 2n-2$. Действительно, по условию $a_k \geqslant 1$ при всех $k = 0, \ldots, n-1$, и мы получим $n \leqslant b_n \leqslant 9$. Докажем требуемое неравенство по индукции.

База индукции. Проверим, что $a_0^2 \leqslant 9$. Предположим, что $a_0 > 3$. Тогда младшая цифра числа x^2 равна $a_0^2 \bmod 10$, а его старшая цифра есть $\left[x^2 \cdot 10^{1-2n}\right]$. Заметим, что

$$\left[\frac{x^2}{10^{2n-1}}\right] \geqslant \left[\frac{\left(a_0 \cdot 10^{n-1}\right)^2}{10^{2n-1}}\right] = \left[\frac{a_0^2}{10}\right] \quad \text{и} \quad \left[\frac{x^2}{10^{2n-1}}\right] < \frac{x^2}{10^{2n-1}} < \frac{\left((a_0+1) \cdot 10^{n-1}\right)^2}{10^{2n-1}} = \frac{(a_0+1)^2}{10}.$$

Несложно убедиться в том, что

$$a_0^2 \bmod 10 > \frac{(a_0+1)^2}{10} \;\text{ при }\; a_0 \in \{4, 5, 6, 7\} \quad \text{и} \quad a_0^2 \bmod 10 < \left[\frac{a_0^2}{10}\right] \;\text{ при }\; a_0 \in \{8, 9\}.$$

Значит, старшая и младшая цифры x^2 не совпадают, что противоречит условию.

Отметим, что по доказанному число x^2 будет $(2n-1)$-значным. Действительно, $x < 4 \cdot 10^{n-1}$, поэтому в $(2n-1)$-м разряде x^2 может быть только 0 или 1. Во втором случае младшая цифра x^2 равна старшей (то есть 1), а также a_0^2. Но тогда $a_{n-1} = a_0 = 1$ и $x^2 < 10^{2n-1}$, что невозможно.

Индукционный переход. Пусть неравенство доказано для b_j при $j < k$. Тогда $b_0, \ldots, b_{k-1}$ — младшие цифры числа x^2, и в силу условия $b_{k-1}, \ldots, b_0$ — его старшие цифры. Поэтому

$$10^{2n-1-k} > x^2 - 10^{2n-2}b_0 - \ldots - 10^{2n-1-k}b_{k-1} =$$
$$= x^2 - 10^{2n-2}b_{2n-2} - \ldots - 10^{2n-1-k}b_{2n-1-k} \geqslant 10^{2n-2-k}b_{2n-2-k} = 10^{2n-2-k}b_k,$$

откуда $b_k < 10$. $\square$

5. *В однокруговом турнире по настольному теннису приняло участие 35 человек. По итогам турнира оказалось, что нет такой четверки игроков A, B, C, D, что A выиграл у B, B — у C, C — у D, а D — у A. Каково наибольшее количество троек участников, одержавших во встречах между собой ровно по одной победе? Ничьих в теннисе не бывает.*

Ответ: 11.

Решение. Назовем *циклом* такую тройку участников, что во встречах между собой каждый из них одержал по одной победе. Докажем вначале, что ни один теннисист не может входить более чем в один цикл. Договоримся символом $A \to B$ отмечать факт победы A над B. Пусть нашелся участник C, фигурирующий в двух разных циклах. Эти циклы могут быть двух типов.

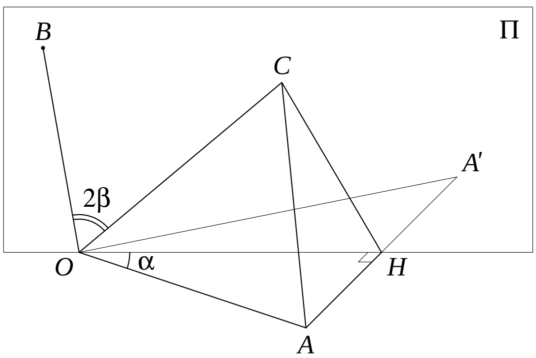
1) (A, B, C) и (C, D, E). Тогда $A \to D$, так как иначе $A \to B \to C \to D \to A$, что невозможно. Но в этом случае $A \to D \to E \to C \to A$, чего также быть не может.

2) (A, B, C) и (B, C, D). Тогда вновь $A \to D$. Но в этом случае $A \to D \to B \to C \to A$, что также невозможно. Таким образом, в два цикла теннисист C входить не может.

По доказанному циклы не пересекаются, поэтому их количество не превосходит $\left[\frac{35}{3}\right] = 11$. Приведем пример турнира с 11 циклами. Разобьем 33 участника на группы по 3 человека и занумеруем эти группы числами от 1 до 11. Пусть каждая группа образует цикл, а во встрече теннисистов, входящих в разные группы, побеждает спортсмен из группы с бо́льшим номером. Наконец, оставшиеся два участника побеждают всех остальных. Такой турнир удовлетворяет условию задачи и имеет ровно 11 циклов. $\square$

6. *Четыре конуса с общей вершиной попарно касаются друг друга внешним образом. Первые два и последние два конуса имеют одинаковый угол при вершине. Найдите максимальный угол между осями симметрии первого и третьего конусов. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении).*

Ответ: $\pi - \operatorname{arctg}(2\sqrt{2})$.



Решение. Пусть 2α и 2β — углы при вершине соответственно первого и третьего конусов. Отложим на осях симметрии первых двух конусов равные отрезки OA и OA'. Обозначим середину отрезка AA' через H. Медиана OH равнобедренного треугольника AOA' будет также его высотой и биссектрисой. Поэтому $OH \perp AA'$, и луч OH является общей образующей первых двух конусов.

Отметим на осях симметрии третьего и четвертого конусов точки B и C соответственно. Покажем, что лучи OB и OC лежат в плоскости Π, состоящей из точек, равноудаленных от A и A'. Ясно, что $O \in \Pi$. Поскольку $\angle AOB = \angle A'OB = \alpha + \beta$, треугольники AOB и $A'OB$ равны, откуда $AB = A'B$ и $B \in \Pi$. Аналогично проверяется, что луч OC лежит в Π.

Положим $\varphi = \angle BOH$. Заметим, что $AOH \perp BOH$ и $\angle AOB = \alpha + \beta$, так как первый и третий конусы касаются друг друга. Используя для пирамиды $OABH$ формулу трех косинусов, мы получим

$$\cos\angle AOB = \cos\angle AOH \cdot \cos\angle BOH \Longleftrightarrow \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\varphi. \qquad (*)$$

Поскольку третий и четвертый конус касаются друг друга, угол COH равен $\varphi - 2\beta$ или $2\pi - \varphi - 2\beta$. Кроме того, четвертый конус касается первых двух. Тогда $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos(\varphi \pm 2\beta)$ по формуле трех косинусов для пирамиды $OACH$, и в силу $(*)$

$$\cos(\varphi \pm 2\beta) = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha} = \cos\varphi \Longleftrightarrow 2\sin\beta \cdot \sin(\varphi \pm \beta) = 0 \Longleftrightarrow \varphi = \pi \mp \beta.$$

Подставляя эти равенства в $(*)$, мы получим

$$\cos(\alpha+\beta) = -\cos\alpha \cdot \cos\beta \Longleftrightarrow 2\cos\alpha \cdot \cos\beta = \sin\alpha \cdot \sin\beta \Longleftrightarrow \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = 2.$$

Тогда $\alpha + \beta > \frac{\pi}{2}$ и

$$\operatorname{tg}(\pi - \alpha - \beta) = -\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta - 1} = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta \geqslant 2\sqrt{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} = 2\sqrt{2}.$$

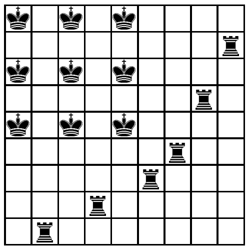
Поэтому $\pi - \alpha - \beta \geqslant \operatorname{arctg}(2\sqrt{2})$ и $\alpha + \beta \leqslant \pi - \operatorname{arctg}(2\sqrt{2})$. Равенство реализуется в случае $\alpha = \beta = \operatorname{arctg}\sqrt{2}$. $\square$

Вариант 4

1. *При каком наибольшем n на доске 9×9 можно расставить n королей и 6 ладей так, чтобы никакая фигура не была под боем?*

Ответ: 9.

Решение. Короли могут стоять только в клетках на пересечении горизонтали и вертикали, свободных от ладей. Таких клеток всего $(9-6)^2 = 9$, поэтому $n \leqslant 9$. Пример расстановки 9 королей и 6 ладей показан на рисунке. $\square$



2. *Даны числа $x, y > 0$. Найдите максимальное значение выражения*

$$A = \frac{xy\,(x+y)}{\sqrt[4]{x^{12}+y^{12}}}\,.$$

Ответ: $\sqrt[4]{8}$.

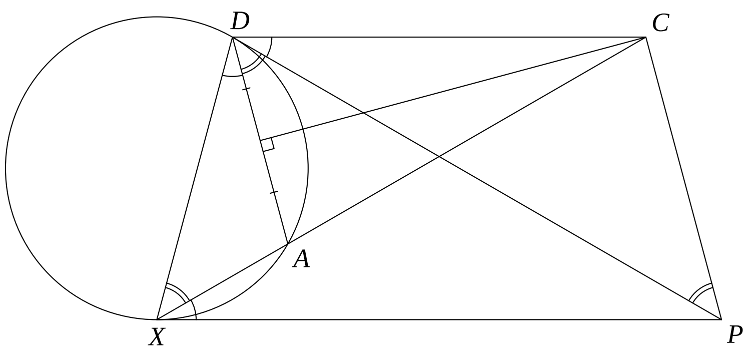
Решение. Заметим, что $\big(x^3+y^3\big)^4 \leqslant 4\big(x^6+y^6\big)^2 \leqslant 8\big(x^{12}+y^{12}\big)$. Поэтому

$$A \leqslant \frac{xy\,(x+y)\sqrt[4]{8}}{x^3+y^3} = \frac{xy\sqrt[4]{8}}{x^2-xy+y^2} = \frac{\sqrt[4]{8}}{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-1} \leqslant \sqrt[4]{8}.$$

Равенство реализуется при $x = y$. $\square$

3. *Дан тупой угол BAD, где точка D отлична от A. На луче AB произвольным образом выбирается точка X, также отличная от A. Пусть P — точка пересечения касательных к описанной окружности треугольника ADX, проведенных в точках D и X. Найдите геометрическое место точек P.*

Ответ: луч, сонаправленный с лучом DA, начинающийся в точке пересечения BA и серединного перпендикуляра к отрезку AD.



Решение. Обозначим через C точку пересечения серединного перпендикуляра к отрезку AD с лучом BA.

Пусть точка P построена по X в соответствии с условием. Докажем, что она лежит на луче с началом C, сонаправленным с DA. Угол между касательной PD и хордой AD равен вписанному углу AXD, опирающемуся на дугу AD. Поэтому $\angle PDA = \angle AXD$ и, аналогично, $\angle AXP = \angle ADX$. Заметим, что

$$\angle CDP + \angle PDA = \angle CDA = \angle CAD = 180^\circ - \angle DAX = \angle AXD + \angle ADX = \angle PDA + \angle CXP.$$

Значит, $\angle CDP = \angle CXP$ и четырехугольник $CDXP$ вписанный. Тогда

$$\angle PCX = \angle PDX = \angle CDA = \angle CAD, \quad \text{откуда} \quad CP \parallel DA.$$

Пусть теперь точка P лежит на луче с началом C, сонаправленным с DA. Выберем на луче CA точку X так, чтобы $CX > CA$ и $\angle ADX = \angle CDP$. Покажем, что такая точка X порождает P в соответствии с условием. Так как

$$\angle PCX = \angle CAD = \angle CDA = \angle PDX,$$

четырехугольник $CDXP$ вписанный. Отсюда

$$\angle CXP = \angle CDP = \angle ADX \quad \text{и} \quad \angle CXD = \angle CPD = \angle PDA.$$

Поэтому окружность, проходящая через точки A, D, X, касается прямых XP и DP. $\square$

4. *Дано натуральное число x, шестнадцатиричная запись которого n-значная и не содержит нулей. Числа x и x^2 в шестнадцатиричной системе одинаково читаются слева направо и справа налево. Найдите все n, при которых такое x существует.*

Ответ: $n \in \{1, 2, \ldots, 15\}$.

Решение. Если $n \leqslant 15$, то нам подходит $x = 1\ldots1$, поскольку

$$1\ldots1^2 = \overline{12\ldots(n-1)n(n-1)\ldots1}.$$

Предположим теперь, что требуемое число x существует, и запишем его в шестнадцатиричной системе: $x = \overline{a_{n-1}\ldots a_0}$. Из симметрии чисел a_k вытекает, что $x^2 = b_0 + 16b_1 + \ldots + 16^{2n-2}b_{2n-2}$, где

$$b_k = a_0a_k + a_1a_{k-1} + \ldots + a_ka_0, \quad b_{2n-2-k} = b_k \quad \text{при} \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Нам достаточно показать, что $b_k \leqslant 15$ для всех $k = 0, 1, \ldots, 2n-2$. Действительно, по условию $a_k \geqslant 1$ при всех $k = 0, \ldots, n-1$, и мы получим $n \leqslant b_n \leqslant 15$. Докажем требуемое неравенство по индукции.

База индукции. Проверим, что $a_0^2 \leqslant 15$. Предположим, что $a_0 > 3$. Тогда младшая цифра числа x^2 равна $a_0^2 \bmod 16$, а его старшая цифра есть $\left[x^2 \cdot 16^{1-2n}\right]$. Заметим, что

$$\left[\frac{x^2}{16^{2n-1}}\right] \geqslant \left[\frac{\left(a_0 \cdot 16^{n-1}\right)^2}{16^{2n-1}}\right] = \left[\frac{a_0^2}{16}\right] \quad \text{и} \quad \left[\frac{x^2}{16^{2n-1}}\right] < \frac{x^2}{16^{2n-1}} < \frac{\left((a_0+1)\cdot 16^{n-1}\right)^2}{16^{2n-1}} = \frac{(a_0+1)^2}{16}.$$

При $a_0 \in \{4, 8, C\}$ младшая цифра x^2 будет нулем, что невозможно. Кроме того,

$$a_0^2 \bmod 16 \geqslant \frac{(a_0+1)^2}{16} \ \text{ при } \ a_0 \in \{5, 6, B\} \quad \text{и} \quad a_0^2 \bmod 16 < \left[\frac{a_0^2}{16}\right] \ \text{ при } \ a_0 \in \{7, 9, A, D, E, F\}.$$

Значит, старшая и младшая цифры x^2 не совпадают, что противоречит условию.

