САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

# Олимпиада школьников СПбГУ по математике

## Примеры заданий отборочного этапа

## 2019/2020 учебный год

# Олимпиада школьников СПбГУ по математике
# Примеры заданий отборочного этапа
# 2019/2020 учебный год

## Задания для 10–11 классов

**1.** Эксцентричный библиотекарь собирается расставить книги на полке по неубыванию высот, при этом фамилия автора и название во внимание не принимаются. У библиотекаря имеются: 5 различных книг высотой 15 см; 5 книг, из которых 3 одинаковые, а две другие отличаются от них и различны, высотой 20 см; 4 различные книги высотой 30 см. Сколькими способами библиотекарь сможет расставить все эти книги? (10 баллов).

а) $14!$; б) $14!/3!$; в) $5! \cdot 5! \cdot 4!/3!$; г) $5! \cdot 2! \cdot 4!$; д) другой ответ.

**Ответ:** в).

**Решение.** Поскольку книги должны быть расставлены по неубыванию высот, то сначала должны стоять низкие книги, потом средние, потом высокие. Значит, нам надо посчитать количество вариантов расстановки книг каждого типа и затем перемножить результаты.

Так как низких книг 5 и все они различны, их можно расставить $5!$ способами. Аналогично, высокие книги можно расставить $4!$ способами. Средние книги расставим $5!$ способами. При этом, однако, совпадают расстановки, получающиеся друг из друга перестановкой трех одинаковых книг. Следовательно, количество *различных* способов расположения средних книг равно $5!/3!$, откуда и получается ответ.

**2.** Сколько решений имеет уравнение

$$(a+1)(b-1)(a+b) = 2019,$$

если под решением понимается пара целых чисел $a$ и $b$? (10 баллов).

а) ни одного; б) одно; в) два; г) другой ответ.

**Ответ:** а).

**Решение.** Заметим, что либо одно из чисел $a+1$ и $b-1$ четное, либо четна их сумма, равная $a+b$. Следовательно, левая часть уравнения всегда четна, поэтому она не может равняться 2019.

**3.** Сравните площадь правильного треугольника и площадь кольца, образованного описанной и вписанной окружностями этого треугольника. (10 баллов).

а) площади треугольника и кольца равны;

б) площадь треугольника больше площади кольца;

в) площадь треугольника меньше площади кольца;

г) в зависимости от длины стороны треугольника его площадь может быть как больше, так и меньше площади кольца.

**Ответ:** в).

**Решение.** Обозначим сторону треугольника за $a$, а радиус вписанной окружности за $r$. Поскольку треугольник правильный, радиус описанной окружности равен $2r$. Площадь треугольника равна $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, а площадь кольца равна

$$\pi(2r)^2 - \pi r^2 = 3\pi r^2 = 3\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{4}.$$

Поскольку $\sqrt{3} < \pi$, площадь треугольника меньше площади кольца.

**4.** Подпись банкира К. состоит из трех букв и трех петелек. На написание одной буквы требуется полсекунды, на написание одной петельки — 1 секунда; переходы от буквы к букве и от петельки к петельке времени не занимают, а переходы от буквы к петельке и от петельки к букве занимают полсекунды и одну секунду соответственно. Определите, какое максимальное количество подписей банкир успеет поставить за одну минуту, если известно, что а) его подпись самая медленная из возможных; б) переход от подписи к подписи требует полсекунды. Учитываются только полностью написанные подписи. (20 баллов).

**Ответ:** 6.

**Решение.** Сначала определим время, требуемое для самой подписи. Для наглядности сведения можно представить в виде таблицы:

| | к букве | к петельке |
|---|---|---|
| от буквы | 0 | 0,5 сек |
| от петельки | 1 сек | 0 |

Отметим два факта.

1) *Максимальное время на подпись реализуется, если буквы и петельки чередуются.* Действительно, если рядом оказались два одинаковых элемента, заменим один из них (не крайний) на противоположный. При этом может на полсекунды уменьшиться время на написание символов, но не менее чем на полсекунды увеличится время на переходы. За несколько таких действий мы добьемся чередования.

2) *Подпись с чередующимися символами начинается с петельки.* Действительно, в этом случае на переходы уйдет $3 \cdot 1 + 2 \cdot 0,5 = 4$ секунды, а если подпись начинается с буквы, то $3,5$ секунды.

