Олимпиада школьников СПбГУ по математике

Примеры заданий отборочного этапа

2020/2021 учебный год

6-11 классы

Олимпиада школьников СПбГУ по математике
Примеры заданий отборочного этапа
2020/2021 учебный год

Задания для 6–7 классов

1. (20 баллов) *На доске выписали все двузначные числа, делящиеся на 5, у которых число десятков больше числа единиц. Таких чисел оказалось A штук. Затем выписали все двузначные числа, делящиеся на 5, у которых число десятков меньше числа единиц. Таких чисел оказалось B штук. Чему равно $100B + A$?*

Ответ: 413.

Решение: Будем записывать двузначные числа в виде $\overline{xy}$, где x — число десятков, а y — число единиц.

Вычислим, чему равно A. Нам нужны двузначные числа, делящиеся на 5, т. е. числа, в которых y равно либо 0, либо 5. Заметим, что если $y = 0$, то x может принимать любое значение от 1 до 9, и это даст нам 9 чисел. А если $y = 5$, то x может принимать значения только от 6 до 9, что даст нам ещё 4 числа. В итоге получаем 13 чисел.

Вычислим B. Здесь может быть только случай $y = 5$, потому что x — число десятков — меньше 0 быть не может. Значит, x может принимать значения от 1 до 4. Поэтому $B = 4$. Отсюда получаем, что $100B + A = 400 + 13 = 413$.

2. (20 баллов) *Найдите количество различных четырёхзначных чисел, которые можно получить, переставляя цифры числа 2021 (включая и это число).*

Ответ: 9.

Решение: Количество вариантов можно найти перебором вариантов перестановок цифр: 2021, 2012, 2201, 2210, 2102, 2120, 1022, 1202, 1220.

Посчитать количество вариантов можно также, применяя методы комбинаторики. Позицию нуля можно выбрать тремя способами, поскольку он не должен быть первым. Затем тремя способами выбираем позицию 1, а на двух оставшихся местах ставим двойки. В итоге получается $3 \cdot 3 = 9$ возможных чисел.

3. (30 баллов) *На уроке математики каждому из семи гномов нужно найти одно двузначное число, при прибавлении к которому числа 18 получалось бы число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Могут ли все числа, найденные гномами, оказаться различными?*

Ответ: Да, могут.

Решение: Будем записывать двузначные числа в виде $\overline{xy}$, где x — число десятков, а y — число единиц.

Найдем все допустимые числа. По условию $10x + y + 18 = 10y + x$. Преобразуем:

$$10x + y + 18 = 10y + x \Leftrightarrow 18 = 9y - 9x \Leftrightarrow y = x + 2.$$

Поэтому нам подходят числа 13, 24, 35, 46, 57, 68, 79. Этих чисел столько же, сколько и гномов. Значит, гномы могли найти разные числа.

4. (30 баллов) *Пусть натуральные числа m и n удовлетворяют равенству $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2020}$. Докажите, что m и n не могут одновременно быть нечетными.*

Решение: Преобразуем условие задачи к виду

$$2020(n + m) = mn.$$

Левая часть этого равенства является четным числом, следовательно, четна и его правая часть. Поэтому хотя бы одно из чисел m и n должно быть четным.

5. (50 баллов) *При распределении земельных участков фермеру Новоселову выделили 2 квадратных участка разной площади, имеющих целочисленные стороны. Возможно ли выделить фермеру Малинникову также 2 квадратных участка с целочисленными сторонами, чтобы суммарная площадь участков Малинникова была в 2 раза больше суммарной площади участков Новоселова?*

Ответ: Да, возможно.

Решение: Обозначим через x и y стороны участков, распределенных фермеру Новоселову. Будем считать, что $x > y$. Покажем, как по x и y найти длины сторон участков, которые должны быть выделены фермеру Малинникову в соответствии с условием задачи.

