САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Олимпиада школьников СПбГУ по математике

Задания заключительного этапа

2019/2020 учебный год

Олимпиада школьников СПбГУ по математике

Заключительный этап. 2019/2020 учебный год

Задания для 10–11 классов

(Правильное и полное решение каждой задачи оценивается в 20 баллов)

Вариант 1

1.1. Какое наибольшее количество натуральных чисел от 1 до 2020 можно покрасить в синий цвет так, чтобы для любого синего n число $20n$ не было синим?

Ответ: 1924.

Решение. Рассмотрим набор чисел

$$6, 7, \ldots, 100, 101;\ 120, 140, \ldots, 2000, 2020.$$

Разобьем их на пары вида $(n, 20n)$, где $n \in \{6, 7, \ldots, 101\}$. По условию в каждой паре хотя бы одно из чисел не покрашено, а всего мы имеем 96 таких пар. Таким образом, количество синих чисел не превосходит $2020 - 96 = 1924$.

Покажем, что полученная оценка реализуется. Покрасим в синий цвет числа $1, 2, 3, 4, 5$, а также все числа, бо́льшие 101. Мы получим

$$2020 - 101 + 5 = 1924$$

синих числа. Пусть число n — синее. Проверим что $20n$ не покрашено. При $n \leqslant 5$ это очевидно, а если $n > 101$, то $20n > 2020$.

1.2. Даны числа $x, y, z \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \sqrt[3]{\sin x \cos y} + \sqrt[3]{\sin y \cos z} + \sqrt[3]{\sin z \cos x}\,.$$

Ответ: $\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$.

Первое решение. Воспользуемся неравенством

$$(a+b+c)^3 \leqslant 9\left(a^3+b^3+c^3\right) \quad \text{при} \quad a, b, c \geqslant 0.$$

Тогда с учетом неравенства Коши для средних

$$A^3 \leqslant 9\big(\sin x \cos y + \sin y \cos z + \sin z \cos x\big) \leqslant$$
$$\leqslant \tfrac{9}{2}\big(\sin^2 x + \cos^2 y + \sin^2 y + \cos^2 z + \sin^2 z + \cos^2 x\big) = \tfrac{27}{2},$$

откуда $A \leqslant \frac{3}{\sqrt[3]{2}}$. Равенство реализуется при $x = y = z = \frac{\pi}{4}$.

Второе решение. Заметим, что для любого t

$$\sin t + \cos t = \sqrt{2} \cdot \sin\big(t + \tfrac{\pi}{4}\big) \leqslant \sqrt{2}.$$

В силу неравенства Коши для средних

$$\frac{3}{\sqrt[6]{2}} \cdot \sqrt[3]{\sin u \cdot \cos v} = 3\sqrt[3]{\sin u \cdot \cos v \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} \leqslant \sin u + \cos v + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

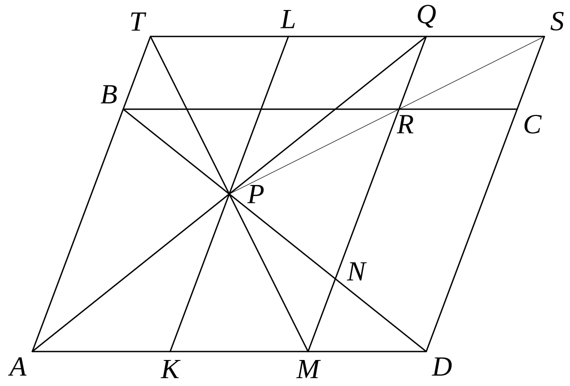
Применим эту оценку при $(u, v) \in \big\{(x, y), (y, z), (z, x)\big\}$ и затем сложим получившиеся неравенства. Тогда

$$\frac{3A}{\sqrt[6]{2}} \leqslant \sin x + \cos x + \sin y + \cos y + \sin z + \cos z + \frac{3\sqrt{2}}{2} \leqslant 3\sqrt{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{2},$$

откуда $A \leqslant \frac{3}{\sqrt[3]{2}}$. Равенство реализуется при $x = y = z = \frac{\pi}{4}$.

1.3. На диагонали BD параллелограмма $ABCD$ отмечена точка P, не лежащая на диагонали AC. На луче AP взята такая точка Q, что $AP = PQ$. Через точку Q провели прямую, параллельную стороне AB, она пересекла сторону BC в точке R. Затем через точку Q провели прямую, параллельную стороне AD, она пересекла прямую CD в точке S. Найдите угол PRS.

Ответ: $180°$.



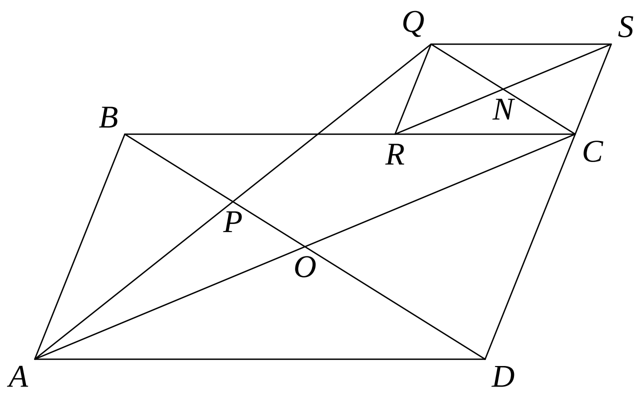
Первое решение. Пусть T — точка пересечения прямых AB и SQ, а прямая QR пересекает отрезки AD и BD в точках M и N соответственно. Так как $AMQT$ — параллелограмм, отрезок TM проходит через точку P и делится в ней пополам. Значит, $\triangle TBP = \triangle MNP$, откуда

$$MN = TB = QR.$$

Обозначим через K и L середины отрезков AM и TQ соответственно. Треугольники APK и QPL равны по стороне и двум углам, что дает $PK = LP$. В силу подобия треугольников DKP и DMN

$$\frac{LP}{LS} = \frac{PK}{KD} = \frac{MN}{MD} = \frac{QR}{QS}.$$

Поэтому треугольники PLS и RQS подобны, и мы получаем $\angle LSP = \angle QSR$. Таким образом, точки S, R и P лежат на одной прямой.



Второе решение. Пусть O и N — точки пересечения диагоналей параллелограммов $ABCD$ и $RQSC$ соответственно. Так как $AO = OC$, отрезок OP — средняя линия треугольника AQC. Поэтому

$$OP \parallel CQ \quad \text{и} \quad OP = \tfrac{1}{2}CQ = CN.$$

Тогда четырехугольник $OPNC$ является параллелограммом, откуда $PN \parallel OC$. Треугольники ABD и RQC подобны, поскольку их соответствующие стороны параллельны. Следовательно,

$$\frac{CD}{AD} = \frac{AB}{AD} = \frac{RQ}{RC} = \frac{SC}{RC}.$$

Поэтому треугольники ADC и RCS также подобны и, значит, $\angle DAC = \angle CRS$. Таким образом, прямая RS параллельна AC, а по доказанному выше она параллельна и PN. Поскольку у прямых RS и PN есть общая точка N, они совпадают, откуда $\angle PRS = 180°$.

1.4. В восьмеричной системе $x = 344\,344\,\ldots\,344$, где блок 344 повторяется n раз. Восьмеричное число y получается из x некоторой перестановкой цифр. Оказалось, что восьмеричная запись $x \cdot y$ равна $20\,20\ldots20$. При каких n это возможно?

Ответ: $n = 3$.

Решение. Договоримся восьмеричные числа писать в скобках, чтобы отличать их от десятичных. Запись xy содержит $3n$ блоков вида 20, поэтому

$$xy = 16 \cdot \bigl(1 + 64 + 64^2 + \ldots + 64^{3n-1}\bigr) = 16 \cdot \frac{64^{3n}-1}{63} = 16 \cdot \frac{\bigl(8^{3n}-1\bigr)\bigl(8^{3n}+1\bigr)}{7 \cdot 9}.$$

Кроме того, $(344) = 228$, откуда

$$x = 228 \cdot \bigl(1 + 8^3 + 8^6 + \ldots + 8^{3(n-1)}\bigr) = 228 \cdot \frac{8^{3n}-1}{511} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 19}{7 \cdot 73} \cdot \bigl(8^{3n}-1\bigr).$$

Поделив первое равенство на второе, мы получим

$$y = \frac{xy}{x} = \frac{4 \cdot 73}{27 \cdot 19} \cdot \bigl(8^{3n}+1\bigr) = \frac{292 \cdot \bigl(8^{3n}+1\bigr)}{513}.$$

Так как 292 и 513 взаимно просты, на 513 должно делиться число $8^{3n}+1$, поэтому n нечетно. Заметим, что

$$\frac{8^{3n}+1}{513} = \bigl(8^{3(n-1)} - 8^{3(n-2)}\bigr) + \ldots + \bigl(8^6 - 8^3\bigr) + 1 = (777000\ldots777000\,777001),$$

где блок 777 повторяется $\frac{n-1}{2}$ раз. Поскольку $292 = (444)$ и

$$(777) \cdot (444) = (1000) \cdot (444) - (444) = (444\,000) - (444) = (443334),$$

мы получаем

$$y = (443334\ldots443334\,444),$$

где блок из троек повторяется $\frac{n-1}{2}$ раз. Таким образом, в восьмеричную запись y входит $\frac{3}{2}\,(n-1)$ троек. С другой стороны, запись числа x содержит n троек. Поэтому $\frac{3}{2}\,(n-1) = n$, откуда $n = 3$. При $n = 3$ нам подходит число $y = (443334444)$.

1.5. В школе 2019 учеников. В один прекрасный день некоторые из них поздоровались друг с другом за руку, причем из любой тройки учеников хотя бы двое не здоровались. При каком наибольшем k могло оказаться так, что для любого n, не превосходящего k, найдется школьник, поздоровавшийся ровно с n учениками?

Ответ: $k = 1346$.

Решение. Предположим, что школьник A поздоровался с учениками $B_1, \ldots, B_k$. По условию ни при каких i и j школьники B_i и B_j не здоровались друг с другом. Рассмотрим всех учеников, которые поздоровались менее k раз, и выберем среди них того, кто здоровался не меньше других. Будем для определенности считать, что это B_1 и что он поздоровался m раз. Тогда кроме A школьник B_1 поздоровался еще с некоторыми учениками $C_1, C_2, \ldots, C_{m-1}$. Значит, в школе не менее $(k+1)+(m-1) = k+m$ учеников.

С другой стороны, по условию есть ученики, поздоровавшиеся ровно с

$$m+1, m+2, \ldots, k-1$$

школьниками, и они не находятся среди $A, B_1, \ldots, B_k$. Поэтому учеников в школе не меньше, чем

$$(k+1)+(k-1-m) = 2k-m.$$

Таким образом, справедливы неравенства

$$2019 \geqslant k+m, \quad 2019 \geqslant 2k-m.$$

Складывая их, мы получим

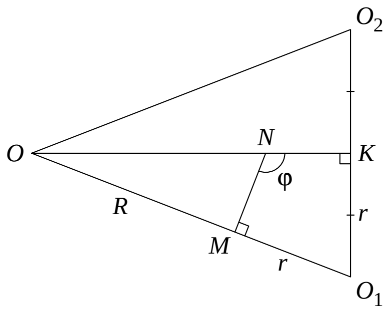
$$4038 \geqslant (k+m)+(2k-m) = 3k \Longrightarrow k \leqslant \tfrac{4038}{3} = 1346.$$

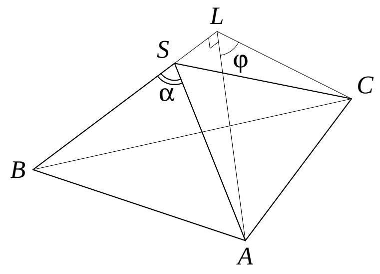
Покажем теперь, что $k = 1346$ реализуется. Разобьем всех учеников на две группы: $A_1, \ldots, A_{673}$ и $B_1, \ldots, B_{1346}$. Пусть A_i поздоровался с B_j при $i \leqslant j$, а остальные пары школьников не здоровались друг с другом. Проверим, что такой пример нам подходит. Первое условие задачи выполнено, поскольку в любой тройке учеников найдутся двое из одной группы, а они между собой не здоровались. Возьмем $n \in \{1, \ldots, 1346\}$. Если $n > 673$, то число $i = 1347-n$ не превосходит 673. Тогда ученик A_i поздоровался ровно с $1346-i+1 = n$ школьниками. Если же $n \leqslant 673$, то ученик B_n поздоровался со школьниками $A_1, \ldots, A_n$, которых ровно n. Таким образом, и второе условие задачи выполнено.

1.6. Две правильные треугольные пирамиды имеют общую боковую грань и не имеют других общих точек. В пирамиды вписаны шары радиуса r. Третий шар радиуса R касается внешним образом обеих пирамид и вписанных в них шаров. Найдите плоский угол при вершине пирамид, если $R : r = 2 : 1$.

Ответ: $\pi - \arccos\frac{1}{4}$.

Решение. Пусть $SABC$ — первая пирамида, BSC — ее общая боковая грань со второй, O_1 и O_2 — центры шаров, вписанных в пирамиды, O — центр внешнего шара. Ввиду равенства пирамид вписанные в них шары касаются грани BSC в одной точке K. Так





как $O_1K \perp BSC$ и $O_2K \perp BSC$, точка K лежит на отрезке O_1O_2, причем $O_1O_2 = 2r$. Пусть M — точка касания с гранью ASB шара, вписанного в первую пирамиду. В этой же точке касается ASB и внешний шар. Поэтому точка M лежит на отрезке OO_1, причем $OO_1 = r + R$. Аналогично получается, что $OO_2 = r + R$. Выберем точку N на отрезке OK так, что $NM \perp OO_1$, и положим $\varphi = \angle MNK$ (см. левый рисунок). Тогда

$$O_1K = OO_1 \cdot \cos\angle OO_1K \iff r = (r+R)\cdot\cos(\pi - \varphi) \iff R = -r\left(\frac{1}{\cos\varphi} + 1\right).$$

По условию $R = 2r$, откуда $\cos\varphi = -\frac{1}{3}$.

Покажем, что φ — угол между гранями ASB и BSC. Действительно, O_1K и O_1M — радиусы шара, вписанного в первую пирамиду, откуда $O_1M \perp ASB$ и $O_1K \perp BSC$. Значит, $BS \perp MNK$. Кроме того, прямая MN лежит в плоскости ASB, а KN — в плоскости BSC.

Пусть $\alpha = \angle ASB$, $a = AB$. Опустим из точек A и C перпендикуляры на ребро BS. Они придут в одну точку L, так как треугольники ASB и BSC равны. По доказанному $\angle ALC = \varphi$. Заметим, что

$$AL^2 = \bigl(AB \cdot \sin\angle ABL\bigr)^2 = a^2\sin^2\bigl(\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{\alpha}{2}\bigr) = a^2\cos^2\tfrac{\alpha}{2} = \frac{a^2\,(1+\cos\alpha)}{2}.$$

Тогда по теореме косинусов для треугольника ALC

$$-\frac{1}{3} = \cos\varphi = \frac{2AL^2 - AC^2}{2AL^2} = \frac{a^2\,(1+\cos\alpha) - a^2}{a^2\,(1+\cos\alpha)} =$$
$$= \frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha} \iff \cos\alpha = -\frac{1}{4} \implies \alpha = \arccos\left(-\frac{1}{4}\right) = \pi - \arccos\frac{1}{4}.$$

Вариант 2

2.1. Какое наибольшее количество натуральных чисел от 1 до 2100 можно покрасить в синий цвет так, чтобы для любого синего n число $25n$ не было синим?

Ответ: 2019.

Решение. Рассмотрим набор чисел

$$4, 5, \ldots, 83, 84;\ 100, 125, \ldots, 2075, 2100.$$

Разобьем их на пары вида $(n, 25n)$, где $n \in \{4, 5, \ldots, 84\}$. По условию в каждой паре хотя бы одно из чисел не покрашено, а всего мы имеем 81 такую пару. Таким образом, количество синих чисел не превосходит $2100 - 81 = 2019$.

Покажем, что полученная оценка реализуется. Покрасим в синий цвет числа $1, 2, 3$, а также все числа, бо́льшие 84. Мы получим

$$2100 - 84 + 3 = 2019$$

синих числа. Пусть число n — синее. Проверим что $25n$ не покрашено. При $n \leqslant 3$ это очевидно, а если $n > 84$, то $25n > 2100$.

2.2. Даны числа $x, y, z \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Найдите минимальное значение выражения

$$A = \frac{1}{(\sin^2 x + \cos^2 y)^3} + \frac{1}{(\sin^2 y + \cos^2 z)^3} + \frac{1}{(\sin^2 z + \cos^2 x)^3}\,.$$

Ответ: 3.

Решение. Воспользуемся неравенством

$$a^3 + b^3 + c^3 \geqslant \tfrac{1}{9}\,(a + b + c)^3 \quad \text{при} \quad a, b, c \geqslant 0.$$

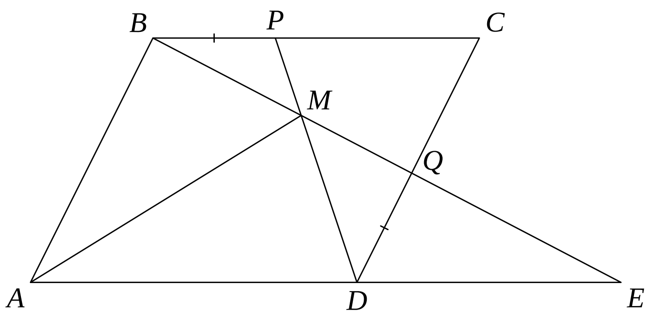
Тогда с учетом неравенства Коши для среднего гармонического и среднего арифметического

$$A \geqslant \frac{1}{9}\left(\frac{1}{\sin^2 x + \cos^2 y} + \frac{1}{\sin^2 y + \cos^2 z} + \frac{1}{\sin^2 z + \cos^2 x}\right)^3 \geqslant$$
$$\geqslant \frac{81}{\left(\sin^2 x + \cos^2 y + \sin^2 y + \cos^2 z + \sin^2 z + \cos^2 x\right)^3} = 3.$$

Равенство реализуется при $x = y = z = \frac{\pi}{4}$.

2.3. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ соответственно отмечены такие точки P и Q, что $BP = DQ$. Отрезки BQ и DP пересекаются в точке M. Какой из углов BAM и DAM больше?

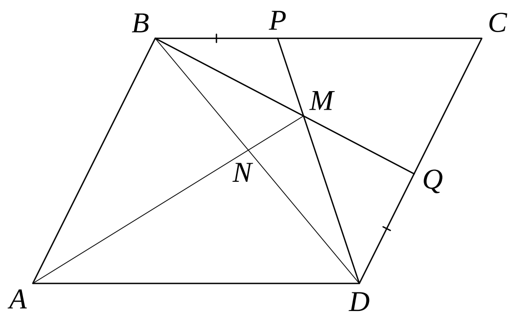
Ответ: углы равны.



Первое решение. Пусть E — точка пересечения прямых AD и BQ. Заметим, что подобны треугольники BPM и EDM, а также треугольники DQE и ABE. Поэтому

$$\frac{BM}{ME} = \frac{BP}{DE} = \frac{DQ}{DE} = \frac{AB}{AE}\,.$$

Значит, AM — биссектриса треугольника ABE, откуда $\angle BAM = \angle DAM$.



Второе решение. Пусть N — точка пересечения прямых AM и BD. Отрезки BN и DN относятся так же, как высоты треугольников ABM и ADM, опущенные на AM. Тогда

$$\frac{BN}{DN} = \frac{S_{\triangle BAM}}{S_{\triangle DAM}}.$$

Заметим, что

$$\frac{S_{\triangle BAM}}{S_{\triangle DQM}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AB \cdot BM \cdot \sin \angle ABM}{\frac{1}{2} \cdot DQ \cdot QM \cdot \sin \angle DQM} = \frac{AB \cdot BM}{DQ \cdot QM}$$

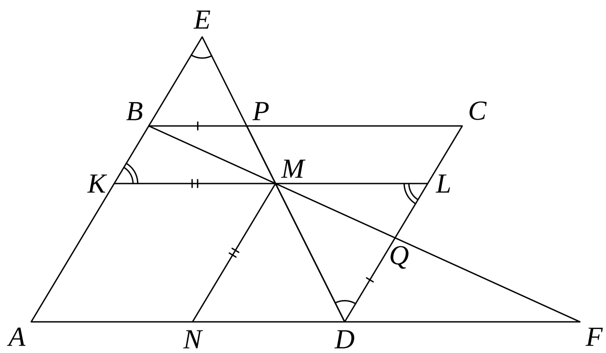
и, аналогично,

$$\frac{S_{\triangle DQM}}{S_{\triangle BPM}} = \frac{DM \cdot QM}{BM \cdot PM}, \qquad \frac{S_{\triangle BPM}}{S_{\triangle DAM}} = \frac{BP \cdot PM}{AD \cdot DM}.$$

Перемножая эти три равенства и учитывая условие $BP = DQ$, мы получим

$$\frac{BN}{DN} = \frac{S_{\triangle BAM}}{S_{\triangle DAM}} = \frac{AB \cdot BP}{AD \cdot DQ} = \frac{AB}{AD}.$$

Таким образом, AN — биссектриса треугольника BAD, откуда $\angle BAM = \angle DAM$.



Третье решение. Пусть прямые AB и DM пересекаются в точке E, а AD и BM — в точке F. Проведем через точку M прямую KL параллельно AD и прямую MN параллельно AB (см. рисунок). Заметим, что по двум углам подобны треугольники BKM и QLM, а также треугольники BEM и QDM. Тогда

$$\frac{KB}{BE} = \frac{KB}{BM} \cdot \frac{BM}{BE} = \frac{QL}{MQ} \cdot \frac{MQ}{DQ} = \frac{QL}{DQ}.$$

Кроме того, из подобия треугольников DQF и LQM

$$\frac{QL}{DQ} = \frac{ML}{DF} = \frac{ND}{DF}.$$

Поэтому $KB : BE = ND : DF$, откуда $KE : BE = NF : DF$ и

$$\frac{KM}{BP} = \frac{KE}{BE} = \frac{NF}{DF} = \frac{NM}{DQ}.$$

Поскольку $BP = DQ$, мы получаем $KM = NM$, то есть $AKMN$ — ромб. Значит, AM — биссектриса угла BAD.

2.4. В шестнадцатеричной системе $x = 788\,788\,\ldots\,788$, где блок 788 повторяется n раз. Шестнадцатеричное число y получается из x некоторой перестановкой цифр. Оказалось, что шестнадцатеричная запись $x \cdot y$ равна $40\,40\ldots40$. При каких n это возможно?

Ответ: $n = 3$.

