ШКОЛЬНЫЕ ОЛИМПИАДЫ СПбГУ 2021

комплекс предметов «Инженерные системы»
(математика, информатика, физика, химия),
2020/21 учебный год.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

Условия задач
(решения / ответы)

8–9 класс

Задача 1. (5 баллов)

Для получения волшебного зелья по традиционному рецепту необходимо смешать в определенных пропорциях мертвую воду и экстракт бузины. В большом чане эти ингредиенты налиты в неизвестных количествах. Кощей Бессмертный на вкус определил, что экстракта бузины в чане больше, чем требуется по рецепту. Предположим, что у него есть возможность подливать ингредиенты в чан только одновременно и в равных количествах.

1. При каких условиях Кощей может уменьшить долю экстракта бузины в чане?
2. В каких пределах он может уменьшать долю экстракта бузины?

Решение. Обозначим первоначальные объемы мертвой воды и экстракта бузины соответственно a и b ($a \geq 0$, $b \geq 0$, a и b не равны нулю одновременно). Тогда в начале доля экстракта бузины в зелье была равна

$$\frac{b}{a+b}.$$

После того, как Кощей Бессмертный добавит в зелье одинаковый объем $c > 0$ каждого из компонентов, доля экстракта бузины станет

$$\frac{b+c}{a+b+2c}.$$

Посмотрим, какой получается знак разности между начальной и конечной долями экстракта бузины:

$$\frac{b+c}{a+b+2c} - \frac{b}{a+b} = \frac{(a-b)c}{(a+b+2c)(a+b)}.$$

Это означает, что если в исходном варианте зелья мертвой воды было больше, чем экстракта бузины ($a > b$), то уменьшить долю экстракта бузины в зелье Кощей никак не сможет. Таким образом, $a < b$ — это необходимое условие, которое обеспечивает возможность уменьшения доли экстракта бузины способом, доступным Кощею по условию задачи.

Определим, в каких пределах Кощей сможет уменьшить долю экстракта бузины в зелье. Пусть доля экстракта бузины уменьшается в k раз ($k > 1$). Это означает, что

$$\frac{b+c}{a+b+2c} = \frac{1}{k} \cdot \frac{b}{a+b}.$$

Отсюда

$$k(a+b)(b+c) = b(a+b+2c) \ =>$$

$$c = \frac{b(a+b)(k-1)}{2b-k(a+b)},$$

причем эта величина должна быть положительной.

Учитывая, что числитель здесь всегда больше нуля, получаем следующие пределы изменения величины k:

$$1 < k < \frac{2b}{a+b} \leq 2$$

(значение 2 справа получилось бы в том случае, если бы в начале мертвой воды в зелье вообще не оказалось; однако для k это значение недостижимо, т.к. в этом случае c обращается в бесконечность).

Ответ:

1. Экстракта бузины в исходном зелье должно быть больше, чем мертвой воды.
2. Не более чем в 2 раза, причем ровно в 2 раза нельзя.

Задача 2. (5 баллов)

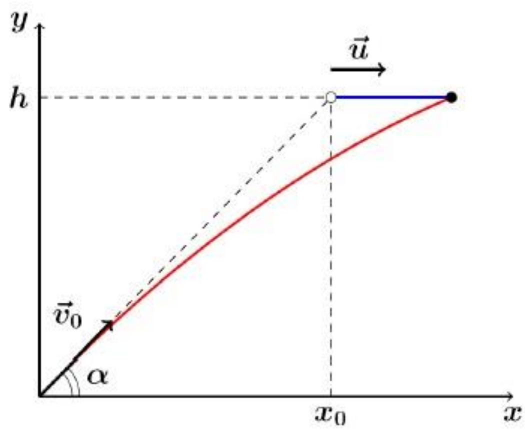
Хулиган Вася хочет попасть камнем из рогатки в воробья, который летит горизонтально на высоте 30 м с постоянной скоростью. Известно, что если камень подлетает к воробью снизу, то он сможет увернуться в последний момент, а если сверху — то нет. Когда направление от рогатки в сторону воробья составляет с горизонтом 45^0, Вася запускает камень под тем же углом. С какой скоростью должен лететь воробей, чтобы иметь возможность увернуться от камня вне зависимости от скорости вылета камня? Предполагается, что траектории воробья и камня лежат в одной вертикальной плоскости. Размерами воробья и камня, а также сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение. С течением времени t координаты воробья меняются следующим образом:

$$x_s = x_0 + ut,$$
$$y_s = h,$$

где u – постоянная скорость воробья. При этом $x_0 = h \operatorname{ctg} \alpha$. Координаты камня изменяются как

$$x_r = (v_0 \cos \alpha)t,$$
$$y_r = (v_0 \sin \alpha)t - gt^2/2,$$



где v_0 – начальная скорость камня, g – ускорение свободного падения.

В момент времени t_m, когда камень достигнет наибольшей высоты (вершины своей параболической траектории), вертикальная компонента его скорости станет равной нулю:

$$v_0 \sin\alpha - g t_m = 0 \quad => $$
$$t_m = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}.$$

Для того, чтобы камень подлетел к воробью снизу, и воробей смог бы увернуться, время столкновения t_c должно было меньше t_m – ведь после подъема на максимальную высоту камень далее падает вниз.

