Олимпиада школьников СПбГУ по математике

Заключительный этап. 2020/2021 учебный год.

Задания для 10-11 классов

(Правильное и полное решение каждой задачи оценивается в 20 баллов)

Олимпиада школьников СПбГУ по математике.
Заключительный этап. 2020/2021 учебный год. 10 – 11 классы.

Вариант 1

1. *В некоторых клетках полоски* 1×2021 *поставлено по одной фишке. В каждую из пустых клеток записывается число, равное модулю разности количества фишек слева и справа от этой клетки. Известно, что все записанные числа различны и отличны от нуля. Какое наименьшее количество фишек может быть расставлено в клетках?*

Ответ: 1347.

Решение. Пусть n — количество расставленных фишек. Заметим, что числа в пустых клетках лежат в диапазоне от 1 до n и имеют одинаковую четность. Поэтому таких чисел может быть не более $\left[\frac{n+1}{2}\right]$. Значит, количество пустых клеток не превосходит $\left[\frac{n+1}{2}\right]$, иначе расставленные в них числа будут повторяться. Тогда

$$2021 - n \leqslant \left[\tfrac{n+1}{2}\right] \leqslant \tfrac{n+1}{2}, \quad \text{откуда} \quad n \geqslant \tfrac{4041}{3} = 1347.$$

Покажем, что значение $n = 1347$ реализуется. Нам подойдет расстановка

$$\underbrace{01\,01\ldots01}_{674\ \text{пары}}\underbrace{111\ldots1}_{673\ \text{числа}},$$

где единицами обозначены фишки, а нулями — пустые клетки. При этом на месте нулей окажутся следующие числа:

$$1347, 1345, 1343, \ldots, 3, 1. \quad \square$$

Замечание. Приведенная в решении реализация не единственна. Например, подойдет и такая:

$$1\,011\,011\ldots011\,0\,.$$

Ей соответствуют следующие числа:

$$1345, 1341, \ldots, 5, 1, 3, 7, \ldots, 1343, 1347.$$

2. *Положительные числа* a, b, c *таковы, что* $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. *Найдите минимальное значение выражения*

$$A = \frac{a^4 + b^4}{c^2 + 4ab} + \frac{b^4 + c^4}{a^2 + 4bc} + \frac{c^4 + a^4}{b^2 + 4ca}.$$

Ответ: $\frac{6}{5}$.

Решение. По неравенствам для средних

$$\frac{a^4 + b^4}{c^2 + 4ab} \geqslant \frac{a^4 + b^4}{c^2 + 2a^2 + 2b^2} = \frac{a^4 + b^4}{3 + a^2 + b^2} \geqslant \frac{\left(a^2 + b^2\right)^2}{2(3 + a^2 + b^2)} = \frac{\left(3 - c^2\right)^2}{2(6 - c^2)} = \frac{1}{2}\left(-c^2 + \frac{9}{6 - c^2}\right).$$

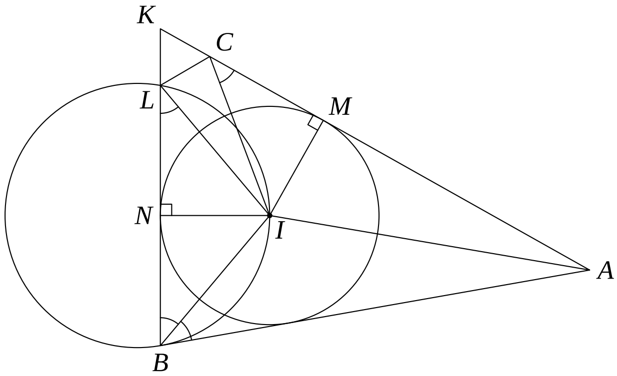
Аналогичным образом оцениваются два других слагаемых в A. Складывая эти неравенства, мы получим

$$A \geqslant \frac{1}{2}\left(-\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + \frac{9}{6 - a^2} + \frac{9}{6 - b^2} + \frac{9}{6 - c^2}\right) \geqslant \frac{1}{2}\left(-3 + \frac{81}{18 - \left(a^2 + b^2 + c^2\right)}\right) = \frac{6}{5}.$$

Равенство реализуется при $a = b = c = 1$. $\square$

3. *Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием BC. На продолжении стороны AC за точку C отмечена точка K, и в треугольник ABK вписана окружность с центром в точке I. Через точки B и I проведена окружность, касающаяся прямой AB в точке B. Эта окружность вторично пересекает отрезок BK в точке L. Найдите угол между прямыми IK и CL.*

Ответ: $90°$.



Решение. Пусть IM и IN — перпендикуляры, опущенные из точки I на AK и BK соответственно. Заметим, что $\angle ABI = \angle BLI$, поскольку прямая AB касается описанной окружности треугольника BLI. Прямая AI — биссектриса угла A, а $AB = AC$ по условию. Значит, треугольники ABI и ACI равны по двум сторонам и углу. Поэтому

$$\angle ACI = \angle ABI = \angle BLI \quad \text{и} \quad IM = IN,$$

то есть прямоугольные треугольники CMI и LNI равны. Следовательно,

$$KC = KM - CM = KN - LN = KL.$$

Прямая KI является биссектрисой равнобедренного треугольника CLK, откуда $KI \perp CL$. $\square$

4. *На доске написано число 1200. Петя приписал к нему справа $10n + 2$ пятерок, где n — неотрицательное целое число. Вася подумал, что это шестеричная запись натурального числа x, и разложил x на простые множители. Оказалось, что среди них ровно два различных. При каких n это возможно?*

Ответ: $n = 0$.