Решение. Договоримся шестнадцатеричные числа писать в скобках, чтобы отличать их от десятичных. Запись xy содержит $3n$ блоков вида 40, поэтому

$$xy = 64 \cdot \left(1 + 256 + 256^2 + \ldots + 256^{3n-1}\right) = 64 \cdot \frac{256^{3n} - 1}{255} = 64 \cdot \frac{\left(16^{3n} - 1\right)\left(16^{3n} + 1\right)}{3 \cdot 5 \cdot 17}.$$

Кроме того, $(788) = 1928$, откуда

$$x = 1928 \cdot \left(1 + 16^3 + 16^6 + \ldots + 16^{3(n-1)}\right) = 1928 \cdot \frac{16^{3n} - 1}{4095} = \frac{8 \cdot 241}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 13} \cdot \left(16^{3n} - 1\right).$$

Поделив первое равенство на второе, мы получим

$$y = \frac{xy}{x} = \frac{3 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 13}{17 \cdot 241} \cdot \left(16^{3n} + 1\right) = \frac{2184 \cdot \left(16^{3n} + 1\right)}{4097}.$$

Так как 2184 и 4097 взаимно просты, на 4097 должно делиться число $16^{3n} + 1$, поэтому n нечетно. Заметим, что

$$\frac{16^{3n} + 1}{4097} = \left(16^{3(n-1)} - 16^{3(n-2)}\right) + \ldots + \left(16^6 - 16^3\right) + 1 = (\mathrm{FFF000}\ldots\mathrm{FFF000}\,\mathrm{FFF001}),$$

где блок FFF повторяется $\frac{n-1}{2}$ раз. Поскольку $2184 = (888)$ и

$$(\mathrm{FFF}) \cdot (888) = (1000) \cdot (888) - (888) = (888\,000) - (888) = (887778),$$

мы получаем

$$y = (887778\ldots887778\,888),$$

где блок из семерок повторяется $\frac{n-1}{2}$ раз. Таким образом, в шестнадцатеричную запись y входит $\frac{3}{2}(n-1)$ семерок. С другой стороны, запись числа x содержит n семерок. Поэтому $\frac{3}{2}(n-1) = n$, откуда $n = 3$. При $n = 3$ нам подходит число $y = (887778888)$.

2.5. В школе 2020 учеников. В один прекрасный день некоторые из них поздоровались друг с другом за руку, причем из любой тройки учеников хотя бы двое не здоровались. При каком наибольшем k могло оказаться так, что для любого нечетного n, не превосходящего $2k - 1$, найдется школьник, поздоровавшийся ровно с n учениками?

Ответ: $k = 758$.

Решение. Предположим, что школьник A поздоровался с учениками $B_1, \ldots, B_{2k-1}$. По условию ни при каких i и j школьники B_i и B_j не здоровались друг с другом. Рассмотрим всех учеников, которые поздоровались нечетное число раз, меньшее $2k-1$. Выберем среди них того, кто здоровался не меньше других. Будем для определенности считать, что это B_1 и что он поздоровался $2m - 1$ раз. Тогда кроме A школьник B_1 поздоровался еще с некоторыми учениками $C_1, C_2, \ldots, C_{2m-2}$. Значит, в школе не менее

$$2k + (2m-2) = 2k + 2m - 2$$

учеников.

С другой стороны, по условию есть ученики, поздоровавшиеся ровно с

$$2m+1, 2m+3, \ldots, 2k-1$$

школьниками, и они не находятся среди $B_1, \ldots, B_{2k-1}$. Поэтому учеников в школе не меньше, чем

$$(2k-1) + (k-m) = 3k - m - 1.$$

Таким образом, справедливы неравенства

$$2020 \geqslant 2k + 2m - 2, \quad 2020 \geqslant 3k - m - 1.$$

Домножим второе неравенство на 2 и сложим его с первым. Мы получим

$$6060 \geqslant (2k + 2m - 2) + (6k - 2m - 2) = 8k - 4 \Longrightarrow k \leqslant \tfrac{6064}{8} = 758.$$

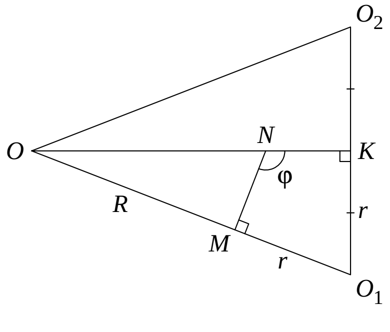
Покажем теперь, что реализуется $k = 758$, то есть $2k-1 = 1515$. Разобьем всех учеников на две группы: $A_1, \ldots, A_{505}$ и $B_1, \ldots, B_{1515}$. Пусть A_i поздоровался с B_j при $j \geqslant 2i-1$, а остальные пары школьников не здоровались друг с другом. Проверим, что такой пример нам подходит. Первое условие задачи выполнено, поскольку в любой тройке учеников найдутся двое из одной группы, а они между собой не здоровались. Возьмем нечетное число n из $\{1, \ldots, 1515\}$. Если $n \geqslant 507$, то число $i = 758 - \frac{n-1}{2}$ не превосходит 505. Тогда

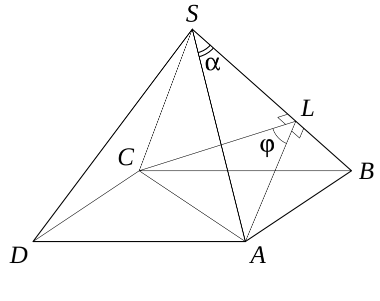
$$2i - 1 = 1516 - (n-1) - 1 = 1516 - n \Longrightarrow n = 1515 - (2i-1) + 1,$$

и по построению ученик A_{2i-1} поздоровался ровно с n школьниками. Если же $n \leqslant 505$, то ученик B_{2n-1} поздоровался со школьниками $A_1, \ldots, A_n$, которых ровно n. Таким образом, и второе условие задачи выполнено.

2.6. Даны две правильные четырехугольные пирамиды с плоским углом при вершине $\frac{\pi}{6}$. Они имеют общую боковую грань и не имеют других общих точек. В пирамиды вписаны шары радиуса r. Третий шар радиуса R касается внешним образом обеих пирамид и вписанных в них шаров. Найдите отношение R к r.

Ответ: $6 + 4\sqrt{3}$.





Решение. Пусть $SABC$ — первая пирамида, BSC — ее общая боковая грань со второй, O_1 и O_2 — центры шаров, вписанных в пирамиды, O — центр внешнего шара. Ввиду равенства пирамид вписанные в них шары касаются грани BSC в одной точке K. Так как $O_1K \perp BSC$ и $O_2K \perp BSC$, точка K лежит на отрезке O_1O_2, причем $O_1O_2 = 2r$. Пусть M — точка касания с гранью ASB шара, вписанного в первую пирамиду. В этой же точке касается ASB и внешний шар. Поэтому точка M лежит на отрезке OO_1, причем $OO_1 = r + R$. Аналогично получается, что $OO_2 = r + R$. Выберем точку N на отрезке OK так, что $NM \perp OO_1$, и положим $\varphi = \angle MNK$ (см. левый рисунок). Тогда

$$O_1K = OO_1 \cdot \cos\angle OO_1K \iff r = (r+R)\cdot\cos(\pi-\varphi) \iff R = -r\left(\frac{1}{\cos\varphi}+1\right).$$

Покажем, что φ — угол между гранями ASB и BSC. Действительно, O_1K и O_1M — радиусы шара, вписанного в первую пирамиду, откуда $O_1M \perp ASB$ и $O_1K \perp BSC$. Значит, $BS \perp MNK$. Кроме того, прямая MN лежит в плоскости ASB, а KN — в плоскости BSC.

Пусть $\alpha = \angle ASB$, $a = AB$. Опустим из точек A и C перпендикуляры на ребро BS. Они придут в одну точку L, так как треугольники ASB и BSC равны. По доказанному $\angle ALC = \varphi$. Заметим, что

$$AL^2 = \left(AB\cdot\sin\angle ABL\right)^2 = a^2\sin^2\left(\tfrac{\pi}{2}-\tfrac{\alpha}{2}\right) = a^2\cos^2\tfrac{\alpha}{2} = \frac{a^2\,(1+\cos\alpha)}{2}.$$

По теореме косинусов для треугольника ALC

$$\cos\varphi = \frac{2AL^2 - AC^2}{2AL^2} = \frac{a^2\,(1+\cos\alpha) - 2a^2}{a^2\,(1+\cos\alpha)} = \frac{\cos\alpha - 1}{\cos\alpha + 1}.$$

Поэтому

$$\frac{R}{r} = -\left(\frac{\cos\alpha+1}{\cos\alpha-1}+1\right) = \frac{2\cos\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{2\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = 6+4\sqrt{3}.$$

Вариант 3

3.1. Какое наименьшее количество натуральных чисел от 1 до 320 нужно покрасить в красный цвет, чтобы 1 и 320 были красными, а также для любого красного числа a, большего 1, нашлись такие красные числа b и c (возможно, одинаковые), что $a = b + c$?

Ответ: 10.

Решение. Пусть окрашено n чисел. Упорядочим их по возрастанию:

$$1 = a_1 < a_2 < \ldots < a_n = 320.$$

Заметим, что для любого $k \in \{2, \ldots, n\}$ справедливо неравенство $a_k \leqslant 2a_{k-1}$. Действительно, в противном случае при $i, j < k$

$$a_k > 2a_{k-1} \geqslant a_i + a_j,$$

и мы не сможем представить a_k в виде суммы двух красных чисел. Тогда

$$320 = a_n \leqslant 2a_{n-1} \leqslant 4a_{n-2} \leqslant \ldots \leqslant 2^{n-1}a_1 = 2^{n-1}.$$

Значит, $n-1 \geqslant 9$ и $n \geqslant 10$. Осталось привести пример покраски 10 чисел:

$$1, 2, 4, 5, 10, 20, 40, 80, 160, 320.$$

3.2. Положительные числа x, y, z таковы, что $xy + yz + zx = 3$. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{x^2\sqrt{yz} + y^2\sqrt{zx} + z^2\sqrt{xy}}{x^8 + y^8 + z^8}.$$

Ответ: 1.

Решение. Заметим, что

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqslant xy + yz + zx = 3,$$

$$x^4 + y^4 + z^4 \geqslant \tfrac{1}{3}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2 \geqslant 3.$$

В силу неравенств Коши числитель A не превосходит

$$\tfrac{1}{2}\left(x^4 + yz + y^4 + zx + z^4 + xy\right) = \tfrac{1}{2}\left(x^4 + y^4 + z^4 + 3\right).$$

Кроме того,

$$x^8 + y^8 + z^8 \geqslant \tfrac{1}{3}\left(x^4 + y^4 + z^4\right)^2 \geqslant x^4 + y^4 + z^4.$$

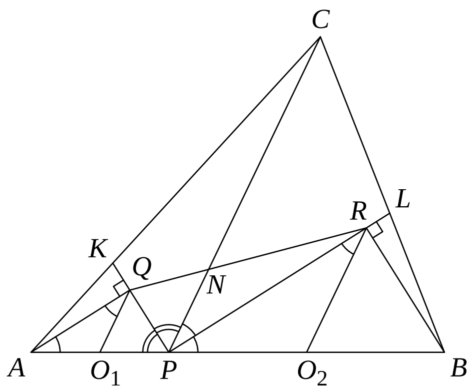
Поэтому

$$A \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4 + y^4 + z^4 + 3}{x^4 + y^4 + z^4} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{x^4 + y^4 + z^4}\right) \leqslant 1.$$

Равенство реализуется при $x = y = z = 1$.

3.3. На стороне AB треугольника ABC выбрана такая точка P, что $3AP = AB$. В треугольниках APC и BPC проведены биссектрисы PK и PL соответственно, а в треугольниках APK и BPL опущены высоты AQ и BR. В каком отношении прямая CP делит отрезок QR?

Ответ: $1:2$, считая от точки Q.



Решение. Пусть N — точка пересечения отрезков CP и QR, O_1 и O_2 — центры описанных окружностей треугольников AQP и PRB соответственно. Заметим, что

$$\angle BPR = \tfrac{1}{2}\left(180^\circ - \angle APC\right) = 90^\circ - \angle APQ = \angle PAQ.$$

Значит, прямоугольные треугольники AQP и PRB подобны с коэффициентом $\frac{1}{2}$. Поскольку

$$\angle PO_1Q = 2\angle PAQ = 2\angle BPR = \angle BPC,$$

мы получаем $O_1Q \parallel CP$ и, аналогично, $O_2R \parallel CP$. Тогда по теореме Фалеса

$$\frac{QN}{NR} = \frac{O_1P}{PO_2} = \frac{\frac{1}{2}\,AP}{\frac{1}{2}\,PB} = \frac{1}{2}\,.$$

3.4. Числовая последовательность x_n задается равенствами

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = 2x_n + \sqrt{3x_n^2+1} \quad \text{при натуральных } n.$$

Докажите, что числа x_n целые, и найдите все n, при которых x_n кратно 19.

Ответ: $n \,\vdots\, 5$.

Решение. По условию

$$\bigl(x_{n+1} - 2x_n\bigr)^2 = 3x_n^2 + 1 \iff x_{n+1}^2 - 4x_{n+1}\,x_n + x_n^2 - 1 = 0.$$

Заменяя в этих рассуждениях n на $n+1$, мы получим

$$x_{n+2}^2 - 4x_{n+2}\,x_{n+1} + x_{n+1}^2 - 1 = 0.$$

Вычтем теперь из второго уравнения первое:

$$0 = x_{n+2}^2 - x_n^2 - 4x_{n+1}\bigl(x_{n+2} - x_n\bigr) = \bigl(x_{n+2} - x_n\bigr)\bigl(x_{n+2} + x_n - 4x_{n+1}\bigr).$$

Так как $x_{n+2} > x_{n+1} > x_n$, мы получаем соотношение

$$x_{n+2} = 4x_{n+1} - x_n \quad \text{при любом натуральном } n.$$

Поскольку $x_1 = 1$ и $x_2 = 4$, все числа x_n целые. Положим $r_n = x_n \bmod 19$. Тогда

$$r_{n+2} = \bigl(4r_{n+1} - r_n\bigr) \bmod 19,$$

и r_n принимают значения $1, 4, 15, 18, 0, \ldots$ (далее эти пять чисел циклически повторяются). Значит, нулевые остатки получаются при $n \,\vdots\, 5$.

3.5. В стране имеется несколько городов. Некоторые из них связаны прямыми двусторонними авиалиниями так, что из любого города можно добраться в любой другой (возможно, с пересадками). Общее количество авиалиний равно $2n$. Пару авиалиний, идущих из одного города, назовем *транзитной.* Какое наибольшее количество непересекающихся транзитных пар авиалиний можно выбрать?

Ответ: n.

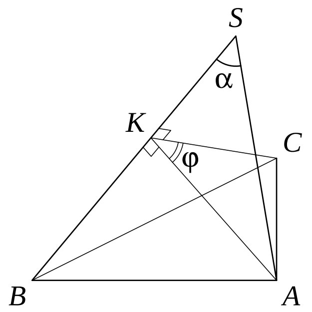
Решение. Транзитных пар не больше n, так как всего имеется n непересекающихся пар авиалиний. Покажем, что всегда можно обеспечить n транзитных пар. Выберем в сети авиалиний максимально возможное количество транзитных пар и допустим, что их меньше n. Назовем линию *свободной*, если она не входит ни в одну транзитную пару. По предположению найдутся свободные линии A_1B_1 и A_2B_2. Заметим, что пары $\{A_1, B_1\}$ и

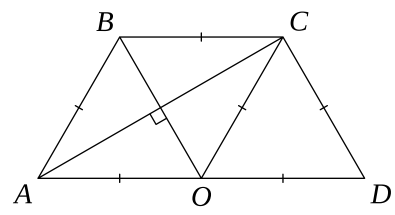
$\{A_2, B_2\}$ не пересекаются, иначе через общий город линии можно соединить в еще одну транзитную пару. По условию существует маршрут $A_1 = C_0 \to C_1 \to \ldots \to C_k = A_2$. Линия C_0C_1 не свободная, иначе можно составить еще одну транзитную пару $B_1C_0C_1$. Если C_0C_1 — часть транзитной пары DC_0C_1, то заменим ее парой DC_0B_1; при этом линия C_0C_1 станет свободной. Если же C_0C_1 — часть транзитной пары C_0C_1D, то заменим ее парой $B_1C_0C_1$; при этом свободной станет линия DC_1. В обоих случаях количество транзитных пар не меняется и появляется свободная линия, идущая из C_1.

Продолжая этот процесс, мы будем получать свободные линии, ведущие в $C_2, C_3, \ldots, C_k = A_2$, не меняя числа транзитных пар. Но, если есть свободная линия DA_2, мы можем составить еще одну транзитную пару DA_2B_2, что и дает противоречие.

3.6. Даны две шестиугольные пирамиды и одна треугольная, причем боковые грани всех пирамид одинаковы. Пирамиды удалось склеить внешним образом «без зазоров», то есть так, что любые две пирамиды имеют общую грань. Найдите плоский угол при вершине пирамид.

Ответ: $\arccos\frac{7}{11}$.





Решение. Обозначим одну из шестиугольных пирамид через $SABCDEF$, где S — вершина. По условию все пирамиды имеют общее боковое ребро (предположим, что это BS). Пусть φ и ψ — углы между боковыми гранями соответственно шестиугольной и треугольной пирамид. Пересечем всю конструкцию плоскостью, перпендикулярной ребру BS. В сечении получатся три плоских угла, равных углам между боковыми гранями пирамид, то есть φ, φ и ψ. Ввиду отсутствия «зазоров» $2\varphi + \psi = 2\pi$, откуда $\cos 2\varphi = \cos\psi$.

Найдем углы φ и ψ. Пусть $\alpha = \angle ASB$, $a = AB$, O — центр шестиугольника $ABCDEF$. Опустим из точек A и C перпендикуляры на ребро BS. Они придут в одну точку K, причем $AK = CK$, так как треугольники ASB и BSC равны. Заметим, что треугольник OAB правильный, а AC — его удвоенная высота, то есть $AC = a\sqrt{3}$. Тогда по теореме косинусов

$$\cos\varphi = \frac{2AK^2 - AC^2}{2AK^2} = \frac{2a^2\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) - 3a^2}{2a^2\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 3}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos\alpha - 2}{\cos\alpha + 1}.$$

Аналогичные вычисления для треугольной пирамиды дают

$$\cos\psi = \frac{2a^2\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) - a^2}{2a^2\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha + 1}.$$

Поэтому

$$\cos 2\varphi = \cos\psi \iff \frac{2(\cos\alpha-2)^2}{(\cos\alpha+1)^2} - 1 = \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha+1} \iff$$
$$\iff \cos^2\alpha - 10\cos\alpha + 7 = \cos^2\alpha + \cos\alpha,$$

откуда $\cos\alpha = \frac{7}{11}$.

Вариант 4

4.1. Какое наименьшее количество натуральных чисел от 1 до 544 нужно покрасить в красный цвет, чтобы 1 и 544 были красными, а также для любого красного числа a, большего 1, нашлись такие красные числа b и c (возможно, одинаковые), что $a = b + c$?

Ответ: 11.

Решение. Пусть окрашено n чисел. Упорядочим их по возрастанию:

$$1 = a_1 < a_2 < \ldots < a_n = 544.$$

Заметим, что для любого $k \in \{2, \ldots, n\}$ справедливо неравенство $a_k \leqslant 2a_{k-1}$. Действительно, в противном случае при $i, j < k$

$$a_k > 2a_{k-1} \geqslant a_i + a_j,$$

и мы не сможем представить a_k в виде суммы двух красных чисел. Тогда

$$544 = a_n \leqslant 2a_{n-1} \leqslant 4a_{n-2} \leqslant \ldots \leqslant 2^{n-1}a_1 = 2^{n-1}.$$

Значит, $n - 1 \geqslant 10$ и $n \geqslant 11$. Осталось привести пример покраски 11 чисел:

$$1, 2, 4, 8, 9, 17, 34, 68, 136, 272, 544.$$

4.2. Положительные числа x, y, z таковы, что $xy + yz + zx = 3$. Найдите минимальное значение выражения

$$A = \frac{x^4 + y^4 + z^4}{x\sqrt{yz} + y\sqrt{zx} + z\sqrt{xy}}.$$

Ответ: 1.

Решение. Заметим, что

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqslant xy + yz + zx = 3.$$

В силу неравенств Коши знаменатель A не превосходит

$$\frac{1}{2}\left(x^2 + yz + y^2 + zx + z^2 + xy\right) = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2 + 3\right).$$

Кроме того,

$$x^4 + y^4 + z^4 \geqslant \frac{1}{3}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2 \geqslant x^2 + y^2 + z^2.$$

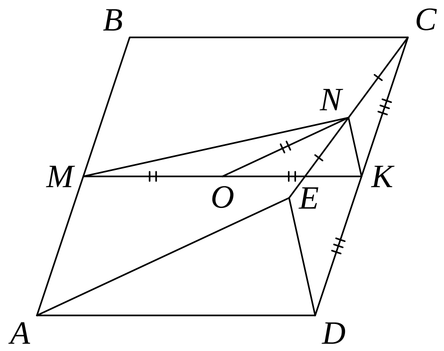
Поэтому

$$A \geqslant \frac{2\left(x^2+y^2+z^2\right)}{x^2+y^2+z^2+3} = 2\left(1-\frac{3}{x^2+y^2+z^2+3}\right) \geqslant 2\left(1-\frac{3}{3+3}\right) = 1.$$

Равенство реализуется при $x=y=z=1$.

4.3. Внутри параллелограмма $ABCD$ взята такая точка E, что $AE = BC$. Точки M и N — середины отрезков AB и CE соответственно. Найдите угол между прямыми DE и MN.

Ответ: 90°.



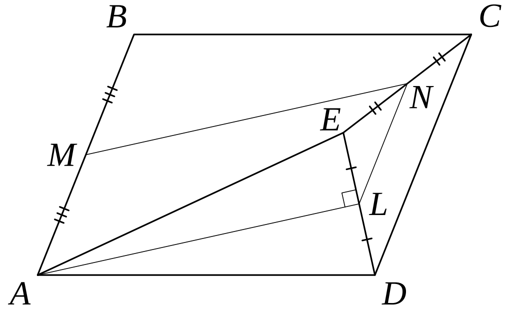
Первое решение. Пусть K— середина отрезка CD, а O — середина MK. Отрезок NK — средняя линия треугольника CDE. Тогда

$$KN \parallel DE, \ \ OK \parallel AD \quad \text{и} \quad \frac{NK}{DE} = \frac{1}{2} = \frac{OK}{AD}.$$

Значит, $\angle OKN = \angle ADE$ и треугольники OKN и ADE подобны с коэффициентом $\frac{1}{2}$. Заметим, что $OK = OM$ и

$$ON = \tfrac{1}{2}\,AE = \tfrac{1}{2}\,BC = \tfrac{1}{2}\,MK = OM.$$

Поэтому O — центр описанной окружности треугольника KMN. Тогда $\angle MNK = 90^\circ$, а это и есть искомый угол.



Второе решение. Пусть L — середина отрезка DE. Тогда LN — средняя линия в треугольнике ECD, откуда

$$LN \parallel CD \parallel AM \quad \text{и} \quad LN = \tfrac{1}{2}\,CD = \tfrac{1}{2}\,AB = AM.$$

Следовательно, четырехугольник $AMNL$ является параллелограммом и потому $AL \parallel MN$. Медиана AL равнобедренного треугольника AED является также и его высотой. Таким образом, прямые AL и DE перпендикулярны, а значит, $MN \perp DE$.

4.4. Числовая последовательность x_n задается равенствами

$$x_1 = 2, \quad x_{n+1} = 3x_n + \sqrt{8x_n^2 + 4} \quad \text{при натуральных } n.$$

Докажите, что числа x_n целые, и найдите все n, при которых x_n кратно 17.

Ответ: $n \,\vdots\, 4$.