Найдем t_c, используя условие, что в момент столкновения координаты воробья и камня равны:

$$x_0 + u t_c = (v_0 \cos\alpha) t_c,$$
$$h = (v_0 \sin\alpha) t_c - \frac{g t_c^2}{2}.$$

Из первого уравнения выразим скорость v_0 и подставим во второе:

$$v_0 = \frac{x_0 + u t_c}{t_c \cos\alpha}, \qquad (*)$$

$$h = \left(\frac{x_0 + u t_c}{t_c \cos\alpha} \cdot \sin\alpha\right) t_c - \frac{g t_c^2}{2} = x_0 \operatorname{tg}\alpha + u t_c \operatorname{tg}\alpha - \frac{g t_c^2}{2}.$$

Вспоминая, что $x_0 = h \operatorname{ctg}\alpha$, получаем уравнение для определения t_c:

$$\frac{g t_c^2}{2} - u t_c \operatorname{tg}\alpha = 0 \quad => \quad t_c = \frac{2u \operatorname{tg}\alpha}{g}.$$

Благоприятный для воробья исход стрельбы будет, если $t_c < t_m$ (ситуация, представленная на рисунке – см. выше):

$$\frac{2u \operatorname{tg}\alpha}{g} < \frac{v_0 \sin\alpha}{g} \qquad => \qquad u < \frac{v_0 \cos\alpha}{2}.$$

Выразим v_0 из полученного ранее выражения $(*)$:

$$v_0 = \frac{x_0 + u \cdot (2u \operatorname{tg}\alpha)/g}{(2u \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha)/g} = \frac{gh \operatorname{ctg}\alpha + 2u^2 \operatorname{tg}\alpha}{2u \sin\alpha}.$$

Тогда:

$$u < \frac{gh \operatorname{ctg}^2\alpha + 2u^2}{4u} \quad => \quad u < \sqrt{\frac{gh \operatorname{ctg}^2\alpha}{2}}.$$

Подставляя числовые данные из условия, а также значение ускорения свободного падения:

$$h = 30 \text{ м}, \ \alpha = 45°, \ g = 9{,}81 \text{ м/с}^2,$$

получим следующую оценку: $u < 12{,}1$ м/с – при такой скорости воробья, камень всегда будет подлетать к нему снизу, независимо от своей начальной скорости.

Ответ: если скорость воробья <12,1 м/с, то камень подлетает к нему снизу, независимо от своей начальной скорости.

Задача 3. (5 баллов)

Пусть даны две обыкновенные дроби:

$$\frac{n}{n+2021} \quad \text{и} \quad \frac{n+2021}{n},$$

где n – натуральное число.

1. Верно ли утверждение, что первая из этих дробей всегда ближе к 1, чем вторая?
2. Для каждой из дробей определите аналитически те значения n, при которых дробь наиболее близка к 1, если $1000 \le n \le 2021$.
3. Составьте компьютерную программу (или алгоритм), с помощью которой без предварительных рассуждений можно найти наиболее близкое к 1 значение какой-нибудь одной из дробей, если $1000 \le n \le 3000$.

Решение. Найдем абсолютную величину отличия каждой из дробей от 1 и сравним получившиеся выражения между собой.

$$\left|\frac{n}{n+2021}-1\right| = \frac{2021}{n+2021},$$

$$\left|\frac{n+2021}{n}-1\right| = \frac{2021}{n}.$$

Ясно, что для обеих дробей величина их отклонения от 1 тем меньше, чем больше n.

Значит, наименьшее отклонение для каждой из дробей будет достигнуто при $n = 2021$. Для первой дроби наименьшее отклонение равно 0,5, а для второй это отклонение равно 1.

Также очевидно, что утверждение, о котором спрашивалось в условии задачи, верное, поскольку

$$\left|\frac{n}{n+2021}-1\right| = \frac{2021}{n+2021} < \frac{2021}{n} = \left|\frac{n+2021}{n}-1\right|.$$

Пример программы для поиска наиболее близкого к 1 значения первой дроби:

```
program example;
var
n,i: integer;
m: real;
begin
    n:=1000;
    m:=abs(n/(n+2021)-1);
    for i:=1001 to 3000 do
        if abs(i/(i+2021)-1)<m then
            begin
            m:=abs(i/(i+2021)-1);
            n:=i;
            end;
    writeln(n,' ', m)
end.
```

Ответ:
1. Да, утверждение верное.
2. $n = 2021$ для обеих дробей.

Задача 4. (5 баллов)

Вес стандартного бронебойного снаряда равен 8 кг. Для выстрела используется заряд черного пороха массой 9,6 кг. Состав черного пороха в процентах по массе:

KNO_3: 74,81 %; S: 11,85 %; C: 13,33 %.

1. Дополните и уравняйте уравнение реакции сгорания черного пороха:

$$KNO_3 + S + C = K_2S + ? + ?$$

2. Вычислите, на каком максимальном расстоянии данный снаряд способен пробить стальную броню танка, если известно, что:
   а) для пробития брони скорость снаряда должна быть не менее 1645 м/с;
   б) потеря скорости при полете снаряда равна 55 м/с на 1 км полета;
   в) КПД преобразования тепловой энергии сгорания пороха в кинетическую энергию снаряда равен 60 %.

Полет снаряда считать прямолинейным.

Энтальпии образования сложных веществ:

$\Delta H^0(KNO_3)$= - 494,5 кДж/моль;
ΔH^0 (K_2S) = - 387,0 кДж/моль;
ΔH^0 (CO_2) = -393,5 кДж/моль.

Энтальпии образования простых веществ равны нулю.

Решение. Уравнение сгорания черного пороха имеет следующий вид:

$$2\ KNO_3 + 3\ C + S = K_2S + N_2 + 3\ CO_2$$

Энтальпия реакции:

$$\Delta H = 3 \times \Delta H^0\ (CO_2) + \Delta H^0\ (K_2S) - 2 \times \Delta H^0\ (KNO_3) =$$
$$= 3 \times (-393{,}5) + (-387{,}0) - 2 \times (-494{,}5) = -578{,}5 \text{ кДж}.$$

Молярная масса черного пороха по уравнению:

$$m\ (2\ KNO_3 + 3\ C + S) = 2 \times M\ (KNO_3) + 3 \times M\ (C) + M\ (S) =$$
$$=2 \times (39 + 14 + 16 \times 3) + 3 \times 12 + 32 = 2 \times 101 + 36 + 32 = 270 \text{ г}.$$