Решение. Договоримся шестеричные числа писать в скобках, чтобы отличать их от десятичных. Тогда

$$x = (1200\underbrace{55\ldots5}_{10n+2}) = (1201\underbrace{00\ldots0}_{10n+2}) - 1 = 289 \cdot 6^{10n+2} - 1 =$$
$$= (17 \cdot 6 \cdot 6^{5n} - 1)(17 \cdot 6 \cdot 6^{5n} + 1) = (102 \cdot 7776^n - 1)(102 \cdot 7776^n + 1).$$

Если $n = 0$, то $x = 101 \cdot 103$, что нам подходит. Пусть $n \geqslant 1$. Заметим, что

$$102 \bmod 101 = 1, \quad 7776^n \bmod 101 = (77 \cdot 101 - 1)^n \bmod 101 = (-1)^n.$$

Положим $a = 102 \cdot 7776^n - 1$, $b = 102 \cdot 7776^n + 1$. Эти числа взаимно просты, так как они нечетны и различаются на 2. Рассмотрим два случая.

1) *n четно.* Тогда a делится на 101. Но a и b не имеют общих простых делителей, откуда $a = 101^p$ при некотором натуральном p. Мы получим

$$101^p - 1 = 102 \cdot 7776^n - 2 = 2\,(51 \cdot 7776^n - 1),$$

что невозможно, поскольку левая часть кратна 4, а правая — нет.

2) *n нечетно.* Тогда b делится на 101 и, аналогично, $b = 101^q$ при некотором натуральном q. Поэтому

$$101^q - 1 = 102 \cdot 7776^n,$$

что невозможно, поскольку левая часть кратна 5, а правая — нет. $\square$

5. *В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством $6n+1$, $6n+3$, $6n+5$ и $6n+7$ пиастров, где n — натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?*

Ответ: $12n^2 + 8n - 1$.

Решение. Назовем натуральное число s *разложимым*, если сумму s банк может выплатить монетами достоинством только $6n+3$, $6n+5$ и $6n+7$ пиастров. Для любого $r = 1, \ldots, 6n$ обозначим через m_r наименьшее разложимое число, дающее при делении на $6n+1$ остаток r. Докажем два утверждения.

1) *Если $r \in \{1, \ldots, 6n\}$, $s \bmod (6n+1) = r$, то при $s \geqslant m_r$ сумму s банк выплатить сможет, а при $s < m_r$ — не сможет.* Первое утверждение очевидно: надо вначале выплатить сумму m_r, а затем добавить некоторое количество монет по $6n+1$ пиастров. Предположим теперь, что $s < m_r$ и сумму s выплатить можно. При этом придется использовать несколько монет по $6n+1$ пиастров. Убрав все эти монеты, мы получим разложимую сумму, меньшую m_r и тоже дающую остаток r при делении на $6n+1$. Это противоречит минимальности m_r.

2) *Числа $2k \bmod (6n+1)$ пробегают значения $\{1, \ldots, 6n\}$ при $k = 1, \ldots, 6n$.* Действительно, нам достаточно показать, что все они различны. Если $2k - 2k'$ кратно $(6n+1)$, то $(k - k') \,\vdots\, (6n+1)$. Так как $|k - k'| \leqslant 6n$, мы получаем $k = k'$.

Очевидно, что суммы, кратные $6n+1$, выплатить можно. Тогда в силу 1) ответом задачи будет $\max\{m_1, \ldots, m_{6n}\} - (6n+1)$. Найдем наибольшее из чисел m_r. Пусть $r \in \{1, \ldots, 6n\}$. Заметим, что

$$6n+3 = (6n+1)+2, \quad 6n+5 = (6n+1)+4 \quad \text{и} \quad 6n+7 = (6n+1)+6.$$

В силу 2) существует единственное число $k \in \{1, \ldots, 6n\}$, для которого $2k \bmod (6n+1) = r$. Поскольку остатки монет по модулю $6n+1$ принимают значения 2, 4 и 6, нам надо представить $2k$ в виде суммы минимального количества этих чисел. Она реализуется так: складываем шестерки, пока не получится самое большое число, не превосходящее $2k$, а затем при необходимости добавляем 2 или 4. В этой сумме будет $\left[\frac{k+2}{3}\right]$ слагаемых. Тогда

$$m_r = 2k + \left[\tfrac{k+2}{3}\right] \cdot (6n+1) \leqslant 2 \cdot 6n + 2n\,(6n+1) = 12n^2 + 14n,$$

причем равенство реализуется при $k = 6n$. Значит, ответом в задаче будет

$$12n^2 + 14n - (6n+1) = 12n^2 + 8n - 1. \quad \square$$

Вариант 2

1. *В некоторых клетках полоски 1×2100 поставлено по одной фишке. В каждую из пустых клеток записывается число, равное модулю разности количества фишек слева и справа от этой клетки. Известно, что все записанные числа различны и отличны от нуля. Какое наименьшее количество фишек может быть расставлено в клетках?*

Ответ: 1400.