Решение. По условию

$$\bigl(x_{n+1} - 3x_n\bigr)^2 = 8x_n^2 + 4 \Longleftrightarrow x_{n+1}^2 - 6x_{n+1}\,x_n + x_n^2 - 4 = 0.$$

Заменяя в этих рассуждениях n на $n+1$, мы получим

$$x_{n+2}^2 - 6x_{n+2}\,x_{n+1} + x_{n+1}^2 - 4 = 0.$$

Вычтем теперь из второго уравнения первое:

$$0 = x_{n+2}^2 - x_n^2 - 6x_{n+1}\bigl(x_{n+2} - x_n\bigr) = \bigl(x_{n+2} - x_n\bigr)\bigl(x_{n+2} + x_n - 6x_{n+1}\bigr).$$

Так как $x_{n+2} > x_{n+1} > x_n$, мы получаем соотношение

$$x_{n+2} = 6x_{n+1} - x_n \quad \text{при любом натуральном } n.$$

Поскольку $x_1 = 2$ и $x_2 = 12$, все числа x_n целые. Положим $r_n = x_n \bmod 17$. Тогда

$$r_{n+2} = \bigl(6r_{n+1} - r_n\bigr) \bmod 17,$$

и r_n принимают значения $2, 12, 2, 0, 15, 5, 15, 0, \ldots$ (далее эти восемь чисел циклически повторяются). Значит, нулевые остатки получаются при $n \,\vdots\, 4$.

4.5. В стране имеется несколько городов. Некоторые из них связаны прямыми двусторонними авиалиниями, с помощью которых можно добраться из любого города в любой другой, сделав не более n пересадок. В какой-то момент одну из авиалиний закрыли, но воздушное сообщение между всеми городами сохранилось (возможно, с пересадками). При каком наименьшем k можно утверждать, что теперь из любого города в любой другой можно добраться, сделав не более k пересадок?

Ответ: $k = 2n + 1$.

Решение. Назовем *длиной* авиаперелета количество линий, задействованных в нем. Пусть была закрыта авиалиния между городами A и B, p — кратчайший маршрут из A в B после закрытия этой линии. Обозначим длину p через m. Выберем на p город C так, что длина $A \to C$ равна $\left[\frac{m}{2}\right]$. Тогда длина $B \to C$ равна $\left[\frac{m}{2}\right]$ или $\left[\frac{m}{2}\right] + 1$. Заметим, что кратчайший маршрут из A в C имеет длину $\left[\frac{m}{2}\right]$, иначе существовал бы более короткий путь из A в B.

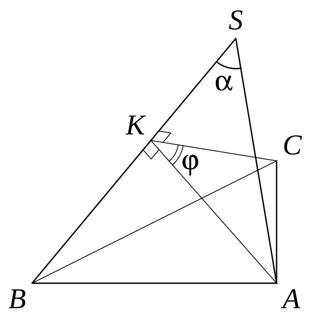
Покажем теперь, что после закрытия линии AB из любого города D найдется маршрут в C длиной не более $n+1$. Возьмем кратчайший маршрут q, соединявший C и D до закрытия линии AB. По условию его длина не превосходит $n+1$. Если маршрут q не включал в себя линию AB, то он сохранится после удаления этой линии и, значит, подойдет нам. В противном случае q имеет вид $D \to B \to A \to C$. Действительно, альтернативный вариант $D \to A \to B \to C$ не годится, поскольку путь $A \to C$ не длиннее $B \to C$ и строго короче $A \to B \to C$. Но маршрут $B \to C$ длиннее $A \to C$ не более чем на 1 и, значит, не длиннее $B \to A \to C$. Таким образом, длина пути $D \to B \to C$ не превосходит $n+1$, и этот путь не использует линию AB.

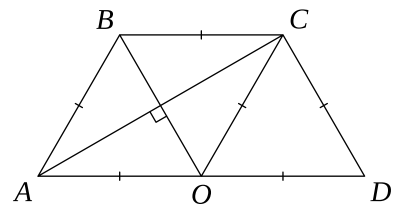
По доказанному из любых городов D и D' можно проехать в C, используя не более $n+1$ линий и не используя AB. Объединяя эти пути, мы сможем добраться из D в D' по маршруту длиной не более $2n+2$, число пересадок на котором не превосходит $2n+1$. Таким образом, $k = 2n+1$ удовлетворяет условию задачи.

Осталось показать, что $k < 2n+1$ нам не подходят. Возьмем страну с $2n+3$ городами и соединим эти города авиалиниями циклически. После закрытия линии между двумя городами для проезда между ними придется использовать остальные $2n+2$ линии, то есть сделать $2n+1$ пересадок.

4.6. Даны две шестиугольные пирамиды и одна четырехугольная, причем боковые грани всех пирамид одинаковы. Пирамиды удалось склеить внешним образом «без зазоров», то есть так, что у них есть общее ребро и любые две пирамиды имеют общую грань. Найдите плоский угол при вершине пирамид.

Ответ: $\arccos \frac{4}{5}$.





Решение. Обозначим одну из шестиугольных пирамид через $SABCDEF$, где S — вершина. По условию все пирамиды имеют общее боковое ребро (предположим, что это BS). Пусть φ и ψ — углы между боковыми гранями соответственно шестиугольной и четырехугольной пирамид. Пересечем всю конструкцию плоскостью, перпендикулярной ребру BS. В сечении получатся три плоских угла, равных углам между боковыми гранями пирамид, то есть φ, φ и ψ. Ввиду отсутствия «зазоров» $2\varphi + \psi = 2\pi$, откуда $\cos 2\varphi = \cos \psi$.

Найдем углы φ и ψ. Пусть $\alpha = \angle ASB$, $a = AB$, O — центр шестиугольника $ABCDEF$. Опустим из точек A и C перпендикуляры на ребро BS. Они придут в одну точку K, причем $AK = CK$, так как треугольники ASB и BSC равны. Заметим, что треугольник OAB правильный, а AC — его удвоенная высота, то есть $AC = a\sqrt{3}$. Тогда по теореме косинусов

$$\cos \varphi = \frac{2AK^2 - AC^2}{2AK^2} = \frac{2a^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) - 3a^2}{2a^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{2\cos^2 \frac{\alpha}{2} - 3}{2\cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos\alpha - 2}{\cos\alpha + 1}.$$

Аналогичные вычисления для четырехугольной пирамиды дают
$$\cos\psi = \frac{2a^2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)-2a^2}{2a^2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}-2}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos\alpha-1}{\cos\alpha+1}.$$
Поэтому
$$\cos 2\varphi = \cos\psi \iff \frac{2(\cos\alpha-2)^2}{(\cos\alpha+1)^2}-1 = \frac{\cos\alpha-1}{\cos\alpha+1} \iff$$
$$\iff \cos^2\alpha - 10\cos\alpha + 7 = \cos^2\alpha - 1,$$
откуда $\cos\alpha = \frac{4}{5}$.

Вариант 5

5.1. Даны натуральные числа от 1 до 2040, причем n чисел покрашены в зеленый цвет. При каком наибольшем n может оказаться так, что ни одна степень двойки не покрашена и не представима в виде суммы двух зеленых чисел?

Ответ: 1019.

Решение. Рассмотрим пары вида $(1024-k, 1024+k)$, где $k \in \{1, \ldots, 1016\}$. В каждой паре имеется хотя бы одно непокрашенное число, поскольку
$$(1024-k)+(1024+k) = 2^{11}.$$
Аналогичным образом получается, что пары $(1,7)$, $(2,6)$, $(3,5)$ содержат не менее трех непокрашенных чисел. Наконец, числа 4 и 1024, не попавшие ни в одну из пар, по условию тоже не окрашены. Таким образом, имеется не менее 1021 непокрашенных чисел, откуда $n \leqslant 1019$.

Покажем, что полученная оценка реализуется. Покрасим числа 5, 6, 7, а также все числа от 1025 до 2040. Пусть m и n — зеленые числа. Нам достаточно проверить, что $m+n$ не является степенью двойки. Если $m,n < 8$, то это очевидно. В случае $m,n > 1024$ мы получаем
$$2^{11} = 2048 < m+n \leqslant 2040+2040 = 4080 < 4096 = 2^{12}.$$
Наконец, если $m < 8$ и $n > 1024$, то $1024 < m+n < 2048$.

5.2. Неотрицательные числа x, y, z таковы, что $x^3+y^3+z^3 = 1$. Найдите максимальное значение выражения
$$A = \sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\,.$$

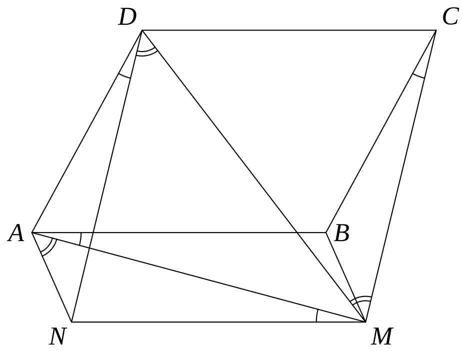
Ответ: $\sqrt[3]{9}$.

Решение. Заметим, что
$$A \leqslant \sqrt{3\,(xy+yz+zx)} \leqslant \sqrt{(x+y+z)^2} = x+y+z.$$
Кроме того,
$$1 = x^3+y^3+z^3 \geqslant \tfrac{1}{9}\,(x+y+z)^3,$$

откуда
$$x + y + z \leqslant \sqrt[3]{9}.$$
Таким образом, $A \leqslant \sqrt[3]{9}$. Равенство реализуется при $x = y = z = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

5.3. Вне параллелограмма $ABCD$ выбрана такая точка M, что $\angle BAM = \angle BCM$. Точки D и M лежат по разные стороны от прямых AB и BC. Какой из углов AMB и CMD больше?

Ответ: углы равны.



Решение. Достроим треугольник ABM до параллелограмма $ABMN$ (см. рисунок). Заметим, что $\triangle CBM$ получается параллельным переносом $\triangle DAN$ на вектор $\overrightarrow{AB}$. Значит, эти треугольники равны и $DN \parallel CM$. Тогда
$$\angle ADN = \angle BCM = \angle BAM = \angle AMN,$$
то есть четырехугольник $ADMN$ вписанный. Поэтому
$$\angle AMB = \angle NAM = \angle NDM = \angle CMD.$$

5.4. Дано натуральное число x. К нему прибавили неотрицательную целую степень двойки и получили число y. Оказалось, что $33x^2 - 31y^2 = 2$. Найдите все такие пары x и y.

Ответ: $x = 63$, $y = 65$ или $x = 4031$, $y = 4159$.

Решение. Пусть $y = x + 2^n$. Заметим, что $n > 0$, так как x и y имеют одинаковую четность. Тогда
$$x^2 - 31 \cdot 2^n x - 31 \cdot 2^{2n-1} - 1 = 0 \Longleftrightarrow x = 31 \cdot 2^{n-1} + \sqrt{31 \cdot 33 \cdot 2^{2n-2} + 1}.$$
Подкоренное выражение должно иметь вид p^2 при некотором натуральном p, откуда
$$31 \cdot 33 \cdot 2^{2n-2} + 1 = p^2 \Longleftrightarrow 31 \cdot 33 \cdot 2^{2n-2} = (p-1)(p+1).$$
Если $n = 1$, то $p = 32$, $x = 63$ и $y = 65$, что дает первый ответ. В случае $n = 2$ мы получим
$$4 \cdot 31 \cdot 33 = (p-1)(p+1),$$
что невозможно, поскольку правая часть делится на 8, а левая — нет.

Пусть $n \geqslant 3$. Одно из чисел $p \pm 1$ является нечетным кратным 2, а другое — нечетным кратным 2^{2n-3}. Обозначим эти числа соответственно через b и a. Заметим, что a не делится на 31, иначе

$$a \geqslant 31 \cdot 2^{2n-3} \geqslant 31 \cdot 8 > 34 \cdot 2 \geqslant b + 2.$$

Аналогично проверяется, что a не делится на 33. Осталось рассмотреть три случая.

1) $a = 11 \cdot 2^{2n-3}$, $b = 2 \cdot 93$. Тогда $b \bmod 11 = 10$. Значит, числа $b \pm 2$ не кратны 11 и потому не равны a.

2) $a = 3 \cdot 2^{2n-3}$, $b = 2 \cdot 341$. Так как $b \bmod 9 = 7$, число $b + 2$ кратно 9, а $b - 2$ не делится на 3. Поэтому ни одно из этих чисел не равно a.

3) $a = 2^{2n-3}$, $b = 2 \cdot 31 \cdot 33$. Тогда $2^{2n-4} = 31 \cdot 33 \pm 1 = 32^2 - 1 \pm 1$, откуда

$$2^{2n-4} = 32^2, \quad n = 7, \quad p = b + 1 = 2047,$$

$$x = 31 \cdot 2^6 + p = 4031, \quad y = x + 2^7 = 4159.$$

Это дает нам второй ответ.

5.5. В стране имеется n городов ($n \geqslant 6$). Некоторые из них связаны прямыми двусторонними авиалиниями так, что из любого города можно добраться в любой другой (возможно, с пересадками). В столицу ведет не меньше авиалиний, чем в любой другой город. Любитель авиации для каждой четверки городов составил схему авиалиний между этими городами. Одна из схем потерялась, а изучая остальные, он обнаружил, что никакая схема не представляет собой циклический маршрут, проходящий через все эти четыре города, и никакая схема не представляет собой маршрут из трех линий, последовательно соединяющий эти города друг с другом. Сколько авиалиний может вести в столицу?

Ответ: $n - 1$ или $n - 2$.

Первое решение. Обозначим столицу через A. Пусть в A ведет k линий. Чтобы получить $k = n - 1$, достаточно попарно соединить авиалиниями все города страны. Построим пример для $k = n - 2$. Пусть столица соединена линиями с городами $B_1, B_2, \ldots, B_{n-2}$ и не соединена с C. Свяжем линиями все пары городов из множества $B_1, B_2, \ldots, B_{n-2}$, кроме B_1B_2, а также пару B_1C. Тогда в столицу ведет $n - 2$ линии, в остальные города — не более $n - 2$ линий. Если в четверку городов не входит C, то в ней найдутся три города, попарно связанные линиями. Это верно и для четверок, содержащих C, кроме AB_1B_2C. Таким образом, эта сеть линий удовлетворяет условию.

Покажем теперь, что меньше $n - 2$ линий в столицу идти не может. Пусть $k < n - 2$. Обозначим через $B_1, B_2, \ldots, B_k$ города, с которыми столица соединена, а через $C_1, C_2, \ldots, C_{n-k-1}$ — города, с которыми она не соединена. Оба множества непусты, причем городов C_i по крайней мере два. Докажем следующую лемму: *если есть авиалиния между B_i и C_j, то утеряна схема одной из четверок $AB_iB_mC_j$, где $m \neq i$.* Действительно, пусть это не так. В любой четверке $AB_iB_mC_j$ имеются авиалинии AB_i, AB_m, B_iC_j, а линии AC_j нет. Тогда по условию должна быть линия B_iB_m. Таким образом, город B_i

имеет воздушное сообщение с A, C_j и B_m при $m \neq i$, то есть с $k+1$ городами. Но это невозможно, поскольку в столицу ведет лишь k линий.

По условию найдутся города B_i и C_j, между которыми есть воздушное сообщение (пусть для определенности это B_1 и C_1). Рассмотрим два случая.

1) *Имеется авиалиния из C_1 в некоторый город C_j.* Пусть для простоты $j = 2$. По лемме утеряна схема четверки вида $AB_1B_mC_1$. Тогда схема четверки $AB_1C_1C_2$ присутствует. В ней имеются авиалинии AB_1, B_1C_1, C_1C_2, а линий AC_1 и AC_2 нет. Значит, по условию должна существовать линия B_1C_2, и по лемме схема одной из четверок вида $AB_1B_jC_2$ утеряна. Но эта четверка отличается от $AB_1B_mC_1$, поэтому ее схема не может быть утеряна.

2) *Город C_1 не связан авиалиниями ни с одним городом C_j при $j > 1$.* Тогда найдется еще одна линия вида B_pC_q, где $q > 1$. По лемме должны быть утеряны схемы четверок $AB_1B_iC_1$ и $AB_pB_jC_q$, что невозможно, поскольку эти четверки различны.

Второе решение. Обозначим столицу через A. Пусть в A ведет k линий. Чтобы получить $k = n-1$, достаточно попарно соединить авиалиниями все города страны. Построим пример для $k = n-2$. Обозначим через B, A', B' и $C_1, \ldots, C_{n-4}$ все города, отличные от A. Соединим A и B линиями между собой и со всеми городами C_i. Кроме того, добавим линии AA' и BB'. Пусть утеряна схема для четверки городов $AA'BB'$. Покажем, что схема для любой другой четверки удовлетворяет условию. Если в четверку входят A и B, то один из них связан линиями с остальными тремя городами, а если в нее не входят ни A, ни B, то города четверки вообще не связаны друг с другом. Пусть в четверку входит только один из городов A и B (например, A). Тогда остальные города четверки могут быть связаны только с A, и такая схема нас тоже устраивает.

Покажем теперь, что меньше $n-2$ линий в столицу идти не может. Пусть $k < n-2$. Обозначим через $B_1, B_2, \ldots, B_k$ города, с которыми столица соединена, а через $C_1, C_2, \ldots, C_{n-k-1}$ — города, с которыми она не соединена. Оба множества непусты, причем городов C_i по крайней мере два. Заметим, что если есть авиалиния между B_p и C_q и нет авиалинии между B_p и B_m $(m \neq p)$, то утеряна схема для четверки $AB_pB_mC_q$. Действительно, в четверке $AB_pB_mC_q$ имеются авиалинии AB_p, AB_m, B_pC_q, а линий AC_q и B_pB_m нет. Кроме того, B_p не соединен линией хотя бы с одним из остальных городов B_i, иначе в B_p ведет больше линий, чем в столицу. Значит, какая-то из схем $AB_pB_mC_q$ при $m \neq p$ обязательно утеряна.

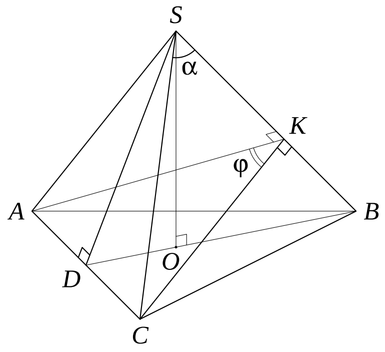
По условию найдутся города B_p и C_q, между которыми есть воздушное сообщение. Пусть для определенности это B_1 и C_1, а город B_1 не соединен линией с B_k. Тогда утеряна схема $AB_1B_kC_1$, а все остальные схемы имеются.

Заметим, что хотя бы один из городов $B_1, B_2, \ldots, B_k, C_1$ должен быть связан линией с каким-то из городов C_i при $i \geqslant 2$, иначе из A нельзя попасть ни в один из городов C_i. Пусть для определенности линия ведет в C_2. Она не может выходить из B_1, поскольку в этот город уже ведут k других линий. Не может эта линия выходить и из B_i при $1 < i < k$, так как в противном случае оказалась бы утеряна еще и некоторая схема вида $AB_iB_mC_2$.

Следовательно, эта линия ведет из C_1 или из B_k (эти случаи разбираются одинаково). Пусть для определенности она ведет из C_1. Тогда есть линии AB_1,B_1C_1, C_1C_2 и нет линий AC_1 и B_1C_2. Поэтому должна быть утеряна еще и схема $AB_1C_1C_2$, что невозможно.

5.6. Из металла отлиты три одинаковые правильные треугольные пирамиды объема $36\sqrt{2}$. Их удалось разместить так, что все пирамиды имеют общее боковое ребро и общую вершину. Найдите максимальное значение стороны основания пирамид.

Ответ: 12.



Решение. Обозначим одну из пирамид через $SABC$, где SB — общее боковое ребро пирамид. Пусть $\alpha = \angle ASB$, $a = AB$, φ — угол между боковыми гранями пирамид. Опустим из точек A и C перпендикуляры на ребро BS. Они придут в одну точку K, причем $AK = CK$, так как треугольники ASB и BSC равны. По теореме косинусов

$$\cos\varphi = \frac{2AK^2 - AC^2}{2AK^2} = \frac{2a^2\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) - a^2}{2a^2\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha + 1}.$$

Пересечем всю конструкцию плоскостью, перпендикулярной ребру BS. В сечении каждой пирамиды будет угол φ. Поскольку эти углы не налегают друг на друга, мы получим $3\varphi \leqslant 2\pi$, откуда

$$-\tfrac{1}{2} = \cos\tfrac{2\pi}{3} \leqslant \cos\varphi = \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha + 1} \quad \text{и} \quad \cos\alpha \geqslant -\tfrac{1}{3}.$$

Выразим объем пирамиды. Пусть SD — апофема пирамиды, SO — ее высота. Тогда $SD = \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, $DO = a\,\frac{\sqrt{3}}{6}$. Поскольку функция $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ возрастает на $[-1, 1)$, мы получаем

$$SO = \frac{a}{2}\sqrt{\operatorname{ctg}^2\tfrac{\alpha}{2} - \frac{1}{3}} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha} - \frac{1}{3}} \geqslant \frac{a}{2}\sqrt{\frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}} = \frac{a}{2\sqrt{6}}.$$

Тогда

$$36\sqrt{2} = \frac{1}{3}\cdot S_{ABC}\cdot SO = \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot SO \geqslant a^3\cdot\frac{1}{4\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{6}} = \frac{a^3}{24\sqrt{2}},$$

откуда $a^3 \leqslant 72\cdot 24 = 3^3\cdot 2^6$ и $a \leqslant 12$. Равенство реализуется, если $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$, то есть в случае, когда между пирамидами нет зазоров.

Вариант 6

6.1. Даны натуральные числа от 1 до 720, причем n из них покрашены в зеленый цвет. При каком наибольшем n может оказаться так, что никакая степень тройки не представляется в виде суммы двух зеленых чисел?

Ответ: 360.

Решение. Рассмотрим пары вида $(9+k, 720-k)$, где $k \in \{0, 1, \ldots, 355\}$. В каждой паре имеется хотя бы одно непокрашенное число, поскольку

$$(9+k)+(720-k)=3^6.$$

Аналогичным образом получается, что пары $(1,8)$, $(2,7)$, $(3,6)$, $(4,5)$ содержат не менее четырех непокрашенных чисел. Таким образом, имеется не менее $356+4=360$ неокрашенных чисел.

Покажем, что полученная оценка реализуется. Покрасим числа 5, 6, 7, 8, а также все числа от 365 до 720. Пусть m и n — зеленые числа. Нам достаточно проверить, что $m+n$ не является степенью тройки. Если $m, n \leqslant 8$, то это очевидно. В случае $m, n \geqslant 365$ мы получаем

$$3^6=729<m+n \leqslant 720+720=1440<2187=3^7.$$

Наконец, если $m \leqslant 8$ и $n \geqslant 365$, то $243<m+n<729$.

6.2. Положительные числа x, y, z таковы, что $x^3+y^3+z^3=1$. Найдите минимальное значение выражения

$$A=\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\,.$$

Ответ: $3\sqrt[3]{9}$.

Решение. В силу неравенства Коши для среднего гармонического и среднего арифметического

$$A \geqslant \frac{9}{xy+yz+zx} \geqslant \frac{27}{(x+y+z)^2}.$$

По условию

$$1=x^3+y^3+z^3 \geqslant \tfrac{1}{9}\,(x+y+z)^3,$$

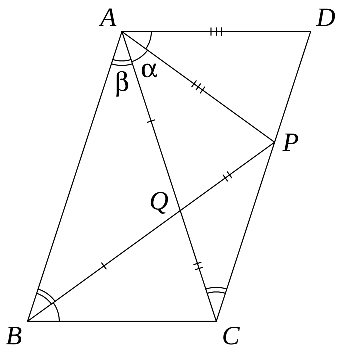
откуда

$$(x+y+z)^2 \leqslant 9^{2/3}.$$

Таким образом, $A \geqslant 3\sqrt[3]{9}$. Равенство реализуется при $x=y=z=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

6.3. В параллелограмме $ABCD$ сторона AB равна диагонали AC. Биссектриса угла CAD пересекает отрезок CD в точке P, а отрезки AC и BP пересекаются в точке Q. Найдите угол BCD, если известно, что $AQ=BQ$.