Пусть $x^2 + y^2 = a$. Тогда рассмотрим $2a$:

$$2a = (x + y)^2 - 2xy + x^2 + y^2 = (x - y)^2 + (x + y)^2.$$

Таким образом, суммарная площадь квадратных участков со сторонами $x+y$ и $x-y$ будет в два раза больше суммарной площади квадратных участков со сторонами x и y. Такие участки и нужно выделить фермеру Малинникову.

6. (50 баллов) *Пусть последовательность чисел A такова, что $A_1 = 3$, $A_2 = 8$, $A_3 = 13, \ldots$. Докажите, что существует бесконечное количество числовых последовательностей B со следующими свойствами:*

1) $B_1 = 7$;

2) $B_k = B_{k-1} + d$, где d — некоторое число ($k = 2, 3, 4, \ldots$);

3) имеют с последовательностью A бесконечно много совпадающих членов.

Решение: Заметим, что если B_2 входит в A, то прогрессия B удовлетворяет условию 3). Действительно, если x — общий член A и B, то $x + 5d$ — тоже. Рассмотрим прогрессии B с разностями $A_i - 7$, где $i \geq 3$. Все они различны, и у каждой B_2 является также членом A.

Олимпиада школьников СПбГУ по математике
Примеры заданий отборочного этапа
2020/2021 учебный год

Задания для 8–9 классов

1. (10 баллов) *На доске выписали все трехзначные числа, делящиеся на 5, у которых число сотен больше числа десятков, а число десятков больше числа единиц. Таких чисел оказалось A штук. Затем выписали все трехзначные числа, делящиеся на 5, у которых число сотен меньше числа десятков, а число десятков меньше числа единиц. Таких чисел оказалось B штук. Выберите верные утверждения.*

а) $A > B$*;* *б)* $B > 10$*;* *в)* $A + B > 100$*;* *г)* $A < 10$*; д) среди перечисленных ответов нет верного.*

Ответ: а).

Решение: Обозначим трехзначное число как $\overline{xyz}$, где x — число сотен, y — число десятков, z — число единиц. По условию, искомые числа делятся на 5, значит, z равно либо 0, либо 5.

Определим, чему равно A. Если $z = 0$, то нас интересует количество пар (x, y): $9 \geq x > y > 0$. Их $8+7+\ldots+1 = 36$ (8 — количество чисел, начинающихся с 9; 7 — количество чисел, начинающихся с 8; $\ldots$; 1 — количество чисел, начинающихся с 2, т. е. число 21). Если $z = 5$, то количество пар (x, y), в которых $9 \geq x > y > 5$, будет равно $3 + 2 + 1 = 6$. Отсюда $A = 36 + 6 = 42$.

Вычислим B. Здесь может быть только случай $z = 5$, потому что меньше нуля число десятков быть не может. Значит, необходимо найти количество таких пар (x, y), что $0 < x < y < 5$. Их $3 + 2 + 1 = 6$ (3 — количество чисел, начинающихся с 1; 2 — количество чисел, начинающихся с 2; и число 34). Поэтому $B = 6$.

Получаем, что верен пункт а).

2. (10 баллов) *У Васи имеются 9 разных книг Аркадия и Бориса Стругацких, содержащих по одному произведению писателей каждая. Вася хочет расставить эти книги на полке так, чтобы рядом стояли: а) романы «Жук в муравейнике» и «Волны гасят ветер» (неважно, в каком порядке); б) повести «Беспокойство» и «Повесть о дружбе и недружбе» (неважно, в каком порядке). Сколькими способами Вася может это сделать?*

а) $4 \cdot 7!$*;* *б)* $9!$*;* *в)* $9!/4!$*;* *г)* $4! \cdot 7!$*;* *д) другой ответ.*

Ответ: а).

Решение: Запишем решение для общего случая, когда имеется N различных книг. Васе нужно расположить в ряд $N-2$ объектов: $N-4$ книги, не указанные в пунктах а) и б), и двух пар из а) и б). Это можно сделать $(N-2)!$ способами. Кроме того, внутри каждой пары можно менять книги местами, что увеличивает общее число вариантов в 4 раза. В итоге получаем $4 \cdot (N-2)!$ способов.