Решение. Пусть n — количество расставленных фишек. Заметим, что числа в пустых клетках лежат в диапазоне от 1 до n и имеют одинаковую четность. Поэтому таких чисел может быть не более $\left[\frac{n+1}{2}\right]$. Значит, количество пустых клеток не превосходит $\left[\frac{n+1}{2}\right]$, иначе расставленные в них числа будут повторяться. Тогда

$$2100 - n \leqslant \left[\tfrac{n+1}{2}\right] \leqslant \tfrac{n+1}{2}, \quad \text{откуда} \quad n \geqslant \tfrac{4199}{3} = 1399\,\tfrac{2}{3} \ \text{ и } \ n \geqslant 1400.$$

Покажем, что значение $n = 1400$ реализуется. Нам подойдет расстановка

$$\underbrace{01\,01\ldots01}_{700\text{ пар}}\underbrace{111\ldots1}_{700\text{ чисел}},$$

где единицами обозначены фишки, а нулями — пустые клетки. При этом на месте нулей окажутся следующие числа:

$$1400, 1398, 1396, \ldots, 4, 2. \quad \square$$

Замечание. Приведенная в решении реализация не единственна. Например, подойдет и такая:

$$\underbrace{101\,101\ldots101}_{350\text{ троек}}\ \underbrace{110\,110\ldots110}_{350\text{ троек}},$$

Ей соответствуют следующие числа:

$$1398, 1394, \ldots, 6, 2, 4, 8, \ldots, 1396, 1400.$$

2. *Положительные числа a, b, c таковы, что $a + b + c = 3$. Найдите минимальное значение выражения*

$$A = \frac{a^3+b^3}{8ab+9-c^2} + \frac{b^3+c^3}{8bc+9-a^2} + \frac{c^3+a^3}{8ca+9-b^2}.$$

Ответ: $\frac{3}{8}$.

Решение. Заметим, что

$$4\big(a^3+b^3\big) \geqslant (a+b)^3 \quad \text{и} \quad 9-c^2 = (3-c)(3+c) = (a+b)(3+c).$$

Тогда по неравенствам для средних

$$\frac{4\big(a^3+b^3\big)}{8ab+9-c^2} \geqslant \frac{(a+b)^3}{2(a+b)^2+9-c^2} = \frac{(a+b)^2}{2(a+b)+3+c} = \frac{(3-c)^2}{9-c} = -c-3+\frac{36}{9-c}.$$

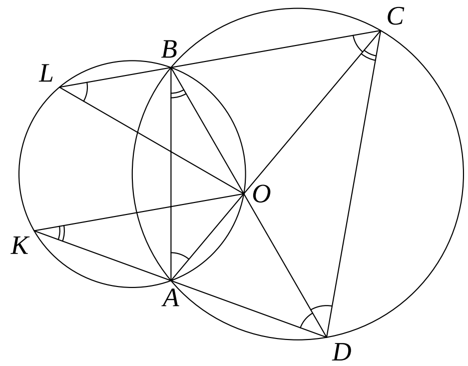
Аналогичным образом оцениваются два других слагаемых в $4A$. Складывая эти неравенства, мы получим

$$A \geqslant \frac{1}{4}\left(-(a+b+c)-9+\frac{36}{9-a}+\frac{36}{9-b}+\frac{36}{9-c}\right) \geqslant -3+\frac{81}{27-(a+b+c)} = \frac{3}{8}.$$

Равенство реализуется при $a = b = c = 1$. $\square$

3. *Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Пусть K и L — точки пересечения описанной окружности треугольника AOB с прямыми AD и BC соответственно. Найдите отношение $OK : OL$, если известно, что $\angle BCA = \angle BDC$.*

Ответ: $1 : 1$.



Решение. Поскольку четырехугольник $ABCD$ вписанный, верны равенства $\angle BAC = \angle BDC$ и $\angle BCA = \angle BDA$. Заметим также, что $\angle BCA = \angle BDC$ по условию и $\angle BAO = \angle BLO$ как углы, опирающиеся на одну дугу. Тогда

$$\angle BCA = \angle BDC = \angle BAC = \angle BAO = \angle BLO.$$

Поэтому треугольник CLO равнобедренный, то есть $OC = OL$. Кроме того,

$$\angle ADO = \angle BCA = \angle BDC = \angle ODC \quad \text{и} \quad \angle AKO = \angle ABO = \angle ABD = \angle ACD.$$

Значит, треугольники DKO и DCO равны по двум углам и стороне, откуда $OK = OC$. Таким образом, $OK = OL$. $\square$

4. *На доске написано число 12320. Петя приписал к нему справа $10n + 1$ троек, где n — неотрицательное целое число. Вася подумал, что это четверичная запись натурального числа x, и разложил x на простые множители. Оказалось, что среди них ровно два различных. При каких n это возможно?*

Ответ: $n = 0$.

Решение. Договоримся четверичные числа писать в скобках, чтобы отличать их от десятичных. Тогда

$$x = (12320\underbrace{33\ldots3}_{10n+1}) = (12321\underbrace{00\ldots0}_{10n+1}) - 1 = 441 \cdot 4 \cdot 4^{10n} - 1 = (42 \cdot 1024^n - 1)(42 \cdot 1024^n + 1).$$

Если $n = 0$, то $x = 41 \cdot 43$, что нам подходит. Пусть $n \geqslant 1$. Заметим, что

$$1024 \bmod 41 = 32^2 \bmod 41 = (-9)^2 \bmod 41 = -1, \quad \text{откуда} \quad 1024^n \bmod 41 = (-1)^n.$$

Положим $a = 42 \cdot 1024^n - 1$, $b = 42 \cdot 1024^n + 1$. Эти числа взаимно просты, так как они нечетны и различаются на 2. Рассмотрим два случая.

