Олимпиада школьников СПбГУ по математике.

Заключительный этап. 2018/2019 учебный год.

Задания для 6-7 классов

(Правильное и полное решение каждой задачи оценивается в 20 баллов)

Олимпиада школьников СПбГУ по математике.
Заключительный этап. 2018/2019 учебный год. 6 – 7 классы.

Вариант 1

1. *Костя расставляет в клетках листа бумаги последовательные натуральные числа, двигаясь по спирали так, как показано на рисунке. Какое число будет написано в клетке справа от числа 2019?*

	5	6	7
	4	1	8
14	3	2	9
13	12	11	10

Ответ: 2202.

Решение. В тот момент, когда Костя выписывает число n^2, заполненные клетки образуют квадрат $n \times n$. Из алгоритма выписывания чисел ясно, что числа вида n^2 при четном n расположены в диагонали, идущей влево и вверх от клетки с числом 4, а при нечетном n — в диагонали, идущей вправо и вниз от клетки с числом 1.

36					
	16	5	6	7	
	15	**4**	**1**	8	
	14	3	2	**9**	
	13	12	11	10	**25**

Поскольку $44^2 = 1936 < 2019 < 2025 = 45^2$, число 2019 было выписано в процессе формирования квадрата со стороной 45. Так как $2025 - 2019 = 6$, число 2019 находится на правой стороне этого квадрата на 6 клеток выше его правой нижней угловой вершины 2025. Соседнее справа число находится на 7 клеток выше угловой клетки квадрата со стороной 47, содержащей число $47^2 = 2209$. Значит, соседнее число равно 2202. $\square$

2. *Говоря о рыбе, каждый рыбак всегда называет больший вес, чем на самом деле. При этом все рыбаки вес чужой рыбы завышают не более чем в 2 раза, а вес своей рыбы — не менее чем в 7 раз. Беседуют два рыбака А и Б.*
А. Эта твоя рыбина весит 30 кг.
Б. Ошибаешься, она весит 150 кг!
А. Может я немного ошибся, но тогда она весит 31 кг.
Б. Я тоже мог быть неточным, но уверен, что она весит 149 кг.
А. Она весит 32 кг!
Б. Нет, 148 кг.
Какое наибольшее число реплик может содержать такая беседа и какой вес будет упомянут в последней реплике? (Оба собеседника знают настоящий вес рыбы.)

Ответ: Рыбаки произнесут по 11 реплик, включая начальные. В последней реплике рыбак Б скажет, что его рыба весит 140 кг, а перед этим рыбак А заявит, что ее вес 40 кг. Сама рыба при этом должна весить 20 кг.

Решение 1. Ответ можно найти, если перевести реплики с «рыбачьего» языка (который искаженно описывает вес рыбы) на «общепринятый» (указывающий вес без искажений). Так, в первой реплике «твоя рыбина весит 30 кг» рыбак А говорит о чужой рыбе. Значит, он завышает вес не более чем в 2 раза, и его высказывание означает, что реальный вес рыбы не менее 15 кг. Рыбак Б произносит в ответ «она весит 150 кг». При этом он говорит о своей рыбе, то есть завышает вес в 7 или более раз, и на самом деле рыба весит не более $\frac{150}{7} = 21\frac{3}{7}$ кг.

Итак, после первой пары реплик мы знаем, что вес рыбы лежит в диапазоне от 15 до $21\frac{3}{7}$ кг. В следующих репликах рыбаки сужают диапазон, в котором находится вес рыбы. Так, после второй пары реплик мы можем сделать вывод, что вес рыбы от $15\frac{1}{2}$ до $21\frac{2}{7}$ кг, а из следующей пары — что вес в диапазоне 16 до $21\frac{1}{7}$ кг.

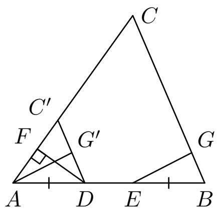
Обобщая эти наблюдения, мы видим, что с каждой репликой рыбака А нижняя граница промежутка увеличивается на $\frac{1}{3}$, а с каждой репликой рыбака Б верхняя граница промежутка уменьшается на $\frac{1}{7}$. Тогда нетрудно предположить, что максимально долгий разговор состоится при весе рыбы 20 кг. Очевидно, в этом случае он закончится репликами, упомянутыми в ответе. Доказать это предположение совсем нетрудно. Если рыба весит меньше 20 кг, то рыбак А не сможет заявить, что рыба весит 40 кг, то есть разговор окончится раньше. Если же рыба весит больше 20 кг, то рыбак Б не сможет сказать, что она весит 140 кг, то есть опять разговор окончится раньше. $\square$