Ответ: 108°.



Первое решение. Пусть $\angle CAD = 2\alpha$, $\angle BAC = \beta$. По условию треугольник ACD равнобедренный. Тогда

$$180^\circ = 2\angle CAD + \angle ACD = 4\alpha + \beta.$$

Кроме того, треугольник AQB равнобедренный, поэтому

$$\angle ABP = \angle BAC = \angle ACP.$$

Значит, четырехугольник $ABCP$ вписанный, откуда $\angle CBP = \angle CAP = \alpha$ и

$$180^\circ = \angle ABC + \angle BAD = 3\alpha + 2\beta.$$

Таким образом,

$$4\alpha + \beta = 180^\circ = 3\alpha + 2\beta \Longrightarrow \alpha = \beta = 36^\circ.$$

В итоге мы получаем

$$\angle BCD = \angle BAD = 2\alpha + \beta = 108^\circ.$$

Второе решение. Положим $\angle CAD = 2\alpha$. По условию треугольник ACD равнобедренный, поэтому $\angle CDA = 2\alpha$. Кроме того, треугольник AQB равнобедренный, откуда

$$\angle QPC = \angle ABP = \angle BAC = \angle QCP.$$

Следовательно, треугольник CQP равнобедренный и $QC = QP$. Тогда треугольники QAP и QBC равны по двум сторонам и углу между ними, поэтому $AP = BC = AD$. Таким образом, треугольник ADP равнобедренный и

$$\angle APD = \angle ADP = 2\alpha.$$

Значит, углы треугольника APD равны α, 2α и 2α, откуда $\alpha = 36^\circ$ и

$$\angle BCD = 180^\circ - \angle ADP = 180^\circ - 2\alpha = 108^\circ.$$

6.4. Дано натуральное число x. К нему прибавили $2 \cdot 16^n$, где n — неотрицательное целое, и получили число y. Оказалось, что $129x^2 - 127y^2 = 2$. Найдите все такие пары x и y.

Ответ: $x = 255$, $y = 257$ или $x = 65\,279$, $y = 65\,791$.

Решение. Запишем $y = x + 2^{4n+1}$. Тогда

$$x^2 - 127 \cdot 2^{4n+1}x - 127 \cdot 2^{8n+1} - 1 = 0 \Longleftrightarrow x = 127 \cdot 2^{4n} + \sqrt{127 \cdot 129 \cdot 2^{8n} + 1}.$$

Подкоренное выражение должно иметь вид p^2 при некотором натуральном p, откуда

$$127 \cdot 129 \cdot 2^{8n} + 1 = p^2 \iff 127 \cdot 129 \cdot 2^{8n} = (p-1)(p+1).$$

Если $n = 0$, то $p = 128$, $x = 255$ и $y = 257$, что дает первый ответ. Пусть $n \geqslant 1$. Одно из чисел $p \pm 1$ является нечетным кратным 2, а другое — нечетным кратным 2^{8n-1}. Обозначим эти числа соответственно через b и a. Заметим, что a не делится на 43, иначе

$$a \geqslant 43 \cdot 2^{8n-1} \geqslant 43 \cdot 128 > 2 \cdot (127 \cdot 3 + 1) \geqslant b + 2.$$

Аналогично проверяется, что a не делится на 127. Осталось рассмотреть два случая.

1) $a = 3 \cdot 2^{8n-1}$, $b = 2 \cdot 5461$. Заметим, что $b-2$ кратно 5, а $b+2$ не делится на 3. Поэтому ни одно из этих чисел не равно a.

2) $a = 2^{8n-1}$, $b = 2 \cdot 127 \cdot 129$. Тогда

$$2^{8n-2} = 127 \cdot 129 \pm 1 = 128^2 - 1 \pm 1,$$

откуда

$$2^{8n-2} = 128^2, \quad n = 2, \quad p = b + 1 = 32\,767,$$

$$x = 127 \cdot 2^8 + p = 65\,279, \quad y = x + 2^9 = 65\,791.$$

Это дает нам второй ответ.

6.5. В стране имеется n городов ($n \geqslant 4$). Некоторые из них связаны прямыми двусторонними авиалиниями так, что из любого города можно добраться в любой другой (возможно, с пересадками). На сайте министерства транспорта есть список всех городов в порядке возрастания количества авиалиний, ведущих в них (в некоторые города может идти одинаковое количество авиалиний). На второй строчке оказался город Луантен. Бизнесмен Жан-Жак поручил своим помощникам найти такие четыре города и такие маршруты, соединяющие (возможно, с пересадками) шесть пар этих городов, что все города, в которых нужно делать пересадки, различны. Помощники установили, что такой четверки городов не существует. Сколько авиалиний ведет в Луантен?

Ответ: 1 или 2.

Решение. Покажем вначале, что 1 и 2 являются ответами. Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — города страны, причем A_1 — Луантен. Тогда сети авиалиний $A_1 \to \ldots \to A_n$ и $A_1 \to \ldots \to A_n \to A_1$ удовлетворяют условию задачи и дают ответы 1 и 2 соответственно.

Покажем теперь, что более двух линий в Луантен вести не может. Назовем *четверкой Жан-Жака* набор городов, который хотел найти бизнесмен. Достаточно доказать следующую лемму: *если по крайней мере в $n-1$ город ведет не менее трех авиалиний, то четверка Жан-Жака существует.* Действительно, по условию четверки Жан-Жака нет, и в силу леммы в два первых города из списка (к которым относится и Луантен) ведет не более двух линий.

Доказательство леммы проведем индукцией по n. Случай $n = 4$ очевиден. Пусть для $4, \ldots, n$ городов утверждение леммы справедливо. Проверим его для $n+1$ города. Возьмем город, в который ведет наименьшее количество линий, обозначим его через A, а количество идущих из него линий — через m.

1) $m = 1$. Удалим A и ведущую в него линию. Останется n городов, удовлетворяющих условию леммы, и в них есть четверка Жан-Жака.

2) $m = 2$. Пусть из A линии ведут в B и C. Из B и C выходит не менее трех линий, и можно считать, что ровно по 3 (иначе удалим город A с линиями AB и AC, условие леммы сохранится для оставшихся городов). Можно также считать, что между B и C есть прямое сообщение. Действительно, в противном случае удалим A с линиями AB и AC и добавим линию BC. По индукционному предположению среди оставшихся городов есть четверка Жан-Жака. Она подойдет и для исходного набора, поскольку добавленную линию BC можно заменить путем BAC.

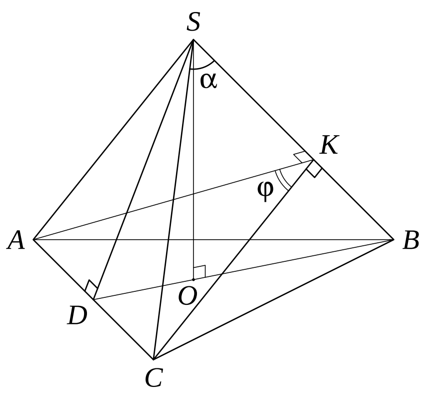
Пусть третья линия из B ведет в город D, а из C — в E (еще B и C соединены друг с другом и с A). Если D и E совпадают, то удалим города A, B, C и все идущие в них линии. После удаления только город D может быть связан менее чем с тремя городами. Поэтому условие леммы сохранится, и среди оставшихся городов есть четверка Жан-Жака. Если D и E различны, то удалим города A, B, C с их линиями, добавим фиктивный город X и свяжем его с D и E. По индукционному предположению в новой сети авиалиний имеется четверка Жан-Жака. Она не может содержать город X (так как в него ведут лишь две линии), а потому подойдет и для исходной сети.

3) $m = 3$. Пусть из A линии ведут B, C и D. Если B, C, D попарно соединены друг с другом, то A, B, C, D — четверка Жан-Жака. Пусть линии CD нет. Тогда удалим города A и D и все линии, идущие из A, а все линии, ведущие в город D, переключим на C. Условие леммы сохранится, и в получившейся сети найдется четверка Жан-Жака. Если в ней задействована фиктивная линия, идущая в C, то ее можно заменить путем в C через D. Поэтому такая четверка годится и для исходной сети.

4) $m \geqslant 4$. В этом случае удалим несколько авиалиний так, чтобы получилось $m = 3$, и воспользуется пунктом 3).

6.6. Из дерева выточены три одинаковые правильные треугольные пирамиды со стороной основания $6\sqrt{2}$. Их удалось разместить так, что все пирамиды имеют общее боковое ребро и общую вершину. Найдите минимальное значение объема пирамид.

Ответ: 18.



Решение. Обозначим одну из пирамид через $SABC$, где SB — общее боковое ребро пирамид. Пусть $\alpha = \angle ASB$, $a = 6\sqrt{2}$, φ — угол между боковыми гранями пирамид. Опустим из точек A и C перпендикуляры на ребро BS. Они придут в одну точку K, причем $AK = CK$, так как треугольники ASB и BSC равны. По теореме косинусов

$$\cos\varphi = \frac{2AK^2 - AC^2}{2AK^2} = \frac{2a^2\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) - a^2}{2a^2\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha + 1}.$$

Пересечем всю конструкцию плоскостью, перпендикулярной ребру BS. В сечении каждой пирамиды будет угол φ. Поскольку эти углы не налегают друг на друга, мы получим $3\varphi \leqslant 2\pi$, откуда

$$-\tfrac{1}{2} = \cos\tfrac{2\pi}{3} \leqslant \cos\varphi = \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha + 1} \quad \text{и} \quad \cos\alpha \geqslant -\tfrac{1}{3}.$$

Выразим объем пирамиды. Пусть SD — апофема пирамиды, SO — ее высота. Тогда $SD = \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, $DO = a\,\frac{\sqrt{3}}{6}$. Поскольку функция $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ возрастает на $[-1, 1)$, мы получаем

$$SO = \frac{a}{2}\sqrt{\operatorname{ctg}^2\tfrac{\alpha}{2} - \frac{1}{3}} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha} - \frac{1}{3}} \geqslant 3\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}} = \sqrt{3}.$$

Тогда

$$V_{SABC} = \frac{1}{3}\cdot S_{ABC}\cdot SO \geqslant \frac{1}{3}\cdot\frac{72\sqrt{3}}{4}\cdot\sqrt{3} = 18.$$

Равенство реализуется, если $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$, то есть в случае, когда между пирамидами нет зазоров.

Вариант 7

7.1. Какое наибольшее количество натуральных чисел от 1 до 2500 можно покрасить в желтый цвет так, чтобы произведение любых двух желтых чисел не было желтым?

Ответ: 2450.

Первое решение. Заметим, что единица не окрашена, поскольку $1\cdot 1 = 1$. Кроме того, в паре $(50, 2500)$ одно из чисел не окрашено. Рассмотрим набор чисел

$$2, 3, \ldots, 49;\ 51, 52, \ldots, 98;\ 50^2 - 48^2, 50^2 - 47^2, \ldots, 50^2 - 1.$$

Все эти числа различны, так как

$$50^2 - 48^2 = 98\cdot 2 > 98.$$

Разобьем их на тройки вида

$$\left(50 - n, 50 + n, 50^2 - n^2\right), \quad \text{где } n \in \{1, \ldots, 48\}.$$

Поскольку $(50 - n)(50 + n) = 50^2 - n^2$, в каждой тройке есть хотя бы одно неокрашенное число, а всего имеется 48 таких троек. Таким образом, мы нашли 50 неокрашенных чисел, поэтому количество желтых чисел не превосходит $2500 - 50 = 2450$.

Покажем, что эта оценка реализуется. Покрасим все числа от 51 до 2500. Такая покраска нам подходит, поскольку произведение любых двух желтых чисел больше 2500.

Второе решение. Покажем вначале, что более 2450 чисел покрасить нельзя. Допустим, что покрашено не менее 2451 чисел. Обозначим через k наименьшее желтое число и положим $m = \left[\frac{2500}{k}\right]$. Заметим, что $k \leqslant 49$, откуда $m \geqslant 51$. Кроме того, $k \geqslant 2$, так как $1 \cdot 1 = 1$. Рассмотрим пары

$$(2, 2k), (3, 3k), (4, 4k), \ldots, (m, mk).$$

По предположению число k желтое, поэтому в каждой паре покрашено не больше одного числа. Возможны два случая.

1) $k > 25$. Тогда числа в первых 50 парах не повторяются, поскольку

$$2k \geqslant 2 \cdot 26 = 52 > 51.$$

Значит, у нас есть не менее 50 неокрашенных чисел, что невозможно.

2) $k \leqslant 25$. Тогда $m \geqslant 100$, то есть мы имеем по крайней мере 99 пар. Неокрашенное число, кратное k, может входить в две пары (в одну — первым элементом, в другую — вторым). Но количество таких чисел не превосходит

$$\left[\frac{99}{k}\right] \leqslant \left[\frac{99}{2}\right] = 49.$$

Значит, всего неокрашенных чисел не меньше, чем $99 - 49 = 50$, и мы снова получаем противоречие.

Покажем, что 2450 желтых чисел может быть. Покрасим все числа от 51 до 2500. Такая покраска нам подходит, поскольку произведение любых двух желтых чисел больше 2500.

7.2. Положительные числа x, y, z, w таковы, что $x^3+y^3+z^3+w^3 = 4$. Найдите минимальное значение выражения

$$A = \frac{1}{x^2+yz} + \frac{1}{y^2+zw} + \frac{1}{z^2+wx} + \frac{1}{w^2+xy}\,.$$

Ответ: 2.

Решение. В силу неравенств Коши для среднего гармонического и среднего арифметического

$$A \geqslant \frac{16}{x^2+yz+y^2+zw+z^2+wx+w^2+xy} \geqslant \frac{8}{x^2+y^2+z^2+w^2}.$$

Воспользуемся неравенством

$$a^{2/3} + b^{2/3} \leqslant \sqrt[3]{2}\,(a+b)^{2/3} \quad \text{при} \quad a, b \geqslant 0.$$

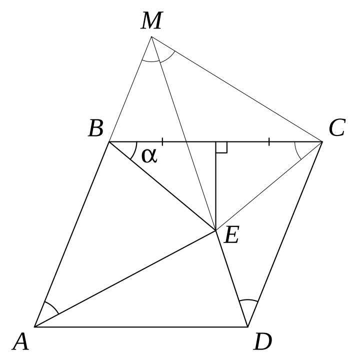
Применяя его три раза, мы получим

$$x^2+y^2+z^2+w^2 \leqslant \sqrt[3]{2}\left((x^3+y^3)^{2/3} + (z^3+w^3)^{2/3}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt[3]{4}\left(x^3+y^3+z^3+w^3\right)^{2/3} = 4.$$

Таким образом, $A \geqslant 2$. Равенство реализуется при $x = y = z = w = 1$.

7.3. Внутри параллелограмма $ABCD$ на серединном перпендикуляре к стороне BC взята такая точка E, что $\angle EDC = \angle EBC = \alpha$. Найдите угол AED.

Ответ: 2α.



Первое решение. Пусть M — точка пересечения прямых AB и DE. Очевидно, $\angle AMD = \alpha$. Заметим, что

$$\angle BCE = \angle EBC = \angle EDC = \angle BME.$$

Значит, четырехугольник $BMCE$ вписанный, откуда

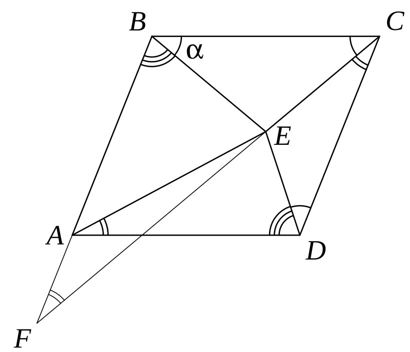
$$\angle CME = \alpha = \angle AMD \quad \text{и} \quad \angle MEC = \angle MBC = \angle MAD.$$

Поэтому треугольники MAD и MEC подобны, и мы получаем

$$\frac{ME}{AM} = \frac{MC}{MD} \Longrightarrow \frac{MD}{AM} = \frac{MC}{ME}.$$

Так как $\angle AME = \angle DMC$, треугольники AME и DMC подобны. Поскольку треугольник DMC равнобедренный, таковым будет и AME. Тогда

$$\angle AED = 2\angle AME = 2\alpha.$$



Второе решение. Пусть F — точка пересечения прямых CE и AB. Из параллельности прямых AB и CD вытекает равенство $\angle BFC = \angle ECD$. Поскольку точка E лежит на серединном перпендикуляре к отрезку BC,

$$\angle FCB = \angle EBC = \angle EDC.$$

Следовательно, треугольники FBC и CED подобны, откуда

$$\frac{AD}{BF} = \frac{BC}{BF} = \frac{ED}{EC} = \frac{ED}{EB}.$$

Кроме того,

$$\angle FBE = \angle ABC - \alpha = \angle ADC - \alpha = \angle ADE.$$

Значит, треугольники ADE и FBE подобны. Следовательно,

$$\angle AED = \angle FEB = 2\alpha.$$

7.4. В восьмеричной системе $x = 31\,31\,\ldots\,31$, где блок 31 повторяется n раз. При каких n число x будет точным квадратом?

Ответ: $n = 1$.

Решение. Ясно, что $x \vdots 25$ и число $y = \frac{9x}{25}$ — точный квадрат. Заметим, что

$$7y = 63\left(1 + 64 + 64^2 + \ldots + 64^{n-1}\right) = 8^{2n} - 1 = \left(8^n - 1\right)\left(8^n + 1\right).$$

Множители в правой части взаимно просты, поскольку они нечетны и различаются на 2. Число $8^n - 1$ кратно 7, поэтому $8^n + 1$ не делится на 7. Значит, $8^n + 1$ является точным квадратом, то есть найдется натуральное число p, при котором

$$8^n = p^2 - 1 = (p-1)(p+1).$$

Таким образом, $p - 1$ и $p + 1$ будут степенями двойки, откуда $p = 3$ и $n = 1$. Такое n, очевидно, удовлетворяет условию задачи.

7.5. В стране имеется n городов ($n \geqslant 4$). Некоторые из них связаны прямыми двусторонними авиалиниями так, что из любого города можно добраться в любой другой (возможно, с пересадками). Известно, что есть такая линия, закрытие которой приведет к нарушению воздушного сообщения между некоторыми городами (даже с пересадками). Общее количество авиалиний равно $\frac{1}{2}\left(n^2 - 3n + 4\right)$. Путешественник составил себе круговой маршрут, проходящий через k городов и не заходящий ни в один из них дважды. Какое наибольшее значение может принимать k?

Ответ: $n - 1$.

Решение. Пусть города A и B таковы, что закрытие линии AB нарушит полное воздушное сообщение. Обозначим через G_A и G_B множества городов, в которые можно попасть соответственно из A и B (возможно, с пересадками), включая сами A и B, а через a и b — количество городов в G_A и G_B. Заметим, что после удаления линии AB никакие города $C \in G_A$ и $D \in G_B$ не будут связаны авиалинией, иначе полное воздушное сообщение сохранилось бы. Отсюда вытекают два следствия.

1) G_A и G_B не пересекаются, откуда $a + b = n$.

2) Общее число авиалиний не превосходит

$$\frac{a(a-1)}{2} + \frac{b(b-1)}{2} + 1.$$

По условию в стране имеется $\frac{1}{2}\left(n^2 - 3n + 4\right)$ авиалиний. Тогда с учетом 1) и 2)

$$(a+b)^2 - 3a - 3b + 4 = n^2 - 3n + 4 \leqslant a(a-1) + b(b-1) + 2 = a^2 - a + b^2 - b + 2,$$

откуда после сокращений получаем

$$ab - a - b + 1 \leqslant 0 \Longleftrightarrow (a-1)(b-1) \leqslant 0.$$

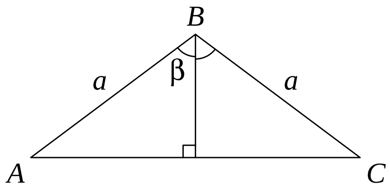
Следовательно, одно из чисел a и b равно 1 (пусть для определенности это a). Тогда город A соединен авиалинией только с B и потому не может входить ни в один круговой маршрут. Таким образом, $k \leqslant n-1$.

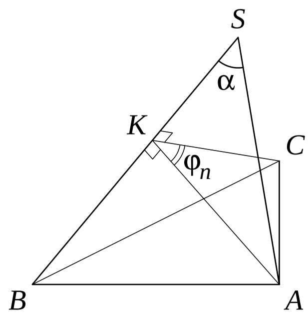
Покажем теперь, что $k=n-1$ возможно. Выберем некоторый город A и соединим его с каким-то городом, а все города, отличные от A, соединим линиями друг с другом. Ясно, что $k=n-1$. Общее количество авиалиний равно

$$C_{n-1}^2+1=\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1=\frac{n^2-3n+4}{2}.$$

7.6. Из металла отлито m одинаковых правильных пирамид ($m \geqslant 3$). Их удалось склеить так, что у них есть общее ребро и каждая пирамида имеет общую боковую грань ровно с двумя из остальных. Найдите минимальное значение плоского угла при вершине пирамид.

Ответ: $\arccos\frac{\sqrt{5}}{3}$.





Решение. Пусть S — общая вершина пирамид, a — сторона их основания, α — плоский угол при вершине, φ — угол между боковыми гранями. Предположим, что все пирамиды n-угольные. Возьмем одну из них и обозначим через A, B, C три последовательные вершины основания. Так как сумма углов n-угольника равна $\pi(n-2)$, мы получаем $\angle ABC=2\beta$, где $\beta=\frac{\pi(n-2)}{2n}$. Тогда

$$AC=2AB\cdot\sin\beta=2a\cdot\sin\left(\tfrac{\pi}{2}-\tfrac{\pi}{n}\right)=2a\cos\tfrac{\pi}{n}.$$

Опустим из точек A и C перпендикуляры на ребро BS. Они придут в одну точку K, причем $AK=CK$, так как треугольники ASB и BSC равны. По теореме косинусов

$$\cos\varphi=\frac{2AK^2-AC^2}{2AK^2}=\frac{2a^2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)-4a^2\cos^2\frac{\pi}{n}}{2a^2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}=$$

$$=\frac{1-\cos(\pi-\alpha)-2\left(1+\cos\frac{2\pi}{n}\right)}{1-\cos(\pi-\alpha)}=\frac{\cos\alpha-1-2\cos\frac{2\pi}{n}}{\cos\alpha+1}.$$

Пересечем всю конструкцию плоскостью, перпендикулярной общему ребру пирамид. В сечении каждой пирамиды окажется угол φ, и по условию между углами нет зазоров. Поэтому $\varphi=\frac{2\pi}{m}$ и

$$\cos\tfrac{2\pi}{m}=\frac{\cos\alpha-1-2\cos\frac{2\pi}{n}}{\cos\alpha+1}\iff\cos\alpha=\frac{1+\cos\frac{2\pi}{m}+2\cos\frac{2\pi}{n}}{1-\cos\frac{2\pi}{m}}.$$

Заметим, что с увеличением m или n правая часть растет, а угол α уменьшается. При этом должно выполняться условие

$$\frac{1+\cos\frac{2\pi}{m}+2\cos\frac{2\pi}{n}}{1-\cos\frac{2\pi}{m}}<1 \iff \cos\tfrac{2\pi}{m}+\cos\tfrac{2\pi}{n}<0.$$

Такое возможно, если одно из чисел m и n равно 3, а другое не превосходит 5. Тогда максимальное значение $\cos\alpha$ реализуется при $m=3$ и $n=5$. В этом случае

$$\cos\alpha=\frac{\frac{1}{2}+2\cos\frac{2\pi}{5}}{\frac{3}{2}}=\frac{1+4\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{4}}{3}=\frac{\sqrt{5}}{3}\,.$$

Вариант 8

8.1. Какое наибольшее количество натуральных чисел от 1 до 1800 можно покрасить в желтый цвет, чтобы удвоенное произведение любых двух желтых чисел не было бы желтым?