Итак, максимальная по времени подпись требует $3 \cdot 0,5 + 3 \cdot 1 + 4 = 8,5$ секунд. Теперь нам осталось подсчитать, сколько раз блок «подпись, пауза» уместится в диапазоне $60,5$ секунд (фиктивные полсекунды мы добавили к минуте потому, что после последней подписи паузы нет). Длина блока равна 9 секунд, поэтому банкир успеет поставить

$$\left[\frac{60,5}{9}\right] = 6$$

полных подписей. Через $[x]$ обозначена целая часть $x$, то есть наибольшее целое число, не превосходящее $x$.

**5.** Когда Маша начала решать задачу по математике, табло электронных часов показывало $x$ часов $k$ минут. Когда же задача была решена, табло показывало $y$ часов $n$ минут. Маша заметила, что $k$ и $n$ состоят из одних и тех же цифр, которые все отличны от нуля. Каковы возможные значения $k$, если на решение задачи ушло $6k$ минут? (20 баллов).

**Ответ:** $k = 13$.

**Решение.** Пусть число минут $k = \overline{\mathrm{ab}} = 10a + b$, где $a$ и $b$ — целые числа от 1 до 5. По условию, либо $n = k$, либо $n = \overline{\mathrm{ba}} = 10b + a$. В первом случае имеем $k + 6k = k + 60i$, где $i = y - x$. Это дает $k = 10i$, что невозможно, поскольку $k$ не может оканчиваться на ноль. Рассмотрим второй случай:

$$(10a + b) + 6(10a + b) = (10b + a) + 60i \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 69a - 3b = 60i \quad \Leftrightarrow \quad 23a - b = 20i \quad \Leftrightarrow \quad 3a - b = 20(i - a).$$

Левая часть кратна 20 и может принимать значения только от $-2$ до 14. Поэтому она равна нулю. Тогда $b$ кратно 3, откуда $a = 1$ и $b = 3$. Таким образом, $k = 13$.
Проверим ответ:

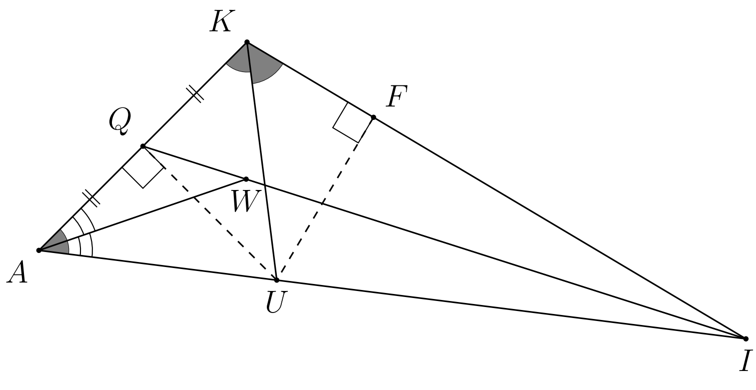
$$13 + 6 \cdot 13 = 91 = 31 + 60 \quad \Rightarrow \quad n = 31,\ y = x + 1.$$

**6.** В треугольнике $KIA$ угол $A$ в два раза меньше угла $K$. Пусть $IQ$ — медиана треугольника $KIA$, $AW$ — биссектриса треугольника $QIA$. Докажите, что угол $QWA$ меньше 45 градусов. (30 баллов).

**Решение.** Проведем в треугольнике $KIA$ биссектрису $KU$. Так как

$$\angle UKA = \tfrac{1}{2}\angle IKA = \angle KAU,$$

треугольник $KUA$ равнобедренный.




Значит, его медиана $UQ$ является также и высотой. Пусть $F$ — основание перпендикуляра, опущенного из $U$ на $KI$. Тогда $UF = UQ$, поскольку $KU$ — биссектриса угла $IKA$. Катет $UF$ прямоугольного треугольника $FIU$ меньше его гипотенузы $UI$. Значит, $QU < UI$, и по теореме синусов $\angle QIU < \angle UQI$.