Решение 2. Пусть x — истинный вес рыбы, m и n — количество реплик соответственно А и Б, не считая первой. Ясно, что $n = m$ или $n = m - 1$. По условию $30 + m \leqslant 2x$ и $150 - n \geqslant 7x$. Тогда $7(30 + m) \leqslant 14x \leqslant 2(150 - n)$, откуда

$$90 \geqslant 7m + 2n \geqslant 7m + 2(m - 1) = 9m - 1.$$

Значит, $m \leqslant 10$ и $n \leqslant m \leqslant 10$, то есть оба рыбака не могли произнести более 11 реплик. С другой стороны, если $m = n = 10$, то $30 + m = 2 \cdot 20$ и $150 - n = 7 \cdot 20$. Таким образом, А и Б выдадут ровно по 11 реплик тогда и только тогда, когда $x = 20$. $\square$

3. *В остроугольном треугольнике ABC на стороне AB взяты точки D и E (точка D лежит на отрезке AE), при этом $AD = BE$, $DE < AD$. На стороне BC выбрана такая точка G, что прямая EG параллельна биссектрисе угла BAC. Точка F — основание перпендикуляра, опущенного на сторону AC из точки D. Докажите, что $FD + EG > DE$.*



Решение. Проведем через точку D прямую, параллельную BC. Она отсечет от угла A остроугольный треугольник ADC', подобный ABC. Отрезок DF является высотой этого треугольника. Проведем в треугольнике $C'AD$ биссектрису AG'. Так как $AD = EB$, треугольники $AG'D$ и EGB равны по стороне и двум прилегающим углам, откуда $AG' = EG$. Отрезки AG' и DF пересекаются внутри треугольника ADC', поэтому $AG' + DF > AD$. Таким образом,

$$FD + EG = FD + AG' > AD > DE. \quad \square$$

4. *При сложении двух чисел в столбик Костя сначала складывает цифры, не делая переносов, но запоминает, в каких разрядах они возникли. Затем он прибавляет переносы к результату. При этом иногда по ошибке он может прибавить переносимую единицу не к соседнему старшему разряду, а к соседнему младшему. Так, в примере справа разряды, где есть перенос, помечены звездочками. Перенос единицы из разряда единиц Костя сделал правильно, а перенос единицы из разряда десятков — неправильно (он прибавил переносимую единицу не к разряду сотен, а к разряду единиц). Если при учете переносов у Кости возникает потребность сделать еще переносы, то их он уже делает без ошибки.*

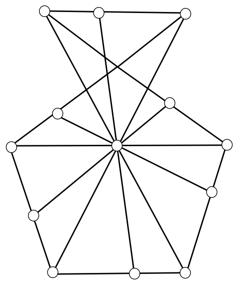
1	*9*	*5*
2	*7*	*6*
3	*6*	*1*
	*	*
3	*7*	*2*

Как-то раз Костя подсчитал сумму всех трехзначных чисел от 200 до 400 включительно. Мог ли он получить ответ 41 400?

Ответ: нет.

Решение. Каждая ошибка, совершаемая Костей, уменьшает правильный результат на число вида $990\ldots0$ и потому не меняет остаток от деления результата на 11. Настоящая сумма указанных трехзначных чисел равна $\frac{1}{2}(200+400)\cdot 201 = 60\,300$. Число из условия задачи меньше этой суммы на 18 900, что не делится на 11. $\square$

5. *В кружочках выписаны числа от 10 до 22 так, что сумма чисел на любом отрезке, содержащем 3 кружочка, одна и та же. Какое число стоит в центральном кружочке?*



Ответ: 16.

Решение. Пусть x — число в центральном кружочке, s — сумма чисел на любом отрезке. Через центральный кружок проходит 6 отрезков, на которые «нанизаны» все остальные числа. Сложив все числа на отрезках, мы получим сумму всех чисел в таблице, причем центральное число окажется учтенным 6 раз. Мы получим уравнение

$$10 + 11 + \ldots + 22 + 5x = 6s,$$

то есть $208 + 5x = 6s$ или, если записать чуть хитрее, $204 + 6x - 6s = x - 4$. Число в левой части делится на 6, поэтому и $x - 4$ должно делиться на 6. Значит, x может принимать только значения 10, 16 или 22.