Для случая, когда изначально имеется 9 разных книг, получаем $4 \cdot (9-2)! = 4 \cdot 7!$.

3. (10 баллов) *Пусть в треугольнике ABC сторона $AB = 5$, а сторона $BC = 4$. Выберите неверные утверждения:*

а) если $AC = 4$, то $\angle ABC > \angle BAC$;
б) если $AC = 3$, то $\angle ABC < \angle BAC$;
в) если $AC = 2$, то $\angle ACB > \angle ABC$;
г) если $AC = 1$, то $\angle ABC < \angle BAC$.
д) неверных утверждений нет.

Ответ: а) и г).

Решение: Заметим, что вариант а) не может быть верным, так как в таком случае треугольник будет равнобедренным с основанием AB и указанные углы будут равны.

Также не может быть верен вариант г), поскольку в этом случае $AB = BC + AC$ и треугольник будет вырожденным.

В случае б) угол BAC прямой и потому больше ABC; а в случае в) угол ACB тупой.

4. (20 баллов) *На уроке математики каждому из гномов нужно найти трехзначное число, при прибавлении к которому числа 198, получалось бы число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. При каком максимальном числе гномов все найденные ими числа могли оказаться различными?*

Ответ: 70.

Решение: В силу принципа Дирихле максимальное число гномов равно количеству чисел, удовлетворяющих условию задачи.

Обозначим трехначное число как $\overline{xyz}$, где x — число сотен, y — число десятков, z — число единиц. Поскольку наряду с числом $\overline{xyz}$ рассматривается и число $\overline{zyx}$, то $x > 0$ и $z > 0$. По условию $100x + 10y + z + 198 = 100z + 10y + x$. Преобразуем:

$$99z - 99x = 198 \Leftrightarrow x = z - 2.$$

Так как $0 < x = z - 2 \leq 9$ и $z \leq 9$, то $0 < x \leq 7$. Таким образом, нам подходят 7 значений x. Каждому x соответствует одно значение z, а вот y может быть любым. Следовательно, количество чисел, удовлетворяющих условию задачи, равно $7 \cdot 10 = 70$.

5. (20 баллов) *Найдите кратное трём восьмизначное число-палиндром, записанное цифрами 0 и 1, если известно, что в записи всех его простых делителей используются только цифры 1, 3 и 7. (Числа-палиндромы читаются одинаково как слева направо, так и справа налево, например, 11011).*

Ответ: $10111101 = 3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 37$.

Решение: Отметим следующее: поскольку в задаче требуется найти число-палиндром, то последняя цифра искомого числа, равно как и первая, должны быть равны 1; число делится на 3 тогда и только тогда, когда на 3 делится сумма его цифр.

Таким образом, нас интересует число вида $\overline{1abccba1}$, где a, b, c равны 0 или 1, а $2(a+b+c)$ имеет остаток 1 при делении на 3; т.е. $a+b+c$ должно иметь остаток 2 при делении на 3. Следовательно, только одна из цифр a, b, c может быть равна нулю. Получаем, что надо проверить три числа: 10111101, 11011011 и 11100111. Отметим, что каждое из этих чисел кратно 11.

$$10111101 = 3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 37,$$

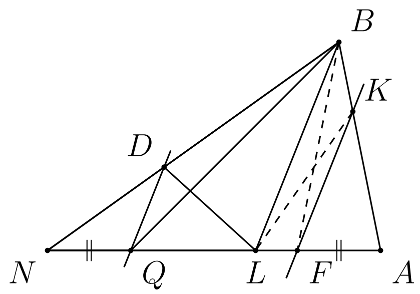
$$11011011 = 3 \cdot 11 \cdot 333667, \quad 11100111 = 3 \cdot 11 \cdot 37 \cdot 9091.$$

Два последних числа не удовлетворяют условиям задачи.