Тогда удельная теплота сгорания черного пороха на единицу массы получается равной

$$\Delta H/m = (-578{,}5 \div 270) = -2{,}14 \text{ кДж/г}.$$

Теплота, выделившаяся при сгорании метательного порохового заряда,

$$Q = m\ (\text{пороха}) \times \Delta H/m = 9600 \times 2{,}14 = 20544 \text{ кДж}.$$

С учетом КПД преобразования тепловой энергии сгорания пороха кинетическая энергия снаряда

$$E_к\ (\text{снаряда}) = Q \times КПД = 20544 \times 0{,}60 = 12326{,}4 \text{ кДж}.$$

С другой стороны,

$$E_к = \frac{mu^2}{2},$$

где u – скорость снаряда. Тогда

$$u = \sqrt{\frac{2\mathrm{E_к}}{m}}\,.$$

Начальная скорость снаряда

$$u_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot 12326{,}4 \cdot 10^3}{8}} = 1755\ \text{м/с}.$$

Значит, скорость снаряда уменьшится до $1645\ \text{м/с}$ через

$$\frac{1755\ - 1645}{55} = 2\ \text{км}.$$

Ответ:

1. 2 KNO_3 + 3 C + S = K_2S + N_2 + 3 CO_2
2. 2 км.

10–11 классы

Задача 1. (5 баллов)

1.1. Функция $\sigma(n)$ - сумма делителей натурального числа n. Например, $\sigma(12)$=1+2+3+4+6+12=28.

a) Найдите $\sigma(\sigma(n))$и $\sigma(\sigma(m))$, где n=334, m=501. Запишите аналитическое решение.

b) Составьте алгоритм или программу, позволяющую находить величину $\sigma(\sigma(n))$ по введенному с клавиатуры значению n.

Решение:

$\sigma(334)$=1+2+167+334=504

$\sigma(\sigma(334))$=$\sigma(504)$=1+2+3+4+6+7+8+9+12+14+18+21+24+28+36+42+56+63+72+ +84+126+168+252+504=1560.

$\sigma(501)$=1+3+167+501=672

$\sigma(\sigma(501))$=$\sigma(672)$=1+2+3+4+6+7+8+12+14+16+21+24+28+32+42+48+56+84+96 +112+168+224+336+672=2016.

Ответ: $\sigma(\sigma(334)) = 1560$ и$\sigma(\sigma(501)) = 2016$.

1.2. Функция $\sigma(n)$ - сумма делителей натурального числа n. Например, $\sigma(12)$=1+2+3+4+6+12=28.

a) Найдите $\sigma(\sigma(n))$и $\sigma(\sigma(m))$, где n=628, m=1413. Запишите аналитическое решение.

b) Составьте алгоритм или программу, позволяющую находить величину $\sigma(\sigma(n))$ по введенному с клавиатуры значению n.

Решение: Аналогично решению задачи 1.1.

Ответ: $\sigma(\sigma(628)) = 1920$ и$\sigma(\sigma(1413)) = 3360$.

1.3. Функция $\sigma(n)$ - сумма делителей натурального числа n. Например, $\sigma(12)$=1+2+3+4+6+12=28.

a) Найдите $\sigma(\sigma(n))$и $\sigma(\sigma(m))$, где n=596, m=1341. Запишите аналитическое решение.

b) Составьте алгоритм или программу, позволяющую находить величину $\sigma(\sigma(n))$ по введенному с клавиатуры значению n.

Решение: Аналогично решению задачи 1.1.

Ответ: $\sigma(\sigma(596)) = 2976$ и$\sigma(\sigma(1341)) = 5208$.

Задача 2. (5 баллов)

В камере, содержащей смесь кислорода (32 грамма) и водорода (4 грамма), произошел взрыв. Давление в камере при взрыве увеличилось в два раза. На сколько градусов при этом возросла температура в камере, если до взрыва она равнялась 27 °C?

Решение. Уравнение реакции, произошедшей при взрыве в камере,

$$2H_2 + O_2 = 2\ H_2O$$

До взрыва в камере содержалось

$$\nu_{O_2} = \frac{32\ \text{г}}{32\ \text{г/моль}} = 1\ \text{моль кислорода},$$

$$\nu_{H_2} = \frac{4\ \text{г}}{2\ \text{г/моль}} = 2\ \text{моль водорода},$$

а после взрыва образовалось

$$\nu_{H_2O} = \frac{36\ \text{г}}{18\ \text{г/моль}} = 2\ \text{моль водяного пара}.$$

Давление в камере до взрыва P_1 было равно сумме парциальных давлений кислорода и водорода:

$$P_1 = P_{O_2} + P_{H_2} = \frac{RT_1}{V}\left(\nu_{O_2} + \nu_{H_2}\right),$$

где $T_1 = 27\ ℃ = 300{,}15\ \text{К}$ – температура в камере до взрыва, R – универсальная газовая постоянная, V – объем камеры (во втором равенстве в формуле выше мы воспользовались уравнением Менделеева-Клапейрона). Давление образовавшегося после взрыва водяного пара

$$P_2 = \frac{RT_2\nu_{H_2O}}{V}.$$

По условию после взрыва давление увеличилось в два раза, поэтому

$$2 = P_2/P_1 = \frac{T_2\nu_{H_2O}}{T_1\left(\nu_{O_2} + \nu_{H_2}\right)}.$$

Отсюда

$$T_2 = 2T_1\frac{\left(\nu_{O_2} + \nu_{H_2}\right)}{\nu_{H_2O}} = 2 \cdot 300{,}15\ \text{К} \cdot \frac{3\ \text{моль}}{2\ \text{моль}} = 900{,}45\ \text{К} \approx 627{,}3\ ℃.$$

Изменение температуры при этом составило

$$\Delta T = T_2 - T_1 = 627{,}5\ ℃ - 27\ ℃ = 600{,}3\ ℃.$$

Ответ: $600,3\ ℃$.