Докажем, что случаи $x = 10$ и $x = 22$ невозможны, и тогда единственно возможный ответ — 16. Назовем *боковым* любой отрезок, проходящий через три нецентральных кружка. Пусть $x = 10$, то есть в центральном кружочке стоит число 10. Тогда $s = \frac{208+5x}{6} = 43$. Рассмотрим боковой отрезок, содержащий число 22. Сумма чисел на этом отрезке равна 43. Поскольку отрезок не проходит через центральный кружок, он не содержит 10, и сумма чисел на нем будет не меньше $22 + 11 + 12 = 45$. Противоречие.

Аналогично при $x = 22$ находим, что $s = 53$. Тогда сумма чисел на боковом отрезке, содержащем число 10, не превосходит $10 + 20 + 21 = 51$. Противоречие. $\square$

6. *На очень длинной линии метро находится 300 станций. Стены каждой станции покрашены в один определенный цвет, причем в этот же цвет могут могут быть покрашены и какие-то другие станции. Известно, что на любом отрезке линии, где есть хотя бы одна станция, можно указать станцию «уникального» цвета (то есть цвета, который у других станций на этом отрезке не встречается). В какое наименьшее число цветов могут быть окрашены станции этой линии метро?*

Ответ: в 9 цветов.

Решение. Покажем вначале, что менее чем 9 цветами не обойтись. Проверим более общий факт: *если на линии N станций, где $2^k \leqslant N < 2^{k+1}$, то потребуется не менее $k+1$ цветов.* Воспользуемся индукцией по k. База очевидна: на линии из 1 станции достаточно одного цвета, а на линии из 2 или 3 станций — двух цветов. Пусть для $k-1$ утверждение доказано, и $2^k \leqslant N < 2^{k+1}$. По условию на всей линии есть уникальная станция. До или после нее найдется отрезок из 2^{k-1} станций (иначе $N \leqslant 2(2^{k-1}-1)+1 = 2^k - 1$). Этот отрезок удовлетворяет индукционному предположению, поэтому для его раскраски нужно не менее k цветов, а для покраски всех станций, кроме уникальной, — тем более. С учетом уникальной станции нам потребуется не менее $k+1$ цветов.

Поскольку $2^8 < 300 < 2^9$, из доказанного утверждения вытекает, что на покраску всей линии необходимо не менее 9 цветов.

Приведем теперь пример, показывающий, что 9 цветов достаточно. Последовательно пронумеруем станции числами от 1 до 300, а цвета — неотрицательными целыми числами. Произвольную станцию n покрасим в такой цвет m, что n делится на 2^m, но не делится на 2^{m+1}. Так как $n \leqslant 300 < 2^9$, такое m не превосходит 8, то есть мы задействовали не более 9 цветов. Осталось проверить, что на любом отрезке Δ есть станция с уникальным цветом. Пусть n — станция из Δ, окрашенная в цвет с наибольшим номером (обозначим этот номер через k). Покажем, что n — «уникальная» станция на Δ. Допустим, что на Δ нашлась еще одна станция n', покрашенная в цвет k. Тогда $n = 2^k(2p+1)$ и $n' = 2^k(2q+1)$, где для определенности $p < q$. Положим $m = 2^k(2p+2)$ и заметим, что $n < m < n'$. Так как Δ — отрезок, он содержит и станцию с номером m. Но это невозможно, поскольку m делится на 2^{k+1}, то есть номер цвета станции m больше k. $\square$

Вариант 2

1. *Таня расставляет в клетках листа бумаги последовательные натуральные числа, двигаясь по спирали так, как показано на рисунке. Какое число будет написано в клетке слева от числа 2031?*

10	9	8	7
11	2	1	6
12	3	4	5
13	14		

Ответ: 2216.

Решение. В тот момент, когда Таня выписывает число n^2, заполненные клетки образуют квадрат $n \times n$. Из алгоритма выписывания чисел ясно, что числа вида n^2 при четном n расположены в диагонали, идущей вправо и вниз от клетки с числом 4, а при нечетном n — в диагонали, идущей влево и вверх от клетки с числом 1.