6. (30 баллов) *На стороне NA треугольника NBA отмечены точки Q и F такие, что $NQ = FA = NA/4$. На отрезке QF выбрана точка L. Через точки Q и F проведены прямые, параллельные BL, до пересечения со сторонами NB и AB в точках D и K соответственно. Верно ли, что сумма площадей треугольников NDL и AKL в 2 раза меньше площади треугольника NBA?*

Ответ: Да, верно.

Решение:



Поскольку $LB \| QD$, то равны площади треугольников LQD и BQD — эти треугольники имеют основание DQ, а их высоты равны расстоянию между параллельными прямыми LB и QD. Аналогично, поскольку $LB \| FK$, то равны площади треугольников LFK и BFK, имеющих основание FK. Таким образом, $S_{LDN} = S_{NDQ} + S_{QDL} = S_{NDQ} + S_{QDB} = S_{BQN}$ и, аналогично, $S_{LKA} = S_{BFA}$.

Заметим, что у треугольников NQB, AFB и BNA одинаковая высота (расстояние от точки B до прямой NA). Значит, отношение площадей этих треугольников равно отношению длин оснований:

$$NQ + FA = (1/4 + 1/4)NA = NA/2 \Leftrightarrow S_{NQB} + S_{AFB} = S_{NBA}/2$$

$$\Leftrightarrow S_{LDN} + S_{LKA} = S_{NBA}/2.$$

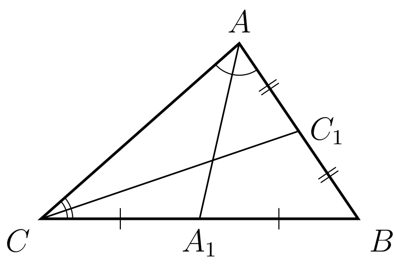
7. (30 баллов) *Перед началом урока учительница записала на доске следующую задачу: «В окружность радиуса r вписан равнобедренный треугольник, у которого сумма длин основания и высоты равна диаметру окружности. Найдите высоту треугольника». Однако двоечник Вася незаметно стер слово «диаметру» и вписал вместо него «длине». Сможет ли отличник Петя решить задачу с исправленным Васей условием?*

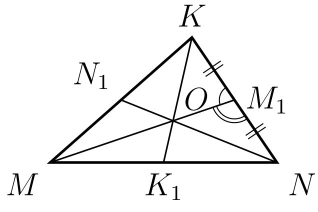
Ответ: Нет, не сможет.

Решение: Длина стороны a треугольника не может превышать диаметр окружности, а высота h вписанного треугольника меньше диаметра описанной окружности. Значит, сумма длин основания и высоты меньше $4r$. Поскольку $\pi > 3$, справедливо неравенство $a + h < 4r < 2\pi r$, что противоречит Васиному исправлению. Значит, Петя не сможет решить задачу с исправленным условием.

8. (30 баллов) *Двоечнику Васе приснилось, что верно следующее утверждение: если в треугольнике ABC медиана CC_1, проведенная к стороне AB, больше медианы AA_1, проведенной к стороне BC, то $\angle CAB$ меньше $\angle BCA$. Отличник Петя считает, что это утверждение ошибочно. Выясните, кто из них прав.*

Ответ: Прав Петя.





Решение: Сначала приведем доказательство вспомогательного утверждения: большей стороне треугольника соответствует меньшая медиана. Рассмотрим треугольник KMN, где $MN > MK$. Пусть медианы MM_1, KK_1 и NN_1 пересекаются в точке O. Сравним элементы треугольников KMM_1 и NMM_1: $KM_1 = M_1N$, MM_1 — общая сторона, а $KM < MN$, следовательно, $\angle MM_1K < \angle MM_1N$. Теперь рассмотрим треугольники OM_1K и

OM_1N: $KM_1 = M_1N$, OM_1 — общая сторона и $\angle OM_1K < \angle OM_1N$, следовательно, $KK_1 = \frac{3}{2}OK < \frac{3}{2}ON = NN_1$.