Ответ: 1770.

Решение. Рассмотрим набор чисел

$$1,2,\ldots,29;\ 31,32,\ldots,59;\ 2\big(30^2-29^2\big),2\big(30^2-28^2\big),\ldots,2\big(30^2-1\big).$$

Все эти числа различны, так как

$$2\big(30^2-29^2\big)=2\cdot 59>59.$$

Разобьем их на тройки вида

$$\big(30-n,\,30+n,\,2\left(30^2-n^2\right)\big),\quad \text{где}\ \ n\in\{1,\ldots,29\}.$$

Поскольку

$$2\,(30-n)(30+n)=2\big(30^2-n^2\big),$$

в каждой тройке есть хотя бы одно неокрашенное число, а всего имеется 29 таких троек. Кроме того, в паре $(30,1800)$ одно из чисел не окрашено, так как $2\cdot 30\cdot 30=1800$. Таким образом, мы нашли 30 неокрашенных чисел, поэтому количество желтых чисел не превосходит $1800-30=1770$.

Покажем, что эта оценка реализуется. Покрасим все числа от 31 до 1800. Такая покраска нам подходит, поскольку удвоенное произведение любых двух желтых чисел больше 1800.

8.2. Положительные числа x,y,z,w таковы, что $x^3+y^3+z^3+w^3=1$. Найдите минимальное значение выражения

$$A=\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{y^2+z^2}+\frac{1}{z^2+w^2}+\frac{1}{w^2+x^2}\,.$$

Ответ: $4\sqrt[3]{2}$.

Решение. В силу неравенств Коши для среднего гармонического и среднего арифметического

$$A \geqslant \frac{16}{2x^2+2y^2+2z^2+2w^2} \geqslant \frac{8}{x^2+y^2+z^2+w^2}.$$

Воспользуемся неравенством

$$a^{2/3}+b^{2/3} \leqslant \sqrt[3]{2}\,(a+b)^{2/3} \quad \text{при} \quad a,b \geqslant 0.$$

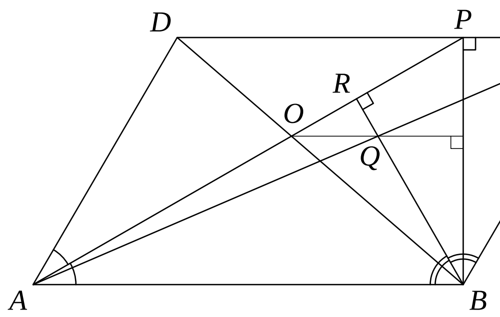
Применяя его три раза, мы получим

$$x^2+y^2+z^2+w^2 \leqslant \sqrt[3]{2}\left((x^3+y^3)^{2/3}+(z^3+w^3)^{2/3}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt[3]{4}\left(x^3+y^3+z^3+w^3\right)^{2/3} = \sqrt[3]{4}.$$

Таким образом, $A \geqslant 4\sqrt[3]{2}$. Равенство реализуется при $x=y=z=w=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$.

8.3. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла BAD пересекает сторону CD в точке P, а биссектриса угла ABC пересекает диагональ AC в точке Q. Найдите угол между прямыми PQ и BD, если $\angle BPD = 90°$.

Ответ: $90°$.



Решение. Пусть прямая AP пересекает прямую BQ в точке R, а отрезок BD — в точке O. Заметим, что

$$\angle ARB = 180° - (\angle RAB + \angle RBA) = 180° - \tfrac{1}{2}(\angle DAB + \angle ABC) = 180° - 90° = 90°.$$

По условию AO и BQ — биссектрисы треугольников ABD и ABC соответственно. Тогда

$$\frac{BO}{OD} = \frac{AB}{AD} = \frac{AB}{BC} = \frac{AQ}{QC}.$$

Кроме того,

$$\frac{BO}{OD} = \frac{AO}{OP}$$

в силу подобия треугольников AOB и POD. Поэтому

$$\frac{AO}{OP} = \frac{AQ}{QC}.$$

Значит, треугольники AOQ и APC подобны, откуда $OQ \parallel PC$ и $OQ \perp PB$. Таким образом, точка Q — ортоцентр треугольника OBP. Следовательно, луч PQ тоже является высотой этого треугольника, то есть $PQ \perp BD$.

8.4. В восьмеричной системе $x = 20\,20\,\ldots\,20$, где блок 20 повторяется n раз. При каких n число x будет четвертой степенью натурального числа?

Ответ: $n = 1$.

Решение. Так как $20_8 = 16 = 2^4$, случай $n = 1$ нам подходит. Покажем, что при $n > 1$ число x не может оказаться даже точным квадратом. Действительно, если x является квадратом, то и число $y = \frac{9x}{16}$ — точный квадрат. Заметим, что

$$7y = 63\left(1 + 64 + 64^2 + \ldots + 64^{n-1}\right) = 8^{2n} - 1 = \left(8^n - 1\right)\left(8^n + 1\right).$$

Множители в правой части взаимно просты, поскольку они нечетны и различаются на 2. Число $8^n - 1$ кратно 7, поэтому $8^n + 1$ не делится на 7. Значит, $8^n + 1$ является точным квадратом, то есть найдется натуральное число p, при котором

$$8^n = p^2 - 1 = (p-1)(p+1).$$

Числа $p \pm 1$ — степени двойки, различающиеся на 2, откуда $p - 1 = 2$ и $p + 1 = 4$. Но это невозможно, так как $n > 1$.

8.5. В стране имеется n городов ($n \geqslant 4$). Некоторые из них связаны прямыми двусторонними авиалиниями. Путешественник заказал турагентству составить ему такой круговой маршрут, охватывающий часть городов этой страны, чтобы некоторые два города на этом маршруте (не являющихся на нем соседними) были соединены авиалинией. Турагенство установило, что такой маршрут составить нельзя. Какое наибольшее количество авиалиний может быть в этой стране?

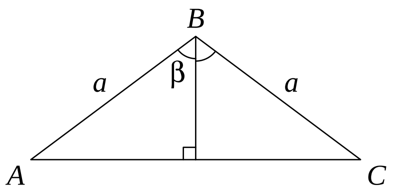
Ответ: $2n - 4$.

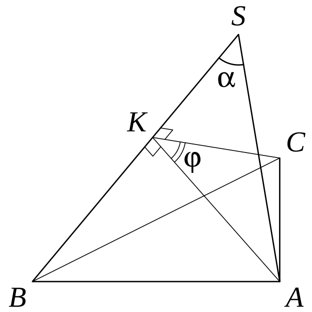
Решение. Приведем вначале пример страны с $2n-4$ авиалиниями. Возьмем два города A и B и соединим каждый из них линиями с остальными $n-2$ городами. Пусть некоторые города C и D на круговом маршруте не являются соседними и соединены линией. Тогда один из них (скажем, C) отличен от A и B. Город C связан линиями с двумя соседними городами на маршруте и с D. Но это невозможно, поскольку в C ведут лишь две линии. Значит, приведенный пример удовлетворяет условию задачи.

Покажем теперь, что $2n - 3$ линии быть не может. Докажем индукцией по n, что в этом случае существует маршрут, заказанный путешественником. При $n = 4$ утверждение очевидно. Предположим, что оно справедливо для некоторого n. Пусть в стране имеется $n+1$ городов и $2n-1$ авиалиний. Если есть город, в который ведет не более двух авиалиний, то удалим этот город и идущие в него линии. Останется n городов и не менее $2n-3$ линий, так что по индукционному предположению требуемый маршрут найдется. Поэтому можно считать, что в каждый город ведет не менее трех линий. Возьмем авиамаршрут $A_1A_2\ldots A_k$, проходящий через максимальное число различных городов. Тогда любой город B, соединенный линией с A_1, лежит на этом маршруте, иначе мы можем добавить B к маршруту. Поскольку A_1 связан не менее чем с тремя городами, найдутся такие i и j ($3 \leqslant i < j$), что имеются линии A_1A_i и A_1A_j. Тогда маршрут $A_1A_2\ldots A_i\ldots A_jA_1$ удовлетворяет требованиям путешественника, так как между городами A_1 и A_i есть сообщение.

8.6. Из дерева выточено m одинаковых правильных пирамид ($m \geqslant 3$). Их удалось разместить так, что все пирамиды имеют общее боковое ребро и общую вершину. Найдите максимальное значение плоского угла при вершине пирамид.

Ответ: $\pi - \arccos \frac{1}{3}$.





Решение. Пусть S — вершина пирамид, SB — их общее боковое ребро, a — сторона основания, α — плоский угол при вершине, φ — угол между боковыми гранями. Предположим, что все пирамиды n-угольные. Возьмем одну из них и обозначим через A и C вершины основания, смежные с B. Так как сумма углов n-угольника равна $\pi(n-2)$, мы получаем $\angle ABC = 2\beta$, где $\beta = \frac{\pi(n-2)}{2n}$. Тогда

$$AC = 2AB \cdot \sin\beta = 2a \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right) = 2a\cos\frac{\pi}{n}.$$

Опустим из точек A и C перпендикуляры на ребро BS. Они придут в одну точку K, причем $AK = CK$, так как треугольники ASB и BSC равны. По теореме косинусов

$$\cos\varphi = \frac{2AK^2 - AC^2}{2AK^2} = \frac{2a^2\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) - 4a^2\cos^2\frac{\pi}{n}}{2a^2\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)} =$$
$$= \frac{1 - \cos(\pi - \alpha) - 2\left(1 + \cos\frac{2\pi}{n}\right)}{1 - \cos(\pi - \alpha)} = \frac{\cos\alpha - 1 - 2\cos\frac{2\pi}{n}}{\cos\alpha + 1}.$$

Пересечем всю конструкцию плоскостью, перпендикулярной ребру SB. В сечении каждой пирамиды окажется угол φ. Поскольку эти углы не налегают друг на друга, сумма их величин не превосходит 2π, откуда

$$\varphi \leqslant \frac{2\pi}{m} \Longleftrightarrow \cos\frac{2\pi}{m} \leqslant \cos\varphi = \frac{\cos\alpha - 1 - 2\cos\frac{2\pi}{n}}{\cos\alpha + 1} \Longleftrightarrow \cos\alpha \geqslant \frac{1 + \cos\frac{2\pi}{m} + 2\cos\frac{2\pi}{n}}{1 - \cos\frac{2\pi}{m}}.$$

Значит, угол α острый при $n > 3$. Пусть $n = 3$. Тогда

$$\cos\alpha \geqslant \frac{\cos\frac{2\pi}{m}}{1 - \cos\frac{2\pi}{m}} \geqslant \frac{\cos\frac{2\pi}{3}}{1 - \cos\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{3} \Longrightarrow \alpha \leqslant \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) = \pi - \arccos\frac{1}{3}.$$

Равенство в последнем неравенстве реализуется, когда имеется ровно три треугольные пирамиды, причем между ними нет «зазоров», то есть $\varphi = \frac{2\pi}{3}$.

Вариант 9

9.1. Какое наибольшее количество натуральных чисел от 1 до 2020 можно покрасить в черный цвет так, чтобы нельзя было выбрать различные черные числа a, b и c, для которых a делится на b и b делится на c?

Ответ: 1515.

Решение. Для любого нечетного n, не превосходящего 2020, рассмотрим геометрическую прогрессию

$$G(n) = \{n \cdot 2^k : \ k = 0, 1, 2, \ldots\}.$$

Очевидно, $G(m)$ и $G(n)$ не имеют общих членов при $m \neq n$, а любое число от 1 до 2020 входит в некоторую прогрессию. По условию в каждой прогрессии $G(n)$ может быть не более двух черных чисел, а при $n > 1010$ — не более одного черного числа. Поэтому общее количество черных чисел не превосходит

$$505 \cdot 2 + 505 = 1515.$$

Покажем, что полученная оценка реализуется. Покрасим все числа от 506 до 2020 и проверим, что такая покраска удовлетворяет условию задачи. Пусть a, b, c — различные числа от 1 до 2020, причем a делится на b и b делится на c. Если число c черное, то

$$a \geqslant 2b \geqslant 4c \geqslant 4 \cdot 506 = 2024,$$

что невозможно.

9.2. Положительные числа x, y, z таковы, что $xy + yz + zx = 3$. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{\left(\sqrt{x^2+yz} + \sqrt{y^2+zx} + \sqrt{z^2+xy}\right)^2}{x^3+y^3+z^3}.$$

Ответ: 6.

Решение. Заметим, что

$$\sqrt{x^2+yz} + \sqrt{y^2+zx} + \sqrt{z^2+xy} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{3\left(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx\right)} \leqslant \sqrt{6} \cdot \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Кроме того,

$$x^3+y^3+z^3 \geqslant \frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}{\sqrt{3}} =$$
$$= (x^2+y^2+z^2) \cdot \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}} \geqslant \frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)(x+y+z)}{3}.$$

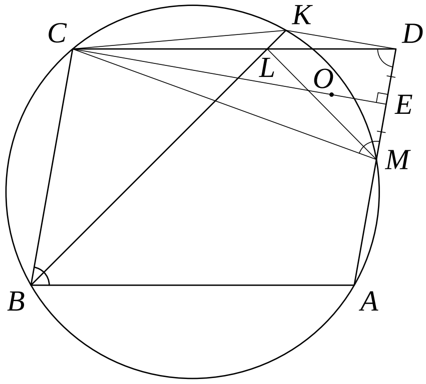
Поэтому

$$A \leqslant \frac{18\left(x^2+y^2+z^2\right)}{(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2\right)} = \frac{18}{x+y+z} \leqslant \frac{18}{\sqrt{3\,(xy+yz+zx)}} = 6.$$

Равенство реализуется при $x = y = z = 1$.

9.3. Дан параллелограмм $ABCD$ с острым углом B. Вне параллелограмма выбрана такая точка K, что четырехугольник $ABCK$ — описанный. Пусть L — точка пересечения отрезков BK и CD, O — центр описанной окружности треугольника DKL. Найдите угол BCO.

Ответ: 90°.



Решение. Пусть окружность, описанная около четырехугольника $ABCK$, вторично пересекает отрезок AD в точке M, а точка E — середина DM. В силу вписанности $ABKM$

$$\angle MKL = 180^\circ - \angle BAM = \angle MDL,$$

то есть четырехугольник $DKLM$ — тоже вписанный. Значит, точка O — центр описанной окружности четырехугольника $DKLM$, поэтому O лежит на серединном перпендикуляре к отрезку DM. Заметим, что

$$\angle CMD = 180^\circ - \angle AMC = \angle ABC = \angle CDM.$$

Следовательно, треугольник CDM равнобедренный, и отрезок CE — его высота. Таким образом, точка O лежит на прямой CE, откуда

$$\angle BCO = \angle BCE = \angle CED = 90^\circ.$$

9.4. В шестнадцатеричной системе $x = 31\ \ldots\ 31$, где блок 31 повторяется n раз. При каких n число x будет точным квадратом?

Ответ: $n = 1$.

Решение. Так как $31_{16} = 49 = 7^2$, случай $n = 1$ нам подходит. Пусть $n > 1$. Ясно, что $x \vdots 49$ и $\frac{x}{49} = z^2$, где

$$z^2 = 1 + 256 + 256^2 + \ldots + 256^{n-1} = \frac{16^{2n} - 1}{255},$$

откуда

$$3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot z^2 = \big(2^n - 1\big)\big(2^n + 1\big)\big(4^n + 1\big)\big(16^n + 1\big).$$

Множители в правой части попарно взаимно просты, поскольку пары чисел $2^n \pm 1$, $4^n \pm 1$ и $16^n \pm 1$ нечетны и различаются на 2. Так как этих множителей четыре, хотя бы один из них не делится на 3, 5, 17 и потому является точным квадратом. Рассмотрим два случая.

1) *Число $2^n - 1$ — точный квадрат, то есть $2^n - 1 = p^2$.* Тогда

$$2^n - 2 = (p^2 - 1) = (p - 1)(p + 1).$$

Ввиду нечетности p правая часть делится на 8, тогда как левая не делится на 4 при $n > 1$.

2) *Одно из чисел* 2^n+1, 4^n+1, 16^n+1 — *точный квадрат.* Все эти числа имеют вид 2^m+1, где $m \in \{n, 2n, 4n\}$. Пусть $2^m+1=p^2$. Тогда

$$2^m=(p-1)(p+1).$$

Числа $p \pm 1$ — степени двойки, различающиеся на 2, откуда $p-1=2$. Поэтому

$$p=3, \quad m=n=3, \quad 2^n-1=7.$$

Поскольку числа вида 2^m+1 не делятся на 7, число $3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot z^2$ делится на 7, но не на 49, что невозможно.

9.5. В стране имеется n городов ($n \geqslant 6$), некоторые из которых связаны прямыми двусторонними авиалиниями. Назовем *круизом* круговой перелет через несколько городов, при котором ни одна авиалиния не используется более одного раза. Известно, что участники любых двух круизов побывают хотя бы в одном общем городе. Какое наибольшее количество авиалиний может быть в этой стране?

Ответ: $3n-6$.

Решение. Построим вначале пример с $3n-6$ линиями. Выберем какую-то тройку городов $\mathcal{A}$ и соединим эти города авиалиниями друг с другом и со всеми остальными городами. Мы получим в общей сложности

$$3\,(n-3)+3=3n-6$$

линий. Заметим, что любой круиз проходит по крайней мере через два города из $\mathcal{A}$. Действительно, если на маршруте круиза есть город $B \notin \mathcal{A}$, то предыдущий и последующий города круиза входят в $\mathcal{A}$, поскольку с другими городами у B нет сообщения. Пусть у нас есть два круиза. По доказанному каждый их них проходит через два города из $\mathcal{A}$. Но в $\mathcal{A}$ всего 3 города, поэтому один из городов у круизов общий. Значит, такая сеть линий удовлетворяет условию задачи.

Докажем теперь, что более $3n-6$ линий быть не может. Допустим, что нашлась сеть из $3n-5$ линий. Рассмотрим круиз $\mathcal{P}=A_1 \to A_2 \to \ldots \to A_k \to A_1$, проходящий через минимально возможное число городов. По условию любой круиз должен проходить хотя бы через один из городов A_i. Обозначим через $B_1, B_2, \ldots, B_{n-k}$ остальные города. Поскольку организовать круиз только через города B_i нельзя, между ними проходит не более $n-k-1$ авиалиний. Заметим, что только соседние города в $\mathcal{P}$ имеют прямое сообщение (иначе можно маршрут через несколько городов заменить прямой линией, сократив длину круиза). Докажем, что $k=3$. Если $k \geqslant 4$, то любой из городов B_j связан не более чем с двумя городами A_i. Действительно, в противном случае некоторый город B_j связан с двумя A_p и A_q, кратчайший путь между которыми вдоль $\mathcal{P}$ (возможно, в противоположном направлении) не длиннее $\left[\frac{k}{3}\right]$. Тогда можно организовать круиз $A_p \to B_j \to A_q \to A_p$ длиной $\left[\frac{k}{3}\right]+2$. Поскольку

$$k-\left[\tfrac{k}{3}\right]-2 \geqslant k-\tfrac{k}{3}-2=\tfrac{2k-6}{3}>0,$$

получившийся круиз будет короче $\mathcal{P}$, что невозможно.

Можно считать, что в любой город B_j ведет не менее 4 авиалиний. Если это не так, удалим все города B_j, в которые идет менее 4 авиалиний, а также сами эти линии. Каждое такое удаление уменьшает число городов на 1, а количество линий — не более чем на 3. В итоге мы получим m городов и не менее $3m-5$ линий при $m<n$, которые удовлетворяют дополнительному требованию. При таком условии любой город B_p связан с каким-то городом B_q, поскольку городов A_i только три.

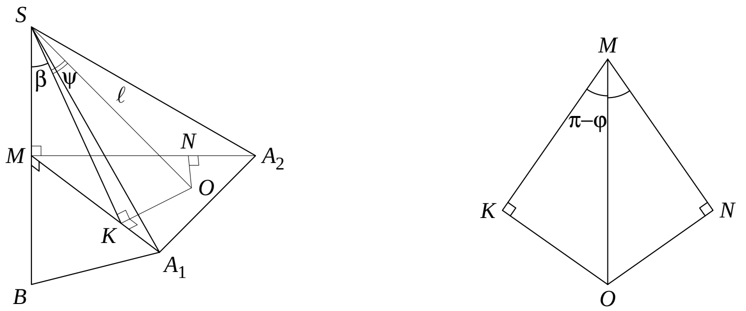
Назовем город B_i *крайним*, если он связан линией лишь с одним из остальных городов B_j. Заметим, что любой крайний город связан с A_1, A_2, A_3. Выберем маршрут $B_p \to B_q$ максимальной длины, проходящий через разные города B_i. Города B_p и B_q крайние, иначе один из них связан еще с каким-то городом маршрута и существует круиз по городам B_i. Возможны два случая.

1) *Маршрут $B_p \to B_q$ проходит через все города B_i.* Возьмем произвольный город B_r, отличный от B_p и B_q. Он связан линией с каким-то из A_i (скажем, с A_1). Тогда круизы $A_1 \to B_p \to B_r \to A_1$ и $A_2 \to A_3 \to B_q \to A_2$ не имеют общих городов, что невозможно.

2) *Существует город B_i, не лежащий на пути $B_p \to B_q$.* Выберем маршрут $B_r \to B_s$ максимальной длины, проходящий через разные города B_i, не лежащие на пути $B_p \to B_q$. Из B_r идет не более одной линии в города маршрута $B_p \to B_q$ (иначе получится круиз через города B_i) и не более одной линии в другие города B_i (иначе путь $B_r \to B_s$ не максимален). Поэтому город B_r связан хотя бы с двумя из городов A_i (например, с A_2 и A_3). Тогда круизы $A_1 \to B_p \to B_q \to A_1$ и $A_2 \to A_3 \to B_r \to A_2$ не имеют общих городов, что невозможно.

9.6. Даны две правильные треугольные пирамиды с вершиной S и плоским углом при вершине $\alpha = \pi - \arccos\frac{1}{3}$. Они имеют общую боковую грань и не имеют других общих точек. Конус с вершиной S касается внешним образом обеих пирамид. Найдите максимально возможный угол при вершине конуса, при котором это возможно. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении).

Ответ: $2\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{6}}{3}$.



Решение. Пусть BSC — общая боковая грань пирамид, A_1SB и A_2SB — их боковые грани, касающиеся конуса, ℓ — ось симметрии конуса, 2ψ — угол при его вершине. Так как боковые грани пирамид одинаковы, перпендикуляры, опущенные из точек A_1, A_2 и C на BS, придут в одну точку M. Отсюда, в частности, вытекает, что $A_1M = CM$. Кроме того, плоскость A_1MA_2 перпендикулярна граням A_1SB и A_2SB. Конус касается этих граней, поэтому можно выбрать точки K на A_1M и N на A_2M так, что SK и SN — образующие конуса.

Пусть O — точка пересечения ℓ с плоскостью A_1MA_2. Докажем, что $OK \perp A_1MS$. Впишем в конус шар, содержащий точку K. Он касается плоскости A_1MS, так как лежит по одну сторону от нее. Тогда радиус шара, проходящий через точку K, перпендикулярен A_1MS. Значит, он лежит в плоскости A_1MA_2, а центр шара принадлежит ℓ. Поэтому O — центр шара, откуда $OK \perp A_1MS$. Аналогично проверяется, что $ON \perp A_2MS$. Очевидно, что прямоугольные треугольники MKO и MNO равны.