	25				
	10	**9**	8	7	
	11	2	**1**	6	
	12	3	**4**	5	
	13	14	15	**16**	
					36

Поскольку $45^2 = 2025 < 2031 < 2116 = 46^2$, число 2031 было выписано в процессе формирования квадрата со стороной 46. Так как $2031 - 2026 = 5$, число 2031 находится на левой стороне этого квадрата на 5 клеток ниже его правой верхней угловой вершины 2026. Соседнее слева число находится на 6 клеток ниже угловой клетки квадрата со стороной 47, содержащей число $47^2 + 1 = 2210$. Значит, соседнее число равно 2216. $\square$

2. *Говоря о собранных грибах, каждый грибник называет большее их количество, чем на самом деле. При этом все грибники число чужих грибов завышают не более чем в 3 раза, а число своих грибов — не менее чем в 8 раз. Беседуют два грибника А и Б.*
   А. Я вчера собрал в лесу 215 белых грибов.
   Б. Да в этом лесу больше 60 грибов расти вообще не может.
   А. После дождей грибы так растут. 214 белых я точно собрал!
   Б. Гриб, может, и растет, но больше 61 гриба там собрать невозможно.
   А. Я собрал 213 грибов!
   Б. Нет. Не больше 62.
   Какое наибольшее число реплик может содержать такая беседа и какое количество грибов будет упомянуто в последней реплике? (Оба собеседника знают, сколько грибов собрал А на самом деле).

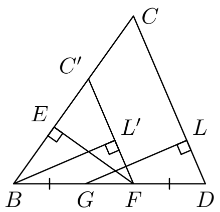
Ответ: Грибники произнесут по 16 реплик, включая начальные. В последней реплике грибник Б скажет, что А собрал не более 75 грибов, а перед этим грибник А заявит, что собрал 200 грибов. На самом деле грибник А собрал 25 грибов.

Решение. Ответ можно найти, если перевести реплики с «грибниковского» языка (который искажает количество грибов) на «общепринятый» (указывающий эти количества без искажений). Так, в первой реплике «я собрал 215 грибов» грибник А говорит о своих грибах. Значит, он завышает вес в 8 или более раз, и его высказывание означает, что на самом деле он собрал не более $\frac{215}{8} = 26\frac{7}{8}$ грибов (а так как число грибов целое, то даже не более 26 грибов; впрочем, дальше мы не будем делать подобные уточнения). Грибник Б отвечает «у тебя не больше 60 грибов». При этом он говорит о чужих грибах, то есть завышает их число не более чем в 3 раза. Это значит, что грибник А нашел не менее 20 грибов.

Итак, после первой пары реплик мы знаем, что количество грибов лежит в диапазоне от 20 до $26\frac{7}{8}$. В следующих репликах грибники сужают диапазон, в котором находится число грибов. Так, после второй пары реплик мы можем сделать вывод, что было собрано от $20\frac{1}{3}$ до $26\frac{6}{8}$ грибов, а из следующей пары — что собрано от $20\frac{2}{3}$ до $26\frac{5}{8}$ грибов.

Обобщая эти наблюдения, мы видим, что с каждой репликой грибника А верхняя граница промежутка уменьшается на $\frac{1}{8}$, а с каждой репликой грибника Б нижняя граница промежутка увеличивается на $\frac{1}{3}$. Тогда нетрудно предположить, что максимально долгий разговор состоится в случае, когда грибник А нашел 25 грибов. Очевидно, в этом случае он закончится репликами, упомянутыми в ответе. Доказать это предположение совсем нетрудно. Если А собрал меньше 25 грибов, то он не сможет заявить, что собрал 200 грибов, то есть разговор окончится раньше. Если же А собрал больше 25 грибов, то грибник Б не сможет сказать, что их 75, то есть опять разговор окончится раньше. □

3. *В остроугольном треугольнике BCD на стороне BD взяты точки G и F (точка G лежит на отрезке BF), при этом $BG = DF$, $GF < BG$. Точка E — основание перпендикуляра, опущенного из точки F на сторону BC, L — основание перпендикуляра, опущенного из точки G на сторону CD. Докажите, что $EF + GL > 2FG$.*