Отметим, что по число x^2 обязано быть $(2n-1)$-значным, так как $x < 4 \cdot 16^{n-1}$ и $x^2 < 16^{2n-1}$.

Индукционный переход. Пусть неравенство доказано для b_j при $j < k$. Тогда $b_0, \dots, b_{k-1}$ — младшие цифры числа x^2, и в силу условия $b_{k-1}, \dots, b_0$ — его старшие цифры. Поэтому

$$16^{2n-1-k} > x^2 - 16^{2n-2}b_0 - \dots - 16^{2n-1-k}b_{k-1} = \\ = x^2 - 16^{2n-2}b_{2n-2} - \dots - 16^{2n-1-k}b_{2n-1-k} \geqslant 16^{2n-2-k}b_{2n-2-k} = 16^{2n-2-k}b_k,$$

откуда $b_k < 16$. $\square$

5. *В однокруговом турнире по настольному теннису принимает участие 20 человек. Если тройка участников A, B, C такова, что A выиграл у B, а B — у C, то организаторы турнира вручают спортсменам из этой тройки соответственно “золотой”, “серебряный” и “бронзовый” сувениры. Участник, оказавшийся в нескольких тройках, получает сувенир за каждую из них. Какое наименьшее количество “серебряных” сувениров надо закупить организаторам, чтобы их хватило вне зависимости от результатов турнира? Ничьих в теннисе не бывает.*

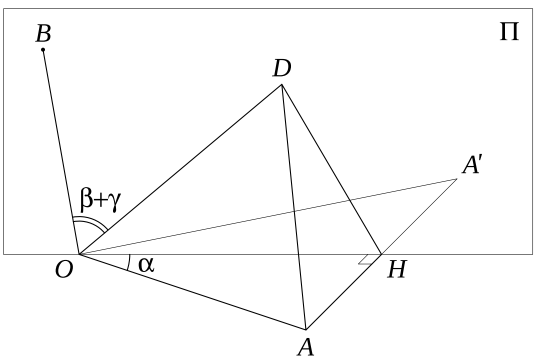
Ответ: 1800.

Решение. Договоримся символом $X \to Y$ отмечать факт победы X над Y. Пусть теннисист B одержал m побед и потерпел $19 - m$ поражений. Тогда найдется ровно $m(19 - m)$ троек вида $A \to B \to C$. Максимум трехчлена $m(19 - m)$ реализуется в ближайших к его вершине целых точках, то есть при $m = 9$ или $m = 10$. Значение трехчлена в этих точках равно 90. Значит, более 90 “серебряных” сувениров теннисист B не получит, а всего достаточно $90 \cdot 20 = 1800$ сувениров.

Покажем, что 1799 “серебряных” сувениров может не хватить. Это произойдет, если каждый участник одержит 9 или 10 побед. Для $k = 2, 3, \dots, 10$ приведем пример турнира с $2k$ участниками, где k теннисистов одержали по $k-1$ побед и k теннисистов — по k побед. Пусть $k = 2$, а участников обозначим через A, B, C, D. Тогда можно положить $A \to B \to C \to D \to A$, $A \to C$, $B \to D$. Допустим, что для некоторого $k < 10$ соответствующий пример уже построен. Добавим к турниру двух новых участников A и B, причем $A \to B$. Пусть старые участники с $k-1$ победами проиграли A и выиграли у B, а участники с k победами проиграли B и выиграли у A. Тогда у всех старых участников стало на одну победу больше. Кроме того, A одержит $k + 1$ победу, а B — k побед. Таким образом, мы получили пример турнира с $2(k + 1)$ теннисистами. $\square$

6. *Четыре конуса с общей вершиной O касаются друг друга внешним образом, причем первые два и последние два их них имеют одинаковый угол при вершине. Пятый конус, отличный от четвертого, касается первых трех конусов внешним образом. Найдите максимальный угол при вершине пятого конуса. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении).*

Ответ: $2 \operatorname{arcctg}\bigl(2\sqrt{2}\bigr)$.



Решение. Пусть 2α, 2β и 2γ — углы при вершине соответственно первого, третьего и пятого конусов. Отложим на осях симметрии первых двух конусов равные отрезки OA и OA'. Обозначим середину отрезка AA' через H. Медиана OH равнобедренного треугольника AOA' будет также его высотой и биссектрисой. Поэтому $OH \perp AA'$, и луч OH является общей образующей первых двух конусов.

Отметим на осях симметрии третьего и четвертого и пятого конусов точки B, C и D соответственно. Покажем, что лучи OB, OC и OD лежат в плоскости Π, состоящей из точек, равноудаленных от A и A'. Ясно, что $O \in \Pi$. Поскольку $\angle AOB = \angle A'OB = \alpha + \beta$, треугольники AOB и $A'OB$ равны, откуда $AB = A'B$ и $B \in \Pi$. Аналогично проверяется, что лучи OC и OD лежат в Π.

Положим $\varphi = \angle BOH$. Заметим, что $AOH \perp BOH$ и $\angle AOB = \alpha + \beta$, так как первый и третий конусы касаются друг друга. Используя для пирамиды $OABH$ формулу трех косинусов, мы получим

$$\cos\angle AOB = \cos\angle AOH \cdot \cos\angle BOH \Longleftrightarrow \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\varphi. \qquad (*)$$

Поскольку третий и четвертый конус касаются друг друга, угол COH равен $\varphi - 2\beta$ или $2\pi - \varphi - 2\beta$. Кроме того, четвертый конус касается первых двух. Тогда $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos(\varphi \pm 2\beta)$ по формуле трех косинусов для пирамиды $OACH$, и в силу $(*)$

$$\cos(\varphi \pm 2\beta) = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha} = \cos\varphi \Longleftrightarrow 2\sin\beta \cdot \sin(\varphi \pm \beta) = 0 \Longleftrightarrow \varphi = \pi \mp \beta.$$

Одно из полученных значений φ соответствует третьему конусу, другое — четвертому. Мы можем считать, что $\varphi = \pi - \beta$, иначе симметрично отразим все конусы относительно плоскости OAA'. Тогда $\angle DOH = \varphi - \beta - \gamma = \pi - 2\beta - \gamma$. В силу равенства $(*)$

$$\cos(\alpha+\beta) = -\cos\alpha \cdot \cos\beta \Longleftrightarrow 2\cos\alpha \cdot \cos\beta = \sin\alpha \cdot \sin\beta. \qquad (**)$$

Теперь формула трех косинусов для пирамиды $OADH$ дает

$$\begin{aligned}
&\cos(\alpha+\gamma) = \cos\alpha \cdot \cos(\varphi - \gamma - \beta) = -\cos\alpha \cdot \cos(\gamma + 2\beta) \Longleftrightarrow \\
&\qquad \Longleftrightarrow \cos\alpha \cdot \cos\gamma - \sin\alpha \cdot \sin\gamma = \sin\gamma \cdot \cos\alpha \cdot \sin 2\beta - \cos\gamma \cdot \cos\alpha \cdot \cos 2\beta \Longleftrightarrow \\
&\qquad\qquad \Longleftrightarrow \cos\gamma \cdot 2\cos^2\beta \cdot \cos\alpha = \sin\gamma\,(\sin\alpha + 2\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \sin\beta).
\end{aligned}$$

В силу формулы $(**)$ заменим в обеих частях последнего равенства $2\cos\alpha \cdot \cos\beta$ на $\sin\alpha \cdot \sin\beta$, а затем сократим на $\sin\alpha$. Мы получим

$$\cos\gamma \cdot \sin\beta \cdot \cos\beta = \sin\gamma\,(1 + \sin^2\beta) \Longrightarrow \operatorname{ctg}\gamma = \frac{\cos^2\beta + 2\sin^2\beta}{\cos\beta \cdot \sin\beta} \geqslant \frac{2\sqrt{2} \cdot \cos\beta \cdot \sin\beta}{\cos\beta \cdot \sin\beta} = 2\sqrt{2}.$$

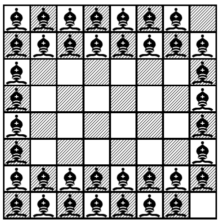
Поэтому $\gamma \leqslant \operatorname{arcctg}(2\sqrt{2})$. Равенство реализуется в случае $\operatorname{tg}\alpha = 2\sqrt{2}$, $\operatorname{ctg}\beta = \sqrt{2}$. $\square$

Вариант 5

1. *Какое наибольшее количество слонов можно расставить на шахматной доске так, чтобы на каждой диагонали располагалось не более трех слонов?*

Ответ: 38.

Решение. Будем обозначать клетки доски так, как это принято в шахматах. Упорядочим диагонали, параллельные $a1-h8$, сверху вниз. Три первых и три последних диагонали содержат в общей сложности 12 клеток, из которых 4 лежат на диагонали $a8-h1$. Значит, на этих шести диагоналях может располагаться не более 11 слонов. Остальные 9 диагоналей содержат не более чем по 3 слона. Поэтому общее число слонов не превосходит $11+3\cdot 9=38$. Расстановка 38 слонов показана на рисунке. $\square$



2. *Даны различные числа a, b, c. Найдите минимальное значение выражения*

$$A=\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{|a-b|^3+|b-c|^3+|c-a|^3}\,.$$

Ответ: $-\frac{1}{5}$.

Решение 1. Так как A не меняется при циклической перестановке переменных a, b, c, мы можем считать, что a больше b и c. Тогда $(a-b)(c-a)<0$, откуда $b>c$, поскольку минимум A, очевидно, отрицателен. Пусть $x=a-b$, $y=b-c$. Эти числа положительны, и

$$-A=\frac{xy\,(x+y)}{x^3+y^3+(x+y)^3}=\frac{xy}{2x^2+2y^2+xy}=\frac{1}{2\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+1}\leqslant\frac{1}{5}.$$

Таким образом, $A\geqslant-\frac{1}{5}$. Равенство реализуется в случае $x=y$ (например, при $a=2$, $b=1$, $c=0$). $\square$

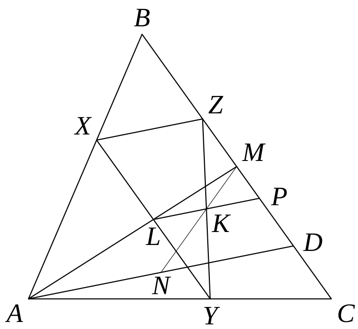
Решение 2. Так как A не меняется при циклической перестановке переменных a, b, c, мы можем считать, что a больше b и c. Тогда $(a-b)(c-a)<0$, откуда $b>c$, поскольку минимум A, очевидно, отрицателен. Пусть $2x=a-c$. Числа $a-b$ и $b-c$ положительны, а их сумма равна $2x$. Поэтому они имеют вид $x-d$ и $x+d$, где $-x<d<x$. Тогда

$$-A=\frac{2x(x-d)(x+d)}{(2x)^3+(x-d)^3+(x+d)^3}=\frac{x\big(x^2-d^2\big)}{5x^3+3xd^2}\leqslant\frac{x^3}{5x^3}=\frac{1}{5}.$$

Таким образом, $A\geqslant-\frac{1}{5}$. Равенство реализуется в случае $d=0$ (например, при $a=2$, $b=1$, $c=0$). $\square$

3. *На сторонах BC и AB остроугольного треугольника ABC выбраны точки D и X. Прямые, проходящие через X параллельно BC и AD, пересекают соответственно стороны AC и BC в точках Y и Z. Пусть M, K и N — середины отрезков BC, YZ и AD соответственно. Найдите угол MKN.*

Ответ: 180°.



Решение 1. Пусть L — точка пересечения XY с AM. Заметим, что $\frac{XL}{LY} = \frac{BM}{MC} = 1$, то есть L — середина XY. Тогда LK — средняя линия треугольника XYZ, откуда $LK \parallel XZ \parallel AD$. Продолжим луч LK и обозначим точку его пересечения с BC через P. Треугольники LKY и PKZ равны по стороне и двум углам, поэтому $LK = KP$. Поскольку $LP \parallel AD$, треугольники MLP и MAD подобны, а прямая MK будет их общей медианой. Но MN — тоже медиана MAD. Значит, точки M, K, N лежат на одной прямой и $\angle MKN = 180°$. $\square$

Решение 2. Положим $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$, $\lambda = \frac{BX}{AB}$. Тогда

$$2\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AZ} + \overrightarrow{AY} = \vec{b} + \lambda\big(\overrightarrow{AD} - \vec{b}\big) + (1-\lambda)\vec{c} = (1-\lambda)(\vec{b} + \vec{c}) + \lambda\overrightarrow{AD} = 2\big((1-\lambda)\overrightarrow{AM} + \lambda\overrightarrow{AN}\,\big).$$

После сокращения на 2 мы получим

$$\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AM} = \lambda\big(\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM}\big) = \lambda\overrightarrow{MN}.$$

Значит, точки M, K, N лежат на одной прямой и $\angle MKN = 180°$. $\square$

4. *Десятичная запись натурального числа x — это написанная 2019 раз подряд пара каких-то цифр. Число y получено некоторой перестановкой цифр x. Может ли десятичная запись числа $x \cdot y$ представлять собой многократно повторенный блок из четырех цифр?*

Ответ: Да, например $x = 4545\ldots45$, $y = 4455\ldots445545$, $x \cdot y = 2025\ldots2025$.

Решение. Пусть запись x — это пара ab, повторенная $2n+1$ раз. Покажем, что требуемые числа существуют для любого неотрицательного целого n. Положим

$$P_n = 10001\ldots0001, \quad M_n = 101\ldots01, \quad N_n = 9900\ldots99009901,$$

где запись P_n и M_n содержит по $2n+1$ единиц, а запись N_n — $2n$ девяток.