Пусть $a = A_1B$, φ — угол между боковыми гранями пирамид. Заметим, что

$$A_1M = A_1B \cdot \sin\angle A_1BM = a\,\sin\left(\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{\alpha}{2}\right) = a\,\cos\tfrac{\alpha}{2} \quad \text{и} \quad CM = a\,\cos\tfrac{\alpha}{2}\,.$$

Воспользуемся теоремой косинусов для треугольника A_1MC:

$$\cos\varphi = \cos\angle A_1MC = \frac{2A_1M^2 - A_1C^2}{2A_1M^2} = \frac{2a^2\cos^2\frac{\alpha}{2} - a^2}{2a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \\ = \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha + 1} = \frac{-\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = -\frac{1}{2} \Longrightarrow \varphi = \tfrac{2\pi}{3}.$$

Так как точка C лежит в плоскости KMN и

$$\angle A_1MC = \angle A_2MC = \varphi,$$

мы получаем

$$\angle KMO = \tfrac{1}{2}\,\angle KMN = \tfrac{1}{2}\,(2\pi - 2\varphi) = \pi - \varphi = \tfrac{\pi}{3}$$

и

$$\operatorname{tg}\angle KMO = \sqrt{3}.$$

Положим $\beta = \angle MSK$. Тогда

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{KO}{SK} = \frac{KM \cdot \operatorname{tg}\angle KMO}{SK} = \sqrt{3}\,\sin\beta.$$

Значит, угол ψ возрастает с ростом β, а максимальное значение β есть α. В случае $\beta = \alpha$

$$\operatorname{tg}\psi = \sqrt{3} \cdot \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \tfrac{2\sqrt{6}}{3}.$$

Вариант 10

10.1. Какое наибольшее количество нечетных натуральных чисел от 1 до 3600 можно покрасить в черный цвет, чтобы нельзя было выбрать такую тройку различных черных чисел a, b и c, что a делится на b и b делится на c?

Ответ: 1600.

Решение. Для любого нечетного n, не кратного 3 и не превосходящего 3600, рассмотрим геометрическую прогрессию

$$G(n) = \{n \cdot 3^k : \; k = 0, 1, 2, \ldots\}.$$

Очевидно, $G(m)$ и $G(n)$ не имеют общих членов при $m \neq n$, а любое нечетное число от 1 до 3600 входит в некоторую прогрессию. Заметим, что всего существует 1200 прогрессий вида $G(n)$, и 800 из них соответствует числам $n > 1200$. По условию в $G(n)$ может быть не более двух черных чисел, а при $n > 1200$ — не более одного черного числа. Поэтому общее количество черных чисел не превосходит

$$(1200 - 800) \cdot 2 + 800 = 1600.$$

Покажем, что полученная оценка реализуется. Покрасим все нечетные числа, лежащие между 400 и 3600, и проверим, что такая покраска удовлетворяет условию задачи. Пусть a, b, c — различные нечетные числа от 1 до 3600, причем a делится на b и b делится на c. Если число c черное, то

$$a \geqslant 3b \geqslant 9c \geqslant 9 \cdot 401 = 3609,$$

что невозможно.

10.2. Положительные числа x, y, z таковы, что $xy + yz + zx = 27$. Найдите минимальное значение выражения

$$A = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{\left(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1} + \sqrt{z^2+1}\,\right)^2}.$$

Ответ: $\frac{9}{10}$.

Решение. Заметим, что

$$3 = \frac{1}{9}\,(xy + yx + zx) \leqslant \frac{1}{9}\,(x^2 + y^2 + z^2),$$

откуда

$$\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1} + \sqrt{z^2+1} \leqslant \sqrt{3\left(x^2 + y^2 + z^2 + 3\right)} \leqslant \sqrt{\tfrac{10}{3}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)}\,.$$

Кроме того,

$$x^3 + y^3 + z^3 \geqslant \frac{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}}{\sqrt{3}} = \\ = (x^2 + y^2 + z^2) \cdot \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}} \geqslant \frac{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)(x + y + z)}{3}\,.$$

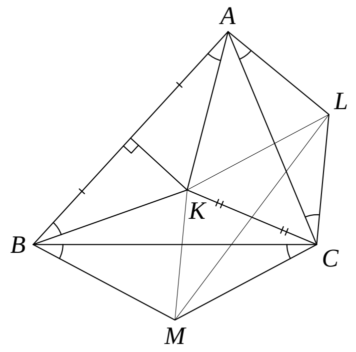
Поэтому

$$A \geqslant \frac{(x + y + z)\left(x^2 + y^2 + z^2\right)}{10\left(x^2 + y^2 + z^2\right)} = \frac{x + y + z}{10} \geqslant \frac{\sqrt{3\,(xy + yz + zx)}}{10} = \frac{9}{10}\,.$$

Равенство реализуется при $x = y = z = 3$.

10.3. Внутри треугольника ABC на серединном перпендикуляре к стороне AB выбрана точка K. На сторонах AC и BC во внешнюю сторону построены треугольники ALC и BMC, подобные треугольнику AKB. В каком отношении прямая LM делит отрезок CK?

Ответ: $1 : 1$.



Первое решение. Из подобия треугольников BMC и AKB следует, что

$$\frac{BC}{BM} = \frac{AB}{BK}\,.$$

Кроме того,

$$\angle ABC = \angle ABK + \angle KBC = \angle CMB + \angle KBC = \angle KBM.$$

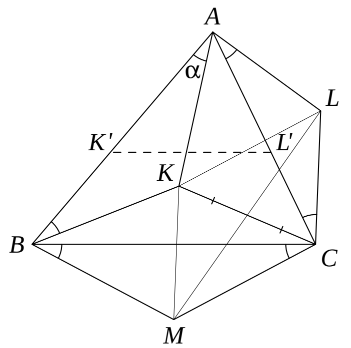
Поэтому треугольник KBM подобен ABC. Аналогичным образом проверяется, что треугольник AKL подобен ABC. Значит, $\triangle KBM$ и $\triangle AKL$ подобны друг другу. Отсюда вытекает, что

$$\frac{KM}{AL} = \frac{BM}{KL} \iff \frac{KM}{CL} = \frac{CM}{KL},$$

а также

$$\angle KMC = \angle BMC - \angle BMK = \angle ALC - \angle ALK = \angle KLC.$$

Тогда треугольники KMC и CLK подобны и имеют общую сторону CK, то есть они равны. Мы получили, в частности, равенства $KM = CL$ и $KL = MC$. Следовательно, четырехугольник $KMCL$ является параллелограммом, и его диагональ KC делится другой диагональю LM пополам.



Второе решение. По условию

$$\angle KAB = \angle LAC = \angle MCB.$$

Обозначим общее значение этих углов через α. Повернем треугольник LAK относительно точки A на угол α так, чтобы K и L перешли в точки K' и L', лежащие на прямых AB и AC соответственно. Из подобия треугольников ALC и AKB вытекает, что

$$\frac{AK'}{AL'} = \frac{AK}{AL} = \frac{AB}{AC} \Longrightarrow \frac{AK'}{AB} = \frac{AL'}{AC},$$

откуда по теореме Фалеса $K'L' \parallel BC$.

При повороте на угол α относительно точки C прямая BC переходит в MC. Тогда при повороте на угол α относительно точки A она перейдет в прямую, параллельную MC. С другой стороны, образ BC будет параллелен прямой KL, в которую при таком же повороте перейдет $K'L'$. Значит, $KL \parallel MC$. Аналогично доказывается, что $KM \parallel LC$. Таким образом, четырехугольник $KLCM$ является параллелограммом, и его диагональ KC делится другой диагональю LM пополам.

10.4. В восьмеричной системе $x = 1021 \ldots 1021$, где блок 1021 повторяется n раз. При каких n число x будет точным квадратом?

Ответ: $n = 1$.

Решение. Так как $1021_8 = 529 = 23^2$, случай $n = 1$ нам подходит. Пусть $n > 1$. Ясно, что число $y = \frac{9x}{529}$ — точный квадрат. Заметим, что

$$5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot y = 455 \cdot y = 4095 \cdot \left(1 + 8^4 + 8^8 + \ldots + 8^{4(n-1)}\right) = \\ = 8^{4n} - 1 = \left(8^n - 1\right)\left(8^n + 1\right)\left(8^{2n} + 1\right).$$

Множители в правой части попарно взаимно просты, поскольку пары чисел $8^n \pm 1$ и $8^{2n} \pm 1$ нечетны и различаются на 2. Так как $8^n - 1 \,\vdots\, 7$ при любом n, числа $8^n + 1$ и $8^{2n} + 1$ не делятся на 7. Возможны два случая.

1) *n четно.* Тогда число $8^{2n} + 1$ не делится на 5 и 13 и потому является точным квадратом.

2) *n нечетно.* Тогда число $8^{2n} + 1$ делится на 65. Значит, число $8^n + 1$ взаимно просто с 455 и потому является точным квадратом.

В обоих случаях мы получаем, что квадратом должно быть число вида $8^m + 1$, где $m = n$ или $m = 2n$. Пусть $8^m + 1 = p^2$. Тогда

$$8^m = (p-1)(p+1).$$

Числа $p \pm 1$ — степени двойки, различающиеся на 2, откуда $p - 1 = 2$ и $p + 1 = 4$. Но это невозможно, так как $m > 1$.

10.5. В стране имеется n городов ($n \geqslant 6$), некоторые из которых связаны прямыми двусторонними авиалиниями. Назовем *круизом* круговой перелет через несколько городов, при котором ни одна авиалиния не используется более одного раза. Известно, что для любых двух круизов обязательно найдется пара городов, между которыми участники обоих круизов проедут (возможно, в разных направлениях). Какое наибольшее количество авиалиний может быть в этой стране?

Ответ: $n + 3$.

Решение. Построим пример с $n+3$ линиями. Пусть вначале $n = 6$. Разобьем города на две группы: A_1, A_2, A_3 и B_1, B_2, B_3. Соединим линией любой город A_i с каждым городом B_j. Тогда круизов через 3 города быть не может, поскольку некоторые два из них принадлежат одной группе и не соединены авиалинией. Значит, каждый круиз проходит минимум через 4 города. Рассмотрим два круиза. Так как городов меньше 8, оба пройдут через какой-то общий город. Каждый из круизов использует две линии, связанные с этим городом (для прилета и отлета). Но в город ведут только 3 линии, поэтому по какой-то из них проедут участники обоих круизов.

Если $n > 6$, то все остальные города соединим авиалинией с A_1. Условие на круизы остается выполненным, поскольку через добавленные города они проходить не могут. Общее число авиалиний будет равно

$$9 + (n - 6) = n + 3.$$

Допустим теперь, что между городами действуют $n + 4$ авиалинии. Покажем вначале, что не существует круизов, проходящих через 3 или 4 города. Действительно, пусть такой круиз нашелся. Удалим все линии, по которым от проходит. После этого никаких круизов организовать уже будет нельзя, так как по условию любой другой круиз задействует одну из удаленных линий. Но после удалений осталось не менее n линий, соединяющих n городов. Значит, хотя бы еще один круиз организовать можно, и мы получаем противоречие.

Мы можем считать, что в любой город ведет не менее трех линий. Пусть это не так. Выполним одно из следующих действий.

1) Если в некоторый город ведет лишь одна авиалиния — удалим и город, и линию.

2) Если из города A идут ровно две авиалинии (скажем, в города B и C) — удалим A и линии AB и AC, а города B и C соединим напрямую. Это возможно, так как круизов через три города не существует и, значит, между B и C не было сообщения.

Каждое из действий уменьшает на 1 число городов и количество линий. Покажем, что такие удаления не нарушают условия задачи. В случае 1) это очевидно, поскольку через удаленный город не могло проходить круизов. Пусть после действия 2) мы получили два круиза без общих линий. Тогда один из них должен содержать добавленную линию $B \to C$. Но ее можно заменить маршрутом $B \to A \to C$, и мы получим два круиза без общих линий в исходной сети городов, что невозможно. Таким образом, задача свелась к исходной, но с $n - 1$ городами. Будем повторять эти действия до тех пор, пока не добьемся требуемого.

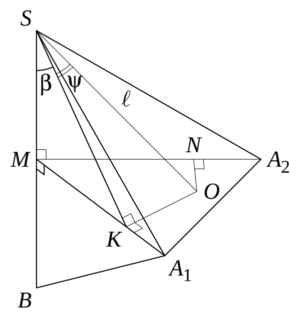
Если в каждый город ведет не менее трех линий, то общее число линий не меньше, чем $\frac{3n}{2}$, откуда

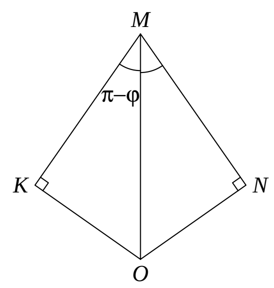
$$n + 4 \geqslant \tfrac{3n}{2} \Longleftrightarrow n \leqslant 8.$$

Пусть A — некоторый город. Он связан по крайней мере с тремя городами (скажем, B_1, B_2, B_3). Между городами B_i нет сообщения, иначе существовал бы круиз вида $A \to B_i \to B_j \to A$. Каждый из городов B_i помимо A связан еще как минимум с двумя разными городами. Они различны при разных i, в противном случае существует круиз вида $A \to B_i \to C \to B_j \to A$. Таким образом, мы нашли не менее 10 городов, что противоречит условию $n \leqslant 8$. Поэтому $n + 4$ авиалинии в стране быть не может.

10.6. Даны две правильные четырехугольные пирамиды со стороной основания 2 и боковым ребром $\sqrt{10}$. Они имеют общую боковую грань и не имеют других общих точек. Конус имеет ту же вершину S, что пирамиды, и касается их внешним образом. Найдите максимально возможный угол при вершине конуса, при котором это возможно. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении).

Ответ: $2 \operatorname{arctg} \frac{12}{\sqrt{5}}$.





Решение. Пусть BSC — общая боковая грань пирамид, A_1SB и A_2SB — их боковые грани, касающиеся конуса, ℓ — ось симметрии конуса, 2ψ — угол при его вершине. Так как боковые грани пирамид одинаковы, перпендикуляры, опущенные из точек A_1, A_2 и C на BS, придут в одну точку M. Отсюда, в частности, вытекает, что $A_1M = CM$. Кроме того, плоскость A_1MA_2 перпендикулярна граням A_1SB и A_2SB. Конус касается этих граней, поэтому можно выбрать точки K на A_1M и N на A_2M так, что SK и SN — образующие конуса.

Пусть O — точка пересечения ℓ с плоскостью A_1MA_2. Докажем, что $OK \perp A_1MS$. Впишем в конус шар, содержащий точку K. Он касается плоскости A_1MS, так как лежит по одну сторону от нее. Тогда радиус шара, проходящий через точку K, перпендикулярен A_1MS. Значит, он лежит в плоскости A_1MA_2, а центр шара принадлежит ℓ. Поэтому O — центр шара, откуда $OK \perp A_1MS$. Аналогично проверяется, что $ON \perp A_2MS$. Очевидно, что прямоугольные треугольники MKO и MNO равны.

Пусть α — плоский угол при вершине пирамид, φ — угол между их боковыми гранями. Тогда

$$\sin\tfrac{\alpha}{2} = \frac{A_1B}{2A_1S} = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad \text{откуда} \quad \cos\tfrac{\alpha}{2} = \frac{3}{\sqrt{10}} \ \text{ и } \ \sin\alpha = \frac{3}{5}.$$

Справедливы также равенства

$$A_1M = A_1B \cdot \sin\angle A_1BM = 2\sin\left(\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{\alpha}{2}\right) = 2\cos\tfrac{\alpha}{2} = \frac{6}{\sqrt{10}} \quad \text{и} \quad CM = \frac{6}{\sqrt{10}}.$$

Воспользуемся теоремой косинусов для треугольника A_1MC:

$$\cos\varphi = \cos\angle A_1MC = \frac{2A_1M^2 - A_1C^2}{2A_1M^2} = \frac{\frac{36}{5} - 8}{\frac{36}{5}} = -\tfrac{1}{9}.$$

Так как точка C лежит в плоскости KMN и $\angle A_1MC = \angle A_2MC = \varphi$, мы получаем

$$\cos\angle KMO = \cos(\pi - \varphi) = -\cos\varphi = \tfrac{1}{9} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}\angle KMO = \sqrt{9^2 - 1} = 4\sqrt{5}.$$

Положим $\beta = \angle MSK$. Тогда

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{KO}{SK} = \frac{KM \cdot \operatorname{tg}\angle KMO}{SK} = 4\sqrt{5} \cdot \sin\beta.$$

Значит, угол ψ возрастает с ростом β, а максимальное значение β есть α. В случае $\beta = \alpha$

$$\operatorname{tg}\psi = 4\sqrt{5} \cdot \sin\alpha = 4\sqrt{5} \cdot \tfrac{3}{5} = \tfrac{12}{\sqrt{5}}.$$

Олимпиада школьников СПбГУ по математике

Заключительный этап. 2019/2020 учебный год

Задания для 8–9 классов

(Правильное и полное решение каждой задачи оценивается в 20 баллов)

Вариант 1

1.1. По итогам контрольной средний балл в классе среди писавших ее оказался равным 3,1. Но двое учеников проболели контрольную и написали ее позже на 4 и 5. В результате средний балл в классе увеличился на 0,1. Сколько было учеников в классе?

Ответ: 28.

Решение. Пусть в классе было n школьников. Тогда сумма баллов, набранных на контрольной вначале, была равна $3{,}1(n-2)$. Когда контрольную написали двое проболевших, средний балл стал равен
$$\frac{3{,}1(n-2)+9}{n} = 3{,}2.$$
Следовательно, $3{,}1(n-2)+9 = 3{,}2\,n$, откуда $n = 28$.

1.2. При каких a оба корня квадратного трехчлена $ax^2 - 2(a+8)x + 9a$ отрицательны?

Ответ: $-2 < a < 0$.

Решение. Если $a \geqslant 0$, то сумма корней положительна, поэтому хотя бы один из них тоже положительный. Следовательно, $a < 0$. Найдем при каких $a < 0$ трехчлен имеет два корня. Для этого нужно, чтобы дискриминант d был больше нуля, т. е.
$$d = 4(a+8)^2 - 4\cdot 9a\cdot a = -32(a^2-2a-8) = -32(a-4)(a+2) > 0.$$
Таким образом, $a > -2$, и в этом случае у трехчлена есть два корня. Их произведение равно 9, значит, они одного знака. Сумма корней равна
$$2(a+8)/a < 0,$$
поэтому они отрицательны.

1.3. Поле представляет собой таблицу 20×20. В двух ее соседних по стороне клетках зарыт клад. За один ход можно проверить любую клетку на наличие в ней клада. За какое наименьшее количество ходов можно гарантированно выяснить, в каких клетках зарыт клад?

Ответ: 200.

Решение. Оценка. Пусть сделано 199 проверок. Доску можно разбить как на 200 вертикальных, так и на 200 горизонтальных доминошек. Найдется по одной доминошке каждого типа, ни одна клетка которых не проверена. Поэтому клад может быть зарыт в любой из этих двух доминошек.

Пример. Раскрасим доску в шахматном порядке. Проверим сначала все некрайние черные клетки (это 162 проверки). Если в одной из них находится клад, то проверим четыре ее соседа и полностью узнаем местоположение клада. Если за 162 проверки ничего не найдено, то проверим все крайние неугловые черные клетки (это 36 проверок). Если в какой-то из них есть клад, то у нас осталось еще две проверки для того, чтобы выяснить про оставшуюся клетку с кладом. У крайней клетки есть три соседа, проверим двух из них и либо найдем вторую клетку с кладом, либо клад будет в оставшейся соседней клетке. Наконец, разберем случай, когда все $162 + 36 = 198$ проверок не обнаружили клад. Тогда мы знаем, что он точно есть в одной из черных угловых клеток (пусть это клетки A и B). Проверим сначала клетку A. Если в ней есть клад, то последней проверкой посмотрим на одного из ее соседей. Тогда либо мы обнаружили клад, либо он во второй соседней клетке. Если же в A нет клада, то мы точно знаем, что он есть в B. Потому последней проверкой посмотрим на одного из соседей B.

1.4. Для любых положительных чисел x, y и z докажите неравенство

$$3(x^2 + xy + y^2)(y^2 + yz + z^2)(z^2 + zx + x^2) \geqslant (x + y + z)^2(xy + yz + zx)^2.$$

Решение. С помощью раскрытия скобок и неравенства о средних для двух чисел легко проверить, что $4(x^2 + xy + y^2) \geqslant 3(x + y)^2$. Следовательно,

$$3(x^2 + xy + y^2)(y^2 + yz + z^2)(z^2 + zx + x^2) \geqslant \left(\frac{9}{8}(x + y)(y + z)(z + x)\right)^2.$$

Поэтому достаточно доказать неравенство

$$9(x + y)(y + z)(z + x) \geqslant 8(x + y + z)(xy + yz + zx), \qquad (*)$$

которое после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых превращается в неравенство

$$x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + z^2x + zx^2 \geqslant 6xyz.$$

Но это сумма очевидных неравенств

$$x^2y + yz^2 \geqslant 2xyz, \quad y^2z + zx^2 \geqslant 2xyz \quad \text{и} \quad z^2y + yx^2 \geqslant 2xyz.$$

Замечание. Неравенство $(*)$ можно доказать и иначе. Воспользуемся тождеством

$$(x + y + z)(xy + yz + xz) = (x + y)(y + z)(z + x) + xyz.$$

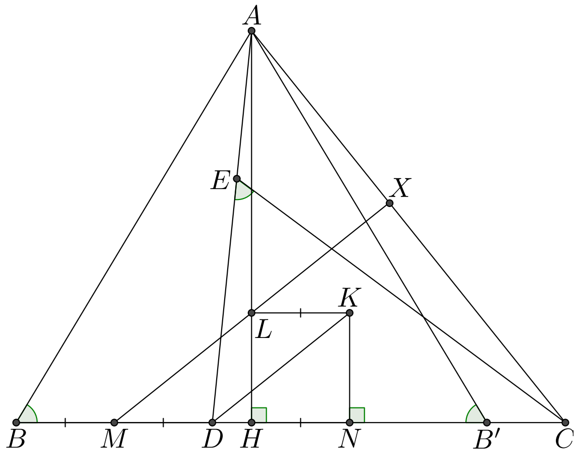
Выражая из него правую часть $(*)$, мы получим неравенство

$$(x + y)(y + z)(z + x) \geqslant 8xyz,$$

являющееся произведением трех неравенств о средних

$$x + y \geqslant 2\sqrt{xy}, \quad y + z \geqslant 2\sqrt{yz} \quad \text{и} \quad z + x \geqslant 2\sqrt{zx}.$$

1.5. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка D, а на отрезке AD выбрана такая точка E, что $\angle CED = \angle ABC$. Точка M — середина отрезка BD, а точка H — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на сторону BC. На серединном перпендикуляре к отрезку DE выбрали такую точку K, а на отрезке AH выбрали такую точку L, что $DKLM$ — параллелограмм. Докажите, что прямые AC и LM перпендикулярны.