Задача 3. (5 баллов)

3.1. Мячик падает с высоты 1,5 м с нулевой начальной скоростью вертикально вниз. После удара о пол мячик может отскочить вертикально вверх, подняться до высоты, на которой его скорость становится равной нулю, снова упасть вертикально вниз и так далее до тех пор, пока он не окажется лежащим в покое на полу. Отскочит мячик от пола при очередном ударе или «прилипнет» к нему, определяется импульсом мячика, а также свойствами поверхностей мячика и пола, которые неизвестны. Оцените границы диапазона времени, которое может пройти после начала движения мячика до того момента, пока он не окажется лежащим в покое на полу, если при каждом ударе (кроме последнего) он теряет долю своей кинетической энергии, равную 0,3. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение. При падении мячика с высоты h_1 с нулевой начальной скоростью его потенциальная энергия mgh_1 идет на увеличение кинетической энергии мячика от нуля до $mv_1^2/2$; здесь через m обозначена масса мячика, через v_1 – скорость мячика в момент его первого удара о пол, а через g – ускорение свободного падения. Из равенства

$$mgh_1 = \frac{mv_1^2}{2}$$

находим, что

$$v_1 = \sqrt{2gh_1}\,.$$

Поскольку мячик движется равноускоренно с нулевой начальной скоростью, то с течением времени t его скорость изменяется как gt. Поэтому время падения мячика с высоты h_1 до пола будет равно:

$$t_1 = \frac{v_1}{g} = \sqrt{\frac{2h_1}{g}}\,.$$

По условию в момент удара мячик теряет долю своей кинетической энергии, равную δ. Соответственно, доля энергии, которая осталась, равна $1-\delta$. На высоте наибольшего подъема h_2 вся кинетическая энергия мячика перейдет в потенциальную, а в момент второго удара о пол – снова в кинетическую. Таким образом,

$$\frac{mv_1^2}{2}(1-\delta) = mgh_2 = \frac{mv_2^2}{2}\,,$$

где v_2 – скорость мячика в момент вторго удара о пол. Отсюда

$$v_2 = v_1\sqrt{1-\delta}\,.$$

Время падения мячика с высоты h_2 до пола будет равно

$$t_2 = \frac{v_2}{g} = \frac{v_1\sqrt{1-\delta}}{g} = t_1\sqrt{1-\delta}\,.$$

Поскольку мячик не теряет энергию при движении после отскока, то и время его подъема от пола до высоты h_2 также было равно t_2.

Рассуждая аналогично, найдем, что время падения мячика с высоты h_3 есть

$$t_3 = t_2\sqrt{1-\delta} = t_1\left(\sqrt{1-\delta}\right)^2,$$

а с высоты h_{n-1} равно

$$t_{n-1} = t_1\left(\sqrt{1-\delta}\right)^{n-2},$$

где n – номер последнего удара мячика, после которого он остается в покое лежащим на полу.

Тогда полное время движения мячика до остановки с учетом времени подъема до соответствующих высот равняется

$$t = t_1 + 2t_2 + 2t_3 + \ldots + 2t_{n-1} =$$
$$= t_1\left(1 + 2\sqrt{1-\delta} + \left(\sqrt{1-\delta}\right)^2 + \ldots + \left(\sqrt{1-\delta}\right)^{n-2}\right) =$$
$$= t_1\left(1 + 2\sqrt{1-\delta}\left[1 + \sqrt{1-\delta} + \left(\sqrt{1-\delta}\right)^2 + \ldots + \left(\sqrt{1-\delta}\right)^{n-3}\right]\right).$$

Слагаемые в квадратных скобках образуют геометрическую прогрессию со знаменателем равным $\sqrt{1-\delta}$. Используя формулу для суммы n−2 первых членов геометрической прогрессии, получим

$$t = t_1\left(1 + 2\sqrt{1-\delta}\cdot\frac{1-\left(\sqrt{1-\delta}\right)^{n-2}}{1-\sqrt{1-\delta}}\right).$$

Количество ударов мячика о пол определяется свойствами поверхностей самого мячика и пола, которые нам неизвестны. Наименьшее количество ударов равно одному, когда мячик «прилипает» к полу после первого же падения с высоты h_1. Соответственно, наименьшее время движения мячика до полной остановки равно $t_1 = \sqrt{2h_1/g}$. Поскольку $|1-\delta| < 1$, слагаемое $\left(\sqrt{1-\delta}\right)^{n-2}$ будет стремиться к нулю, если число ударов мячика о пол n будет увеличиваться до бесконечности. Поэтому для получения верхней оценки времени движения мячика до полной остановки можно положить $\left(\sqrt{1-\delta}\right)^{n-2} = 0$ – это означает, что до остановки мячик должен удариться о пол бесконечное число раз.

Все эти удары произойдут за время:

$$t_\infty = t_1\left(1 + \frac{2\sqrt{1-\delta}}{1-\sqrt{1-\delta}}\right) = t_1\cdot\frac{1+\sqrt{1-\delta}}{1-\sqrt{1-\delta}} =$$

$$= t_1\cdot\frac{1+\sqrt{1-\delta}}{1-\sqrt{1-\delta}}\cdot\frac{1+\sqrt{1-\delta}}{1+\sqrt{1-\delta}} = t_1\cdot\frac{2-\delta+2\sqrt{1-\delta}}{\delta}.$$

Таким образом, имеем:

$$t_1 \le t_c < t_\infty,$$

где t_c – время движения мячика до полной его остановки. Поскольку в действительности любой мячик совершит конечное число ударов о пол, то справа стоит знак строгого неравенства. Заметим, что масса мячика для получения ответа не нужна.