Докажем вначале, что $P_n = M_n \cdot N_n$ для любого неотрицательного целого n. Заметим, что

$$M_n = 1+10^2+\ldots+\big(10^2\big)^{2n} = \frac{10^{4n+2}-1}{99}, \quad P_n = 1+10^4+\ldots+\big(10^4\big)^{2n} = \frac{10^{8n+4}-1}{9999} = M_n \cdot \frac{10^{4n+2}+1}{101}.$$

Осталось проверить равенство $10^{4n+2}+1 = 101 \cdot N_n$. Для $n = 0$ оно очевидно. Если при некотором n это соотношение верно, то

$$10^{4n+6}+1 = (10^{4n+2}+1) + 10^{4n+2} \cdot 9999 = 101 \cdot N_n + 101 \cdot 99 \cdot 10^{4n+2} = 101 \cdot N_{n+1}.$$

Перейдем теперь к выбору пары ab и перестановки цифр x. Можно искать y в виде $\overline{cd} \cdot N_n$, поскольку в этом случае

$$x \cdot y = \overline{ab} \cdot M_n \cdot \overline{cd} \cdot N_n = \overline{ab} \cdot \overline{cd} \cdot P_n,$$

и десятичная запись $x \cdot y$ получится многократным повторением цифр произведения $\overline{ab} \cdot \overline{cd}$. Будем считать, что $c \neq d$ и $d \neq 0$. Запись y как перестановка записи x состоит из цифр a и b (в одинаковом количестве). С другой стороны, младшие цифры числа $\overline{cd} \cdot N_n$ равны c и d. Поэтому $\{a, b\} = \{c, d\}$, а произведение $99 \cdot \overline{cd}$ должно содержать по две цифры c и d. Заметим, что

$$99 \cdot \overline{cd} = 1000c + 100d - 10c - d = 1000c + 100(d-1) + 10(9-c) + 10 - d.$$

Третья цифра $99 \cdot \overline{cd}$ не может равняться d. Значит, она равна c, то есть $c = d - 1$. Младшая цифра $99 \cdot \overline{cd}$ равна c или d, откуда $10 - d = d - 1$ или $10 - d = d$. Первый случай невозможен, а второй дает $d = 5$, $c = 4$ и $99 \cdot \overline{cd} = 4455$. Тогда $y = 4455\ldots445545$, а в качестве x можно взять $45\ldots45$ или $54\ldots54$. $\square$

5. *В однокруговом турнире по настольному теннису приняло участие 25 человек. Каждый теннисист одержал по 12 побед. Сколько по итогам турнира оказалось троек участников, одержавших во встречах между собой ровно по одной победе? Ничьих в теннисе не бывает.*

Ответ: 650.

Решение 1. Назовем *циклом* такую тройку участников, что во встречах между собой каждый из них одержал по одной победе. Обозначим через x общее количество циклов, а через y — количество всех троек, не образующих цикла. Тогда $x + y$ — общее число различных троек участников, откуда $x + y = C_{25}^3 = 2300$.

Рассмотрим теперь *упорядоченные тройки* участников (A, B, C), в которых A победил B, а B выиграл у C. Если теннисисты A, B, C не образуют цикла, их можно упорядочить однозначно, а если образуют — тремя способами (подходят также циклические перестановки тройки). Значит, общее число упорядоченных троек равно $3x + y$. С другой стороны, для каждого теннисиста B его партнеров по тройке A и C можно выбрать независимо двенадцатью способами, поскольку B потерпел 12 поражений и одержал 12 побед. Поэтому всего есть $12 \cdot 12 \cdot 25 = 3600$ упорядоченных троек, откуда $3x + y = 3600$. Таким образом,

$$x = \tfrac{1}{2}\big(3x + y - (x + y)\big) = \tfrac{1}{2}(3600 - 2300) = 650. \quad \square$$

Решение 2. Пусть в турнире участвовало $2k + 1$ теннисистов, и каждый одержал по k побед. Назовем *циклом* такую тройку участников, что во встречах между собой каждый из них одержал по одной победе. Обозначим через S_k общее количество циклов в турнире с $2k+1$ участниками. Ясно, что $S_1 = 1$. Добавим в турнир с $2k - 1$ участниками двух новых теннисистов A и B и посмотрим, на сколько увеличится число циклов. Пусть A выиграл у B. Тогда остальные $2k - 1$ участников разобьются на группы из $k - 1$ и k человек: первая группа проиграла A и выиграла у B, вторая — наоборот. Новые циклы могут быть двух типов.

1) (A, C, D) или (B, C, D), где C, D отличны от A и B. Если C и D входят в одну группу, то таких циклов быть не может, поскольку и A, и B либо выиграли у C и D, либо проиграли им. Пусть C взят из первой группы, а D — из второй. Если C выиграл у D, то (A, C, D) образует цикл, а (B, C, D) — нет. Если же D выиграл у C, то (B, C, D) образует цикл, а (A, C, D) — нет. Таким образом, пара (C, D) дает ровно один новый цикл, а общее число циклов первого типа равно $(k-1)k$.

2) (A, B, C), где C отличен от A и B. Такая тройка будет циклом тогда и только тогда, когда C берется из второй группы. Значит, мы получаем еще k новых циклов.

Из 1) и 2) вытекает, что $S_k - S_{k-1} = (k-1)k + k = k^2$, откуда для любого натурального n

$$S_n = S_1 + (S_2 - S_1) + \ldots + (S_k - S_{k-1}) = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Осталось подставить $n = 12$. $\square$

6. *Три конуса с общей вершиной O касаются друг друга внешним образом. Первые два конуса имеют угол при вершине $\frac{\pi}{3}$, а ось симметрии третьего конуса перпендикулярна осям симметрии первых двух. Еще один конус с вершиной O касается внешним образом трех других. Найдите*

его угол при вершине. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении.)

Ответ: $2\operatorname{arctg}\big(7\sqrt{3}\pm 12\big)$.

Решение. Пусть $\alpha=\frac{\pi}{6}$, 2β и 2γ — углы при вершине соответственно третьего и четвертого конусов. Отложим на осях симметрии первых двух конусов равные отрезки OA и OA'. Обозначим середину отрезка AA' через H. Медиана OH равнобедренного треугольника AOA' будет также его высотой и биссектрисой. Поэтому $OH\perp AA'$, и луч OH является общей образующей первых двух конусов.

Отметим на осях симметрии третьего и четвертого конусов точки B и C соответственно. Покажем, что лучи OB и OC лежат в плоскости Π, состоящей из точек, равноудаленных от A и A'. Ясно, что $O\in\Pi$. Поскольку $\angle AOB=\angle A'OB=\alpha+\beta$, треугольники AOB и $A'OB$ равны, откуда $AB=A'B$ и $B\in\Pi$. Аналогично проверяется, что луч OC лежит в Π.

Положим $\varphi=\angle COH$. Заметим, что $AOH\perp COH$ и $\angle AOC=\alpha+\gamma$, так как первый и четвертый конусы касаются друг друга. Используя для пирамиды $OACH$ формулу трех косинусов, мы получим

$$\cos\angle AOC=\cos\angle AOH\cdot\cos\angle COH\iff\cos(\alpha+\gamma)=\cos\alpha\cdot\cos\varphi\iff\cos\big(\gamma+\tfrac{\pi}{6}\big)=\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos\varphi.\quad(*)$$

По условию оси симметрии первого и третьего конусов перпендикулярны, то есть $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$. Кроме того, $\angle BOH=\varphi+\beta+\gamma$, поскольку третий и четвертый конус касаются друг друга. Тогда по формуле трех косинусов для пирамиды $OABH$

$$\cos\alpha\cdot\cos(\varphi+\beta+\gamma)=\cos(\alpha+\beta)=0\iff\cos(\varphi+\beta+\gamma)=0\iff\cos\big(\varphi+\gamma+\tfrac{\pi}{3}\big)=0.$$

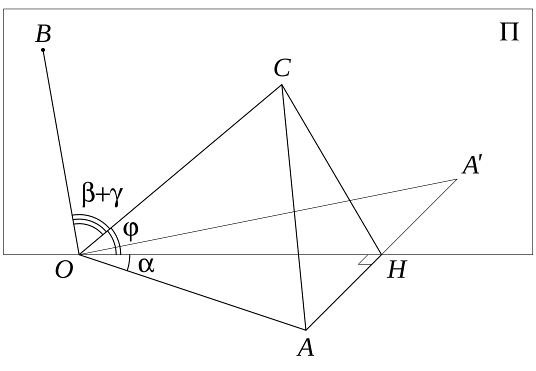
Возможны два случая.

1) $\varphi+\gamma+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$, откуда $\varphi=\frac{\pi}{6}-\gamma$.

2) $\varphi+\gamma+\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{2}$, то есть $\varphi=\pi+\frac{\pi}{6}-\gamma$.

Таким образом, $\cos\varphi=\pm\cos\big(\frac{\pi}{6}-\gamma\big)$. Поэтому из $(*)$ мы получаем

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos\gamma-\frac{1}{2}\cdot\sin\gamma=\pm\left(\frac{3}{4}\cdot\cos\gamma+\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\sin\gamma\right)\iff\operatorname{tg}\gamma=\frac{2\sqrt{3}\mp 3}{2\pm\sqrt{3}}=7\sqrt{3}\pm 12.\quad\square$$

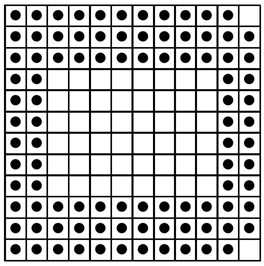


Вариант 6

1. *Какое наибольшее количество фишек можно расставить на клетчатой доске 12×12 так, чтобы на каждой диагонали располагалось не более пяти фишек?*

Ответ: 94.

Решение. Пусть D^+ — диагональ, соединяющая левый нижний угол с правым верхним, а D^- — диагональ, соединяющая правый нижний угол с левым верхним. Упорядочим диагонали, параллельные D^+, сверху вниз. Пять первых и пять последних диагоналей содержат в общей сложности 30 клеток, из которых 6 лежат на D^-. Значит, на этих десяти диагоналях может располагаться не более 29 фишек. Остальные 13 диагоналей содержат не более чем по 5 фишек. Поэтому общее число фишек не превосходит $29 + 5 \cdot 13 = 94$. Расстановка 94 фишек показана на рисунке. $\square$



2. *Даны различные числа a, b, c. Найдите максимальное значение выражения*

$$A = \frac{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right)^3}.$$

Ответ: $\frac{1}{54}$.

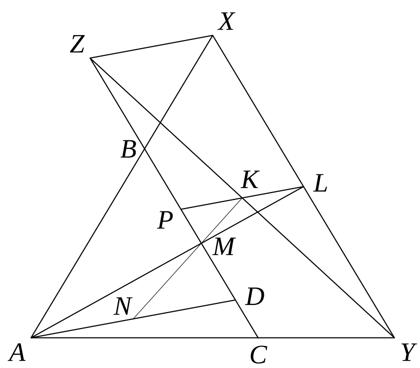
Решение. Так как A не меняется при любой перестановке переменных a, b, c, мы можем считать, что $a \geqslant b \geqslant c$. Пусть $x = a - b$, $y = b - c$. Числитель A равен $x^2y^2\,(x+y)^2$. Положим $t = \dfrac{xy}{(x+y)^2}$. По неравенству Коши для средних $t \leqslant \frac{1}{4}$, откуда

$$A = \frac{x^2y^2\,(x+y)^2}{\left(x^2+y^2+(x+y)^2\right)^3} = \frac{x^2y^2\,(x+y)^2}{\left(2(x+y)^2-2xy\right)^3} = \frac{1}{8}\cdot\frac{t^2}{(1-t)^3} \leqslant \frac{1}{8}\cdot\frac{\frac{1}{16}}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^3} = \frac{1}{54}.$$

Равенство реализуется в случае $x = y$ (например, при $a = 2$, $b = 1$, $c = 0$). $\square$

3. *На стороне BC остроугольного треугольника ABC выбрана точка D, а на продолжении стороны AB за точку B — точка X. Прямые, проходящие через X параллельно BC и AD, пересекают соответственно лучи AC и CB в точках Y и Z. Пусть M, K и N — середины отрезков BC, YZ и AD соответственно. Найдите угол KMN.*

Ответ: 180°.



Решение 1. Пусть L — точка пересечения XY с AM. Заметим, что $\frac{XL}{LY} = \frac{BM}{MC} = 1$, то есть L — середина XY. Тогда LK — средняя линия треугольника XYZ, откуда $LK \parallel XZ \parallel AD$. Продолжим луч LK и обозначим точку его пересечения с BC через P. Треугольники LKY и PKZ равны по стороне и двум углам, поэтому $LK = KP$. Поскольку $LP \parallel AD$, треугольники MLP и MAD подобны, а прямая MK будет их общей медианой. Но MN — тоже медиана MAD. Значит, точки K, M, N лежат на одной прямой и $\angle KMN = 180°$. $\square$

Решение 2. Положим $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$, $\lambda = \frac{BX}{AB}$. Тогда

$$2\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AZ} + \overrightarrow{AY} = \vec{b} + \lambda\big(\vec{b} - \overrightarrow{AD}\big) + (1+\lambda)\vec{c} = (1+\lambda)(\vec{b}+\vec{c}) - \lambda\overrightarrow{AD} = 2\big((1+\lambda)\overrightarrow{AM} - \lambda\overrightarrow{AN}\big).$$

После сокращения на 2 мы получим

$$\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AM} = \lambda\big(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN}\big) = \lambda\overrightarrow{NM}.$$

Значит, точки K, M, N лежат на одной прямой и $\angle KMN = 180°$. $\square$

4. *Восьмеричная запись натурального числа x — это написанная 2019 раз подряд пара каких-то цифр. Число y получено некоторой перестановкой цифр x. Может ли восьмеричная запись числа $x \cdot y$ представлять собой многократно повторенный блок из четырех цифр?*

Ответ: Да, например $x = 3434\ldots34_8$, $y = 3344\ldots334434_8$, $x \cdot y = 1420\ldots1420_8$.

Решение. Пусть запись x — это пара ab, повторенная $2n+1$ раз. Покажем, что требуемые числа существуют для любого неотрицательного целого n. Положим

$$P_n = 10001\ldots0001_8, \quad M_n = 101\ldots01_8, \quad N_n = 7700\ldots77007701_8,$$

где запись P_n и M_n содержит по $2n+1$ единиц, а запись N_n — $2n$ семерок.