1) *n четно.* Тогда a делится на 41. Но a и b не имеют общих простых делителей, откуда $a = 41^p$ при некотором натуральном p. Мы получим

$$41^p - 1 = 42 \cdot 1024^n - 2 = 2\,(21 \cdot 1024^n - 1),$$

что невозможно, поскольку левая часть кратна 4, а правая — нет.

2) *n нечетно.* Тогда b делится на 41 и, аналогично, $b = 41^q$ при некотором натуральном q. Поэтому

$$41^q - 1 = 42 \cdot 1024^n,$$

что невозможно, поскольку левая часть кратна 5, а правая — нет. $\square$

5. *В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством $6n+1$, $6n+4$, $6n+7$ и $6n+10$ пиастров, где n — натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?*

Ответ: $12n^2 + 14n - 1$.

Решение. Назовем натуральное число s *разложимым*, если сумму s банк может выплатить монетами достоинством только $6n+4$, $6n+7$ и $6n+10$ пиастров. Для любого $r = 1, \ldots, 6n$ обозначим через m_r наименьшее разложимое число, дающее при делении на $6n+1$ остаток r. Докажем два утверждения.

1) *Если $r \in \{1, \ldots, 6n\}$, $s \bmod (6n+1) = r$, то при $s \geqslant m_r$ сумму s банк выплатить сможет, а при $s < m_r$ — не сможет.* Первое утверждение очевидно: надо вначале выплатить сумму m_r, а затем добавить некоторое количество монет по $6n+1$ пиастров. Предположим теперь, что $s < m_r$ и сумму s выплатить можно. При этом придется использовать несколько монет по $6n+1$ пиастров. Убрав все эти монеты, мы получим разложимую сумму, меньшую m_r и тоже дающую остаток r при делении на $6n+1$. Это противоречит минимальности m_r.

2) *Числа $3k \bmod (6n+1)$ пробегают значения $\{1, \ldots, 6n\}$ при $k = 1, \ldots, 6n$.* Действительно, нам достаточно показать, что все они различны. Если $3k - 3k'$ кратно $(6n+1)$, то $(k - k') \vdots (6n+1)$. Так как $|k - k'| \leqslant 6n$, мы получаем $k = k'$.

Очевидно, что суммы, кратные $6n+1$, выплатить можно. Тогда в силу 1) ответом задачи будет $\max\{m_1, \ldots, m_{6n}\} - (6n+1)$. Найдем наибольшее из чисел m_r. Пусть $r \in \{1, \ldots, 6n\}$. Заметим, что

$$6n+4 = (6n+1)+3, \quad 6n+7 = (6n+1)+6 \quad \text{и} \quad 6n+10 = (6n+1)+9.$$

В силу 2) существует единственное число $k \in \{1, \ldots, 6n\}$, для которого $3k \bmod (6n+1) = r$. Поскольку остатки монет по модулю $6n+1$ принимают значения 3, 6 и 9, нам надо представить $3k$ в виде суммы минимального количества этих чисел. Она реализуется так: складываем девятки, пока не получится самое большое число, не превосходящее $3k$, а затем при необходимости добавляем 3 или 6. В этой сумме будет $\left[\frac{k+2}{3}\right]$ слагаемых. Тогда

$$m_r = 3k + \left[\tfrac{k+2}{3}\right] \cdot (6n+1) \leqslant 3 \cdot 6n + 2n\,(6n+1) = 12n^2 + 20n,$$

причем равенство реализуется при $k = 6n$. Значит, ответом в задаче будет

$$12n^2 + 20n - (6n+1) = 12n^2 + 14n - 1. \quad \square$$

Вариант 3

1. *При каких натуральных n клетчатую доску $n \times n$ можно разрезать на квадраты 1×1 и 2×2 так, что квадратов разных размеров будет поровну?*

Ответ: все $n > 5$, кратные 5.

Решение. Пусть доску можно разрезать на m квадратов 1×1 и m квадратов 2×2. Тогда $n^2 = m + 4m = 5m$, откуда $n^2 \vdots 5$ и $n \vdots 5$, а $m = \frac{n^2}{5}$. Значит, нам не подходят n, которые не делятся на 5.

Пусть $n \vdots 5$. Заметим, что при $n \geqslant 10$ доску $n \times n$ можно разрезать на квадраты размера 10×10 и 15×15. Поэтому нам достаточно проверить, что $n = 10$ и $n = 15$ удовлетворяют условию задачи, а $n = 5$ — нет. При таких n на доске $n \times n$ помещается максимум 25, 49 и 4 неналегающих квадратов размера 2×2, а требуется их 20, 45 и 5 соответственно. Тогда случай $n = 5$ не подходит. При $n = 10$ и $n = 15$ можно вырезать соответственно 20 и 45 квадратов размера 2×2, а оставшуюся часть доски разрезать на одиночные клетки. Значит, $n = 10$ и $n = 15$ удовлетворяют условию. $\square$

2. *Положительные числа a, b, c таковы, что $a^2b + b^2c + c^2a = 3$. Найдите минимальное значение выражения*

$$A = a^7b + b^7c + c^7a + ab^3 + bc^3 + ca^3.$$

Ответ: 6.