Подставляя числовые данные из условия, а также значение ускорения свободного падения:

$$h_1 = 1{,}5\ \text{м},\ \ \delta = 0{,}3,\ \ g = 9{,}81\ \text{м/с}^2,$$

находим, что

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h_1}{\mathrm{g}}} = \sqrt{\frac{2\cdot 1{,}5}{9{,}81}} \approx 0{,}553\ \text{с}.$$

$$t_\infty = t_1\cdot\frac{2-\delta+2\sqrt{1-\delta}}{\delta} = 0{,}55\cdot\frac{2-0{,}3+2\sqrt{1-0{,}3}}{0{,}3} \approx 6{,}22\ \text{с}.$$

Следовательно: $0{,}553\ \text{с} \le t_c < 6{,}22\ \text{с}$.

Ответ: $0{,}553\ \text{с} \le t_c < 6{,}22\ \text{с}$.

3.2 Мячик, масса которого 80 г, падает с высоты 2 м с нулевой начальной скоростью вертикально вниз. После удара о пол мячик отскакивает вертикально вверх, поднимается до высоты, на которой его скорость становится равной нулю, снова падает вертикально вниз и так далее. После какого по счету удара наибольшая высота, на которую поднимется мячик, окажется менее 20 см, если

при каждом ударе он теряет четверть своей кинетической энергии? Через какое время после начала движения мячик поднимется на эту высоту? Сопротивлением воздуха пренебречь.
Решение: см. решение задачи 3.1.
Ответ: $n = 10, h_{10}$=15,02 см; $t = 6{,}46$ с.

3.3. Мячик, масса которого равна m, падает с высоты h с нулевой начальной скоростью вертикально вниз. После удара о пол мячик отскакивает вертикально вверх, поднимается до высоты, на которой его скорость становится равной нулю, снова падает вертикально вниз и так далее. Известно, что при каждом ударе о пол мячик теряет долю своей кинетической энергии равную δ. Пусть для первого мячика $m = 70$ г, $\delta = 1/5, h = 2{,}5$ м, а для второго — $m = 90$ г, $\delta = 1/3$. С какой высоты должен начать падение второй мячик, чтобы удариться о пол в шестой раз через такое же время после начала движения, как и первый мячик? Чему равняется это время? Считать, что траектории движения мячиков не пересекаются; сопротивлением воздуха пренебречь.
Решение: см. решение задачи 3.1.
Ответ: h_1=3,82 м; $t = 5{,}89$с.

3.4. Мячик, масса которого равна m, падает с высоты h с нулевой начальной скоростью вертикально вниз. После удара о пол мячик отскакивает вертикально вверх, поднимается до высоты, на которой его скорость становится равной нулю, снова падает вертикально вниз и так далее. Известно, что при каждом ударе о пол мячик теряет долю своей кинетической энергии равную δ.Пусть для первого мячика $m = 60$ г, $\delta = 0{,}2, h = 3{,}5$ м, а для второго — $m = 50$ г, $\delta = 0{,}3, h = 5{,}0$ м.Какой из мячиков раньше ударится о пол в седьмой раз, если они начинают движение одновременно? Считать, что траектории движения мячиков не пересекаются; сопротивлением воздуха пренебречь.
Решение: см. решение задачи 3.1.
Ответ: первый мячик ударится о пол в седьмой раз через 7,830 с, а второй — через 7,805 с, т.е. второй – быстрее.

Задача 4. (5 баллов)

Согласно одному распространенному интернет-мему существует очень простой способ стать богатым: нужно купить 1 кг ртути, вынуть из каждого ядра атома ртути по одному протону и получить в результате 1 кг золота.

На основании приведенных ниже данных об изотопах золота и ртути, считая, что ртуть содержит только природные изотопы, ответьте на следующие вопросы:

1. Какая масса золота получится на самом деле, если из каждого атома ртути удалить по одному протону? Предполагается, что данная операция происходит мгновенно для всех атомов.

2. Сколько времени займет данная операция, если тратить на каждый атом по 1 нс?
3. Какая масса золота останется спустя 60 дней после проведения данной операции (при условии, что операция по удалению протона происходит мгновенно и одновременно для всех атомов ртути)? Сколько по массе образуется ртути, платины и таллия спустя 60 дней?

Указание: расчеты масс проводить с точностью до 0,1 г.

Изотоп	Содержание в природе, %	Период полу-распада	Дочерний изотоп
196Hg	0,15	стабилен	
198Hg	10,04	стабилен	
199Hg	16,94	стабилен	
200Hg	23,14	стабилен	
201Hg	13,17	стабилен	
202Hg	29,74	стабилен	
203Hg	-	46.6 суток	203Tl (стабилен)
204Hg	6,82	стабилен	

Изотоп	Период полураспада	Схема распада	Дочерний изотоп
194Au	38 ч	β+	194Pt
195Au	186.1 суток	K-захват	195Pt
196Au	6.2 суток	β+	196Pt
197Au	стабилен	-	
198Au	2.7 суток	β-	198Hg
199Au	3.1 суток	β-	199Hg
200Au	48,4 мин	β-	200Hg
201Au	26 мин	β-	201Hg
202Au	28,8 с	β-	202Hg
203Au	60 с	β-	203Hg

204Au	38,3 с	β-	204Hg

Решение. Предположим, что мы на самом деле обладаем фантастической способностью удалять отдельные протоны из атомных ядер. Уточним процесс удаления протона, который упрощенно представлен данным интернет-мемом.

1) Для удаления протона из ядра необходимо совершить работу, равную энергии связи этого протона в ядре. Вследствие эквивалентности массы и энергии ($E = mc^2$, где c — скорость света), после удаления протона из ядра масса последнего уменьшится не только на массу протона, но и на массу, эквивалентную энергии связи удаленного протона.
2) В нейтральном атоме число электронов в оболочке атома равно числу протонов в ядре. Поэтому для получения нейтрального атома золота из нейтрального атома ртути вместе с протоном необходимо удалить также и один электрон. Соответственно, масса атома Au меньше массы атома Hg еще и на массу электрона и на массу, эквивалентную его энергии связи в электронной оболочке.