Вернемся к сну Васи: если $CC_1 > AA_1$, то согласно вспомогательному утверждению, для треугольника ABC справедливо неравенство $AB < BC$. Поскольку против большей стороны лежит больший угол, то $\angle ACB < \angle BAC$. Значит, Вася ошибся.

9. (40 баллов) *На острове живут только 50 рыцарей, которые всегда говорят правду, и 15 обывателей, которые могут говорить правду, но могут и лгать. Рассеяный профессор, приехавший на остров прочесть лекцию, забыл, какого цвета шляпа на нем надета. Какое минимальное число встречных местных жителей профессор должен спросить о цвете свой шляпы, чтобы точно знать, какой он?*

Ответ: 31.

Решение: Поскольку профессор будет спрашивать только про цвет шляпы, то для точного понимания цвета шляпы нужно гарантированно опросить рыцарей больше, чем обывателей. В худшем случае, среди опрошенных могут оказаться все обыватели острова, т. е. 15 человек; значит всего нужно опросить не менее 31 человека, чтобы мнение рыцарей гарантированно преобладало.

Олимпиада школьников СПбГУ по математике
Примеры заданий отборочного этапа
2020/2021 учебный год

Задания для 10–11 классов

1. (10 баллов) *Правила игры следующие: из 64 различных предметов на каждом шаге игроку нужно сформировать множество предметов, ранее не упоминавшееся в игре, в котором количество предметов равно возрасту игрока в годах. Игроки делают ходы по очереди; начинать игру может любой из игроков; проигрывает тот, кто не может сделать ход. Множества предметов считаются различными, если они различаются хотя бы одним предметом или если они содержат разное количество предметов. В игре участвуют Василий и Федор; каждый из игроков имеет возможность сделать хотя бы один ход. Известно, что: а) Василий на 2 года старше Федора; б) Федору не менее 5 лет; в) Федор всегда выигрывает. Какое наименьшее количество лет может быть Василию?*

Ответ: 34 года.

Решение: Ход игры — выбор из 64 элементов некоторого подмножества, в котором столько элементов, сколько лет игроку. Таким образом, в задаче необходимо сравнить количества способов такого выбора: у какого игрока количество способов выбрать «свое» подмножество, т. е. C_{64}^{x}, больше, тот и будет всегда выигрывать. Пусть V — возраст Василия в годах, F — возраст Федора в годах. По условию: $5 \leq F$, $F+2=V$, $V \leq 64$ (поскольку каждый игрок может сделать ход, т. е. хотя бы одно сочетание выбрать можно). Также известно, что $C_{64}^{F} > C_{64}^{V}$ всегда (в случае равенства Федор проигрывал бы, если бы ходил первым). Требуется найти минимальное V, при котором выполняются все перечисленные условия.

Обозначим возраст Федора за x, а Василия — за $x+2$. Рассмотрим целочисленную функцию $x \mapsto C_{64}^{x}$. Она возрастает от 0 до 32 и убывает от 32 до 64. Кроме того, $C_{64}^{31} = C_{64}^{33}$. Поэтому неравенство $C_{64}^{x} > C_{64}^{x+2}$ выполняется тогда и только тогда, когда $x \geq 32$. Таким образом, минимальное значение $x+2$ равно 34.

2. (10 баллов) *Министр К. издал распоряжение, что прием граждан будет осуществляться только в том случае, если количество способов выбрать из пришедших группу из четырех человек меньше количества способов выбрать из них группу из двух человек. Определите, каким может быть максимальное число граждан, чтобы министр их принял?*

Ответ: 5.