Решение. Проведем через точку F прямую, параллельную CD. Она отсечет от угла B остроугольный треугольник $BC'F$, подобный BCD. Отрезок FE является высотой этого треугольника. Проведем в нем вторую высоту BL'. Так как $BF = GD$, треугольники $BL'F$ и GLD равны по стороне и двум прилегающим углам, откуда $BL' = GL$. Высоты BL' и FE пересекаются внутри треугольника $BC'F$, поэтому $EF + BL' > BF$. Таким образом,

$$EF + GL = EF + BL' > BF = BG + GF > 2GF. \quad \square$$

4. *При сложении двух чисел в столбик Костя сначала складывает цифры, не делая переносов, но запоминает, в каких разрядах они возникли. Затем он прибавляет переносы к результату. При этом иногда по ошибке он вместо прибавления переносимой единицы к соседнему старшему разряду вычитает единицу из соседнего младшего разряда. Такую ошибку Костя может сделать, только если в младшем разряде стоит не 0. Так, в примере справа разряды, где есть перенос, помечены звездочками. Перенос единицы из разряда единиц Костя сделал правильно, а перенос единицы из разряда десятков — неправильно (он не прибавил переносимую единицу к разряду сотен, а вычел ее из разряда единиц).*

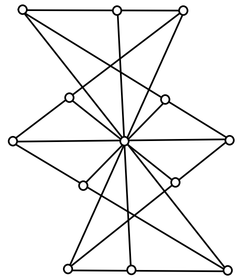
$$\begin{array}{ccc} 1 & 9 & 5 \\ 2 & 7 & 6 \\ \hline 3 & 6 & 1 \\ & * & * \\ \hline 3 & 7 & 0 \end{array}$$

Как-то раз Костя подсчитал сумму всех трехзначных чисел от 300 до 500 включительно. Мог ли он получить ответ 70 000?

Ответ: нет.

Решение. Каждая ошибка, совершаемая Костей, уменьшает правильный результат на число вида $1010\ldots0$ и потому не меняет остаток от деления результата на 101. Настоящая сумма указанных трехзначных чисел равна $\frac{1}{2}(300 + 500) \cdot 201 = 80\,400$. Число из условия задачи меньше этой суммы на 10 400, что не делится на 101. □

5. *В кружочках выписаны числа от 5 до 17 так, что сумма чисел на любом отрезке, содержащем 3 кружочка, одна и та же. Какое число стоит в центральном кружочке?*



Ответ: 11.

Решение. Пусть x — число в центральном кружочке, s — сумма чисел на любом отрезке. Через центральный кружок проходит 6 отрезков, на которые «нанизаны» все остальные числа. Сложив все числа на отрезках, мы получим сумму всех чисел в таблице, причем центральное число окажется учтенным 6 раз. Мы получим уравнение

$$5 + 6 + \ldots + 17 + 5x = 6s,$$

то есть $143 + 5x = 6s$ или, если записать чуть хитрее, $144 + 6x - 6s = x + 1$. Число в левой части делится на 6, поэтому и $x + 1$ должно делиться на 6. Значит, x может принимать только значения 5, 11 или 17.

Докажем, что случаи $x = 5$ и $x = 17$ невозможны, и тогда единственно возможный ответ — 11. Назовем *боковым* любой отрезок, проходящий через три нецентральных кружка. Пусть $x = 5$, то есть в центральном кружочке стоит число 5. Тогда $s = \frac{143+5x}{6} = 28$. Рассмотрим боковой отрезок, содержащий число 17. Сумма чисел на этом отрезке равна 28. Поскольку отрезок не проходит через центральный кружок, он не содержит 5, и сумма чисел на нем будет не меньше $17 + 6 + 7 = 30$. Противоречие.

Аналогично при $x = 17$ находим, что $s = 38$. Тогда сумма чисел на боковом отрезке, содержащем число 5, не превосходит $5 + 15 + 16 = 36$. Противоречие. □

6. *Вдоль длинной улицы стоит 150 фонарей. Каждый фонарь светит определенным цветом, причем цвета фонарей могут повторяться. Известно, что на любом отрезке улицы, где есть хотя бы один фонарь, найдется фонарь «уникального» цвета (то есть цвета, который у других фонарей на этом отрезке не встречается). Какое наименьшее число цветов фонарей может быть на этой улице?*

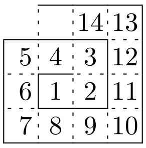
Ответ: в 8 цветов.