Поскольку в условии задачи сказано, что расчеты масс достаточно проводить с точностью до 0,1 г, то можно пренебречь всеми указанными выше вкладами в уменьшение массы атомов Hg при преобразовании их в атомы Au за исключением массы удаленных протонов.

Проверим это, для чего, сначала определим число атомов N, составляющих 1 кг ртути, считая, что содержание изотопов Hg соответствует природному:

$$1000 \text{ г} = N m_u \sum_i k_i i,$$

где $m_u = 1{,}660539 \cdot 10^{-24}$ г — атомная единица массы (а.е.м.),

$$i = 196, 198, 199, 200, 201, 202, 204$$

— массы стабильных изотопов Hg, выраженные в а.е.м., k_i — содержание стабильных изотопов ртути в долях (берем из таблицы в условии задачи):

$$k_{196} = 0.0015, k_{198} = 0{,}1004, k_{199} = 0{,}1694 \text{ и т. д.}$$

(Использование в качестве значений для масс изотопов атомов ртути целых чисел подразумевает пренебрежение массой электронной оболочки и энергией связи).

Подставляя в формулу числовые значения, находим, что

$$N = 3{,}0017 \cdot 10^{24}.$$

Зная N, можно ответить на второй вопрос из условия задачи: сколько всего времени T потребуется на удаление из такого количества ядер по одному протону, если на каждый протон тратить по одной наносекунде?

$$T = N \cdot 1 \text{ нс} = 3{,}0017 \cdot 10^{24} \cdot 10^{-9} \text{ с} \approx 3 \cdot 10^{15} \text{ с}.$$

Учитывая, что 1 год $\approx 3{,}16 \cdot 10^7$ с, получаем, что

$$T \approx 9{,}5 \cdot 10^7 \text{ лет} \approx 100 \text{ млн лет}.$$

Найдем суммарную массу удаленных протонов. Масса протона
$$m_p = 1{,}0072765\ \text{а. е. м.}$$
Будем считать, что $m_p \approx m_u$ — при этом ошибка в суммарной массе составит
$$(m_p - m_u)N = 7{,}2765 \cdot 10^{-3} \cdot 1{,}6605 \cdot 10^{-24} \cdot 3{,}0017 \cdot 10^{24} \approx 0{,}036\ \text{г} < 0{,}1\ \text{г},$$
т.е. меньше допустимой погрешности. Таким образом, суммарная масса удаленных протонов
$$M_p = Nm_u \approx 4{,}984\ \text{г} \approx 5{,}0\ \text{г}$$
(округляем до 0,1 г).

Энергия связи нуклона (т.е. протона или нейтрона) в ядрах тяжелых атомов примерно равна
$$8\ \text{МэВ} = 8 \cdot 10^6\ \text{эВ} = 8 \cdot 10^6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-12}\ \text{эрг} = 1{,}28 \cdot 10^{-5}\ \text{эрг}.$$
Масса, эквивалентная этой энергии, составляет
$$\frac{1{,}28 \cdot 10^{-5}\ \text{эрг}}{c^2} = \frac{1{,}28 \cdot 10^{-5}\ \text{эрг}}{(3 \cdot 10^{10}\ \text{см/с})^2} \approx 1{,}4 \cdot 10^{-26}\ \text{г}.$$
Значит, уменьшение массы ядер ртути за счет энергии связи N удаленных протонов составит
$$N \cdot 1{,}4 \cdot 10^{-26}\ \text{г} \approx 0{,}04\ \text{г} < 0{,}1\ \text{г}.$$
Масса электрона $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-28}$ г. Поэтому уменьшение массы ядер Hg за счет удаления N электронов равно
$$N \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-28}\ \text{г} \approx 0{,}003\ \text{г} < 0{,}1\ \text{г}.$$

Еще меньший вклад в уменьшение массы ядер Hg даст энергия связи электрона в атомной оболочке, даже если удалять электроны, находящиеся на самых нижних энергетических уровнях.

Таким образом, оказывается допустимым пренебречь всеми вкладами в уменьшение массы атомов ртути при преобразовании их в атомы золота за исключением массы удаленных протонов.

Теперь можно ответить на первый вопрос из условия задачи: какая масса золота получится, если из каждого ядра атома Hg, составляющих 1 кг, мгновенно удалить по одному протону?
$$M_{Au} = 1000{,}0\ \text{г} - M_p = 995{,}0\ \text{г}.$$

В результате удаления протонов из ядер ртути получаются различные изотопы атомов золота, из которых стабильным является только один — ^{197}Au. Остальные изотопы испытывают радиоактивный распад, вследствие чего M_{Au} с течением времени уменьшается. Запишем цепочки преобразования различных изотопов атомов ртути: на первом шаге из ядра удаляется протон, далее, если получившееся ядро не является стабильным, самопроизвольно происходит его радиоактивный распад:

$$^{196}\text{Hg} \to {}^{195}\text{Au} \xrightarrow[186{,}1\ \text{сут}]{} {}^{195}\text{Pt}\ (\text{стабилен})$$

$$^{198}\mathrm{Hg} \to {}^{197}\mathrm{Au}\ (\text{стабилен})$$
$$^{199}\mathrm{Hg} \to {}^{198}\mathrm{Au} \xrightarrow[2{,}7\ \text{сут}]{} {}^{198}\mathrm{Hg}\ (\text{стабилен})$$
$$^{200}\mathrm{Hg} \to {}^{199}\mathrm{Au} \xrightarrow[3{,}1\ \text{сут}]{} {}^{199}\mathrm{Hg}\ (\text{стабилен})$$
$$^{201}\mathrm{Hg} \to {}^{200}\mathrm{Au} \xrightarrow[48{,}4\ \text{мин}]{} {}^{200}\mathrm{Hg}\ (\text{стабилен})$$
$$^{202}\mathrm{Hg} \to {}^{201}\mathrm{Au} \xrightarrow[26{,}0\ \text{мин}]{} {}^{201}\mathrm{Hg}\ (\text{стабилен})$$
$$^{204}\mathrm{Hg} \to {}^{203}\mathrm{Au} \xrightarrow[60\ \text{сек}]{} {}^{203}\mathrm{Hg} \xrightarrow[46{,}6\ \text{сут}]{} {}^{203}\mathrm{Tl}\ (\text{стабилен})$$

— внизу под стрелочками указаны периоды полураспада $t_{1/2}$ соответствующих ядер.