Пусть $\angle QWA = \alpha$, $\angle QAW = \beta$. Угол $QWA$ внешний для треугольника $WIA$, откуда

$$\alpha = \angle WIA + \angle WAI = \angle WIA + \beta < \angle UQI + \beta.$$

Кроме того,

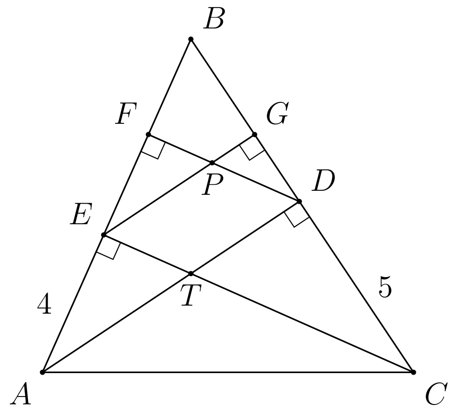
$$\angle UQI = 180^\circ - \angle AQU - \beta - \alpha = 90^\circ - \beta - \alpha.$$

Таким образом,

$$\alpha < \beta + (90^\circ - \beta - \alpha) = 90^\circ - \alpha \Rightarrow \alpha < 45^\circ.$$

**7.** В остроугольном треугольнике $ABC$ проведены высоты $AD$ и $CE$. Из точки $D$ опущен перпендикуляр $DF$ на сторону $AB$, а из точки $E$ — перпендикуляр $EG$ на сторону $BC$. Найдите отношение отрезков $FE : GD$, если $AE = 4$, $CD = 5$. (30 баллов).

**Ответ:** $5 : 4$.




**Решение.** Пусть $P$ — точка пересечения отрезков $GE$ и $DF$, а $T$ – точка пересечения $AD$ и $CE$. Прямоугольные треугольники $GPD$ и $FPE$ подобны по двум углам, откуда $FE : GD = PE : PD$. Аналогично получаем, что подобны треугольники $DTC$ и $ETA$ и справедливо равенство $DT : TE = CD : AE$. Но $DTEP$ – параллелограмм, так как его противоположные стороны лежат на перпендикулярах, проведенных к одной стороне $\triangle ABC$, а значит, эти стороны параллельны. Поэтому

$$FE : GD = PE : DP = DT : TE = CD : AE = 5 : 4.$$

**8.** $N$ абитуриентов подают документы в 23 вуза так, что каждый из них подает документы ровно в пять вузов. При этом для любых двух абитуриентов найдется не более трех вузов, в которые они оба подали документы. Докажите, что $N$ не превышает 2020. (40 баллов).

**Первое решение.** Предположим, что 2020 абитуриентов могут таким образом подать документы. Для каждого абитуриента выпишем пять четверок вузов, в которые этот абитуриент подал документы. Заметим, что все выписанные четверки различны, так как никакие два абитуриента не подали документы в четыре общих вуза. Значит, мы выписали хотя бы $2020 \cdot 5 = 10\,100$ четверок. Но общее количество способов выбрать четыре вуза из 23 равно

$$C_{23}^4 = \frac{23!}{4! \cdot 19!} = \frac{23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 8855 < 10\,100,$$

что и дает противоречие.

**Второе решение.** Скажем, что абитуриент *захватывает* тройку вузов, если он подал документы в каждый из них. Любой абитуриент захватывает $C_5^3 = 10$ троек, а все абитуриенты в сумме захватывают $10N$ троек (они могут повторяться). Общее число троек равно $C_{23}^3 = 1771$.

Предположим, что $N \geqslant 2020$. Тогда на одну тройку вузов приходится в среднем

$$\frac{10N}{1771} \geqslant \frac{20200}{1771} > 11$$

абитуриентов, которые ее захватили. Значит, найдется тройка, захваченная не менее чем 12 студентами. Каждый из них подал документы еще в пару вузов, и по условию эти пары не пересекаются. Поэтому общее число вузов не меньше, чем $12 \cdot 2 + 3 = 27$, что невозможно.

**9.** Назовем букет гармоничным, если он состоит из трех цветков и длина каждого из цветков превышает половину длины любого другого цветка в букете хотя бы на 7 сантиметров. У флориста имеется 39 различных цветков, имеющих длины 12, 13, ..., 50 сантиметров. Какое наибольшее количество непересекающихся гармоничных букетов сможет составить флорист? (40 баллов).

**Ответ:** 11.

**Решение.** Рассмотрим гармоничный букет, в котором самый короткий цветок имеет длину $m$. Тогда самый длинный цветок не короче $m + 2$ сантиметров. По условию

$$m \geqslant 7 + \frac{m+2}{2} \Rightarrow m \geqslant 16.$$

Таким образом, в гармоничных букетах не могут встречаться цветки длиной $12, 13, 14, 15$ сантиметров. Из оставшихся 35 цветков можно составить не более 11 букетов.