Докажем вначале, что $P_n = M_n \cdot N_n$ для любого неотрицательного целого n. Заметим, что

$$M_n = 1 + 8^2 + \ldots + \big(8^2\big)^{2n} = \frac{8^{4n+2}-1}{63}, \quad P_n = 1 + 8^4 + \ldots + \big(8^4\big)^{2n} = \frac{8^{8n+4}-1}{4095} = M_n \cdot \frac{8^{4n+2}+1}{65}.$$

Осталось проверить равенство $8^{4n+2} + 1 = 65 \cdot N_n$. Для $n = 0$ оно очевидно. Если при некотором n это соотношение верно, то

$$8^{4n+6} + 1 = (8^{4n+2} + 1) + 8^{4n+2} \cdot 4095 = 65 \cdot N_n + 65 \cdot 63 \cdot 8^{4n+2} = 65 \cdot N_{n+1}.$$

Перейдем теперь к выбору пары ab и перестановки цифр x. Можно искать y в виде $\overline{cd} \cdot N_n$, поскольку в этом случае

$$x \cdot y = \overline{ab} \cdot M_n \cdot \overline{cd} \cdot N_n = \overline{ab} \cdot \overline{cd} \cdot P_n,$$

и восьмеричная запись $x \cdot y$ получится многократным повторением цифр произведения $\overline{ab} \cdot \overline{cd}$. Будем считать, что $c \neq d$ и $d \neq 0$. Запись y как перестановка записи x состоит из цифр a и b (в одинаковом количестве). С другой стороны, младшие цифры числа $\overline{cd} \cdot N_n$ равны c и d. Поэтому $\{a, b\} = \{c, d\}$, а произведение $77_8 \cdot \overline{cd}$ должно содержать по две цифры c и d. Заметим, что

$$77_8 \cdot \overline{cd} = 8^3c + 8^2d - 8c - d = 8^3c + 8^2(d-1) + 8(7-c) + 8 - d.$$

Третья цифра $77_8 \cdot \overline{cd}$ не может равняться d. Значит, она равна c, то есть $c = d-1$. Младшая цифра $77_8 \cdot \overline{cd}$ равна c или d, откуда $8 - d = d - 1$ или $8 - d = d$. Первый случай невозможен, а второй дает $d = 4$, $c = 3$ и $77_8 \cdot \overline{cd} = 3344_8$. Тогда $y = 3344\ldots334434_8$, а в качестве x можно взять $34\ldots34_8$ или $43\ldots43_8$. $\square$

5. *В однокруговом турнире по настольному теннису приняло участие 20 человек. Одна половина теннисистов одержала в турнире по 10 побед, вторая половина — по 9 побед. Сколько по*

итогам турнира оказалось троек участников, одержавших во встречах между собой ровно по одной победе? Ничьих в теннисе не бывает.

Ответ: 330.

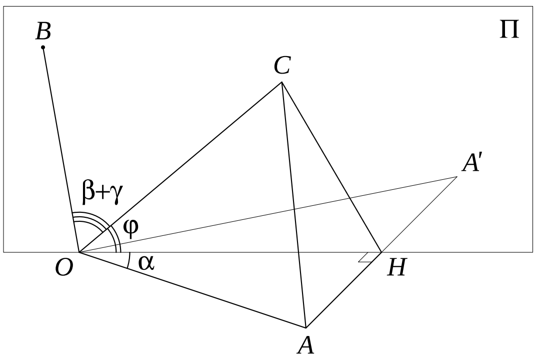
Решение. Назовем *циклом* такую тройку участников, что во встречах между собой каждый из них одержал по одной победе. Обозначим через x общее количество циклов, а через y — количество всех троек, не образующих цикла. Тогда $x+y$ — общее число различных троек участников, откуда $x+y=C_{20}^3=1140$.

Рассмотрим теперь *упорядоченные тройки* участников (A,B,C), в которых A победил B, а B выиграл у C. Если теннисисты A,B,C не образуют цикла, их можно упорядочить однозначно, а если образуют — тремя способами (подходят также циклические перестановки тройки). Значит, общее число упорядоченных троек равно $3x+y$. С другой стороны, если в тройке (A,B,C) участник B одержал 10 побед, то теннисиста A можно выбрать девятью способами, а теннисиста C — десятью способами. Если же B одержал 9 побед, то A можно выбрать десятью способами, а C — девятью способами. Поэтому всего будет $9\cdot10\cdot10+10\cdot9\cdot10=1800$ упорядоченных троек, откуда $3x+y=1800$. Таким образом,

$$x=\tfrac{1}{2}\bigl(3x+y-(x+y)\bigr)=\tfrac{1}{2}(1800-1140)=330.\quad\square$$

6. *Три конуса с общей вершиной O касаются друг друга внешним образом. Первые два конуса имеют угол при вершине $\frac{2\pi}{3}$, а ось симметрии третьего конуса перпендикулярна осям симметрии первых двух. Еще один конус с вершиной O касается внешним образом трех других. Найдите его угол при вершине. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении.)*

Ответ: $2\operatorname{arcctg}\bigl(3\sqrt{3}\bigr)$ или $\frac{2\pi}{3}$.



Решение. Пусть $\alpha=\frac{\pi}{3}$, 2β и 2γ — углы при вершине соответственно третьего и четвертого конусов. Отложим на осях симметрии первых двух конусов равные отрезки OA и OA'. Обозначим середину отрезка AA' через H. Медиана OH равнобедренного треугольника AOA' будет также его высотой и биссектрисой. Поэтому $OH\perp AA'$, и луч OH является общей образующей первых двух конусов.

Отметим на осях симметрии третьего и четвертого конусов точки B и C соответственно. Покажем, что лучи OB и OC лежат в плоскости Π, состоящей из точек, равноудаленных от A и A'. Ясно, что $O\in\Pi$. Поскольку $\angle AOB=\angle A'OB=\alpha+\beta$, треугольники AOB и $A'OB$ равны, откуда $AB=A'B$ и $B\in\Pi$. Аналогично проверяется, что луч OC лежит в Π.

Положим $\varphi=\angle COH$. Заметим, что $AOH\perp COH$ и $\angle AOC=\alpha+\gamma$, так как первый и четвертый конусы касаются друг друга. Используя для пирамиды $OACH$ формулу трех косинусов, мы получим

$$\cos\angle AOC=\cos\angle AOH\cdot\cos\angle COH\iff\cos(\alpha+\gamma)=\cos\alpha\cdot\cos\varphi\iff\cos\bigl(\gamma+\tfrac{\pi}{3}\bigr)=\tfrac{1}{2}\cdot\cos\varphi.\qquad(*)$$

По условию оси симметрии первого и третьего конусов перпендикулярны, то есть $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$. Кроме того, $\angle BOH=\varphi+\beta+\gamma$, поскольку третий и четвертый конус касаются друг друга. Тогда по формуле трех косинусов для пирамиды $OABH$

$$\cos\alpha\cdot\cos(\varphi+\beta+\gamma)=\cos(\alpha+\beta)=0\Longleftrightarrow\cos(\varphi+\beta+\gamma)=0\Longleftrightarrow\cos\bigl(\varphi+\gamma+\tfrac{\pi}{6}\bigr)=0.$$

Возможны два случая.

1) $\varphi+\gamma+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$, то есть $\varphi=\frac{\pi}{3}-\gamma$. Из формулы $(*)$ мы получаем

$$\tfrac{1}{2}\cdot\cos\gamma-\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin\gamma=\tfrac{1}{4}\cdot\cos\gamma+\tfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot\sin\gamma\Longleftrightarrow\operatorname{ctg}\gamma=3\sqrt{3}.$$

2) $\varphi+\gamma+\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{2}$, то есть $\varphi=\pi+\frac{\pi}{3}-\gamma$. Тогда

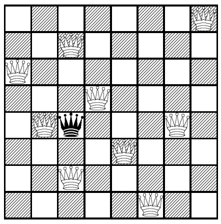
$$\tfrac{1}{2}\cdot\cos\gamma-\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin\gamma=-\tfrac{1}{4}\cdot\cos\gamma-\tfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot\sin\gamma\Longleftrightarrow\operatorname{tg}\gamma=\sqrt{3}\Longleftrightarrow\gamma=\tfrac{\pi}{3}.\quad\square$$

Вариант 7

1. *Имеется один черный ферзь и n белых. При каком наибольшем n эти фигуры можно расставить на шахматной доске так, чтобы белые ферзи не били друг друга? Ферзь не бьет насквозь через другую фигуру.*

Ответ: 9.

Решение. В строке, где стоит черный ферзь, может быть не более двух белых ферзей, не бьющих друг друга. В остальных строках не может быть более одного белого ферзя. Таким образом, общее число белых ферзей не превосходит 9. Пример для $n = 9$ показан на рисунке. $\square$



2. *Числа x, y, z — углы треугольника. Найдите максимальное значение выражения*

$$A = \frac{\sin x \cdot \sin y \cdot \sin z}{\sin x + \sin y + \sin z}.$$

Ответ: $\frac{1}{4}$.

Решение 1. Заметим, что $\sin z = \sin(x+y)$. Числитель A равен

$$8 \sin\frac{x}{2} \cos\frac{x}{2} \sin\frac{y}{2} \cos\frac{y}{2} \sin\frac{x+y}{2} \cos\frac{x+y}{2},$$

а знаменатель A равен

$$2\sin\frac{x+y}{2} \cos\frac{x-y}{2} + 2\sin\frac{x+y}{2} \cos\frac{x+y}{2} = 4\sin\frac{x+y}{2} \cos\frac{x}{2} \cos\frac{y}{2}.$$

Поэтому

$$A = 2\sin\frac{x}{2} \sin\frac{y}{2} \cos\frac{x+y}{2} = \left(\cos\frac{x-y}{2} - \cos\frac{x+y}{2}\right) \cos\frac{x+y}{2} \leqslant \left(1 - \cos\frac{x+y}{2}\right) \cos\frac{x+y}{2} \leqslant \frac{1}{4},$$

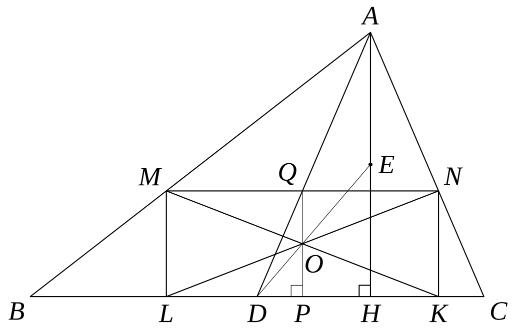
так как максимум трехчлена $(1-t)\,t$ равен $\frac{1}{4}$. Равенство реализуется при $x = y = z = \frac{\pi}{3}$. $\square$

Решение 2. Рассмотрим треугольник с углами x, y, z, вписанный в окружность радиуса $\frac{1}{2}$. Стороны такого треугольника по теореме синусов равны $\sin x$, $\sin y$ и $\sin z$, а его удвоенная площадь равна $\sin x \cdot \sin y \cdot \sin z$. Тогда A — радиус вписанной окружности треугольника. Поэтому A не превосходит половины радиуса его описанной окружности, то есть $\frac{1}{4}$. Равенство реализуется на правильном треугольнике. $\square$

3. *Дан остроугольный треугольник ABC. В него вписан прямоугольник $KLMN$ так, что точки M и N лежат соответственно на сторонах AB и AC, а точки K и L — на стороне BC. Пусть AD — медиана треугольника ABC, E — середина его высоты, опущенной из вершины A, O — точка пересечения диагоналей прямоугольника. Найдите угол DOE.*

Ответ: 180°.

Решение. Пусть AH — высота треугольника ABC, P и Q — середины отрезков KL и MN соответственно. Так как треугольники AMN и ABC подобны, луч AD будет медианой и для AMN, то есть он проходит через точку Q. Поскольку $PQ \parallel AH$, треугольники QDP и ADH подобны, а луч DO является их общей медианой. Но DE — тоже медиана ADH. Поэтому точка E лежит на луче DO, и $\angle DOE = 180°$. $\square$



4. *Даны натуральные числа x и y. В восьмеричной системе они $4n$-значные, причем в записи x цифры повторяются через одну, а в записи y — через три. Оказалось, что восьмеричная запись $x \cdot y$ состоит из последовательных блоков по 4 одинаковых цифры. При каких n это возможно?*

Ответ: $n \in \{1, 2, \ldots, 7\}$.

Решение. Договоримся все числа писать в восьмеричной системе. Пусть λ и μ — четырехзначные числа, образованные младшими цифрами x и y (то есть $\lambda = x \bmod 8^4$ и $\mu = y \bmod 8^4$). Число $\lambda \cdot \mu$ — семи- или восьмизначное, а четверка его младших цифр такая же, как у $x \cdot y$. Поэтому мы можем записать $\lambda \cdot \mu = \overline{abcdzzzz} = \overline{zzzz} + 8^4 \cdot \overline{abcd}$. Заметим, что на 101 делится любое четырехзначное число, у которого пара старших цифр совпадает с парой младших. В частности, λ и $\overline{zzzz}$ кратны 101. Тогда

$$0 = (\lambda \cdot \mu) \bmod 101 = 8^4 \cdot \overline{abcd} \bmod 101 = \overline{abcd} \bmod 101 = \left(\overline{cd} - \overline{ab}\right) \bmod 101,$$

откуда $a = c$ и $b = d$.

Положим $u = \overline{zzzz}$, $v = \overline{abab}$. Числа x, y получаются умножением соответственно λ, μ на число $p = 1 + 8^4 + 8^8 + \ldots + 8^{4(n-1)}$. Тогда

$$x \cdot y = \lambda \cdot \mu \cdot p^2 = \left(u + 8^4 v\right)\left(1 + 2 \cdot 8^4 + \ldots + (n-1) \cdot 8^{4(n-2)} + n \cdot 8^{4(n-1)} + (n-1) \cdot 8^{4n} + \ldots\right) =$$
$$= u + (v + 2u) \cdot 8^4 + (2v + 3u) \cdot 8^8 + \ldots + \left((n-1)v + nu\right) \cdot 8^{4(n-1)} + \left(nv + (n-1)u\right) \cdot 8^{4n} + \ldots$$

(бо́льшие степени 8^4 нас не интересуют). Отметим три факта.