Решение: Количество способ выбрать из n человек группу из четырех человек равно C_n^4; группу из двух человек — C_n^2. Нас интересует максимальное натуральное n такое, что $C_n^4 < C_n^2$. Преобразуем:

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} < \frac{n(n-1)}{2} \Leftrightarrow \frac{(n-2)(n-3)}{3\cdot 4} < 1.$$

Решая неравенство методом интервалов, получаем, что $-1 < n < 6$. Следовательно, максимальное n равно 5.

3. (20 баллов) *На уроке математики каждому из гномов нужно найти трехзначное число без нулевых цифр, кратное 3, при прибавлении к которому числа 297 получалось бы число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Какое минимальное число гномов должно быть на уроке, чтобы среди найденных ими чисел всегда нашлось хотя бы два одинаковых?*

Ответ: 19.

Решение: Пусть количество чисел, удовлетворяющих условию задачи, равно N. Тогда в силу принципа Дирихле минимальное число гномов должно быть равно $N+1$.

Запишем трехзначное число как $\overline{xyz}$, где x — число сотен, y — число десятков, z — число единиц. Поскольку наряду с числом $\overline{xyz}$ рассматривается и число $\overline{zyx}$, то $x > 0$ и $z > 0$. По условию $100x + 10y + z + 297 = 100z + 10y + x$. Преобразуем:

$$99z - 99x = 297 \Leftrightarrow x = z - 3.$$

Так как $0 < x = z - 3 \le 9$ и $z \le 9$, то $0 < x \le 6$. Таким образом, нам подходят 6 значений x. Каждому x соответствует одно значение z, а y — произвольное число от 1 до 9, при котором $\overline{xyz}$ кратно 3. Заметим, что

$$0 = (x+y+z) \mod 3 = (2x+y) \mod 3,$$

то есть любая пара (x, z) однозначно определяет $y \mod 3$. Среди чисел от 1 до 9 есть ровно 3 числа с заданным остатком от деления на 3. Поэтому условию задачи удовлетворяет $6\cdot 3 = 18$ чисел, а минимальное количество гномов равно 19.

4. (20 баллов) *Пусть множество $\boldsymbol{A}$ состоит из всех трёх-, пяти-, семи- и девятизначных чисел, в записи которых используются десятичные цифры $1, 2, \ldots, n$ (не обязательно различные), а множество $\boldsymbol{B}$ — из всех двузначных, четырёх-, шести- и восьмизначных чисел, в записи которых используются десятичные цифры $1, 2, \ldots, m$ (не обязательно различные). При каких m чисел в $\boldsymbol{B}$ будет не меньше, чем в $\boldsymbol{A}$, если $n = 6$?*

Ответ: $m = 8$ или $m = 9$.

Решение: Количество чисел в множестве $\boldsymbol{A}$ равно $6^3 + 6^5 + 6^7 + 6^9 = 1036624$. Количество чисел в множестве $\boldsymbol{B}$ равно $N_m = m^2 + m^4 + m^6 + m^8$ и N_m возрастает при увеличении m.

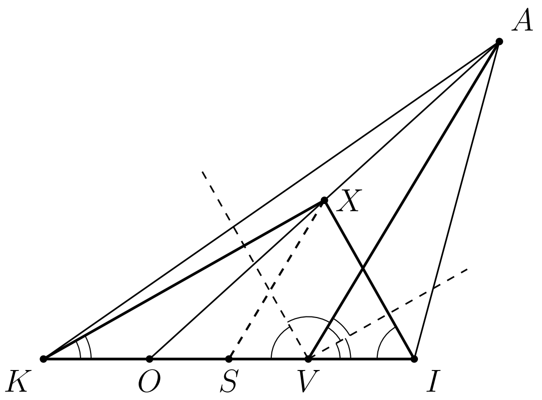
Непосредственной проверкой убеждаемся, что

$$N_7 = 5884900 < 1036624, \quad N_8 = 17043520 > 1036624.$$

Таким образом, нам подходят $m = 8$ и $m = 9$.