Осталось привести пример с 11 букетами: $(16, 17, 18)$, $(19, 20, 21)$, ..., $(46, 47, 48)$.

**10.** Робот умеет выполнять четыре операции с целыми числами: умножать на 2, делить на 2 (только четные числа), прибавлять 111 и вычитать 111. Может ли робот из числа 925 получить следующие числа: 295, 296, 259, 529, 592? (40 баллов).

**Ответ:** нет, да, да, нет, да.

**Решение.** Исходное число 925 делится на 37. Заметим, что все операции робота сохраняют это свойство. Следовательно, числа 295 и 529, которые не делятся на 37, не могут быть получены роботом. Для остальных приведем примеры последовательности действий робота (решение не единственно!):

$$(925 + 111) : 2 - 111 - 111 = 296,$$

$$((925 - 111) : 2 + 111) : 2 = 259,$$

$$925 - 111 - 111 - 111 = 592.$$

# Олимпиада школьников СПбГУ по математике
# Примеры заданий отборочного этапа
# 2019/2020 учебный год

## Задания для 6–9 классов

**1.** Назовем число *палиндромом*, если оно читается справа налево так же, как и слева направо. Например, число 123321 — палиндром, а число 122 — нет. Сколько существует четырехзначных палиндромов, кратных 5? (10 баллов).

а) больше 20; б) меньше 20; в) не меньше 20; г) не больше 20;
д) ни один из указанных ответов не является верным.

**Ответ:** б) и г).

**Решение.** Найдем количество палиндромов. Заметим, что число кратно 5 тогда и только тогда, когда оно оканчивается на 5 или на 0. Второй вариант исключен, иначе старшая цифра тоже была бы нулем. Значит, палиндром начинается и заканчивается на 5. Таким образом, нам нужны числа вида $\overline{5aa5}$, где $a$ — любая цифра. Легко заметить, что таких чисел ровно 10.

**2.** На соревнованиях по перетягиванию каната в Волшебной Стране команда из 7 жевунов всегда побеждает команду из 8 мигунов. Результаты встреч каких команд можно предсказать однозначно, если считается, что все жевуны между собой равносильны и все мигуны тоже равносильны между собой? (10 баллов).

а) 6 жевунов против 7 мигунов; б) 8 жевунов против 9 мигунов;
в) 10 мигунов против 9 жевунов; г) 9 жевунов против 11 мигунов;
д) 16 мигунов против 14 жевунов.

**Ответ:** б), в) и д).

**Первое решение.** Введем обозначения: $z$ — сила одного жевуна, $m$ — сила одного мигуна. Справедливы следующие неравенства:

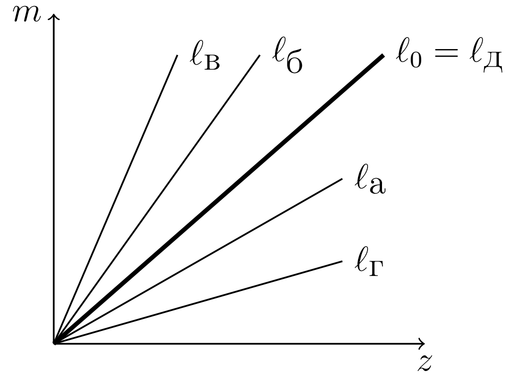
$$8z > 8 \cdot \frac{8m}{7} > 9m,$$
$$10m < 10 \cdot \frac{7z}{8} < 9z,$$
$$16m < 16 \cdot \frac{7z}{8} = 14z.$$

Значит, ответы б), в) и д) правильные. Покажем, почему ответы а) и г) не могут считаться правильными: возьмем пару $z = 15$ и $m = 13$ — для нее исходное утверждение верно (команда из 7 жевунов, обладающая суммарной силой $7 \cdot 15 = 105$, победит команду из 8 мигунов, обладающую суммарной силой $8 \cdot 13 = 104$) и при этом команда из 7 мигунов победит команду из 6 жевунов, а команда из 11 мигунов победит команду из 9 жевунов; однако, для пары $z = 15$ и $m = 11$ исходное утверждение также верно, но исходы двух других встреч противоположны.

**Второе решение.** Пусть $z$ — сила одного жевуна, $m$ — сила одного мигуна; $z > 0$, $m > 0$. Множество точек плоскости, удовлетворяющих условию $8m < 7z$, — это точки, лежащие выше оси $z$, но строго ниже прямой $\ell_0$, задаваемой уравнением $m = \frac{7}{8}z$.