1) *Для любого $k \in \{1, \ldots, n\}$ число $(k-1)v + ku$ четырехзначное.* Действительно, при $k = 1$ это очевидно. Пусть $k < n$ и для $1, \ldots, k$ утверждение доказано. Число $kv + (k+1)u$ не более чем пятизначное, поскольку это сумма четырехзначных чисел $(k-1)v + ku$, u и v. Если s — цифра в пятом разряде $kv + (k+1)u$, то число $kv + (k+1)u - 8^4 s$ есть $(k+1)$-я четверка цифр $x \cdot y$, которая по условию постоянна и, следовательно, кратна 101. Но числа u и v также делятся на 101, откуда $0 = 8^4 s \bmod 101 = s \bmod 101$. Значит, $s = 0$ и число $kv + (k+1)u$ четырехзначное.

2) *Число $nv + (n-1)u$ четырехзначное.* Действительно, $nv + (n-1)u = (n-1)v + nu + v - u$. Если $v \leqslant u$, то утверждение сразу следует из 1), а в случае $v > u$ оно проверяется так же, как в 1).

3) $v = \overline{aaaa}$. Действительно, вторая четверка цифр $x \cdot y$ кратна 11, а в силу 1) она равна $v + 2u$. Но u также делится на 11, откуда $0 = v \bmod 11 = \overline{abab} \bmod 11 = 2(b - a) \bmod 11$, то есть $b = a$.

Заметим, что $a > 0$, иначе число $\lambda \cdot \mu$ будет не более чем четырехзначным. Из 2) и 3) вытекает, что число $n \cdot \overline{aaaa}$ — четырехзначное. Значит, $7 \geqslant na \geqslant n$. Поэтому $n > 7$ не удовлетворяет условию задачи.

Пусть теперь $n \leqslant 7$. Положим $x = 22\ldots22$ и $y = 4000\ldots4000$. Тогда $\lambda\cdot\mu = 2222\cdot4000 = 11110000$, откуда

$$x \cdot y = \lambda \cdot \mu \cdot p^2 = 1111\,2222\,\ldots\,nnnn\,\ldots\,2222\,1111\,0000.$$

Таким образом, $n \leqslant 7$ удовлетворяет условию задачи. $\square$

5. *В однокруговом турнире по настольному теннису участвовало n теннисистов с различными рейтингами ($n > 4$). Во всех партиях, кроме двух, победил участник с более высоким рейтингом, но теннисист с самым маленьким рейтингом выиграл у теннисиста с самым большим рейтингом, а теннисист с предпоследним рейтингом выиграл у теннисиста со вторым рейтингом. Сколькими способами можно расставить спортсменов в ряд так, что каждый (кроме самого правого) выиграл у своего соседа справа?*

Ответ: $1 + 2^{n-2} + 2^{n-4} + 2 \cdot 3^{n-4}$.

Решение. Пусть для простоты рейтинги теннисистов равны $1, 2, \ldots, n$. Одна расстановка очевидна — по убыванию рейтинга. В других расстановках убывание нарушается. Это может происходить только из-за присутствия пар соседей $(1, n)$ и $(2, n-1)$ (какой-то одной или обеих). Рассмотрим три случая.

1) *Встречается только пара* $(1, n)$. До и после этой пары может быть любое количество теннисистов, но их порядок фиксирован. Припишем спортсмену индекс 0, если он стоит слева от пары, и 1, если справа. Для каждого из оставшихся $n-2$ теннисистов допустимы оба индекса, поэтому всего будет 2^{n-2} расстановок.

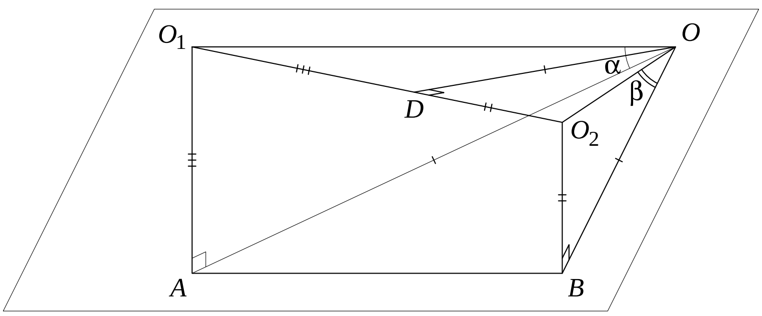
2) *Встречается только пара* $(2, n-1)$. Поскольку пары $(n-1, n)$ и $(1, 2)$ недопустимы, теннисист с рейтингом n должен стоять первым в ряду, а теннисист с рейтингом 1 — последним. Остальные $n-4$ спортсмена могут стоять как до пары $(2, n-1)$, так и после нее, но в фиксированном порядке. Таких расстановок всего 2^{n-4}.

3) *Встречаются пары* $(1, n)$ *и* $(2, n-1)$. Любой из остальных $n-4$ теннисистов может располагаться до первой пары, между парами и после второй пары. Таких расстановок всего 3^{n-4}. Поскольку пары $(1, n)$ и $(2, n-1)$ могут идти в любом порядке, мы получаем $2 \cdot 3^{n-4}$ вариантов.

Таким образом, всего возможно $1 + 2^{n-2} + 2^{n-4} + 2 \cdot 3^{n-4}$ расстановок. $\square$

6. *На столе лежат три конуса с общей вершиной, касаясь друг друга внешним образом. Оси симметрии первых двух конусов взаимно перпендикулярны. Два шара вписаны в третий конус и касаются друг друга внешним образом. Найдите максимальное отношение радиусов большего и меньшего шаров.*

Ответ: $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.



Решение. Пусть 2α, 2β, 2γ — углы при вершине конусов. Отложим единичные отрезки OA, OB, OC на лежащих в плоскости стола образующих конусов. Пусть O_1 и O_2 — точки на осях симметрии первых двух конусов, проекциями которых на стол являются точки A и B, OD — единичный отрезок на общей образующей этих конусов. Треугольники OO_1A и OO_1D равны по двум сторонам и углу, откуда $DO_1 \perp DO$ и $DO_1 = AO_1 = \operatorname{tg}\alpha$. Аналогичным образом $DO_2 = BO_2 = \operatorname{tg}\beta$. Поэтому

$$AB^2 = O_1O_2^2 - |AO_1 - BO_2|^2 = (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)^2 - (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)^2 = 4\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta.$$

Применяя те же рассуждения к двум другим парам конусов, мы получим

$$AC^2 = 4\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma, \quad BC^2 = 4\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma.$$

По условию $\alpha + \beta = 90^\circ$. Значит, $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = 1$ и $AO + OB = 2 = AB$, то есть $\angle AOB = 180^\circ$. Поскольку $OA = OB = OC$, треугольник ABC прямоугольный. По теореме Пифагора

$$4 = AB^2 = AC^2 + BC^2 = 4\operatorname{tg}\gamma\,(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) = 4\operatorname{tg}\gamma\,(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha) \Longleftrightarrow \operatorname{tg}\gamma = \sin\alpha\cos\alpha = \tfrac{1}{2}\sin 2\alpha.$$

Значит, $\operatorname{tg}\gamma \leqslant \frac{1}{2}$, а равенство реализуется при $\alpha = \beta = 45^\circ$. Отсюда вытекает, что максимальное значение $\sin\gamma$ равно $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Пусть r и R — радиусы меньшего и большего шаров. Поскольку шары вписаны в третий конус, мы получим

$$R - r = (R + r)\sin\gamma \leqslant \frac{R + r}{\sqrt{5}} \Longleftrightarrow \frac{R}{r} \leqslant \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

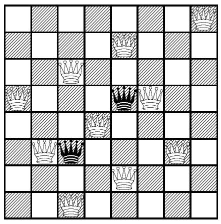
Равенство реализуется при $\gamma = \operatorname{arcctg} 2$. $\square$

Вариант 8

1. *Имеется два черных ферзя и n белых. При каком наибольшем n эти фигуры можно расставить на шахматной доске так, чтобы одноцветные ферзи не били друг друга? Ферзь не бьет насквозь через другую фигуру.*

   Ответ: 10.

   Решение. На горизонтали, где стоит k черных ферзей, может быть не более $k+1$ белых. Поэтому общее число белых ферзей на доске не превосходит $8+2=10$. Пример для $n=10$ показан на рисунке. $\square$



2. *Числа x, y, z — углы треугольника. Найдите максимальное значение выражения*

$$A = \frac{\cos x \cdot \cos y \cdot \sin z}{\cos x + \cos y + \sin z}\,.$$

   Ответ: $\frac{1}{4}$.

   Решение. Положим $x = \frac{\pi}{2} - a$, $y = \frac{\pi}{2} - b$. Тогда $a, b \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ и $\sin z = \sin(a+b)$. Числитель A равен

$$8 \sin\frac{a}{2}\,\cos\frac{a}{2}\,\sin\frac{a}{2}\,\cos\frac{a}{2}\,\sin\frac{a+b}{2}\,\cos\frac{a+b}{2}\,,$$

а знаменатель A равен

$$2\sin\frac{a+b}{2}\,\cos\frac{a-b}{2} + 2\sin\frac{a+b}{2}\,\cos\frac{a+b}{2} = 4\sin\frac{a+b}{2}\,\cos\frac{a}{2}\,\cos\frac{b}{2}\,.$$

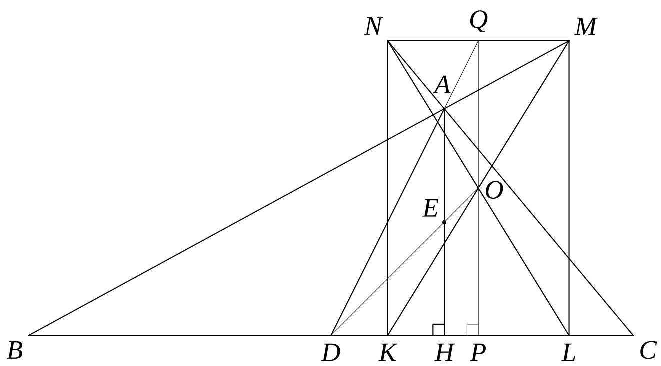
Поэтому

$$A = 2\sin\frac{a}{2}\,\sin\frac{b}{2}\,\cos\frac{a+b}{2} = \left(\cos\frac{a-b}{2} - \cos\frac{a+b}{2}\right)\cos\frac{a+b}{2} \leqslant \left(1 - \cos\frac{a+b}{2}\right)\cos\frac{a+b}{2} \leqslant \frac{1}{4}\,,$$

так как максимум трехчлена $(1-t)\,t$ равен $\frac{1}{4}$. Равенство реализуется при $x = y = \frac{\pi}{6}$, $z = \frac{2\pi}{3}$. $\square$

3. *Дан остроугольный треугольник ABC. У прямоугольника $KLMN$ вершины M и N лежат соответственно на на продолжениях сторон AB и AC за точку A, а K и L — на стороне BC. Пусть AD — медиана треугольника ABC, E — середина его высоты, опущенной из вершины A, O — точка пересечения диагоналей прямоугольника. Найдите угол DEO.*

   Ответ: $180°$.



Решение. Пусть AH — высота треугольника ABC, P и Q — середины отрезков KL и MN соответственно. Так как треугольники AMN и ABC подобны, прямая AD является их общей медианой и, значит, она проходит через точку Q. Поскольку $PQ \parallel AH$, треугольники ADH и QDP подобны, а луч DE — их общая медиана. Но DO — тоже медиана QDP. Поэтому точка O лежит на луче DE, и $\angle DEO = 180°$. $\square$

4. *Даны натуральные числа x и y. В десятичной системе они $4n$-значные, причем в записи x цифры повторяются через одну, а в записи y — через три. Оказалось, что десятичная запись $x \cdot y$ состоит из последовательных блоков по 4 одинаковых цифры. При каких n это возможно?*

Ответ: $n \in \{1, 2, \ldots, 9\}$.

Решение. Договоримся все числа писать в десятичной системе. Пусть λ и μ — четырехзначные числа, образованные младшими цифрами x и y (то есть $\lambda = x \bmod 10^4$ и $\mu = y \bmod 10^4$). Число $\lambda \cdot \mu$ — семи- или восьмизначное, а четверка его младших цифр такая же, как у $x \cdot y$. Поэтому мы можем записать $\lambda \cdot \mu = \overline{abcdzzzz} = \overline{zzzz} + 10^4 \cdot \overline{abcd}$. Заметим, что на 101 делится любое четырехзначное число, у которого пара старших цифр совпадает с парой младших. В частности, λ и $\overline{zzzz}$ кратны 101. Тогда

$$0 = (\lambda \cdot \mu) \bmod 101 = 10^4 \cdot \overline{abcd} \bmod 101 = \overline{abcd} \bmod 101 = \left(\overline{cd} - \overline{ab}\right) \bmod 101,$$

откуда $a = c$ и $b = d$.

Положим $u = \overline{zzzz}$, $v = \overline{abab}$. Числа x, y получаются умножением соответственно λ, μ на число $p = 1 + 10^4 + 10^8 + \ldots + 10^{4(n-1)}$. Тогда

$$\begin{aligned} x \cdot y = \lambda \cdot \mu \cdot p^2 &= \left(u + 10^4 v\right)\left(1 + 2 \cdot 10^4 + \ldots + (n-1) \cdot 10^{4(n-2)} + n \cdot 10^{4(n-1)} + (n-1) \cdot 10^{4n} + \ldots\right) = \\ &= u + (v + 2u) \cdot 10^4 + (2v + 3u) \cdot 10^8 + \ldots + \left((n-1)v + nu\right) \cdot 10^{4(n-1)} + \left(nv + (n-1)u\right) \cdot 10^{4n} + \ldots \end{aligned}$$

(бо́льшие степени 10^4 нас не интересуют). Отметим три факта.

1) *Для любого $k \in \{1, \ldots, n\}$ число $(k-1)v + ku$ четырехзначное.* Действительно, при $k = 1$ это очевидно. Пусть $k < n$ и для $1, \ldots, k$ утверждение доказано. Число $kv + (k+1)u$ не более чем пятизначное, поскольку это сумма четырехзначных чисел $(k-1)v + ku$, u и v. Если s — цифра в пятом разряде $kv + (k+1)u$, то число $kv + (k+1)u - 10^4 s$ есть $(k+1)$-я четверка цифр $x \cdot y$, которая по условию постоянна и, следовательно, кратна 101. Но числа u и v также делятся на 101, откуда $0 = 10^4 s \bmod 101 = s \bmod 101$. Значит, $s = 0$ и число $kv + (k+1)u$ четырехзначное.