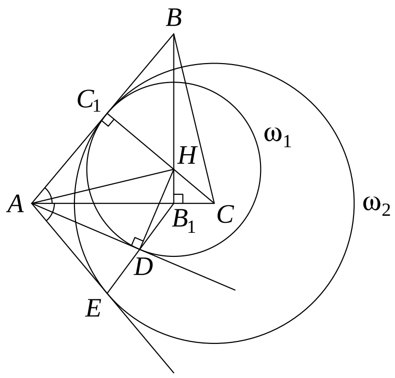
Решение. По неравенству Коши

$$A = \left(a^7b + ab^3\right) + \left(b^7c + bc^3\right) + \left(c^7a + ca^3\right) \geqslant 2\left(a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2\right) \geqslant \tfrac{2}{3}\left(a^2b + b^2c + c^2a\right)^2 = 6.$$

Равенство реализуется при $a = b = c = 1$. $\square$

3. *Дан неравнобедренный остроугольный треугольник ABC. В нем проведены высоты BB_1 и CC_1, пересекающиеся в точке H. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами H и C соответственно касаются прямой AB. Из точки A к ω_1 и ω_2 проведены касательные, отличные от AB. Обозначим точки их касания с этими окружностями через D и E соответственно. Найдите угол B_1DE.*

Ответ: 180°.



Решение. Поскольку прямоугольные треугольники ACC_1 и ACE равны по катету и гипотенузе, прямая CA — биссектриса равнобедренного треугольника C_1CE. Поэтому она является серединным перпендикуляром к отрезку C_1E, то есть точки C_1 и E симметричны относительно прямой AC. Из равенства треугольников AHD и AHC_1 вытекает также, что $\angle AHD = \angle AHC_1$. У четырехугольника AB_1HC_1 есть два противоположных прямых угла. Значит, он вписанный, откуда $\angle AB_1C_1 = \angle AHC_1$. В силу симметрии точек C_1 и E

$$\angle AB_1E = \angle AB_1C_1 = \angle AHC_1.$$

Кроме того, $\angle ADH = 90^\circ = \angle AB_1H$. Поэтому четырехугольник ADB_1H также вписанный, и

$$\angle AB_1D = \angle AHD = \angle AHC_1.$$

Таким образом, $\angle AB_1D = \angle AB_1E$, то есть $\angle B_1DE = 180^\circ$. $\square$

4. *Петя написал на доске подряд n последовательных двузначных чисел ($n \geqslant 2$), первое из которых не содержит цифру 4, а последнее — цифру 7. Вася подумал, что это десятичная запись натурального числа x, и разложил x на простые множители. Оказалось, что их всего два и они различаются на 4. Что написано на доске?*

Ответ: 2021.

Решение. Пусть a и b — простые делители x, $b = a+4$. Пары последних цифр a и b могут быть $(3,7)$, $(7,1)$, $(9,3)$. Так как x не может оканчиваться на 7, возможен только первый случай. Тогда число $y = \dfrac{a+b}{2}$ оканчивается на 5 и, значит, имеет вид $y = 10m+5$. Отсюда

$$y^2 \bmod 100 = 25\,(4m^2+4m+1) \bmod 100 = 25,$$

то есть y^2 оканчивается на 25. Поэтому $x = y^2 - 4$ оканчивается на 21, и 21 — последнее из чисел, написанных Петей. Значит, x принимает одно из следующих значений:

$$2021,\ 192021,\ 18192021,\ \ldots,\ 1011\ldots2021.$$

Первое из них нам подходит, поскольку $2021 = 43\cdot 47$. Заметим, что x не делится на 3 и на 11 (иначе $x \leqslant 3\cdot(3+4) = 21$ и $x \leqslant 11\cdot(11+4) = 165$ соответственно). По первому условию мы отбрасываем числа, начинающиеся с 10, 12, 13, 15, 16, 18, 19, а по второму — число, начинающееся с 11 (суммы его цифр на четных и нечетных позициях различаются на 33). Начинаться с 14 число x не может по условию. Если $x = 1718192021$, то

$$y^2 = x + 4 = 1718192025.$$

Но правая часть делится на 11 и не делится на 121, а потому точным квадратом быть не может. $\square$

5. *В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством 3^n, $3^{n-1}\cdot 5$, $3^{n-2}\cdot 5^2$, $3^{n-3}\cdot 5^3$, $\ldots$, $3\cdot 5^{n-1}$, 5^n пиастров, где n — натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?*

Ответ: $5^{n+1} - 2\cdot 3^{n+1}$.

Решение. Натуральное число s назовем *n-разложимым*, если сумму s можно выплатить монетами достоинством 3^n, $3^{n-1}\cdot 5$, $\ldots$, 5^n пиастров, и *n-неразложимым* в противном случае. При $n = 1$ доступны только монеты по 3 и 5 пиастров. Если $s \geqslant 10$, то найдется такое $r \in \{0,1,2\}$, что $(s-5r)\ \vdots\ 3$. Тогда s имеет вид $5r+3k$, то есть является 1-разложимым. Очевидно также, что числа 9 и 8 будут 1-разложимыми, а 7 — нет. Таким образом, максимальным 1-неразложимым числом является $7 = 5^2 - 2\cdot 3^2$.