Пусть у нас $x$ жевунов и $y$ мигунов. Результат можно предсказать тогда и только тогда, когда прямая с угловым коэффициентом $x/y$ лежит не ниже $\ell_0$, то есть $x/y \geqslant 7/8$ или

$8x \geqslant 7y$. Например, в пункте б) мы получим верное неравенство $8 \cdot 8 \geqslant 7 \cdot 9$, а в пункте а) — неверное неравенство $8 \cdot 6 \geqslant 7 \cdot 7$.




Взаимное расположение прямой $\ell_0$ и прямых с угловыми коэффициентами, указанными в вариантах ответов, приведено на рисунке.

**3.** Подпись банкира К. состоит из трех букв и трех петелек. На написание одной буквы требуется полсекунды, на написание одной петельки — 1 секунда; переходы от буквы к букве и от петельки к петельке времени не занимают, а переходы от буквы к петельке и от петельки к букве занимают полсекунды и одну секунду соответственно. Определите минимальное время, необходимое банкиру для подписи. (20 баллов).

**Ответ:** 5 секунд.

**Решение.** Поскольку требуется время самой быстрой подписи, то необходимо минимизировать длительность переходов между элементами (очевидно, что время, требуемое на написание самих элементов, сократить невозможно). Для наглядности данные можно представить в виде таблицы:

| | к букве | к петельке |
|---|---|---|
| от буквы | 0 | 0,5 сек |
| от петельки | 1 сек | 0 |

Видим, что и буквы, и петельки должны стоять подряд. Таким образом, подпись имеет вид либо «три буквы, потом три петельки», либо «три петельки, потом три буквы». Но первый вариант короче второго на полсекунды, и его длительность равна

$$3 \cdot 0,5 + 0,5 + 3 \cdot 1 = 5 \text{ секунд.}$$

**4.** Двоечник Вася для тренировки деления в столбик ищет 2020-й знак после запятой для дроби 1/13. Какая цифра должна получиться у Васи? (20 баллов).

**Ответ:** 9.

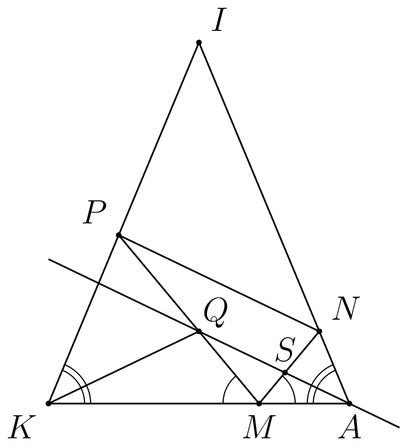
**Решение.** Десятичное представление дроби 1/13 имеет вид $0,(076923)$, а

$$2020 = 6 \times 336 + 4.$$

Соответственно, 2020-й знак после запятой для дроби $1/13$ — это 9.

**5.** $KIA$ — равнобедренный треугольник с основанием $KA$. На сторонах $KA$, $AI$ и $IK$ выбраны точки $M$, $N$ и $P$ соответственно так, что равны углы $PMK$ и $NMA$. Через вершину $A$ проведена прямая, параллельная $PN$, $Q$ — точка пересечения этой прямой и отрезка $MP$. Докажите, что $QK = QA$. (30 баллов).

**Решение.**




Пусть $S$ — точка пересечения $MN$ и $AQ$. Так как $QS \| PN$, то

$$MN/MP = MS/MQ.$$

Треугольники $MAN$ и $MPK$ подобны (по двум углам), следовательно,

$$MN/MP = MA/MK.$$

Таким образом, треугольники $MAS$ и $MKQ$ подобны по по углу и пропорциональным сторонам. Отсюда получаем, что $\angle MKQ = \angle MAQ$, т.е. $\triangle KAQ$ равнобедренный с основанием $KA$, откуда $QA = QK$.