2) *Число $nv + (n-1)u$ четырехзначное.* Действительно, $nv + (n-1)u = (n-1)v + nu + v - u$. Если $v \leqslant u$, то утверждение сразу следует из 1), а в случае $v > u$ оно проверяется так же, как в 1).

3) $v = \overline{aaaa}$. Действительно, вторая четверка цифр $x \cdot y$ кратна 11, а в силу 1) она равна $v + 2u$. Но u также делится на 11, откуда $0 = v \bmod 11 = \overline{abab} \bmod 11 = 2(b - a) \bmod 11$, то есть $b = a$.

Заметим, что $a > 0$, иначе число $\lambda \cdot \mu$ будет не более чем четырехзначным. Из 2) и 3) вытекает, что число $n \cdot \overline{aaaa}$ — четырехзначное. Значит, $9 \geqslant na \geqslant n$. Поэтому $n > 9$ не удовлетворяет условию задачи.

Пусть теперь $n \leqslant 9$. Положим $x = 16\ldots16$ и $y = 6875\ldots6875$. Тогда $\lambda \cdot \mu = 1616 \cdot 6875 = 11110000$, откуда

$$x \cdot y = \lambda \cdot \mu \cdot p^2 = 1111\,2222\,\ldots\,nnnn\,\ldots\,2222\,1111\,0000.$$

Таким образом, $n \leqslant 9$ удовлетворяет условию задачи. $\square$

5. *В однокруговом турнире по настольному теннису участвовало n спортсменов ($n \geqslant 3$). По итогам турнира оказалось, что всех участников можно рассадить за круглым столом так, что для произвольной пары соседей A и B любой теннисист, отличный от A и B, проиграл хотя бы одному из теннисистов A и B. При каких n такое возможно?*

Ответ: при нечетных n.

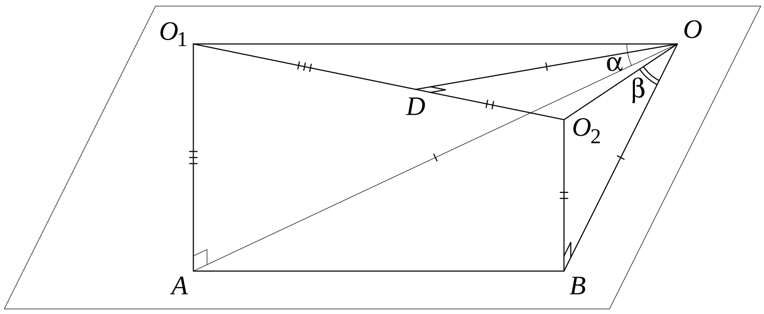
Решение. Покажем, что для нечетного n искомая рассадка существует. Пусть $n = 2k+1$. Потребуем, чтобы каждый теннисист выиграл у всех соперников, сидящих от него через $2, 4, \ldots, 2k$ человек вправо, а остальным проиграл. Это расположение удовлетворяет условию задачи.

Пусть теперь $n = 2k$. Докажем, что либо любой теннисист выиграл у своего соседа слева, либо любой теннисист выиграл у своего соседа справа. Для этого достаточно проверить, что если A, B, C сидят за столом подряд и A выиграл у B, то B выиграл у C. Если спортсмен A выиграл у B, то по условию он должен проиграть C. Но теннисист C должен проиграть кому-то из пары (A, B), и таким соперником может быть только B.

Пусть для определенности каждый теннисист проиграл своему соседу слева. Возьмем произвольного теннисиста A, сидящего за столом. Справа от него находится $k-1$ пар соседей, и в каждой из пар по условию есть соперник, которому A проиграл. Кроме того, A проиграл соседу слева. Таким образом, каждый теннисист потерпел не менее k поражений, а вместе они проиграли не менее $2k^2$ игр. Но это невозможно, поскольку всего было сыграно лишь $k(2k-1)$ партий. $\square$

6. *На столе лежат три конуса с общей вершиной, касаясь друг друга внешним образом. Оси симметрии первых двух конусов взаимно перпендикулярны. Угол при вершине первого конуса равен* $\arcsin\frac{5}{6}$. *Два шара вписаны в третий конус и касаются друг друга внешним образом. Найдите отношение радиусов шаров (большего к меньшему).*

Ответ: $9:4$.



Решение. Пусть 2α, 2β, 2γ — углы при вершине конусов. Отложим единичные отрезки OA, OB, OC на лежащих в плоскости стола образующих конусов. Пусть O_1 и O_2 — точки на осях симметрии первых двух конусов, проекциями которых на стол являются точки A и B, OD — единичный отрезок на общей образующей этих конусов. Треугольники OO_1A и OO_1D равны по двум сторонам и углу, откуда $DO_1 \perp DO$ и $DO_1 = AO_1 = \operatorname{tg}\alpha$. Аналогичным образом $DO_2 = BO_2 = \operatorname{tg}\beta$. Поэтому

$$AB^2 = O_1O_2^2 - |AO_1 - BO_2|^2 = (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)^2 - (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)^2 = 4\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta.$$

Применяя те же рассуждения к двум другим парам конусов, мы получим

$$AC^2 = 4\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma, \quad BC^2 = 4\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma.$$

По условию $\alpha + \beta = 90°$. Значит, $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = 1$ и $AO + OB = 2 = AB$, то есть $\angle AOB = 180°$. Поскольку $OA = OB = OC$, треугольник ABC прямоугольный. По теореме Пифагора

$$4 = AB^2 = AC^2 + BC^2 = 4\operatorname{tg}\gamma\,(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha) \iff \operatorname{tg}\gamma = \sin\alpha\cos\alpha = \tfrac{1}{2}\sin 2\alpha = \tfrac{5}{12} \iff \sin\gamma = \tfrac{5}{13}.$$

Пусть r и R — радиусы меньшего и большего шаров. Поскольку шары вписаны в третий конус, мы получим

$$R - r = (R + r)\sin\gamma \iff 5(R + r) = 13(R - r) \iff \tfrac{R}{r} = \tfrac{9}{4}. \quad \square$$

Вариант 9

1. *Какое наибольшее количество ладей можно расставить на шахматной доске так, чтобы каждую ладью било не более трех других? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.*

   Ответ: 28.

   Решение. Пусть n — число некраевых ладей. Каждая такая ладья бьет хотя бы одну свободную краевую клетку (иначе она била бы четыре ладьи, закрывающие эти клетки). Значит, на периметре доски имеется по крайней мере n пустых клеток, а на некоторых из остальных $28 - n$ клеток периметра могут стоять ладьи. Таким образом, всего на доске может быть не более $n + 28 - n = 28$ ладей. Пример для 28 ладей можно получить, расставив ладьи по периметру доски. $\square$

2. *Числа x, y, z — углы треугольника, причем больший угол z не превосходит $\frac{\pi}{2}$. Найдите максимальное значение выражения*

$$A = \sqrt{\sin x \cdot \sin(z-y)} + \sqrt{\sin y \cdot \sin(z-x)}.$$

   Ответ: $\sqrt{2}$.

   Решение. В силу неравенства Коши для средних

$$A \leqslant \tfrac{1}{2}\big(\sin x + \sin(z-y) + \sin y + \sin(z-x)\big) = \tfrac{1}{2}\big(\sin x + \sin(x+2y) + \sin y + \sin(2x+y)\big) = \\ = \sin(x+y)\cos y + \sin(x+y)\cos x = \sin(x+y)(\cos x + \cos y).$$

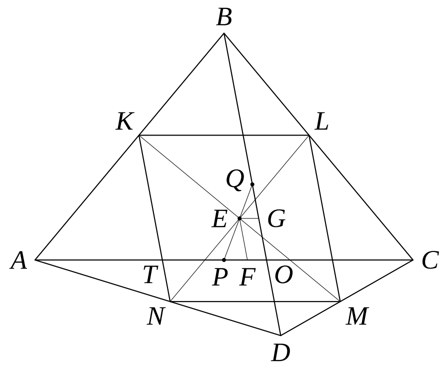
Положим $B = \sin(x+y)(\cos x + \cos y)$. Заметим, что $x + y = \pi - z \geqslant \frac{\pi}{2}$. Если $x + y > \frac{\pi}{2}$, то заменим y на $\frac{\pi}{2} - x$. При этом увеличатся $\sin(x+y)$ и $\cos y$, а значит, и B. Поэтому максимум B достигается при $x + y = \frac{\pi}{2}$. В этом случае

$$B = \cos x + \sin x = \sqrt{2}\,\sin\big(x + \tfrac{\pi}{4}\big) \leqslant \sqrt{2}.$$

Таким образом, $A \leqslant B \leqslant \sqrt{2}$. Равенство реализуется при $x = y = \frac{\pi}{4}$, $z = \frac{\pi}{2}$. $\square$

3. *Дан четырехугольник $ABCD$, отличный от параллелограмма. На сторонах AB, BC, CD и DA выбираются соответственно точки K, L, M и N так, что $KL \parallel MN \parallel AC$ и $LM \parallel KN \parallel BD$. Найдите геометрическое место точек пересечения диагоналей параллелограмма $KLMN$.*

   Ответ: интервал с концами в серединах диагоналей $ABCD$.



   Решение. Пусть O и T— точки пересечения AC соответственно с BD и KN, E — точка пересечения диагоналей $KLMN$. Проведем через E прямые, параллельные диагоналям $ABCD$, и обозначим точки их пересечения с AC и BD через F и G соответственно (см. рисунок). Положим $\lambda = \frac{AK}{AB}$, $x = AO$, $y = OC$. Тогда

$$AF = AT + TF = AT + \tfrac{1}{2}\,KL = \lambda \cdot AO + \tfrac{1}{2}\,(1-\lambda)\cdot AC = \lambda x + \tfrac{1}{2}\,(1-\lambda)(x+y).$$

Пусть P и Q — середины отрезков AC и BD соответственно. Заметим, что

$$AO - AF = x - \lambda x - \tfrac{1}{2}(1-\lambda)(x+y) = (1-\lambda)\bigl(x - \tfrac{1}{2}(x+y)\bigr) = (1-\lambda)(AO - AP).$$

Поэтому точки P и F лежат по одну сторону от O и $FO = (1-\lambda)\cdot PO$, откуда $PF = \lambda \cdot PO$.

Аналогичные рассуждения для диагонали BD показывают, что Q и G лежат по одну сторону от O и $GO = \lambda \cdot QO$. Тогда $EF = \lambda \cdot QO$, и треугольник PEF подобен PQO с коэффициентом λ. Из условия вытекает, что $P \neq Q$. Поэтому точка E лежит на отрезке PQ и делит его в отношении $\lambda : (1-\lambda)$. Поскольку λ — произвольное число из $(0,1)$, такие точки E заполняют собой весь интервал (P,Q). $\square$

4. *Натуральное число x в восьмеричной системе 2019-значное, его младшая цифра равна 3, а все остальные цифры отличны от 3 и совпадают через одну. Число y получается записью цифр x в обратном порядке. Оказалось, что восьмеричное представление $x \cdot y$ содержит только цифры 1 и 6. Найдите $x \cdot y$ (в восьмеричной системе).*

Ответ: $x \cdot y = 1\underbrace{1616\ldots16}_{2018}1\underbrace{1616\ldots16}_{2018}$ при $x = \underbrace{25\ldots25}_{2018}3$.

Решение 1. Решим задачу для $(2n+1)$-значного x. Договоримся восьмеричные числа писать в скобках, чтобы отличать их от десятичных. Положим

$$x = (\underbrace{ab\ldots ab}_{2n\text{ цифр}}3), \quad y = (3\underbrace{ba\ldots ba}_{2n\text{ цифр}}).$$

Младшая цифра $x \cdot y$ равна $3a \bmod 8$. При $a \neq 3$ она не может быть 1, а с 6 совпадает только при $a = 2$. Так как $3a < 8$, следующая цифра $x \cdot y$ равна $b\,(a+3) \bmod 8 = 5b \bmod 8$. Это дает 1 при $b = 5$ и 6 при $b = 6$. Второй случай не подходит, поскольку в произведении $(26\ldots263)\cdot(362\ldots62)$ в четвертом разряде окажется 4. Таким образом, $x = (25\ldots253)$ и $y = (352\ldots52)$.

Мы пока не знаем, удовлетворяют ли найденные x и y условию задачи. Чтобы убедиться в этом и получить ответ, необходимо вычислить $x \cdot y$. Заметим, что

$$y - x = (7\ldots7) = 8^{2n} - 1, \quad 2x + y = (52\ldots526) + (352\ldots52) = (11)\cdot 8^{2n} = 9 \cdot 8^{2n},$$

откуда

$$3x = 2x + y - (y - x) = 8^{2n+1} + 1, \quad 3y = 2(y-x) + 2x + y = 11 \cdot 8^{2n} - 2.$$

Перемножим эти равенства и поделим результат на 9. Мы получим

$$xy = \frac{(8^{2n+1}+1)(11\cdot 8^{2n} - 2)}{9} = \bigl(8^{2n+1}+1\bigr)\cdot\left(8^{2n} + 2\cdot\frac{8^{2n}-1}{9}\right).$$

Числитель и знаменатель дроби в правой части равны соответственно $(777\ldots7)$ и (11), поэтому частное равно $(70707\ldots07)$ (в нем фигурирует n семерок). Тогда

$$xy = \bigl(8^{2n+1}+1\bigr)\cdot(1\underbrace{16\ldots16}_{2n\text{ цифр}}) = (1\underbrace{16\ldots16}_{2n\text{ цифр}}1\underbrace{16\ldots16}_{2n\text{ цифр}}). \quad \square$$

Решение 2. Решим задачу для $(2n+1)$-значного x. Договоримся писать числа в восьмеричной системе. Положим

$$x_n = \underbrace{ab\ldots ab}_{2n\text{ цифр}}3, \quad y_n = 3\underbrace{ba\ldots ba}_{2n\text{ цифр}}.$$

Младшая цифра $x_n \cdot y_n$ равна $3a \bmod 8$. При $a \neq 3$ она не может быть 1, а с 6 совпадает только при $a = 2$. Так как $3a < 8$, следующая цифра $x_n \cdot y_n$ равна $(a+3)b \bmod 8 = 5b \bmod 8$. Это дает 1 при $b=5$ и 6 при $b=6$. Второй случай не подходит, поскольку в произведении $26\ldots 263\cdot 362\ldots 62$ в четвертом разряде окажется 4.