Ясно, что суммарная масса стабильного изотопа ^{197}Au будет равна
$$(M_{197Au})_0 = Nk_{198}m_u \cdot 197 \approx 98{,}6\ \text{г}.$$

Как известно, период полураспада представляет собой время, в течение которого в среднем распадается половина начального числа радиоактивных ядер. Т.е., например, через время $T = 2t_{1/2}$ начальное число радиоактивных ядер уменьшится в $2^2 = 4$ раза, через $T = 3{,}5t_{1/2}$ — в $2^{3{,}5} \approx 11{,}31$ раза, через $T = qt_{1/2}$ — в 2^q раз. Рассмотрим, например, преобразование изотопа ^{196}Hg. Суммарная масса ядер этого изотопа
$$M_{196Hg} = Nk_{196}m_u \cdot 196.$$

Сразу же после мгновенного преобразования ядер атомов ртути в ядра атомов золота суммарная масса ядер изотопа ^{195}Au, получившихся из ^{196}Hg, будет
$$(M_{195Au})_0 = Nk_{196}m_u \cdot 195.$$

Через время T масса этих изотопов окажется равной
$$(M_{195Au})_T = (M_{195Au})_0 \cdot \frac{1}{2^{T/t_{1/2}}} = (M_{195Au})_0 \cdot \frac{1}{2^{T/186{,}1\ \text{сут}}}.$$

При этом масса стабильных изотопов ^{195}Pt составит
$$(M_{195Pt})_T = (M_{195Au})_0 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{T/186{,}1\ \text{сут}}}\right).$$

Формулы для суммарных масс остальных радиоактивных изотопов золота имеют аналогичный вид — необходимо только подставить соответствующее значение периода полураспада. Согласно условию задачи, $T = 60$ суток; при этом $T/48{,}4\ \text{мин} \approx 1785{,}1$, $T/26{,}0\ \text{мин} \approx 3323{,}1$, $T/60\ \text{сек} = 86400$, и числа

$$\frac{1}{2^{T/t_{1/2}}}$$

оказываются крайне малыми. Поэтому можно считать, что через заданное время T суммарная масса изотопов $^{200}\mathrm{Au}$, $^{201}\mathrm{Au}$ и $^{203}\mathrm{Au}$ равна нулю — они все успеют перейти в изотопы $^{200}\mathrm{Hg}$, $^{201}\mathrm{Hg}$ и $^{203}\mathrm{Hg}$ соответственно. С учетом совсем малого периода полураспада $^{203}\mathrm{Au}$ можно считать, что из него ядро $^{203}\mathrm{Hg}$ получается практически мгновенно после того как из $^{204}\mathrm{Hg}$ получено ядро $^{203}\mathrm{Au}$. Для нахождения суммарной массы ядер радиоактивного изотопа $^{203}\mathrm{Hg}$ и получающегося из него стабильного изотопа $^{203}\mathrm{Tl}$ можно использовать формулы, записанные выше.

Проводя необходимые вычисления, найдем, что через 60 дней мы будем иметь:

ртути: 854,2 г,
золота: 99,8 г,
таллия: 40,7 г,
платины: 0,3 г,

в сумме получается 995,0 г, как и должно быть с учетом массы удаленных протонов.

Таким образом, даже если бы мы и обладали способностью удалять из ядер отдельные протоны, то способ обогащения, предлагаемый известным мемом, оказывается не очень-то и выгодным и уж совсем не быстрым, если удалять протоны из одного за другим ядра по очереди.

Разделение полученной смеси, а точнее сплава трех металлов, можно осуществить следующим образом:

1. Ртуть вполне можно удалить при нагревании системы, поскольку в данном случае она является весьма легколетучей.
2. Оставшуюся смесь золота и платины необходимо растворить в «царской водке» (смеси концентрированных азотной и соляной кислот). При этом будут протекать следующие реакции:

$$Pt + 4HNO_3 + 6HCl = H_2[PtCl_6] + 4NO_2 + 4H_2O$$

$$Au + 3HNO_3 + 4HCl = H[AuCl_4] + 3NO_2 + 3H_2O$$

Далее гексахлоридоплатиновую кислоту выделяют из раствора путем добавления хлорида аммония:

$$H_2[PtCl_6] + NH_4Cl = (NH_4)_2[PtCl_6] + HCl$$

Золото в виде комплекса при этом остается в растворе. Платину в чистом виде можно выделить при термическом разложении комплекса:

$$3(NH_4)_2[PtCl_6] = 3Pt + 2N_2 + 2NH_3 + 18HCl$$

По аналогичной реакции можно выделить и золото.

Ответ:

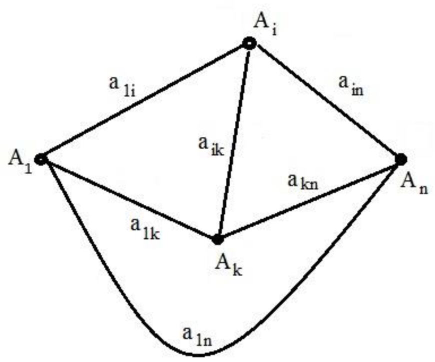
1. 995,0 г.

2. Около 100 млн лет.

3. Масса ртути: 854,2 г, золота: 99,8 г, платины: 0,3 г, таллия: 40,7 г.