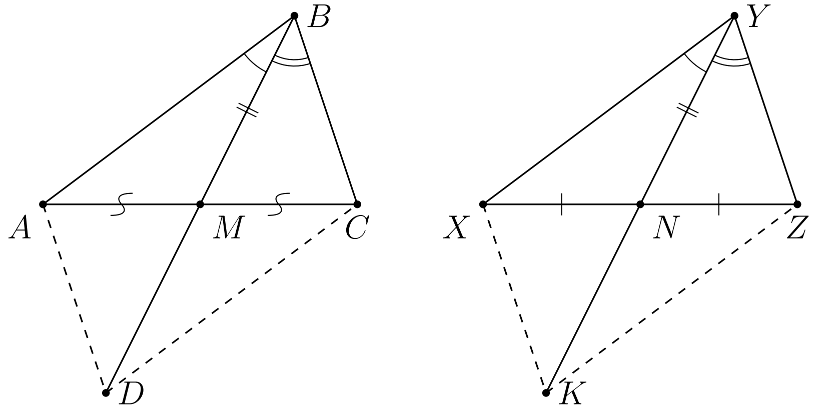
**6.** Двоечник Вася утверждает, что верен следующий признак равенства треугольников, формулировку которого он увидел во сне: если у треугольников $ABC$ и $XYZ$ равны медианы $BM$ и $YN$, а также $\angle ABM = \angle XYN$ и $\angle CBM = \angle ZYN$, то треугольники $ABC$ и $XYZ$ равны. Отличник Петя считает, что этот признак равенства ошибочен. Выясните, кто из них прав. (30 баллов).

**Ответ:** прав Вася.

**Решение.** Докажем, что треугольники из Васиного сна действительно равны. Достроим треугольники до параллелограммов $ABCD$ и $XYZK$. Тогда

$$BD = 2BM = 2YN = YK \quad \text{и} \quad \angle ADB = \angle DBC = \angle KYZ = \angle XKY.$$

Значит, треугольники $ABD$ и $XYK$ равны по стороне и двум углам. Поэтому $AB = XY$ и $BC = AD = XK = YZ$.




Итак, треугольники $ABC$ и $XYZ$ равны по первому признаку ($AB = XY$, $BC = YZ$, $\angle ABC = \angle XYZ$).

**7.** Трехцветный прямоугольный пазл размера $25 \times 50$ состоит из квадратных элементов единичной площади. Каждый элемент имеет либо белый, либо синий, либо красный цвет. Будем говорить, что квадраты граничат друг с другом, если у них есть хотя бы одна общая точка. (Таким образом, любой квадрат может граничить с не более чем 8 соседями). И белые, и красные элементы могут граничить только с синими. Определите, какое максимальное количество белых элементов может быть в пазле? (40 баллов).

**Ответ:** 324.

**Решение.** Белые и красные детали по граничным свойствам одинаковы — они могут граничить только с синими. Заметим, что в квадрате $2 \times 2$ может быть не более 1 белой/красной детали. Следовательно, в области $24 \times 50$ может быть не более 300 белых/красных деталей. Также в прямоугольнике $1 \times 2$ может быть не более 1 белой/красной детали. Отсюда получаем, что в полосе $1 \times 50$ может быть не более 25 белых/красных. Поэтому во всей области $25 \times 50$ может быть не более $300 + 25 = 325$ белых/красных деталей.

Поскольку пазл трехцветный, то в нем должна быть деталь каждого цвета, т.е. красная деталь должна быть хотя бы одна. Следовательно, белых может быть не более 324.

Приведем пример, как можно расставить 324 белых детали, удовлетворяя граничным условиям. Пронумеруем строки от 1 до 25 и столбцы от 1 до 50. Поставим белые на пересечении нечетных строк и нечетных столбцов, кроме первого пересечения (первой строки и первого столбца); красный элемент поставим на пересечении первой строки и первого столбца. Всё остальное заполним синими элементами.

**8.** Решите в целых числах уравнение $(a + 1)(b - 1)(a + b) = 2020$. (40 баллов).

**Ответ:** Решений нет.

**Решение.** Обозначим $m = a + 1$, $n = b - 1$, где $m$ и $n$ тоже являются целыми числами, тогда $a + b = m + n$ и необходимо решить уравнение

$$m \cdot n \cdot (m + n) = 2020.$$

Заметим, что $2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$.

Предположим, что у нас есть два четных множителя; тогда третий тоже будет четным. Но это невозможно, поскольку 2020 не делится на 8. Значит, у нас один множитель четный и два нечетных.

Один из нечетных множителей равен 1, поскольку $101 \pm 5 \neq 4$. Тогда два других множителя различаются на 1. Но один из них не меньше 101, а другой не превосходит 20, поэтому так быть не может.