Решение. Покажем вначале, что менее чем 8 цветами не обойтись. Проверим более общий факт: *если на улице N фонарей, где $2^k \leqslant N < 2^{k+1}$, то потребуется не менее $k+1$ цветов.* Воспользуемся индукцией по k. База очевидна: на улице с 1 фонарем достаточно одного цвета, а на улице с 2 или 3 фонарями — двух цветов. Пусть для $k-1$ утверждение доказано, и $2^k \leqslant N < 2^{k+1}$. По условию на всей улице есть уникальный фонарь. До или после него найдется отрезок из 2^{k-1} фонарей (иначе $N \leqslant 2(2^{k-1}-1)+1 = 2^k - 1$). Этот отрезок удовлетворяет индукционному предположению, поэтому в нем задействовано не менее k цветов, а на всей улице без уникального фонаря — тем более. С учетом уникального фонаря нам потребуется не менее $k+1$ цветов.

Поскольку $2^7 < 150 < 2^8$, из доказанного утверждения вытекает, что на всю улицу необходимо не менее 8 цветов.

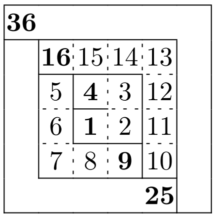
Приведем теперь пример, показывающий, что 8 цветов достаточно. Последовательно пронумеруем фонари числами от 1 до 150, а цвета — неотрицательными целыми числами. Произвольному фонарю n припишем такой цвет m, что n делится на 2^m, но не делится на 2^{m+1}. Так как $n \leqslant 150 < 2^8$, такое m не превосходит 7, то есть мы задействовали не более 8 цветов. Осталось проверить, что на любом отрезке Δ есть фонарь с уникальным цветом. Пусть n — фонарь из Δ, окрашенный в цвет с наибольшим номером (обозначим этот номер через k). Покажем, что n — «уникальный» фонарь на Δ. Допустим, что на Δ нашелся еще один фонарь n' с цветом k. Тогда $n = 2^k(2p+1)$ и $n' = 2^k(2q+1)$, где для определенности $p < q$. Положим $m = 2^k(2p+2)$ и заметим, что $n < m < n'$. Так как Δ — отрезок, он содержит и фонарь с номером m. Но это невозможно, поскольку m делится на 2^{k+1}, то есть номер цвета фонаря m больше k. □

1. *Андрей расставляет в клетках листа бумаги последовательные натуральные числа, двигаясь по спирали так, как показано на рисунке. Какое число будет написано в клетке сверху от числа 1930?*



Ответ: 2109.

Решение. В тот момент, когда Андрей выписывает число n^2, заполненные клетки образуют квадрат $n \times n$. Из алгоритма выписывания чисел ясно, что числа вида n^2 при четном n расположены в диагонали, идущей влево и вверх от клетки с числом 4, а при нечетном n — в диагонали, идущей вправо и вниз от клетки с числом 1.



Поскольку $43^2 = 1849 < 1930 < 1936 = 44^2$, число 1930 было выписано в процессе формирования квадрата со стороной 44. Так как $1936 - 1930 = 6$, число 1930 находится на верхней стороне этого квадрата на 6 клеток правее его левой верхней угловой вершины 1936. Соседнее сверху число находится на 7 клеток правее угловой клетки квадрата со стороной 46, содержащей число $46^2 = 2116$. Значит, соседнее число равно 2109. $\square$

2. *Рассказывая об урожае яблок, каждый дачник называет больший их вес, чем на самом деле. При этом все дачники вес чужих яблок завышают не более чем в 3 раза, а вес своих яблок — не менее чем в 7 раз. Беседуют два дачника А и Б.*
А. Этой осенью я собрал 230 кг яблок.
Б. Этот год был не слишком урожайный, ты не мог собрать больше 70 кг!
А. Так у меня же яблони одна к одной! 229 кг я точно собрал.
Б. Да ведь лето было сухое, больше 71 кг ты никак не мог собрать!
А. Я собрал 228 кг яблок!
Б. Нет. Не больше 72 кг.
Какое наибольшее число реплик может содержать такая беседа и какой вес яблок будет упомянут в последней реплике? (Оба собеседника знают, сколько килограммов яблок собрал А на самом деле).

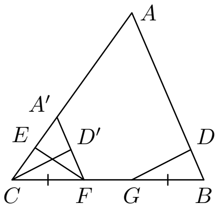
Ответ: Дачники произнесут по 21 реплике, включая начальные. В последней реплике дачник Б скажет, что А собрал не более 90 кг, а перед этим дачник А заявит, что собрал 210 кг. На самом деле дачник А собрал 30 кг яблок.