Задача 5. (5 баллов)

Диспетчер транспортной компании составляет карту маршрутов перевозок груза между городами. Каждый маршрут начинается в городе A_1, проходит через все города A_i, i=2,…,n-1 в произвольном порядке по одному разу, заходит в город A_n; затем маршрут ведет в начальный город A_1 и снова проходит через все города A_i, i=2,…,n-1 в произвольном порядке по одному разу. При использовании в маршруте дважды одной дороги между городами A_i и A_j (неважно, в каком порядке следования) налагается однократный штраф 10 рублей. Штрафы для маршрута суммируются.



Входные данные считываются из файла **input.txt**. Данные имеют вид таблицы из nстрок иn столбцов, числа разделены пробелом. Число, находящееся в i-й строке и j-м столбце, задает длину дороги между городами A_iи A_j.

Максимальное число городов (строк): n=8.

Например:

0	a12	a13	a14
a12	0	a23	a24
a13	a23	0	a34
a14	a24	a34	0

Итогом работы программы должен быть файл (**output.txt**) в котором необходимо вывести построчно через пробел: длина маршрута, штраф, порядок городов (в виде последовательности их номеров).

Строки необходимо упорядочить по возрастанию длины маршрута. При наличии нескольких маршрутов одной длины, сортировка для них должна быть осуществлена по возрастанию штрафа.

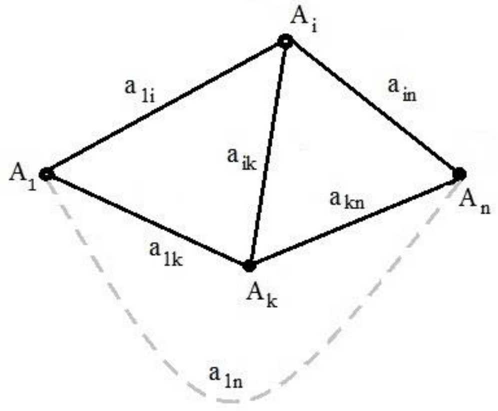
Например:

562 10 15243623451
562 30 12345653421
…

Указание: Программа должна содержать комментарии к каждому блоку, объясняющие принцип его действия. Предпочтительные языки программирования: Си++, Pascal, Basic. Не допустимо использование встроенных в язык процедур или библиотек которые выполняют часть программного кода, например сортировку (данный блок необходимо написать самостоятельно).

Решение.

Согласно условию задачи транспортировка осуществляется между начальным городом A_1 и конечным городом A_n с промежуточным посещением городов от A_2 до A_{n-1}. Это означает, что прямой путь между A_1 и A_n «запрещен» и расстояние которое дано в таблице (т.е. a_{1n} и a_{n1}) не должны учитываться при решении задачи.



Количество всех возможных путей можно найти рассуждая следующим образом: выходя из города A_1 мы можем попасть в любой город кроме A_n (т.к. n>2) используя n-2 дорог (т.е. выбрать следующий город можно n-2 способами); в следующий город (если *n-2*>2) мы можем попасть используя n-3 дорог (т.е. выбрать следующий город n-3 способами) и т.д. Из города A_{n-1} в город A_n мы можем попасть по 1 дороге. Всего возможных вариантов: *(n-2)!*

В условии задачи указано, что n≤8 т.е. при n=8 количество всех возможных вариантов пути в одну сторону равно: 6!=720.

В обратную сторону ситуация аналогична.

Штрафы имеют фиксированный размер S=10р. и назначаются за использование одной и той же дороги при пути «туда» и «обратно». Минимальный штраф который можно получить равен 0, а максимальный при этом равен S*(n-1)=70р.

При программной реализации решения задачи можно учесть следующие моменты, облегчающие составление программы:

1. Генерирование пути в одну сторону можно осуществить с помощью рекурсии. Для простоты, хранение каждой записи можно осуществлять не с использованием переменных или массивов, а с помощью записи в файл (одни вариант – одна строка в файле).
2. Путь «туда» и «обратно» включает все возможные варианты, следовательно достаточно рассмотреть какой либо путь «туда» и сравнивать его со всеми возможными путями обратно т.е. с тем же самым списком всех возможных путей «туда». И повторить эту процедуру для всего списка путей. Итого: 6!*6! = 518400 строк т.е. вариантов пар «туда-обратно».
3. При сравнении каждого пути «туда» с каким-либо путем «обратно», возможно появление штрафа (кратного 10). Возможные варианты штрафов: 0р., 10р., 20р., 30р., 40р., 50р., 60р. и 70р. Фактически, каждой паре путей «туда-обратно» соответствует свой штраф (и своя длина пути). Для упрощения дальнейших действий можно распределить найденные пары путей по сумме штрафа и сразу записывать их в отдельные файлы. Например: файл **temp30.txt** содержит все пары путей «туда-обратно» у которых штраф равен 30р. Запись ведется построчно т.е. каждой паре соответствует одна строка в начале которой находится число, равное сумме

пройденного пути. (Запись в файл поможет не волноваться о переменных при росте числа n. При n=8 во всех таких файлах будет 720^2=518400 строк; при n=9 количество возрастает до 5040^2 строк, а при n=10 таких строк по всем файлам будет $40\ 320^2$ и т.д..)

4. После формирования файлов со штрафами необходимо в каждом таком файле провести сортировку строк (т.е. пар путей «туда-обратно») по сумме пройденного пути (в соответствии с условиями задачи). Это можно сделать в рамках единой процедуры которую можно использовать индивидуально для каждого файла вида **temp30.txt**.
5. При окончательном формировании файла **output.txt** достаточно последовательно скопировать информацию из файлов **temp00.txt, temp10.txt, temp20.txt** и т.д.

Данный подход не является единственным или идеальным, однако содержит четкую разбивку на этапы и последовательность действий. Каждый из этапов можно запрограммировать отдельно и с применением достаточно простых методов и способов программирования.

Замечание: Участник мог получить дополнительный балл за доказательство того, что только при $n \geq 6$ пара путей «туда-обратно» не будет содержать одинаковых переездов между городами т.е. при $n \geq 6$ возможна ситуация когда сумма штрафов равна 0.