Докажем, что для любого натурального n число $5^{n+1} - 2\cdot 3^{n+1}$ будет n-неразложимым. Сделаем это по индукции. Базу мы уже проверили. Пусть для $n-1$ утверждение справедливо. Допустим, что число $s = 5^{n+1} - 2\cdot 3^{n+1}$ оказалось n-разложимым. Если в сумму s входит m монет по 5^n пиастров, то $m < 5$ и $(5^{n+1} - m\cdot 5^n)\ \vdots\ 3$, откуда $m = 2$. Поэтому найдутся неотрицательные целые числа $k_1, \ldots, k_n$, для которых

$$s = 2\cdot 5^n + k_1\cdot 5^{n-1}\cdot 3 + \ldots + k_n\cdot 3^n.$$

Но тогда

$$5^n - 2\cdot 3^n = \frac{s - 2\cdot 5^n}{3} = k_1\cdot 5^{n-1} + k_2\cdot 5^{n-2}\cdot 3 + \ldots + k_n\cdot 3^{n-1},$$

что невозможно, поскольку число $5^n - 2\cdot 3^n$ не является $(n-1)$-разложимым.

Докажем теперь, что если $s > 5^{n+1} - 2\cdot 3^{n+1}$, то число s является n-разложимым. Снова воспользуемся индукцией по n. Базу мы уже проверили. Предположим, что для $n-1$ утверждение справедливо. Выберем $r \in \{0,1,2\}$ так, чтобы $s - r\cdot 5^n$ делилось на 3. Положим $N = \dfrac{s - r\cdot 5^n}{3}$. Тогда

$$N > \frac{5^{n+1} - 2\cdot 3^{n+1} - r\cdot 5^n}{3} = \frac{(5-r)\,5^n - 2\cdot 3^{n+1}}{3} \geqslant \frac{3\cdot 5^n - 2\cdot 3\cdot 3^n}{3} = 5^n - 2\cdot 3^n,$$

и по индукционному предположению N будет $(n-1)$-разложимым. Значит, найдутся неотрицательные целые числа $k_1, \ldots, k_n$, для которых

$$N = k_1\cdot 5^{n-1} + k_2\cdot 5^{n-2}\cdot 3 + \ldots + k_n\cdot 3^{n-1}, \quad \text{то есть} \quad s = r\cdot 5^n + k_1\cdot 5^{n-1}\cdot 3 + \ldots + k_n\cdot 3^n.$$

Таким образом, число s является n-разложимым. $\square$

Вариант 4

1. *При каких натуральных n клетчатую доску $n \times n$ можно разрезать на прямоугольники 1×1 и 2×3 так, что прямоугольников разных размеров будет поровну?*

Ответ: все $n > 7$, кратные 7.

Решение. Пусть доску можно разрезать на m квадратов 1×1 и m прямоугольников 2×3. Тогда $n^2 = m + 6m = 7m$, откуда $n^2 \,\vdots\, 7$ и $n \,\vdots\, 7$, а $m = \frac{n^2}{7}$. Значит, нам не подходят n, которые не делятся на 7.

Пусть $n \,\vdots\, 7$. Заметим, что при $n \geqslant 14$ доску $n \times n$ можно разрезать на квадраты размера 14×14 и 21×21. Поэтому нам достаточно проверить, что $n = 14$ и $n = 21$ удовлетворяют условию задачи, а $n = 7$ — нет. При таких n на доске $n \times n$ помещается максимум 28, 70 и 6 неналегающих прямоугольников размера 2×3, а требуется их 28, 63 и 7 соответственно. Тогда случай $n = 7$ не подходит. При $n = 14$ и $n = 21$ можно вырезать соответственно 28 и 63 прямоугольников размера 2×3, а оставшуюся часть доски разрезать на одиночные клетки. Значит, $n = 14$ и $n = 21$ удовлетворяют условию. $\square$

2. *Положительные числа a, b, c таковы, что $a^2b + b^2c + c^2a = 3$. Найдите минимальное значение выражения*

$$A = \frac{\sqrt{a^6 + b^4c^6}}{b} + \frac{\sqrt{b^6 + c^4a^6}}{c} + \frac{\sqrt{c^6 + a^4b^6}}{a}.$$

Ответ: $3\sqrt{2}$.

Решение. Воспользуемся неравенством $\sqrt{x+y} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)$ при $x, y \geqslant 0$. С учетом неравенства Коши мы получим

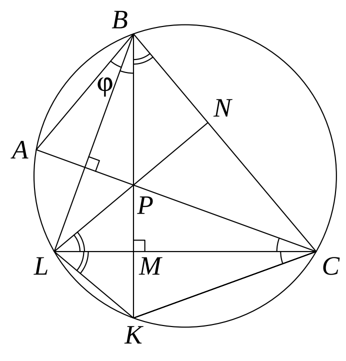
$$A \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{a^3 + b^2c^3}{b} + \frac{b^3 + c^2a^3}{c} + \frac{c^3 + a^2b^3}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{a^3}{b} + bc^3 + \frac{b^3}{c} + ca^3 + \frac{c^3}{a} + ab^3\right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left(\frac{a^3}{b} + ab^3\right) + \left(\frac{b^3}{c} + bc^3\right) + \left(\frac{c^3}{a} + ca^3\right)\right) \geqslant \sqrt{2}\left(a^2b + b^2c + c^2a\right) = 3\sqrt{2}.$$

Равенство реализуется при $a = b = c = 1$. $\square$

3. *Вокруг остроугольного треугольника ABC описана окружность. Точка K — середина меньшей дуги AC этой окружности, а точка L — середина меньшей дуги AK этой окружности. Отрезки BK и AC пересекаются в точке P. Найдите угол между прямыми BC и LP, если известно, что $BK = BC$.*

Ответ: 90°.