Докажем по индукции, что

$$\underbrace{25\ldots 25}_{2n\text{ цифр}}3\cdot 3\underbrace{52\ldots 52}_{2n\text{ цифр}} = 11\underbrace{61\ldots 61}_{2n\text{ цифр}}\underbrace{16\ldots 16}_{2n\text{ цифр}}.$$

База индукции очевидна: $253\cdot 352 = 116116$. Предположим, что для некоторого n утверждение доказано. Заметим, что

$$x_{n+1} = \underbrace{25\ldots 25}_{2n\text{ цифр}}300 - 25 = 8^2 x_n - 25,\quad y_{n+1} = 3\underbrace{52\ldots 52}_{2n\text{ цифр}}00 + 52 = 8^2 y_n + 52 = 8^2 y_n + 2\cdot 25.$$

Воспользуемся формулой

$$25\,(2x_n - y_n) = 43\underbrace{0\ldots 0}_{2n-2}34, \tag{$*$}$$

которую проверим ниже. Мы получим

$$x_{n+1}\cdot y_{n+1} = 8^4\cdot x_n\cdot y_n + 25\cdot 8^2\,(2x_n - y_n) - 25\cdot 52 = 11\underbrace{61\ldots 61}_{2n}\underbrace{16\ldots 16}_{2n}0000 + 43\underbrace{0\ldots 0}_{2n-2}3400 - 1562 =$$
$$= 11\underbrace{61\ldots 61}_{2n+2}\underbrace{16\ldots 16}_{2n-2}0000 + 3400 - 1562 = 11\underbrace{61\ldots 61}_{2n+2}\underbrace{16\ldots 16}_{2n+2},$$

что и требовалось доказать.

Осталось проверить равенство $(*)$. Положим $z = \underbrace{52\ldots 52}_{2n\text{ цифр}}$. Тогда

$$2x_n = \underbrace{52\ldots 52}_{2n\text{ цифр}}6 = 8z + 6,\quad y_n = z + 3\cdot 8^{2n}.$$

Заметим, что

$$25z = 15\underbrace{7\ldots 7}_{2n-2}62 = 16\cdot 8^{2n} - 16 = 16\,(8^{2n} - 1).$$

Поэтому

$$25\,(2x_n - y_n) = 25\left(7z + 6 - 3\cdot 8^{2n}\right) = 7\cdot 16\,(8^{2n} - 1) + 25\cdot 6 - 3\cdot 25\cdot 8^{2n} =$$
$$= 8^{2n}(7\cdot 16 - 3\cdot 25) + 6\cdot 25 - 7\cdot 16 = 43\cdot 8^{2n} + 34 = 43\underbrace{0\ldots 0}_{2n-2}34.\quad \square$$

5. *В однокруговом турнире по настольному теннису участвовало 100 спортсменов, причем ни один из них не выиграл все матчи. Будем говорить, что игрок A круче игрока B, если A выиграл у B или найдется такой игрок C, что A выиграл у C, а C выиграл у B. Каково наименьшее количество теннисистов, оказавшихся по итогам турнира круче всех остальных? Ничьих в теннисе не бывает.*

Ответ: 3.

Решение. Докажем вначале лемму: *в произвольном турнире теннисист X, одержавший наибольшее число побед, круче всех.* Действительно, пусть Y — другой участник турнира. Если теннисист X выиграл у Y, то он круче Y. В противном случае Y должен был проиграть кому-то из соперников, у которых X выиграл, иначе Y одержал бы больше побед, чем X. Мы снова получаем, что X круче Y, и лемма доказана.

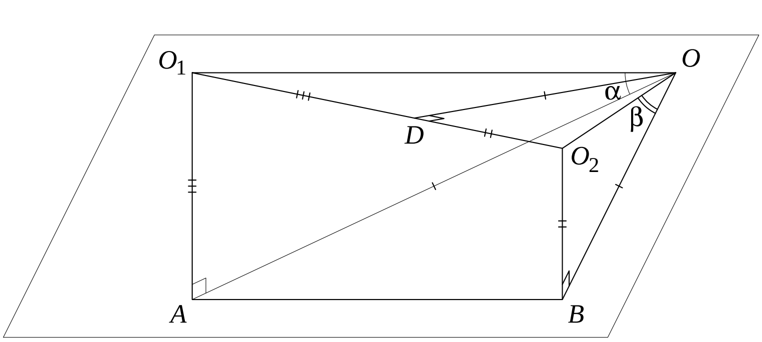
Рассмотрим теперь турнир, удовлетворяющий условию задачи. Пусть теннисист A одержал в нем наибольшее число побед. В силу леммы A круче всех. Обозначим число побед A через k и заметим, что $k < 99$, поскольку A выиграл не все матчи. Предположим, что A победил теннисистов $B_1, \ldots, B_k$ и проиграл соперникам $C_1, \ldots, C_{99-k}$. Если учитывать только результаты игр между $C_1, \ldots, C_{99-k}$, то в этом мини-турнире по лемме найдется участник C^*, который круче всех. Кроме того, теннисист C^* выиграл у A, поэтому он круче как A, так и спортсменов $B_1, \ldots, B_k$, которые A проиграли. Таким образом, C^* круче остальных участников всего турнира.

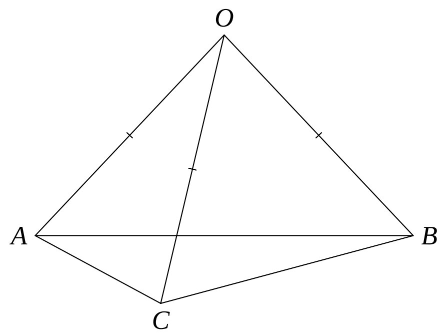
Заметим, что по условию C^* должен проиграть кому-то из соперников. Пусть $D_1, \ldots, D_m$ — все участники, выигравшие у C^*. По лемме в мини-турнире $D_1, \ldots, D_m$ найдется теннисист D^*, который круче всех. Кроме того, D^* круче любого участника E не из этого мини-турнира, поскольку D^* выиграл у C^*, а C^* — у E. Значит, D^* круче остальных участников всего турнира.

Таким образом, всегда существуют по крайней мере три теннисиста (A, C^* и D^*), которые круче всех. Приведем пример турнира, в котором таких участников ровно 3. Пусть трое теннисистов одержали по одной победе в личных встречах и выиграли у всех остальных. Тогда каждый из этой тройки круче всех, но никто из остальных участников их не круче. $\square$

6. *На столе лежат два конуса с общей вершиной O, касаясь друг друга внешним образом. Угол между их осями симметрии равен $\operatorname{arctg} \frac{4}{3}$. Найдите максимальный угол при вершине меньшего из двух конусов с вершиной O, которые лежат на столе и касаются внешним образом первых двух конусов. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении.)*

Ответ: $2 \operatorname{arcctg}\bigl(4 + 2\sqrt{3}\bigr)$.





Решение. Пусть 2α, 2β, 2γ — углы при вершине конусов. Отложим единичные отрезки OA, OB, OC на лежащих в плоскости стола образующих конусов. Пусть O_1 и O_2 — точки на осях симметрии первых двух конусов, проекциями которых на стол являются точки A и B, OD — единичный отрезок на общей образующей этих конусов. Треугольники OO_1A и OO_1D равны по двум сторонам и углу, откуда $DO_1 \perp DO$ и $DO_1 = AO_1 = \operatorname{tg}\alpha$. Аналогичным образом $DO_2 = BO_2 = \operatorname{tg}\beta$. Поэтому

$$AB^2 = O_1O_2^2 - |AO_1 - BO_2|^2 = (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)^2 - (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)^2 = 4\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta.$$

Применяя те же рассуждения к двум другим парам конусов, мы получим

$$AC^2 = 4\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma, \quad BC^2 = 4\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma.$$

Пусть $\varphi = \angle AOB$. Поскольку нам нужен меньший из двух возможных третьих конусов, луч OC лежит внутри угла AOB. Тогда (см. правый рисунок)

$$2\angle ACB = 2\angle ACO + 2\angle OCB = \pi - \angle AOC + \pi - \angle BOC = 2\pi - \angle AOB = 2\pi - \varphi \Longrightarrow \angle ACB = \pi - \tfrac{\varphi}{2}.$$

Заметим, что

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{AB}{2AO} = \sqrt{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \quad \text{и} \quad \cos\angle ACB = -\cos\frac{\varphi}{2} = -\sqrt{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

По теореме косинусов для треугольника ABC

$$-\sqrt{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\frac{AC^2+BC^2-AB^2}{2AC\cdot BC}=\frac{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{2\sqrt{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\cdot\operatorname{tg}\gamma}.$$

Домножая это равенство на $2\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta}$, мы получим

$$-2\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}=\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\gamma\Longrightarrow\operatorname{ctg}\gamma=\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+2\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}.$$

Положим $x=\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta$. По условию $\alpha+\beta=\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$, откуда

$$\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1=\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)\big(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta\big)=\tfrac{3}{4}\,x\quad\text{и}\quad\operatorname{ctg}\gamma=x+\sqrt{3x}.$$

Числа $\operatorname{ctg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\beta$ являются корнями квадратного уравнения $t^2-xt+\frac{3}{4}\,x+1=0$ (относительно переменной t). Оно должно иметь решения, поэтому

$$x^2-3x-4\geqslant0\Longleftrightarrow x\geqslant4\Longleftrightarrow\operatorname{ctg}\gamma\geqslant4+2\sqrt{3}\Longleftrightarrow\gamma\leqslant\operatorname{arcctg}\big(4+2\sqrt{3}\,\big).$$

Равенство реализуется при $\operatorname{ctg}\alpha=\operatorname{ctg}\beta=2$. $\square$

Вариант 10

1. *Какое наибольшее количество ладей можно расставить на шахматной доске так, чтобы каждую ладью било не более двух других? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.*

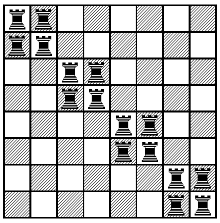
Ответ: 16.

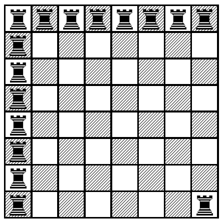
Решение. Пусть n — общее число ладей, среди которых m неугловых. Каждой неугловой ладье L сопоставим пару клеток периметра доски следующим образом. Если L — некраевая ладья, то она бьет хотя бы две свободные краевые клетки. Их мы и возьмем (если таких клеток больше двух, то подойдет любая пара). Если L — краевая ладья, то она бьет хотя бы одну свободную краевую клетку. Выберем ее, а также ту клетку, на которой L стоит.

Таким образом, мы получили набор из $2m$ клеток периметра доски. В этом наборе неугловые клетки не повторяются, а некоторые угловые могут встречаться дважды. Пусть таких клеток k. Заметим, что $k \leqslant 4-(n-m)$ и $2m-k \leqslant 28-(n-m)$. Поэтому

$$2n = 2m + 2(n-m) \leqslant 28-(n-m)+k+2(n-m) \leqslant 28+(n-m)+4-(n-m) = 32.$$

Значит, $n \leqslant 16$. Возможные расстановки с 16 ладьями показаны на рисунке. □





2. *Числа x, y, z — углы некоторого треугольника, один из которых не меньше $\frac{\pi}{2}$. Найдите максимальное значение выражения*

$$A = \cos x + \cos y + \cos z + \cos(x-y) + \cos(y-z) + \cos(z-x).$$

Ответ: $2\sqrt{2}+1$.

Решение. Так как A не меняется при перестановке переменных, мы можем считать, что $z \geqslant \frac{\pi}{2}$. Так как $\cos(y-z) = -\cos(x+2y)$, $\cos(z-x) = -\cos(2x+y)$ и $\cos z = -\cos(x+y)$, мы получим

$$A = \cos x - \cos(x+2y) + \cos y - \cos(2x+y) + \cos(x-y) - \cos(x+y) = \\ = 2\left(\sin(x+y)\sin y + \sin(x+y)\sin x + \sin x \sin y\right).$$

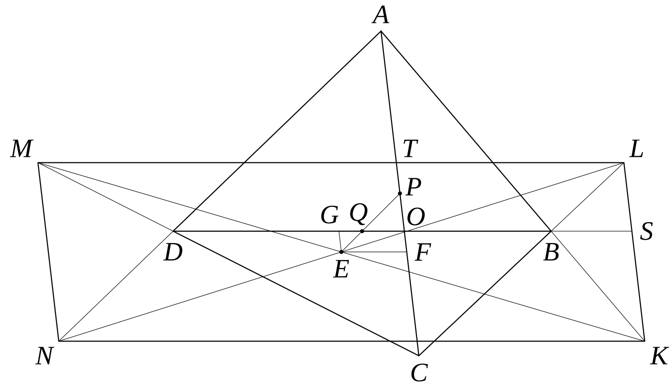
Заметим, что $x+y = \pi - z \leqslant \frac{\pi}{2}$. Если неравенство строгое, то заменим y на $\frac{\pi}{2}-x$. Тогда увеличатся $\sin(x+y)$ и $\sin y$, а значит, и A. Таким образом, максимум A реализуется при $x+y=\frac{\pi}{2}$. В этом случае

$$A = 2(\cos x + \sin x) + 2\sin x \cos x = 2\sqrt{2}\,\sin\!\left(x+\tfrac{\pi}{4}\right) + \sin 2x \leqslant 2\sqrt{2}+1.$$

Значение $2\sqrt{2}+1$ достигается при $x=y=\frac{\pi}{4}$, $z=\frac{\pi}{2}$. □

3. *Дан четырехугольник $ABCD$, отличный от параллелограмма. На лучах AB, CB, CD и AD вне сторон четырехугольника $ABCD$ выбираются соответственно точки K, L, M и N так, что $KL \parallel MN \parallel AC$ и $LM \parallel KN \parallel BD$. Найдите геометрическое место точек пересечения диагоналей параллелограмма.*

Ответ: луч, идущий из середины AC через середину BD, за вычетом отрезка, соединяющего эти точки.