Решение. Ответ можно найти, если перевести реплики с «дачного» языка (который искажает вес яблок) на «общепринятый» (указывающий вес без искажений). Так, в первой реплике «я собрал 230 кг» дачник А говорит о своих яблоках. Значит, он завышает вес в 7 или более раз, и его высказывание означает, что на самом деле он собрал не более $\frac{230}{7} = 32\frac{6}{7}$ кг. Дачник Б отвечает «у тебя не больше 70 кг». При этом он говорит о чужих яблоках, то есть завышает их вес не более чем в 3 раза. Это значит, что дачник А собрал не менее $\frac{70}{3} = 23\frac{1}{3}$ кг.

Итак, после первой пары реплик мы знаем, что урожай дачника А лежит в диапазоне от $23\frac{1}{3}$ до $32\frac{6}{7}$ кг. В следующих репликах дачники сужают диапазон, в котором находится вес яблок. Так, после второй пары реплик мы можем сделать вывод что было собрано от $23\frac{2}{3}$ до $32\frac{5}{7}$ кг, а из следующей пары — что собрано от 24 до $32\frac{4}{7}$ кг.

Обобщая эти наблюдения, мы видим, что с каждой репликой дачника А верхняя граница промежутка уменьшается на $\frac{1}{7}$, а с каждой репликой дачника Б нижняя граница промежутка увеличивается на $\frac{1}{3}$. Тогда нетрудно предположить, что максимально долгий разговор состоится в случае, когда дачник А собрал 30 кг яблок. Очевидно, в этом случае он закончится репликами, упомянутыми в ответе. Доказать это предположение совсем нетрудно. Если А собрал меньше 30 кг, то он не сможет заявить, что собрал 210 кг, то есть разговор окончится раньше. Если же А собрал больше 30 кг, то дачник Б не сможет сказать, что их 90, то есть опять разговор окончится раньше. $\square$

3. *В остроугольном треугольнике ABC на стороне BC взяты точки F и G (точка F лежит на отрезке CG), при этом $CF = BG$, $FG < BG$. На стороне AC выбрана такая точка E, что прямая EF параллельна биссектрисе угла ABC. На стороне AB выбрана такая точка D, что прямая DG параллельна биссектрисе угла ACB. Докажите, что $FE + DG > FG$.*



Решение. Проведем через точку F прямую, параллельную AB. Она отсечет от угла C остроугольный треугольник $A'FC$, подобный ABC. Отрезок FE является биссектрисой этого треугольника. Проведем в нем вторую биссектрису CD'. Так как $CF = GB$, треугольники $D'CF$ и DGB равны по стороне и двум прилегающим углам, откуда $CD' = GD$. Биссектрисы CD' и FE пересекаются внутри треугольника $A'CF$, поэтому $FE + CD' > CF$. Таким образом,

$$FE + DG = FE + CD' > CF > FG. \quad \square$$

4. *При сложении двух чисел в столбик Костя сначала складывает цифры, не делая переносов, но запоминает, в каких разрядах они возникли. Затем он прибавляет переносы к результату. При этом иногда по ошибке он вместо прибавления переносимой единицы к соседнему старшему разряду прибавляет две единицы к соседнему младшему разряду. Так, в примере справа разряды, где есть перенос, помечены звездочками. Перенос единицы из разряда единиц Костя сделал правильно, а перенос единицы из разряда десятков — неправильно (он прибавил не одну единицу к разряду сотен, а две к разряду единиц). Если при учете переносов у Кости возникает потребность сделать еще переносы, то их он уже делает без ошибки.*

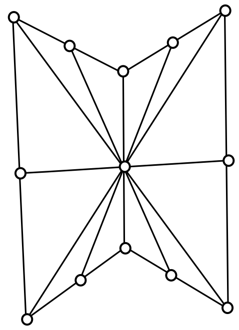
$$\begin{array}{ccc}
1 & 9 & 5 \\
2 & 7 & 6 \\
\hline
3 & 6 & 1 \\
 & * & * \\
\hline
3 & 7 & 3
\end{array}$$

Как-то раз Костя подсчитал сумму всех трехзначных чисел от 100 до 300 включительно. Мог ли он получить ответ 30 000?

Ответ: нет.

Решение. Каждая ошибка, совершаемая Костей, уменьшает правильный результат на число вида $980\ldots0$ и потому не меняет остаток от деления результата на 7. Настоящая сумма указанных трехзначных чисел равна $\frac{1}{2}(100 + 300) \cdot 201 = 40\,200$. Число из условия задачи меньше этой суммы на $10\,200$, что не делится на 7. $\square$

5. *В кружочках выписаны числа от 8 до 20 так, что сумма чисел на любом отрезке, содержащем 3 кружочка, одна и та же. Какое число стоит в центральном кружочке?*



Ответ: 14.