Решение. Пусть $\angle ABL = \varphi$. Тогда $\angle KBL = \varphi$ и $\angle KBC = 2\varphi$. Поскольку $BK = BC$, мы получаем $\angle BKC = \angle BCK = 90^\circ - \varphi$. Кроме того,

$$\angle LCK + \angle BKC = \angle LBK + \angle BKC = \varphi + (90^\circ - \varphi) = 90^\circ,$$

то есть прямые BK и CL перпендикулярны. С другой стороны,

$$\angle BLC + \angle ACL = \angle BKC + \angle ABL = (90^\circ - \varphi) + \varphi = 90^\circ,$$

поэтому прямые BL и AC также перпендикулярны. Стало быть, точка P является ортоцентром треугольника BCL, откуда $LP \perp BC$. $\square$

4. *Петя написал на доске подряд в убывающем порядке n последовательных двузначных чисел, последнее из которых не содержит цифру 7. Вася подумал, что это десятичная запись натурального числа x, и разложил x на простые множители. Оказалось, что их всего два и они различаются на 4. Что написано на доске?*

Ответ: 91.

Решение. Пусть a и b — простые делители x, $b = a + 6$. Пары последних цифр a и b могут быть $(1, 7)$, $(3, 9)$, $(7, 3)$. Так как x не может оканчиваться на 7, возможен только последний случай. Тогда число $y = \dfrac{a+b}{2}$ оканчивается на 5 или на 0. Заметим, что число x нечетно и $x = y^2 - 9$. Значит, число y четно, то есть оно кратно 10, откуда

$$x \bmod 100 = (y^2 - 9) \bmod 100 = 100 - 9 = 91.$$

Таким образом, x оканчивается на 91 и принимает одно из следующих значений:

$$91,\ 9291,\ 939291,\ \ldots,\ 9998\ldots9291.$$

Первое из них нам подходит, поскольку $91 = 13 \cdot 7$. Покажем, что все остальные числа не подходят. Действительно, для них y^2 оканчивается на 300. Тогда число y представимо в виде $10z$, где z^2 оканчивается на 3, что невозможно. Таким образом, $x = 91$ — единственный ответ. $\square$

5. *В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством 2^n, $2^{n-1} \cdot 3$, $2^{n-2} \cdot 3^2$, $2^{n-3} \cdot 3^3$, …, $2 \cdot 3^{n-1}$, 3^n пиастров, где n — натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?*

Ответ: $3^{n+1} - 2^{n+2}$.

Решение. Натуральное число s назовем *n-разложимым*, если сумму s можно выплатить монетами достоинством 2^n, $2^{n-1} \cdot 3$, …, 3^n пиастров, и *n-неразложимым* в противном случае. При $n = 1$ доступны только монеты по 2 и 3 пиастра. Если $s \geqslant 3$, то найдется такое $r \in \{0, 1\}$, что $(s - 3r)$ четно. Тогда s имеет вид $3r + 2k$, то есть является 1-разложимым. Очевидно также, что число 2 будет 1-разложимым, а 1 — нет. Таким образом, максимальным 1-неразложимым числом является $1 = 3^2 - 2^3$.

Докажем, что для любого натурального n число $3^{n+1} - 2^{n+2}$ будет n-неразложимым. Сделаем это по индукции. Базу мы уже проверили. Пусть для $n - 1$ утверждение справедливо. Допустим, что число $s = 3^{n+1} - 2^{n+2}$ оказалось n-разложимым. Если в сумму s входит m монет по 3^n пиастров, то $m < 3$ и $3^{n+1} - m \cdot 3^n$ четно, откуда $m = 1$. Поэтому найдутся неотрицательные целые числа $k_1, \ldots, k_n$, для которых

$$s = 3^n + k_1 \cdot 3^{n-1} \cdot 2 + \ldots + k_n \cdot 2^n.$$

Но тогда

$$3^n - 2^{n+1} = \frac{s - 3^n}{2} = k_1 \cdot 3^{n-1} + k_2 \cdot 3^{n-2} \cdot 2 + \ldots + k_n \cdot 2^{n-1},$$

что невозможно, поскольку число $3^n - 2^{n+1}$ не является $(n-1)$-разложимым.

Докажем теперь, что если $s > 3^{n+1} - 2^{n+2}$, то число s является n-разложимым. Снова воспользуемся индукцией по n. Базу мы уже проверили. Предположим, что для $n - 1$ утверждение справедливо. Выберем $r \in \{0, 1\}$ так, чтобы $s - r \cdot 3^n$ делилось на 2. Положим $N = \dfrac{s - r \cdot 3^n}{2}$. Тогда

$$N > \frac{3^{n+1} - 2^{n+2} - r \cdot 3^n}{2} = \frac{(3 - r)\, 3^n - 2^{n+2}}{2} \geqslant \frac{2 \cdot 3^n - 2 \cdot 2^{n+1}}{2} = 3^n - 2^{n+1},$$

и по индукционному предположению N будет $(n-1)$-разложимым. Значит, найдутся неотрицательные целые числа $k_1, \ldots, k_n$, для которых

$$N = k_1 \cdot 3^{n-1} + k_2 \cdot 3^{n-2} \cdot 2 + \ldots + k_n \cdot 2^{n-1}, \quad \text{то есть} \quad s = r \cdot 3^n + k_1 \cdot 3^{n-1} \cdot 2 + \ldots + k_n \cdot 2^n.$$

Таким образом, число s является n-разложимым. $\square$

Вариант 5

1. *Натуральные числа от 1 до 2021 записаны в ряд в некотором порядке. Оказалось, что у любого числа его левый и его правый сосед имеют разную четность. Какое число может быть на первом месте?*

Ответ: любое нечетное число.