Решение. Отметим на прямой BC точку B', симметричную B относительно H. Тогда треугольник ABB' равнобедренный и, значит,

$$\angle CED = \angle ABC = \angle AB'B.$$

Следовательно, $\angle AB'C = \angle AEC$ и четырехугольник $ACB'E$ вписанный. Поэтому $\angle ACH = \angle B'ED$. Пусть N — основание перпендикуляра, опущенного из точки K на BC. Тогда $MD = LK = HN$, поэтому

$$NB' = HB' - HN = HB - BM = MH = DN.$$

Тогда точка K лежит на серединном перпендикуляре к отрезкам DB' и DE. Следовательно, это центр окружности описанной вокруг треугольника $B'DE$. Стало быть,

$$\angle ACH = \angle B'ED = \frac{1}{2}\angle B'KD = \angle NKD = \angle HLM$$

(последнее — поскольку $NK \parallel HL$ и $KD \parallel LM$). Обозначим точку пересечения прямых AC и LM через X. Тогда

$$\angle AXM = 180^\circ - \angle CAH - \angle HLM = 180^\circ - \angle CAH - \angle ACH = 90^\circ.$$

1.6. Найдите все такие простые числа p, что число $p^2 + p + 1$ является точным кубом.

Ответ: таких чисел не существует.

Решение. Пусть $p^2 + p + 1 = (n+1)^3$. Тогда

$$p(p+1) = n(n^2 + 3n + 3).$$

Поскольку $p > n$, число $n^2 + 3n + 3$ делится на p. Следовательно,

$$n^2 + 3n + 3 = kp \quad \text{и} \quad p + 1 = kn,$$

причем k нечетно. Тогда

$$n^2 + 3n + 3 = k(kn - 1) = k^2 n - k.$$

Рассмотрим это равенство как квадратный трехчлен относительно n. Он имеет целый корень, поэтому его дискриминант $(k^2 - 3)^2 - 4(k + 3)$ является квадратом четного числа.

Тогда он не больше, чем $(k^2-5)^2$. Стало быть,

$$k^4-10k^2+25=(k^2-5)^2 \geqslant (k^2-3)^2-4(k+3)=k^4-6k^2-4k-3.$$

Таким образом, $k^2 \leqslant k+7$. Такое возможно только при $k=1$ или $k=2$, но в этих случаях дискриминант не является точным квадратом.

Вариант 2

2.1. Пусть у нас есть m килограммов соленой воды с $m\%$ соли. Сколько килограммов соли нужно добавить, чтобы получить раствор $2m\%$ соли?

Ответ:

$$\frac{m^2}{100-2m}$$

при $m<50$, а при $m \geqslant 50$ такой раствор получить нельзя.

Решение. В килограмме m-процентного раствора соли содержится $\frac{m}{100}$ кг соли, поэтому в m килограммах такого раствора будет $\frac{m^2}{100}$ кг соли. Если мы добавим в него x килограмм соли, то получится $m+x$ кг раствора, в котором всего $x+\frac{m^2}{100}$ кг соли. В килограмме $2m$-процентного раствора соли содержится $\frac{2m}{100}$ кг соли, поэтому в $m+x$ кг ее должно быть $(m+x)\frac{2m}{100}$ кг. Следовательно, должно выполняться равенство

$$x+\frac{m^2}{100}=(m+x)\frac{2m}{100}.$$

Поэтому $100x=m^2+2mx$. При $m \geqslant 50$ это невозможно, а при $m<50$ получаем ответ

$$x=\frac{m^2}{100-2m}.$$

2.2. Трехчлен $x^2+3ax+a$ имеет корни, обратные корням трехчлена $x^2-4bx+b$. Найдите a и b.

Ответ: $a=-4/3$, $b=-3/4$.

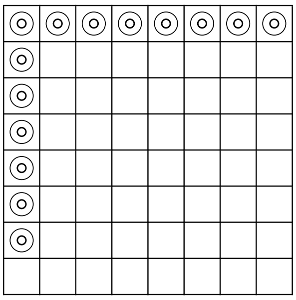
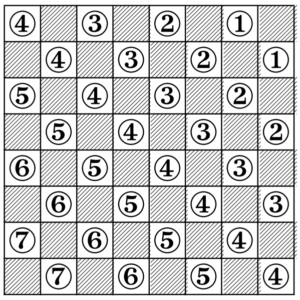
Решение. Пусть u и v — корни трехчлена $x^2+3ax+a$. Тогда по теореме Виета $uv=a$ и $u+v=-3a$. По условию $1/u$ и $1/v$ — корни трехчлена $x^2-4bx+b$. Тогда по теореме Виета $1/uv=b$ и $1/u+1/v=4b$, откуда

$$ab=uv\cdot\frac{1}{uv}=1 \quad \text{и} \quad 4b=\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{u+v}{uv}=\frac{-3a}{a}=-3.$$

Стало быть, $b=-3/4$ и $a=1/b=-4/3$. Поскольку свободные члены найденных трехчленов отрицательны, оба трехчлена имеют по два корня.

2.3. Какое наименьшее количество фишек можно разместить на клетчатой доске 100×100 так, чтобы на каждой диагонали, состоящей хотя бы из двух клеток, была фишка.

Ответ: 198.

Решение. Пример. Все клетки верхней строки и все клетки левого столбца, кроме самой нижней (аналогичная расстановка для доски 8×8 приведена на левом рисунке).

Оценка. Покрасим доску в шахматном порядке, так, чтобы левый нижний угол был черным. Тогда есть 99 белых диагоналей, параллельных главной диагонали, идущей из левого верхнего угла в правый нижний (на правом рисунке одинаковыми цифрами отмечены аналогичные диагонали для доски 8×8). Поэтому на белых клетках стоит не менее 99 фишек. Аналогично есть 99 черных диагоналей, параллельных главной диагонали, идущей из правого верхнего угла в левый нижний. Поэтому на черных клетках стоит не менее 99 фишек.

2.4. Для любых положительных чисел x, y и z докажите неравенство

$$81(x^2 - xy + y^2)(y^2 - yz + z^2)(z^2 - zx + x^2) \geqslant (x + y + z)^2(xy + yz + zx)^2.$$

Решение. С помощью раскрытия скобок и неравенства о средних для двух чисел легко проверить, что $4(x^2 - xy + y^2) \geqslant (x + y)^2$. Следовательно,

$$81(x^2 - xy + y^2)(y^2 - yz + z^2)(z^2 - zx + x^2) \geqslant \left(\frac{9}{8}(x + y)(y + z)(z + x)\right)^2.$$

Поэтому достаточно доказать неравенство

$$9(x + y)(y + z)(z + x) \geqslant 8(x + y + z)(xy + yz + zx), \qquad (*)$$

которое после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых превращается в неравенство

$$x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + z^2x + zx^2 \geqslant 6xyz.$$

Но это сумма очевидных неравенств

$$x^2y + yz^2 \geqslant 2xyz, \quad y^2z + zx^2 \geqslant 2xyz \quad \text{и} \quad z^2y + yx^2 \geqslant 2xyz.$$

Замечание. Неравенство $(*)$ можно доказать и иначе. Воспользуемся тождеством

$$(x + y + z)(xy + yz + xz) = (x + y)(y + z)(z + x) + xyz.$$

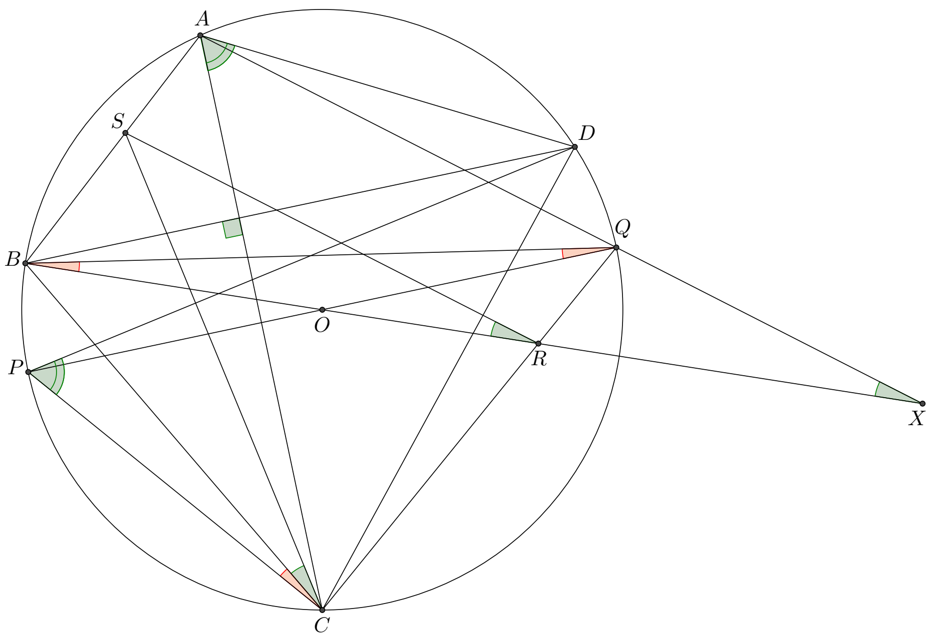
Выражая из него правую часть $(*)$, мы получим неравенство

$$(x + y)(y + z)(z + x) \geqslant 8xyz,$$

являющееся произведением трех неравенств о средних

$$x + y \geqslant 2\sqrt{xy}, \quad y + z \geqslant 2\sqrt{yz} \quad \text{и} \quad z + x \geqslant 2\sqrt{zx}.$$

2.5. Окружность с центром O описана вокруг четырехугольника $ABCD$ с перпендикулярными диагоналями. Точки P и Q — середины дуг ABC и ADC этой окружности. Прямая BO пересекает отрезок CQ в точке R. На стороне AB выбрана такая точка S, что прямые AQ и RS параллельны. Докажите, что прямые CS и PD перпендикулярны.



Решение. Обозначим через X точку пересечения прямых AQ и BR. Поскольку точки A, D, C и P лежат на одной окружности, $\angle CAD = \angle CPD$. Поэтому достаточно доказать равенство $\angle ADB = \angle PCS$ или, что тоже самое, $\angle AQB = \angle PCS$. По условию четырехугольник $ABCQ$ вписанный и прямые AQ и RS параллельны. Следовательно, четырехугольник $SBCR$ также вписанный. Тогда

$$\angle BCS = \angle BRS = \angle BXA$$

(последнее — из-за параллельности прямых AX и RS). Кроме того,

$$\angle BCP = \angle BQP = \angle BQO = \angle QBO = \angle QBX.$$

Следовательно,

$$\angle AQB = \angle QXB + \angle QBX = \angle BCS + \angle BCP = \angle PCS.$$

2.6. Найдите все такие натуральные числа x, y и z, что числа $x^2 + 1$ и $y^2 + 1$ простые и $(x^2 + 1)(y^2 + 1) = z^2 + 1$.

Ответ: $(1, 2, 3)$ и $(2, 1, 3)$.

Решение. Заметим, что $x \neq y$, поскольку квадраты натуральных чисел не могут отличаться на единицу. Поэтому можно считать, что $x < y < z$. Положим $p = x^2 + 1$

и $q = y^2 + 1$. Тогда $p < q$ и, в частности, q нечетно, а y четно. Кроме того, $z^2 < pq \leqslant q^2$ и, значит, $z < q$. Поскольку $y^2 + 1$ и $z^2 + 1$ делятся на q,

$$(z - y)(z + y) = (z^2 + 1) - (y^2 + 1)$$

также делится на q. Следовательно, $z - y$ или $z + y$ делится на q. Первое невозможно, так как $0 < z - y < z < q$. Поэтому на q делится $z + y$. Но $z + y \leqslant 2z < 2q$ и, значит, $z + y = q$. Тогда z нечетно. Но $z^2 + 1 = pq$, откуда получаем, что $p = 2$ и $x = 1$. Следовательно,

$$2q = (q - y)^2 + 1 = q^2 - 2qy + y^2 + 1 = q^2 - 2qy + q.$$

Стало быть, $2y + 1 = q = y^2 + 1$ и, значит, $y = 2$ и $z = 3$.

Вариант 3

3.1. Из города A в город B по расписанию движется поезд со скоростью 60 км/ч. В какой-то момент он останавливается на светофоре и стоит там 3 минуты. После этого он продолжает движение со скоростью 75 км/ч и прибывает в B точно по расписанию. За сколько километров до B поезд остановился на светофоре?

Ответ: 15 км.

Решение. Пусть светофор был на расстоянии x от города B. Тогда если бы поезд не остановился, то он прибыл бы в B через $\frac{x}{60}$ часов. Он простоял на светофоре $\frac{1}{20}$ часа и ехал $\frac{x}{75}$ часа. Следовательно,

$$\frac{x}{60} = \frac{1}{20} + \frac{x}{75},$$

откуда находим ответ.

3.2. Оба корня трехчлена $x^2 + ax + b$ увеличили на 3, после чего получились корни трехчлена $x^2 - 2ax - b$. Найдите a и b.

Ответ: $a = 2$, $b = -3/2$.

Решение. Пусть u и v — корни трехчлена $x^2 + ax + b$. Тогда по теореме Виета

$$u + v = -a \quad \text{и} \quad uv = b.$$

По условию $u + 3$ и $v + 3$ — корни трехчлена $x^2 - 2ax - b$. Тогда по теореме Виета

$$2a = (u + 3) + (v + 3) = u + v + 6 = 6 - a,$$

$$-b = (u + 3)(v + 3) = uv + 3(u + v) + 9 = b - 3a + 9.$$

Следовательно,

$$a = 2 \quad \text{и} \quad 2b = 3a - 9 = -3,$$

откуда $b = -3/2$. Поскольку полученное b отрицательно, у найденного трехчлена

$$x^2 + ax + b$$

есть два корня.

3.3. Назовем «уголком» квадрат 2×2, из которого вырезана одна клетка. В каждой клетке таблицы 100×100 стоит натуральное число. За одну операцию разрешается взять три клетки, расположенные в виде «уголка» и прибавить к каждому из чисел в этих клетках по единице. Всегда ли с помощью таких операций можно сделать все числа в таблице равными?

Ответ: всегда.

Решение. Разобьем таблицу на 2500 квадратиков 2×2. Несложно видеть, что в каждом квадратике можно сделать числа равными (в квадратике 2×2 прибавление единиц к числам из уголка соответствует вычитанию единицы из одного числа с последующим увеличением всех чисел квадрата на один, а такими вычитаниями легко сделать числа равными). Кроме того, четырьмя операциями все числа в квадратике можно увеличить на три. Поэтому достаточно добиться того, чтобы числа из разных квадратиков давали одинаковый остаток от деления на три.

Дальше будем смотреть только на остатки. Возьмем два соседних квадратика. С помощью четырех операций можно увеличить все числа в одном квадратике на единицу, а все числа в другом квадратике — на двойку. Поэтому можно остаток чисел в одном квадратике увеличить на 1, а в другом — уменьшить на 1. Пусть остаток суммы чисел во всей таблице равен r. Покажем, как добиться того, чтобы все числа в таблице имели остаток r. Последовательно слева направо пройдем по парам квадратиков сначала в верхней строке и получим во всех квадратиках, кроме самого правого, остаток r. Проделаем те же действия с остальными строками. Наконец, двигаясь сверху вниз, последовательно обработаем правый столбец. В результате всех квадратиках, кроме правого нижнего, будут числа, дающие остаток r, а в правом нижнем — числа, дающие остаток x. Тогда сумма чисел во всей таблице дает остаток

$$(50^2 - 1) \cdot 4r + 4x \equiv x \pmod 3,$$

поэтому $x = r$.

3.4. Для любых положительных чисел x, y и z докажите неравенство

$$\sqrt{x(y+3z)} + \sqrt{y(z+3x)} + \sqrt{z(x+3y)} \leqslant 2(x+y+z).$$

Решение. По неравенству о средних для двух чисел имеем

$$\sqrt{x(y+3z)} = 2\sqrt{x \cdot \frac{y+3z}{4}} \leqslant x + \frac{y+3z}{4}\,.$$

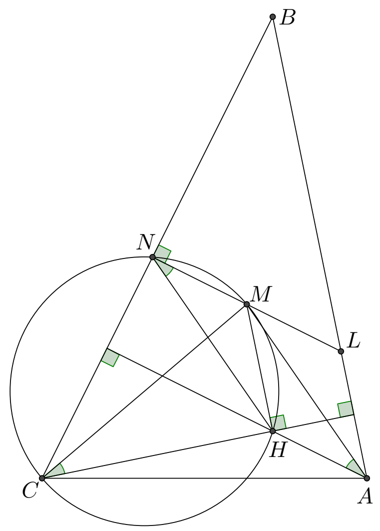
Складывая неравенство с двумя аналогичными

$$\sqrt{y(z+3x)} \leqslant y + \frac{z+3x}{4} \quad \text{и} \quad \sqrt{z(x+3y)} \leqslant z + \frac{x+3y}{4},$$

получим

$$\sqrt{x(y+3z)}+\sqrt{y(z+3x)} + \sqrt{z(x+3y)} \leqslant$$
$$\leqslant \left(x + \frac{y+3z}{4}\right) + \left(y + \frac{z+3x}{4}\right) + \left(\frac{x+3y}{4}\right) = 2(x+y+z).$$

3.5. Точка H — ортоцентр треугольника ABC. На сторонах AB и BC соответственно взяты такие точки L и N, что прямые AH и LN параллельны. Точка M является серединой отрезка LN и лежит на описанной окружности треугольника CHN. Докажите, что $\angle BAM = \angle BCM$.



Решение. Поскольку прямые AH и LN параллельны, $\angle CNM = 90°$, а тогда $\angle CHM = 90°$, так как по условию четырехугольник $CHMN$ вписанный. Следовательно, прямые HM и AB параллельны (они обе перпендикулярны высоте CH). Стало быть, $AHML$ — параллелограмм. Таким образом, $AH = LM = MN$, и в четырехугольнике $AMNH$ противоположные стороны AH и MN равны и параллельны. Следовательно, он тоже является параллелограммом. Тогда

$$\angle HAM = \angle HNM = \angle HCM$$

(последнее равенство следует из вписанности четырехугольника $CHNM$). Кроме того

$$\angle BAH = 90° - \angle ABC = \angle BCH.$$

Стало быть,

$$\angle BAM = \angle BAH - \angle HAM = \angle BCH - \angle HCM = \angle BCM.$$

3.6. Натуральное число m таково, что оно делится на любое из натуральных чисел от 1 до n и не делится ни на одно из чисел $n+1$, $n+2$ и $n+3$. Чему может быть равно n?

Ответ: $n = 1$, $n = 2$ или $n = 6$.

Решение. Числа $n = 1$, $n = 2$ и $n = 6$ подходят, например, с $m = 1$, $m = 2$ и $m = 60$ соответственно. Дальше будем считать, что $n \geqslant 3$.

Пусть какое-то из чисел $n+1$, $n+2$ и $n+3$ представимо в виде ab для некоторых взаимно простых a и b. Поскольку m не делится на произведение ab, m не делится на одно из чисел a и b. Пусть для определенности m не делится на b. Тогда $b \geqslant n+1$ и, значит, $a = 1$. Поэтому числа $n+1$, $n+2$ и $n+3$ нельзя представить в виде произведения взаимно простых сомножителей, больших единицы. Следовательно, это степени простых чисел. Одно из этих чисел четно, то есть оно является степенью двойки. Еще одно делится на три, поэтому это степень тройки. Тогда это два соседних числа. Стало быть, $3^k = 2^\ell \pm 1$ при некоторых $k, \ell \geqslant 2$. Если $3^k = 2^\ell - 1$, то ℓ четно (иначе не сходятся остатки от деления на три), и тогда

$$3^k = (2^t - 1)(2^t + 1).$$

Значит, $2^t - 1 = 3^0$ и $2^t + 1 = 3^k$, что невозможно, поскольку $k \geqslant 2$. Если $3^k = 2^\ell + 1$, то k четно (иначе не сходятся остатки от деления на четыре), и тогда

$$2^\ell = (3^s - 1)(3^s + 1).$$

Значит, $3^s - 1 = 2^1$ и $3^s + 1 = 2^{\ell-1}$, что возможно только при $k = 2$ и $\ell = 3$. Следовательно, $n = 6$.

Вариант 4

4.1. Шофер едет на автомобиле из города A в город B, куда он должен прибыть в фиксированное время. Если он поедет со скоростью в 75 км/ч, то он прибудет в B на 20 минут позже. А если он поедет со скоростью 85 км/ч, то он прибудет на 1 час раньше. Какое расстояние между городами A и B?

Ответ: 850 км.

Решение. Буквой t обозначим время, через которое автомобилист должен прибыть в город B. Тогда $75(t+1/3)$ и $85(t-1)$ — расстояния между городами A и B. Следовательно,

$$75(t + 1/3) = 85(t - 1)$$

и, значит,

$$10t = 75 \cdot \frac{1}{3} + 85 = 110,$$

откуда $t = 11$. Стало быть, расстояние между городами A и B равно

$$85(11 - 1) = 850 \text{ км}.$$

4.2. При каком значении параметра a корни трехчлена $x^2 + (2a-1)x + a^2 + 2$ отличаются в два раза?

Ответ: $a = -4$.

Решение. Пусть u и $2u$ — трехчлена

$$f(x) = x^2 + (2a - 1)x + a^2 + 2.$$

Тогда по теореме Виета $u + 2u = -(2a - 1)$, поэтому

$$u = -\frac{2a - 1}{3}.$$

Следовательно,
$$a^2+2=2u^2=\frac{2(2a-1)^2}{9},$$
откуда получаем, что $(a+4)^2=0$ и, значит, $a=-4$. Получился трехчлен $x^2-9x+18$ с корнями 3 и 6, так что он нам подходит.

4.3. В одной из клеток таблицы $n\times n$ стоит фишка. За один ход можно переместить фишку из произвольной клетки k-го столбца ($1\leqslant k\leqslant n$) в произвольную клетку k-й строки. При каких n существует такая последовательность из n^2 ходов, что фишка побывает во всех клетках таблицы и вернется в исходную клетку?

Ответ: при всех n.

Решение. Индукция. База $n=2$:
$$(1,1)\to(1,2)\to(2,2)\to(2,1)\to(1,1).$$
Переход от n к $n+1$. Рассмотрим обход доски $n\times n$. Пусть из клетки $(n,1)$ был переход в клетку $(1,k)$. Тогда заменим этот переход на следующую последовательность ходов (будем обходить добавленные клетки «зигзагом»)
$$\begin{aligned}(n,1)\to(1,n+1)\to(n+1,2)\to(2,n+1)\to&\\ \to(n+1,3)\to(3,n+1)\to(n+1,4)\to(4,n+1)\to\ldots\to&\\ \to(n+1,n)\to(n,n+1)\to(n+1,n+1)\to(n+1,1)\to(1,k).&\end{aligned}$$

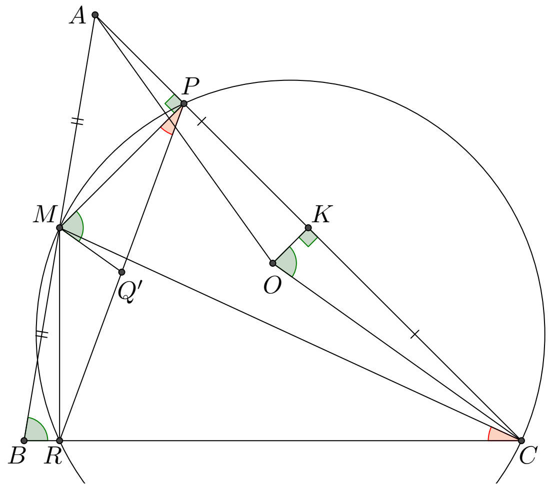
4.4. Для любых положительных чисел x, y и z докажите неравенство
$$\frac{x+y}{z+\sqrt{xy}}+\frac{y+z}{x+\sqrt{yz}}+\frac{z+x}{y+\sqrt{zx}}\geqslant 3.$$

Решение. Заметим, что
$$\frac{x+y}{z+\sqrt{xy}}\geqslant\frac{x+y}{z+\frac{x+y}{2}}=\frac{2(x+y)}{(y+z)+(z+x)}.$$
Поэтому левая часть неравенства не меньше, чем
$$\frac{2(x+y)}{(y+z)+(z+x)}+\frac{2(y+z)}{(z+x)+(x+y)}+\frac{2(z+x)}{(x+y)+(y+z)}.$$
Положим $a=2x+y+z$, $b=x+2y+z$ и $c=x+y+2z$. Тогда
$$2(x+y)=a+b-c,$$
$$2(y+z)=b+c-a\quad\text{и}\quad 2(z+x)=c+a-b,$$
и осталось доказать, что
$$\begin{aligned}3\leqslant\frac{b+c-a}{a}+\frac{c+a-b}{b}+\frac{a+b-c}{c}=&\\ =\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{a}-1\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{a}{b}-1\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}-1\right).&\end{aligned}$$

Это неравенство получится, если сложить три очевидных неравенства

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2, \quad \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geqslant 2 \quad \text{и} \quad \frac{c}{a} + \frac{a}{c} \geqslant 2.$$

4.5. Точка M — середина стороны AB неравнобедренного треугольника ABC, а точка O — центр описанной вокруг него окружности. Окружность с диаметром CM вторично пересекает стороны AC и BC в точках P и R соответственно. Точка Q — середина отрезка PR. Докажите, что прямые CO и MQ параллельны.