5. (30 баллов) *В треугольнике KIA на стороне KI отметили точку V такую, что $KI = VA$. Затем внутри треугольника отметили точку X такую, что угол XKI равен половине угла AVI, а угол XIK равен половине угла KVA. Пусть O — точка пересечения прямой AX и стороны KI. Верно ли, что $KO = VI$?*

Ответ: Да, верно.



Решение: Заметим, что угол KXI прямой (его стороны параллельны биссекрисам углов, составляющих в сумме развернутый угол). Пусть S — середина KI. Тогда S — центр описанной окружности прямоугольного треугольника KXI, откуда $XS = SK = KI/2 = AV/2$. Заметим, что $\angle XSI = \angle SKX + \angle KXS = 2\angle SKX = \angle AVI$, поскольку треугольник SXK равнобедренный. Значит, $XS \parallel AV$. Кроме того,

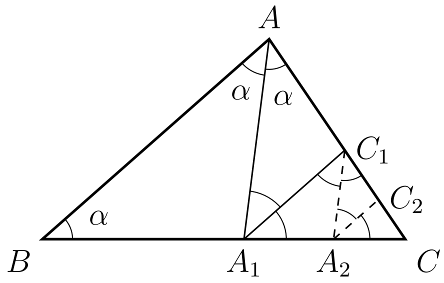
$$SX = SK = \frac{1}{2}KI = \frac{1}{2}AV.$$

Поэтому SX — средняя линия треугольника AOV. Отсюда $SO = SV$ и

$$KO = KS - SO = SI - SV = VI.$$

6. (30 баллов) *В треугольнике ABC со сторонами $AB = 5$, $BC = 6$ и $AC = 4$ проведена биссектриса AA_1 угла BAC. Далее, в треугольнике AA_1C проведена биссектриса A_1C_1 угла AA_1C; в треугольнике C_1A_1C проведена биссектриса C_1A_2 угла A_1C_1C; в треугольнике C_1A_2C проведена биссектриса A_2C_2 угла C_1A_2C; $\ldots$; в треугольнике $C_{2020}A_{2020}C$ проведена биссектриса $C_{2020}A_{2021}$ угла $A_{2020}C_{2020}C$; в треугольнике $C_{2020}A_{2021}C$ проведена биссектриса $A_{2021}C_{2021}$ угла $C_{2020}A_{2021}C$. Докажите, что треугольники ABC и $A_{2021}C_{2021}C$ подобны и найдите коэффициент подобия этих треугольников.*

Ответ: Коэффициент подобия равен $\left(\frac{4}{9}\right)^{2021}$.



Решение: Достаточно доказать, что треугольник C_1A_1C подобен треугольнику ABC с коэффициентом $\frac{4}{9}$. Продолжая проводить пары биссектрис C_iA_{i+1} и $A_{i+1}C_{i+1}$, получим последовательность подобных треугольников $CA_{i+1}C_{i+1}$, причем каждый следующий треугольник будет подобен предыдущему с коэффициентом подобия $\dfrac{4}{9}$.

Вычислим длину биссектрисы AA_1. По свойству биссектрисы $BA_1 : A_1C = AB : AC = 5 : 4$; откуда $BA_1 = \frac{10}{3}$, $A_1C = \frac{8}{3}$. Тогда

$$AA_1^2 = AB \cdot AC - BA_1 \cdot A_1C = \frac{100}{9}$$

и, следовательно, $AA_1 = \frac{10}{3} = BA_1$. Значит, треугольник ABA_1 равнобедренный и $\angle CAA_1 = \angle A_1AB = \angle ABA_1 = \alpha$. Угол AA_1C равен 2α как внешний для треугольника ABA_1. По условию

$$\angle C_1A_1C = \frac{1}{2}\angle AA_1C = \alpha = \angle ABC.$$

Значит, треугольники C_1A_1C и ABC подобны по двум углам, а коэффициент подобия равен $\frac{A_1C}{BC} = \frac{4}{9}$.