Решение. Пусть O и T— точки пересечения AC соответственно с BD и LM, S — точка пересечения прямой BD с KL, E — точка пересечения диагоналей $KLMN$. Проведем через E прямые, параллельные диагоналям $ABCD$, и обозначим точки их пересечения с AC и BD через F и G соответственно (см. рисунок). Положим $\lambda = \frac{BL}{BC}$, $x = AO$, $y = OC$. Тогда

$$CF = CT - TF = (\lambda+1)\,CO - \tfrac{1}{2}\,KL = (\lambda+1)\,CO - \tfrac{1}{2}\,\lambda\cdot AC = (\lambda+1)\,y - \tfrac{1}{2}\,\lambda\,(x+y).$$

Пусть P и Q — середины отрезков AC и BD соответственно. Заметим, что

$$CO - CF = y - (\lambda+1)\,y + \tfrac{1}{2}\,\lambda\,(x+y) = -\lambda\bigl(y - \tfrac{1}{2}\,(x+y)\bigr) = -\lambda\,(CO - CP).$$

Поэтому точки P и F лежат по разные стороны от O и $OF = \lambda\cdot OP$.

Положим теперь $z = BO$, $w = OD$. Тогда

$$BG = SG - SB = \tfrac{1}{2}\,LM - \lambda\cdot BO = \tfrac{1}{2}\,(\lambda+1)BD - \lambda\cdot BO = \tfrac{1}{2}\,(\lambda+1)\,(z+w) - \lambda\,z,$$

откуда

$$BO - BG = z - \tfrac{1}{2}\,(\lambda+1)(z+w) + \lambda\,z = (\lambda+1)\bigl(z - \tfrac{1}{2}\,(z+w)\bigr) = (\lambda+1)(BO - BQ).$$

Поэтому точки Q и G лежат по одну сторону от O и $OG = (\lambda+1)\,OQ$, то есть $QG = \lambda\cdot OQ$.

Осталось заметить, что

$$\overrightarrow{QE} = \overrightarrow{QG} + \overrightarrow{GE} = \overrightarrow{QG} + \overrightarrow{OF} = \lambda\left(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}\right) = \lambda\cdot\overrightarrow{PQ},$$

где λ — произвольное положительное число. Значит, точки E заполняют собой весь луч, идущий из Q в направлении $\overrightarrow{PQ}$. $\square$

4. *Натуральное число x в восьмеричной системе 2018-значное, и его цифры повторяются через одну. Оказалось, что восьмеричная запись x^2 содержит только цифры 3 и 4, причем в равном количестве. Найдите x^2 (в восьмеричной системе).*

Ответ: $x^2 = \underbrace{34\ldots34}_{\text{2016 цифр}}\,33\,\underbrace{43\ldots43}_{\text{2016 цифр}}\,44$ при $x = \underbrace{52\ldots52}_{\text{2018 цифр}}$.

Решение 1. Пусть $x = (ab\ldots ab)$. Договоримся восьмеричные числа писать в скобках, чтобы отличать их от десятичных. Тогда последняя цифра x^2 равна $b^2 \bmod 8$. Из таблицы

b	0	1	2	3	4	5	6	7
$b^2 \bmod 8$	0	1	4	1	0	1	4	1

ясно, что $b=2$ или $b=6$. Заметим, что $x^2 \bmod 7 = 2018\cdot(3+4) \bmod 7 = 0$. Поэтому

$$0 = x \bmod 7 = 2018\,(a+b) \bmod 7 = 2\,(a+b) \bmod 7, \quad \text{откуда} \;\; a = 7-b.$$

Случай $b=6$ не подходит, поскольку $(16\ldots16)^2$ оканчивается на 04. Значит, $x=(52\ldots52)$.

Мы пока не знаем, удовлетворяет ли найденное число x условию задачи. Чтобы убедиться в этом и получить ответ, вычислим x^2. Пусть $n=1009$. Заметим, что

$$3x = (17\ldots76) = 2\cdot 8^{2n}-2, \quad \text{откуда} \quad 9x^2 = \big(8^{2n}-1\big)\big(4\cdot 8^{2n}-4\big).$$

Число $4\cdot 8^{2n}-4$ кратно 9, поскольку $8^{2n} \bmod 9 = 1$. Так как $(400) = (11)\cdot(34)+4$, для любого натурального m верно равенство

$$4\cdot 8^{2m} = (11)\cdot(34)\cdot 8^{2m-2} + 4\cdot 8^{2m-2}.$$

Применяя его для $m=n$, $m=n-1$ и так далее, мы получим

$$4\cdot 8^{2n} = (11)\cdot(3434\ldots34)+4 = 9\,(q+1)+4, \quad \text{где} \quad q = (\underbrace{3434\ldots34}_{2n-2\text{ цифр}}33).$$

Тогда

$$x^2 = \big(8^{2n}-1\big)(q+1) = 8^{2n}q + 8^{2n} - (q+1) = (\underbrace{3434\ldots34}_{2n-2\text{ цифр}}\,33\,\underbrace{4343\ldots43}_{2n-2\text{ цифр}}\,44). \quad \square$$

Решение 2. Договоримся писать числа в восьмеричной системе. Пусть $x=\overline{ab\ldots ab}$. Последняя цифра x^2 равна $b^2 \bmod 8$. Из таблицы

b	0	1	2	3	4	5	6	7
$b^2 \bmod 8$	0	1	4	1	0	1	4	1

ясно, что $b=2$ или $b=6$. Заметим, что $x^2 \bmod 7 = 2018\,(3+4) \bmod 7 = 0$. Поэтому

$$0 = x \bmod 7 = 2018\,(a+b) \bmod 7 = 2\,(a+b) \bmod 7, \quad \text{откуда} \;\; a = 7-b.$$

Случай $b=6$ не подходит, поскольку $16\ldots16^2$ оканчивается на 04. Значит, число x может быть равно только $52\ldots52$.

Докажем по индукции, что при любом натуральном n

$$\underbrace{52\ldots52}_{2n\text{ цифр}}{}^2 = \underbrace{34\ldots34}_{2n-2\text{ цифр}}\;33\;\underbrace{43\ldots43}_{2n-2\text{ цифр}}\;44.$$

Положим $x_n = \underbrace{52\ldots52}_{2n\text{ цифр}}$. База индукции очевидна: $52^2 = 3344$. Допустим, что равенство верно при некотором n. Тогда $x_{n+1} = 8^2x_n + 52$. Заметим, что

$$2\cdot 52\cdot x_n = 2\cdot 3344\cdot\big(1+8^2+\ldots+8^{2n-2}\big) = 2\cdot 42_{10}^2\cdot\frac{8^{2n}-1}{63_{10}} = 56_{10}\cdot\big(8^{2n}-1\big) = 7\cdot 8^{2n+1}-70.$$

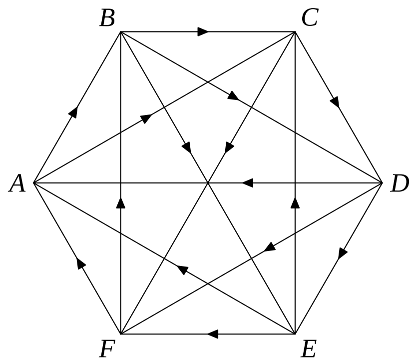
Поэтому

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 = 8^4x_n^2 + 52^2 + 8^2\cdot 2\cdot 52\cdot x_n &= \underbrace{34\ldots34}_{2n-2}33\underbrace{43\ldots43}_{2n-2}443344 + 7\underbrace{0\ldots0}_{2n+3}-7000 = \\ &= \underbrace{34\ldots34\,34}_{2n}33\underbrace{43\ldots43}_{2n-4}443344 - 7000 = \underbrace{34\ldots34}_{2n}33\underbrace{43\ldots43}_{2n}44, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. $\square$

5. *В однокруговом турнире по настольному теннису участвовало n теннисистов ($n \geqslant 3$). Будем говорить, что игрок A круче игрока B, если A выиграл у B или найдется такой игрок C, что A выиграл у C, а C выиграл у B. При каких n по итогам турнира могло оказаться так, что каждый игрок круче всех остальных? Ничьих в теннисе не бывает.*

   Ответ: $n \neq 4$.



Решение. Договоримся символом $X \to Y$ отмечать факт победы X над Y. Докажем следующее утверждение: *если некоторое n удовлетворяет условию задачи, то $n+2$ — тоже.* Добавим к турниру с n участниками новых теннисистов A и B. Предположим, что A выиграл у B и проиграл всем остальным, а B победил всех, кроме A. Пусть C — теннисист, отличный от A и B. Так как $A \to B \to C \to A$, в тройке A, B, C каждый круче двух других, а это и нужно доказать.

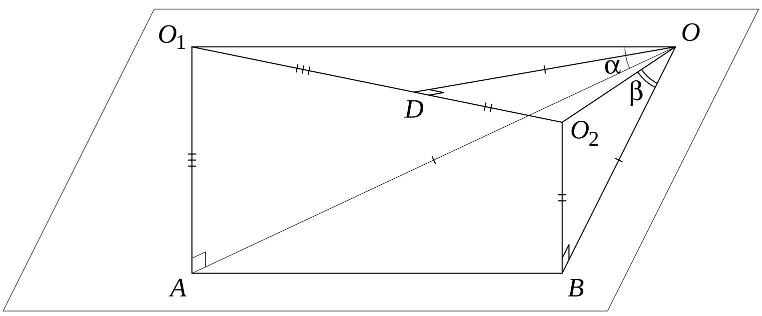
Заметим, что все нечетные $n \geqslant 3$ нам подходят. Действительно, воспользуемся индукцией по n с шагом 2. Индукционный переход вытекает из доказанного утверждения, а база очевидна: для теннисистов A, B, C положим $A \to B \to C \to A$.

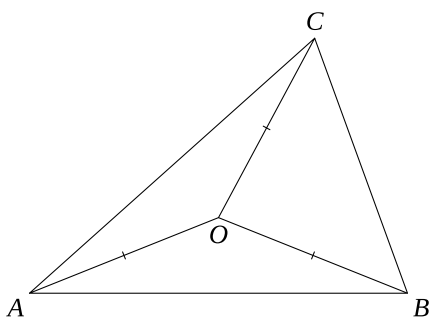
Покажем, что $n = 4$ не удовлетворяет условию задачи. Предположим противное. Обозначим участников через A, B, C, D. Среди них хотя бы один одержал более одной победы (иначе суммарное число поражений не менее 8, что невозможно при 6 сыгранных партиях). Пусть для определенности $A \to B$ и $A \to C$. Поскольку B и C круче A, мы получим $B \to D \to A$ и $C \to D \to A$. Но тогда проигравший в паре $\{B, C\}$ не будет круче выигравшего.

Осталось показать, что все четные $n \geqslant 6$ на устраивают. Вновь воспользуемся индукцией по n с шагом 2. Индукционный переход вытекает из доказанного ранее утверждения, а пример для $n = 6$ показан на рисунке. $\square$

6. *На столе лежат два конуса с общей вершиной O, касаясь друг друга внешним образом. Угол между их осями симметрии равен $\operatorname{arctg} \frac{12}{5}$. Найдите максимальный угол при вершине большего из двух конусов с вершиной O, которые лежат на столе и касаются внешним образом первых двух конусов. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении.)*

   Ответ: $2 \operatorname{arcctg}\big(3 - \sqrt{5}\big)$.





Решение. Пусть 2α, 2β, 2γ — углы при вершине конусов. Отложим единичные отрезки OA, OB, OC на лежащих в плоскости стола образующих конусов. Пусть O_1 и O_2 — точки на осях симметрии первых двух конусов, проекциями которых на стол являются точки A и B, OD — единичный отрезок на общей образующей этих конусов. Треугольники OO_1A и OO_1D равны по двум сторонам и углу, откуда $DO_1 \perp DO$ и $DO_1 = AO_1 = \operatorname{tg}\alpha$. Аналогичным образом $DO_2 = BO_2 = \operatorname{tg}\beta$. Поэтому

$$AB^2 = O_1O_2^2 - |AO_1 - BO_2|^2 = (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)^2 - (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)^2 = 4\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta.$$

Применяя те же рассуждения к двум другим парам конусов, мы получим

$$AC^2 = 4\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma, \quad BC^2 = 4\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma.$$

Пусть $\varphi = \angle AOB$. Поскольку нам нужен больший из двух возможных третьих конусов, луч OC лежит вне угла AOB. Тогда (см. правый рисунок)

$$2\angle ACB = 2\angle ACO + 2\angle OCB = \pi - 2\angle OAB = \angle AOB = \varphi \Longrightarrow \angle ACB = \tfrac{\varphi}{2}.$$

Заметим, что

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{AB}{2AO} = \sqrt{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \quad \text{и} \quad \cos\angle ACB = \cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

По теореме косинусов для треугольника ABC

$$\sqrt{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC} = \frac{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{2\sqrt{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \cdot \operatorname{tg}\gamma}.$$

Домножая это равенство на $2\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta}$, мы получим

$$2\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta - 1} = \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\gamma \Longrightarrow \operatorname{ctg}\gamma = \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta - 2\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta - 1}.$$

Положим $x = \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta$. По условию $\alpha + \beta = \operatorname{arcctg}\frac{12}{5}$, откуда

$$\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta - 1 = \operatorname{ctg}(\alpha+\beta)\bigl(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta\bigr) = \tfrac{5}{12}x \quad \text{и} \quad \operatorname{ctg}\gamma = x - \sqrt{\tfrac{5}{3}x} = \left(\sqrt{x} - \sqrt{\tfrac{5}{12}}\right)^2 + \tfrac{5}{12}.$$

Заметим, что правая часть возрастает по x на $[3, +\infty)$. Числа $\operatorname{ctg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\beta$ являются корнями квадратного уравнения $t^2 - xt + \frac{5}{12}x + 1 = 0$ (относительно переменной t). Оно должно иметь решения, поэтому

$$x^2 - \tfrac{5}{3}x - 4 \geqslant 0 \Longleftrightarrow x \geqslant 3 \Longleftrightarrow \operatorname{ctg}\gamma \geqslant 3 - \sqrt{5} \Longleftrightarrow \gamma \leqslant \operatorname{arcctg}\bigl(3 - \sqrt{5}\bigr).$$

Равенство реализуется при $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta = 5$. $\square$