Решение. Пусть точка K — середина стороны AC. Через точку M проведем прямую, параллельную CO, и обозначим ее точку пересечения с отрезком PR через Q'. Докажем, что точки Q и Q' совпадают. Поскольку точка P лежит на окружности с диаметром CM, $\angle CPM = 90^\circ$ и прямые MP и OK параллельны. Тогда

$$\angle PMQ' = \angle KOC = \frac{1}{2}\angle AOC = \angle ABC = \angle CBM.$$

Кроме того,

$$\angle MPQ' = \angle MCR = \angle BCM,$$

так как четырехугольник $MPCR$ вписанный. Следовательно, треугольники MPQ' и BCM подобны по двум углам. Стало быть,

$$\frac{PQ'}{MQ'} = \frac{CM}{BM}$$

и, значит,

$$PQ' = \frac{CM \cdot MQ'}{BM}.$$

Аналогично устанавливаем подобие треугольников MRQ' и ACM, откуда выводим равенство

$$RQ' = \frac{CM \cdot MQ'}{AM}.$$

Поскольку $AM = BM$, получаем $PQ' = RQ'$ и, значит, точка Q' — середина отрезка PR, то есть она совпадает с точкой Q.

4.6. Дано простое число p. Найдите все целые числа a и b, для которых

$$\frac{ab}{a-b} = p.$$

Ответ:

$$(-2p,\, 2p),\ (p^2-p,\, p-1),\ (-p^2-p,\, p+1),\ (-p-1,\, p^2+p) \text{ и } (1-p,\, p-p^2).$$

Решение. Перепишем равенство в виде

$$-a = \frac{bp}{b-p}.$$

Таким образом, оно означает, что bp делится на $b-p$. Если $b-p=\pm 1$, то $b=p\pm 1$ и $a=\mp p^2-p$. Пусть $b-p\neq\pm 1$. Если b не делится на p, то $b-p$ взаимно просто как с p, так и с b, что невозможно. Следовательно, $b=kp$ для некоторого целого k. Тогда kp делится на $k-1$. Если $k-1=1$, то $k=2$, $b=2p$ и $a=-2p$. Пусть $k-1\neq 1$. Поскольку k взаимно просто с $k-1$, p делится на $k-1$ и, значит, $k=p+1$, $b=p^2+p$ и $a=-p-1$ или $k=-p+1$, $b=p-p^2$ и $a=1-p$.

Олимпиада школьников СПбГУ по математике
Заключительный этап. 2019/2020 учебный год

Задания для 6–7 классов

(Правильное и полное решение каждой задачи оценивается в 20 баллов)

Вариант 1

1.1. В монашеском ордене агностиков каждый монах — либо исповедник, либо инквизитор. При разговоре с исповедником любой человек должен говорить правду, а при разговоре с инквизитором — лгать. Беседуют два монаха А и Б. «Вы, батенька, исповедник!» — говорит А. «Да, я исповедник!» — отвечает Б. Кем могут быть эти монахи?

Ответ: монахи должны иметь одинаковый статус: либо оба исповедники, либо оба инквизиторы.

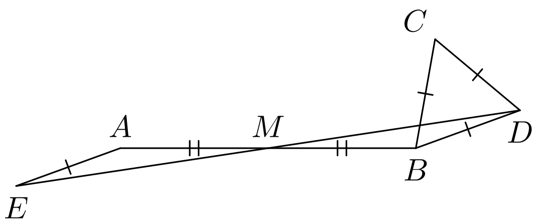
Решение. По условию, истинность или ложность фразы, которую произносит человек, зависит только от типа его собеседника, но не от самого это человека. Если Б инквизитор, то обращенная к нему фраза «Вы — исповедник» является ложью, что соответствует правилам этикета. Но тогда и ответ Б тоже является ложью, а это означает, что монах А, с которым Б разговаривает, является инквизитором.

Если Б исповедник, то обращенная к нему фраза «Вы — исповедник» является истинной, что тоже соответствует правилам этикета. В этом случае ответная реплика Б истинна, а значит, монах А — тоже исповедник.

1.2. Дан угол ABC равный 100°. На плоскости по разные стороны от прямой AB отмечены такие точки D и E, что $BC = CD = AE$, $\angle BCD = 60^\circ$, $\angle BAE = 160^\circ$ (точка D лежит вне угла ABC). Докажите, что прямая DE проходит через середину отрезка AB.

Решение. Как нетрудно видеть, треугольник BCD равносторонний. Значит,

$$BD = CD = AE \quad \text{и} \quad \angle ABD = \angle ABC + \angle CBD = 100^\circ + 60^\circ = \angle BAE.$$



Пусть M — середина отрезка AB. Тогда треугольники AME и BMD равны по двум сторонам и углу, откуда $\angle AME = \angle BMD$. Значит, лучи ME и MD параллельны, то есть точки E, M, D лежат на одной прямой.

1.3. В десятичной записи восьмизначных чисел a и b ($a \neq b$) нет пятерок и нулей и все цифры различны. Докажите, что a не делится на b.

Решение. Допустим, что a делится на b, то есть $a = Rb$ при некотором натуральном R. Так как числа a и b восьмизначные и $a \neq b$, мы получаем $R \in \{2, 3, \ldots, 8, 9\}$. Значит, $R - 1$ не кратно 9. Числа a и b при делении на 9 дают остаток

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 7 + 8 + 9) \bmod 9 = 40 \bmod 9 = 4.$$

Отсюда вытекает, что число b не делится на 3 и потому взаимно просто с 9. Тогда

$$a - b = b\,(R - 1)$$

не может делиться на 9. С другой стороны, $a-b$ кратно 9, поскольку a и b дают одинаковые остатки от деления на 9. Мы получили противоречие.

1.4. В набор из 200 разновесов входят гири весом

$$1\text{ г},\ \ 2\text{ г},\ \ \ldots,\ \ 100\text{ г}\quad\text{и}\quad 1300\text{ г},\ \ 1301\text{ г},\ \ \ldots,\ \ 1399\text{ г}.$$

Можно ли разложить этот набор гирь на 14 куч одинакового веса?

Ответ: нет.

Решение. Суммарный вес гирь равен

$$(1+1399)+(2+1398)+\ldots+(100+1300)=100\cdot 1400=14\cdot 10\,000.$$

Таким образом, каждая куча должна весить 10 000 г. Назовем гири, которые весят не меньше килограмма, *тяжелыми.* Очевидно, любые 8 тяжелых гирь весят больше

$$8\cdot 1300>10\,000\text{ г}.$$

Значит, в каждую кучу входит не более 7 тяжелых гирь. Поэтому при формировании 14 куч мы не сможем использовать больше $14\cdot 7=98$ тяжелых гирь, то есть разложить все гири по кучам не удастся.

1.5. Вдоль окружности выписаны нули и единицы — всего 100 чисел. Костя обошел окружность по часовой стрелке, подсчитал, сколько раз встречаются фрагменты 1010 и 0101 (из подряд стоящих цифр), после чего из первого числа вычел второе. Таня тоже обошла окружность по часовой стрелке и сделала аналогичное вычисление для фрагментов 1101 и 1011. Докажите, что у них получились одинаковые результаты.

Решение. Пусть запись «1010» обозначает количество фрагментов 1010, встречающихся вдоль окружности. Аналогичные обозначения будем использовать и для других фрагментов. Нам нужно проверить соотношение

$$«1010»-«0101»=«1101»-«1011»$$

или, после перегруппировки слагаемых,

$$«1010»+«1011»=«1101»+«0101»$$

Докажем, что обе части равенства равны количеству фрагментов 101, встречающихся вдоль окружности (этого, очевидно, достаточно). После фрагмента 101 может идти 0 или 1. Число фрагментов 101, после которых идет 0, равно «1010», а число фрагментов 101, после которых идет 1, равно «1011». Сумма этих величин как раз и написана в левой части.

С другой стороны, перед фрагментом 101 может идти 0 или 1. Число фрагментов 101, перед которыми находится 0, равно «0101», а число фрагментов 101, перед которыми находится 1, равно «1101». Сумма этих величин написана в правой части.

1.6. На доске написаны числа: 3 тройки, 4 четверки, ..., 9 девяток. Разрешается стереть любые два числа a и b и записать вместо них на доску число

$$\frac{ab}{a+b}$$

(оно может оказаться нецелым). При многократном выполнении этих операций количество чисел на доске уменьшается и, в конце концов, останется одно число. Чему может быть равно это число? (Укажите все возможные значения и докажите, что других нет.)

Ответ: последнее число всегда будет равно $\frac{1}{7}$.

Решение. Рассмотрим сумму обратных величин всех чисел. Для исходного набора чисел она равна

$$3 \cdot \tfrac{1}{3} + 4 \cdot \tfrac{1}{4} + \ldots + 9 \cdot \tfrac{1}{9} = 7.$$

Когда мы стираем числа a и b и записываем вместо них число

$$\frac{ab}{a+b},$$

рассматриваемая сумма не меняется: при стирании она уменьшается на $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, а при дописывании увеличивается на

$$\frac{1}{\frac{ab}{a+b}} = \frac{a+b}{ab} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b},$$

то есть на ту же самую величину. В конце, когда останется единственное число x, сумма обратных величин будет равна $\frac{1}{x}$. Значит, $x = \frac{1}{7}$.

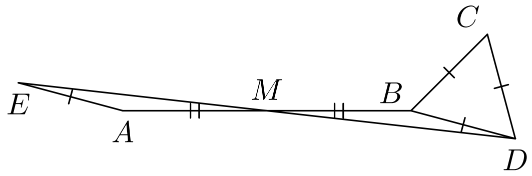
Вариант 2

2.1. В монашеском ордене агностиков каждый монах — либо исповедник, либо инквизитор. При разговоре с исповедником любой человек должен говорить правду, а при разговоре с инквизитором — лгать. Беседуют два монаха А и Б. «Я, между прочим, инквизитор!» — говорит А. «Да какой же ты инквизитор, ты исповедник!» — отвечает Б. Кем могут быть эти монахи?

Ответ: монахи должны иметь разный статус: один из них — инквизитор, другой — исповедник.

Решение. По условию, истинность или ложность фразы, которую произносит человек, зависит только от типа его собеседника, но не от самого это человека. Если А инквизитор, то обращенная к нему фраза «Ты — исповедник» является ложью, что соответствует правилам этикета. Если А исповедник, то обращенная к нему фраза «Ты — исповедник» является истинной, что тоже соответствует правилам этикета. Таким образом, монах А может быть как инквизитором, так и исповедником. Если А инквизитор, то но говорит о себе правду, а значит, Б — исповедник. Если же А — исповедник, то он лжет, поэтому Б — инквизитор.

2.2. Дан угол ABC, равный $135°$. На плоскости по разные стороны от прямой AB отмечены такие точки D и E, что $BC = CD = AE$, $\angle BCD = 60°$, $\angle BAE = 165°$. Докажите, что прямая DE проходит через середину отрезка AB.



Решение. Как нетрудно видеть, треугольник BCD равносторонний, откуда

$$BD = CD = AE.$$

Пусть точка C лежит выше прямой AB (см. рисунок). Так как

$$\angle ABC + \angle CBD = 135° + 60° = 195° > 180°,$$

точка D находится ниже прямой AB, и при этом

$$\angle ABD = 360° - \big(\angle ABC + \angle CBD\big) = 360° - 195° = 165° = \angle BAE.$$

Пусть M — середина отрезка AB. Тогда треугольники AME и BMD равны по двум сторонам и углу, откуда $\angle AME = \angle BMD$. Значит, лучи ME и MD параллельны, то есть точки E, M, D лежат на одной прямой.

2.3. В десятичной записи различных семизначных чисел a и b по одному разу встречается каждая цифра от 1 до 7. Докажите, что a не делится на b.

Решение. Допустим, что a делится на b, то есть $a = Rb$ при некотором натуральном R. Так как числа a и b семизначные и $a \neq b$, мы получаем $R \in \{2, 3, \ldots, 8, 9\}$. Значит, $R-1$ не кратно 9. Числа a и b при делении на 9 дают остаток

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) \bmod 9 = 28 \bmod 9 = 1.$$

Отсюда вытекает, что число b не делится на 3 и потому взаимно просто с 9. Тогда

$$a - b = b\,(R - 1)$$

не может делиться на 9. С другой стороны, $a-b$ кратно 9, поскольку a и b дают одинаковые остатки от деления на 9. Мы получили противоречие.

2.4. В набор из 200 разновесов входят гири весом

$$1 \text{ г},\ \ 2 \text{ г},\ \ \ldots,\ \ 100 \text{ г} \quad \text{и} \quad 1700 \text{ г},\ \ 1701 \text{ г},\ \ \ldots,\ \ 1799 \text{ г}.$$

Можно ли разложить этот набор гирь на 18 куч одинакового веса?

Ответ: нет.

Решение. Суммарный вес гирь равен

$$(1 + 1799) + (2 + 1798) + \ldots (100 + 1700) = 100 \cdot 1800 = 18 \cdot 10\,000.$$

Таким образом, каждая куча должна весить 10 000 г. Назовем гири, которые весят не меньше килограмма, *тяжелыми.* Очевидно, любые 6 тяжелых гирь весят больше

$$6 \cdot 1700 > 10\,000 \text{ г.}$$

Значит, в каждую кучу входит не более 5 тяжелых гирь. Поэтому при формировании 18 куч мы не сможем использовать больше $18 \cdot 5 = 90$ тяжелых гирь, то есть разложить все гири по кучам не удастся.

2.5. Вдоль окружности выписаны нули и единицы — всего 200 чисел. Андрей обошел окружность по часовой стрелке, подсчитал, сколько раз встречаются фрагменты 0111 и 1011 (из подряд стоящих цифр), после чего из первого числа вычел второе. Настя тоже обошла окружность по часовой стрелке и сделала аналогичное вычисление для фрагментов 0011 и 0110. Докажите, что у них получились одинаковые результаты.

Решение. Пусть запись «0111» обозначает количество фрагментов 0111, встречающихся вдоль окружности. Аналогичные обозначения будем использовать и для других фрагментов. Нам нужно проверить соотношение

$$«0111» - «1011» = «0011» - «0110»$$

или, после перегруппировки слагаемых,

$$«0111» + «0110» = «0011» + «1011»$$

Докажем, что обе части равенства равны количеству фрагментов 011, встречающихся вдоль окружности (этого, очевидно, достаточно). После фрагмента 011 может идти 0 или 1. Число фрагментов 011, после которых идет 0, равно «0110», а число фрагментов 011, после которых идет 1, равно «0111». Сумма этих величин как раз и написана в левой части.

С другой стороны, перед фрагментом 011 может идти 0 или 1. Число фрагментов 011, перед которыми находится 0, равно «0011», а число фрагментов 011, перед которыми находится 1, равно «1011». Сумма этих величин написана в правой части.

2.6. На доске написаны числа: 2 двойки, 3 тройки, 4 четверки, ..., 9 девяток. Разрешается стереть любые два числа a и b и записать вместо них на доску число

$$\frac{ab}{a+b}$$

(оно может оказаться нецелым). При многократном выполнении этих операций количество чисел на доске уменьшается и, в конце концов, останется одно число. Чему может быть равно это число? (Укажите все возможные значения и докажите, что других нет.)

Ответ: последнее число всегда будет равно $\frac{1}{8}$.

Решение. Рассмотрим сумму обратных величин всех чисел. Для исходного набора чисел она равна

$$2 \cdot \tfrac{1}{2} + 3 \cdot \tfrac{1}{3} + \ldots + 9 \cdot \tfrac{1}{9} = 8.$$

Когда мы стираем числа a и b и записываем вместо них число
$$\frac{ab}{a+b},$$
рассматриваемая сумма не меняется: при стирании она уменьшается на $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$, а при дописывании увеличивается на
$$\frac{1}{\frac{ab}{a+b}}=\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b},$$
то есть на ту же самую величину. В конце, когда останется единственное число x, сумма обратных величин будет равна $\frac{1}{x}$. Значит, $x=\frac{1}{8}$.

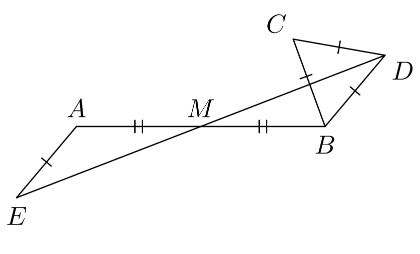
Вариант 3

3.1. В монашеском ордене агностиков каждый монах — либо исповедник, либо инквизитор. При разговоре с исповедником любой человек должен говорить правду, а при разговоре с инквизитором — лгать. Беседуют два монаха А и Б. «Я, между прочим, инквизитор!» — говорит А. «Я тоже инквизитор!» — отвечает Б. Кем могут быть эти монахи?

Ответ: монахи должны иметь разный статус: один из них — инквизитор, другой — исповедник.

Решение. По условию, истинность или ложность фразы, которую произносит человек, зависит только от типа его собеседника, но не от самого это человека. Если А исповедник, то он лжет, поэтому Б — инквизитор. Тогда Б говорит правду, что соответствует этикету. Если же А инквизитор, то он говорит правду, а значит, Б — исповедник. Тогда Б лжет, что тоже соотвествует этикету.

3.2. Дан угол ABC, равный 70°. На плоскости по разные стороны от прямой AB отмечены такие точки D и E, что $BC=CD=AE$, $\angle BCD=60^\circ$, $\angle BAE=130^\circ$ (точка D лежит вне угла ABC). Докажите, что прямая DE проходит через середину отрезка AB.



Решение. Как нетрудно видеть, треугольник BCD равносторонний. Значит,
$$BD=CD=AE \quad \text{и} \quad \angle ABD=\angle ABC+\angle CBD=70^\circ+60^\circ=\angle BAE.$$
Пусть M — середина отрезка AB. Тогда треугольники AME и BMD равны по двум сторонам и углу, откуда $\angle AME=\angle BMD$. Значит, лучи ME и MD параллельны, то есть точки E, M, D лежат на одной прямой.

3.3. В десятичной записи восьмизначных чисел a и b ($a \neq b$) нет семерок и нулей и все цифры различны. Докажите, что a не делится на b.

Решение. Допустим, что a делится на b, то есть $a = Rb$ при некотором натуральном R. Так как числа a и b восьмизначные и $a \neq b$, мы получаем $R \in \{2, 3, \ldots, 8, 9\}$. Значит, $R - 1$ не кратно 9. Числа a и b при делении на 9 дают остаток

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 8 + 9) \bmod 9 = 38 \bmod 9 = 2.$$

Отсюда вытекает, что число b не делится на 3 и потому взаимно просто с 9. Тогда

$$a - b = b\,(R - 1)$$

не может делиться на 9. С другой стороны, $a-b$ кратно 9, поскольку a и b дают одинаковые остатки от деления на 9. Мы получили противоречие.

3.4. В набор из 200 разновесов входят гири весом

$$1 \text{ г}, \ \ 2 \text{ г}, \ \ \ldots, \ \ 100 \text{ г} \quad \text{и} \quad 1500 \text{ г}, \ \ 1501 \text{ г}, \ \ \ldots, \ \ 1599 \text{ г}.$$

Можно ли разложить этот набор гирь на 16 куч одинакового веса?

Ответ: нет.

Решение. Суммарный вес гирь равен

$$(1 + 1599) + (2 + 1598) + \ldots (100 + 1500) = 100 \cdot 1600 = 16 \cdot 10\,000.$$

Таким образом, каждая куча должна весить 10 000 г. Назовем гири, которые весят не меньше килограмма, *тяжелыми.* Очевидно, любые 7 тяжелых гирь весят больше

$$7 \cdot 1500 > 10\,000 \text{ г}.$$

Значит, в каждую кучу входит не более 6 тяжелых гирь. Поэтому при формировании 16 куч мы не сможем использовать больше $16 \cdot 6 = 96$ тяжелых гирь, то есть разложить все гири по кучам не удастся.

3.5. Вдоль окружности выписаны нули и единицы — всего 120 чисел. Саша обошел окружность по часовой стрелке, подсчитал, сколько раз встречаются фрагменты 0100 и 1010 (из подряд стоящих цифр), после чего из первого числа вычел второе. Кирилл тоже обошел окружность по часовой стрелке и сделал аналогичное вычисление для фрагментов 0010 и 0101. Докажите, что у них получились одинаковые результаты.

Решение. Пусть запись «0100» обозначает количество фрагментов 0100, встречающихся вдоль окружности. Аналогичные обозначения будем использовать и для других фрагментов. Нам нужно проверить соотношение

$$«0100» - «1010» = «0010» - «0101»$$

или, после перегруппировки слагаемых,

$$«0100» + «0101» = «0010» + «1010»$$

Докажем, что обе части равенства равны количеству фрагментов 010, встречающихся вдоль окружности (этого, очевидно, достаточно). После фрагмента 010 может идти 0 или 1. Число фрагментов 010, после которых идет 0, равно «0100», а число фрагментов 010, после которых идет 1, равно «0101». Сумма этих величин как раз и написана в левой части.

С другой стороны, перед фрагментом 010 может идти 0 или 1. Число фрагментов 010, перед которыми находится 0, равно «0010», а число фрагментов 010, перед которыми находится 1, равно «1010». Сумма этих величин написана в правой части.

3.6. На доске написаны числа: единица, 2 двойки, 3 тройки, 4 четверки, ..., 9 девяток. Разрешается стереть любые два числа a и b и записать вместо них на доску число

$$\frac{ab}{a+b}$$

(оно может оказаться нецелым). При многократном выполнении этих операций количество чисел на доске уменьшается и, в конце концов, останется одно число. Чему может быть равно это число? (Укажите все возможные значения и докажите, что других нет.)

Ответ: последнее число всегда будет равно $\frac{1}{9}$.

Решение. Рассмотрим сумму обратных величин всех чисел. Для исходного набора чисел она равна

$$1 + 2 \cdot \tfrac{1}{2} + 3 \cdot \tfrac{1}{3} + \ldots + 9 \cdot \tfrac{1}{9} = 9.$$

Когда мы стираем числа a и b и записываем вместо них число

$$\frac{ab}{a+b},$$

рассматриваемая сумма не меняется: при стирании она уменьшается на $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, а при дописывании увеличивается на

$$\frac{1}{\frac{ab}{a+b}} = \frac{a+b}{ab} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b},$$

то есть на ту же самую величину. В конце, когда останется единственное число x, сумма обратных величин будет равна $\frac{1}{x}$. Значит, $x = \frac{1}{9}$.