Решение. Пусть x — число в центральном кружочке, s — сумма чисел на любом отрезке. Через центральный кружок проходит 6 отрезков, на которые «нанизаны» все остальные числа. Сложив все числа на отрезках, мы получим сумму всех чисел в таблице, причем центральное число окажется учтенным 6 раз. Мы получим уравнение

$$8 + 9 + \ldots + 20 + 5x = 6s,$$

то есть $182 + 5x = 6s$ или, если записать чуть хитрее, $180 + 6x - 6s = x - 2$. Число в левой части делится на 6, поэтому и $x - 2$ должно делиться на 6. Значит, x может принимать только значения 8, 14 или 20.

Докажем, что случаи $x = 8$ и $x = 20$ невозможны, и тогда единственно возможный ответ — 14. Назовем *боковым* любой отрезок, проходящий через три нецентральных кружка. Пусть $x = 8$, то есть в центральном кружочке стоит число 8. Тогда $s = \frac{182+5x}{6} = 37$. Рассмотрим боковой отрезок, содержащий число 20. Сумма чисел на этом отрезке равна 37. Поскольку отрезок не проходит через центральный кружок, он не содержит 8, и сумма чисел на нем будет не меньше $20 + 9 + 10 = 39$. Противоречие.

Аналогично при $x = 20$ находим, что $s = 47$. Тогда сумма чисел на боковом отрезке, содержащем число 8, не превосходит $8 + 18 + 19 = 45$. Противоречие. $\square$

6. *На каждом этаже 100-этажного небоскреба стены окрашены в определенный цвет, причем цвета этажей могут повторяться. Известно, что любой фрагмент небоскреба, содержащий несколько последовательных этажей, содержит этаж «уникального» цвета (то есть цвета, который на других этажах этого фрагмента не встречается). В какое наименьшее число цветов могут быть окрашены этажи этого небоскреба?*

Ответ: в 7 цветов.

Решение. Покажем вначале, что менее чем 7 цветами не обойтись. Проверим более общий факт: *если у небоскреба N этажей, где $2^k \leqslant N < 2^{k+1}$, то потребуется не менее $k+1$ цветов.* Воспользуемся индукцией по k. База очевидна: для одноэтажного дома достаточно одного цвета, для двух- или трехэтажного — двух цветов. Пусть для $k-1$ утверждение доказано, и $2^k \leqslant N < 2^{k+1}$. По условию во всем небоскребе есть уникальный этаж. Выше или ниже его найдется отрезок из 2^{k-1} этажей (иначе $N \leqslant 2(2^{k-1} - 1) + 1 = 2^k - 1$). Этот отрезок удовлетворяет индукционному предположению, поэтому для его покраски нужно не менее k цветов, а для всего небоскреба без уникального этажа — тем более. С учетом уникального этажа нам потребуется не менее $k + 1$ цветов.

Поскольку $2^6 < 100 < 2^7$, из доказанного утверждения вытекает, что на весь небоскреб необходимо не менее 7 цветов.

Приведем теперь пример, показывающий, что 7 цветов достаточно. Последовательно пронумеруем этажи числами от 1 до 100, а цвета — неотрицательными целыми числами. Произвольный этаж n покрасим в такой цвет m, что n делится на 2^m, но не делится на 2^{m+1}. Так как $n \leqslant 100 < 2^7$, такое m не превосходит 6, то есть мы задействовали не более 7 цветов. Осталось проверить, что на любом отрезке Δ есть этаж с уникальным цветом. Пусть n — этаж из Δ, окрашенный в цвет с наибольшим номером (обозначим этот номер через k). Покажем, что n — «уникальный» этаж на Δ. Допустим, что на Δ нашелся еще один этаж n', покрашенный в цвет k. Тогда $n = 2^k(2p + 1)$ и $n' = 2^k(2q + 1)$, где для определенности $p < q$. Положим $m = 2^k(2p + 2)$ и заметим, что $n < m < n'$. Так как Δ — отрезок, он содержит и этаж с номером m. Но это невозможно, поскольку m делится на 2^{k+1}, то есть номер цвета этажа m больше k. $\square$