7. (40 баллов) *Положительные числа x, y, z таковы, что $xy + yz + zx = 6$. Верно ли, что*

$$\frac{1}{2\sqrt{2} + x^2(y+z)} + \frac{1}{2\sqrt{2} + y^2(x+z)} + \frac{1}{2\sqrt{2} + z^2(x+y)} \le \frac{1}{xyz}?$$

Ответ: Да, верно.

Решение: По неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим $2 = (xy + yz + zx)/3 \ge \sqrt[3]{x^2y^2z^2}$, откуда $2\sqrt{2} \ge xyz$ Оценим каждое слагаемое отдельно:

$$\frac{1}{2\sqrt{2} + x^2(y+z)} = \frac{1}{2\sqrt{2} + x(xy+xz)} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2} + x(6-yz)} = \frac{1}{6x + 2\sqrt{2} - xyz} \le \frac{1}{6x} = \frac{yz}{6xyz}.$$

Аналогично с двумя другими слагаемыми:

$$\frac{1}{2\sqrt{2} + y^2(x+z)} \le \frac{xz}{6xyz}, \quad \frac{1}{2\sqrt{2} + z^2(x+y)} \le \frac{xy}{6xyz}.$$

Складывая эти оценки, получаем

$$\frac{1}{2\sqrt{2}+x^2(y+z)}+\frac{1}{2\sqrt{2}+y^2(x+z)}+\frac{1}{2\sqrt{2}+z^2(x+y)}\leq\frac{yz+xz+xy}{6xyz}=\frac{1}{xyz}.$$

8. (40 баллов) *В 8-А классе n учеников ($n \geq 2$). Для них организованы кружки, каждый из которых посещают хотя бы двое. Каждые два кружка, у которых есть хотя бы два общих ученика, отличаются по количеству участников. Докажите, что кружков не более $(n-1)^2$.*

Решение: Достаточно доказать, что для каждого $2 \leq k \leq n$ имеется не более $\frac{n(n-1)}{k(k-1)}$ кружков, в которые ходят ровно k человек. Действительно, поскольку ни меньше 2, ни больше n человек в кружке не может быть, количество кружков не превосходит

$$n(n-1)\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}\right).$$

По индукции нетрудно доказать, что $\sum_{k=2}^{K}\frac{1}{(k-1)k}=1-\frac{1}{K}$. Таким образом, суммарное количество кружков не будет превосходить $n(n-1)\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)=(n-1)^2$.

Докажем утверждение. Зафиксируем k и будем рассматривать только кружки, в которые ходят ровно k школьников. В кружках, которые посещает некоторый школьник x, наборы из остальных $k-1$ участников не пересекаются, а всего для них доступно $n-1$ учеников. Значит, x может посещать не более $\frac{n-1}{k-1}$ кружков. Суммарное количество школьников во всех «списках участников кружков» не превосходит $\frac{n(n-1)}{k-1}$. Так как в каждом таком списке ровно k школьников, всего кружков не более $\frac{n(n-1)}{k(k-1)}$, что и требовалось доказать.

9. (40 баллов) *Найдите количество пар натуральных чисел m и n, удовлетворяющих равенству* $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{2020}$.

Ответ: 45.

Решение: Преобразуем заданное равенство

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{2020}\Leftrightarrow\frac{n+m}{m\cdot n}=\frac{1}{2020}\Leftrightarrow mn=2020(n+m)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow mn-2020n-2020m+2020^2-2020^2=0\Leftrightarrow(n-2020)(m-2020)=2020^2.$$

Решениями этого уравнения являются числа $m=d+2020$ и $n=\dfrac{2020^2}{d}+2020$, где d — произвольный делитель 2020^2. Осталось найти количество таких делителей. Заметим, что $2020^2=2^4\cdot 5^2\cdot 101^2$. Если d — делитель числа 2020^2, то 2 может входить в его разложение на простые множители в степенях $0,\ldots,4$, а 5 и 101 — в степенях $0,1,2$. Значит, общее число таких разложений равно $5\cdot 3\cdot 3=45$.