Решение. Докажем вначале, что в любой четверке идущих подряд чисел есть два четных и два нечетных числа. Действительно, пусть в некоторой четверке есть три числа одинаковой четности. Тогда среди них найдутся два числа, идущих через одно. Но число между ними будет иметь соседей одинаковой четности, что невозможно.

Разобьем диапазон со второй по 2021-ю позицию на блоки по 4 числа. По доказанному в каждом блоке четных и нечетных чисел поровну, а тогда и во всем диапазоне тоже. Но в промежутке $[1, 2021]$ нечетных чисел больше, чем четных. Значит, первым будет нечетное число. Покажем, что любое нечетное число может на первой позиции оказаться. Расположим все числа по схеме

$$\text{Н ЧЧНН ЧЧНН} \ldots \text{ЧЧНН},$$

где Ч обозначает четное число, а Н — нечетное. Такая расстановка удовлетворяет условию задачи. При этом нечетное число на первой позиции может быть произвольным. $\square$

2. *При $a, b, c > 0$ найдите максимальное значение выражения*

$$A = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{(a+b+c)^3 - 26abc}.$$

Ответ: 3.

Решение. Заметим, что $(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 6abc + B$, где

$$B = 3\left(a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2\right) \geqslant 18\sqrt[6]{a^6b^6c^6} = 18abc$$

(мы воспользовались неравенством Коши). Тогда

$$a^3 + b^3 + c^3 \leqslant (a+b+c)^3 - 24abc.$$

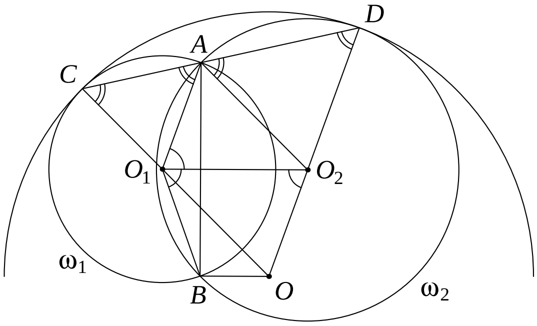
Положим $t = \dfrac{(a+b+c)^3}{abc}$. По неравенству Коши $t \geqslant 27$, откуда

$$A \leqslant \frac{(a+b+c)^3 - 24abc}{(a+b+c)^3 - 26abc} = \frac{t-24}{t-26} = 1 + \frac{2}{t-26} \leqslant 3.$$

Равенство реализуется при $a = b = c$. $\square$

3. *Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B, а окружность с центром в точке O охватывает окружности ω_1 и ω_2, касаясь их в точках C и D соответственно. Оказалось, что точки A, C и D лежат на одной прямой. Найдите угол ABO.*

Ответ: 90°.



Решение. Обозначим через O_1 и O_2 центры окружностей ω_1 и ω_2. Треугольники COD, CO_1A, AO_2D равнобедренные. Поскольку точки C, A, D лежат на одной прямой, мы получаем

$$\angle O_1AC = \angle O_1CA = \angle OCD = \angle ODC.$$

Поэтому $O_1A \parallel OO_2$ и, аналогично, $O_2A \parallel OO_1$. Значит, OO_1AO_2 — параллелограмм, откуда

$$O_1A = O_2O \quad \text{и} \quad \angle AO_1O_2 = \angle O_1O_2O.$$

Так как треугольники AO_1B и AO_2B равнобедренные, отрезок O_1O_2 является серединным перпендикуляром к AB. Тогда

$$O_1B = O_1A = O_2O \quad \text{и} \quad \angle BO_1O_2 = \angle AO_1O_2 = \angle O_1O_2O.$$

Поэтому O_1O_2OB — равнобедренная трапеция, откуда $BO \parallel O_1O_2$ и, значит, $BO \perp AB$. $\square$

4. *Петя написал на доске подряд n двузначных восьмеричных чисел ($n \geqslant 2$), образующих арифметическую прогрессию с разностью -8. Вася подумал, что это восьмеричная запись натурального числа x, и разложил x на простые множители. Оказалось, что их всего два, и они различаются на 6. Что написано на доске?*

Ответ: 7767.

Решение. Пусть y, z — простые делители x, $z = y + 6$. Заметим, что число $x + 9$ равно $\left(\frac{y+z}{2}\right)^2$, то есть оно является точным квадратом. Запишем допустимые пары (y, z) в восьмеричной форме:

$$\left(\overline{\ldots a1}, \overline{\ldots a7}\right), \quad \left(\overline{\ldots a3}, \overline{\ldots (a+1)1}\right), \quad \left(\overline{\ldots a5}, \overline{\ldots (a+1)3}\right), \quad \left(\overline{\ldots a7}, \overline{\ldots (a+1)5}\right). \qquad (*)$$

В первом случае восьмеричная запись x оканчивается на 07, что невозможно, поскольку числа в прогрессии двузначные. Для третьей пары последней восьмеричной цифрой x будет 7, а предпоследней — $(8a + 5 + 1) \bmod 8 = 6$. Тогда с учетом условия $n \geqslant 2$ мы получаем $x = 7767_8$. Это нам подходит, так как

$$x + 9 = 7767_8 + 9 = 4096 = 64^2 \quad \text{и} \quad x = 61 \cdot 67.$$

Рассмотрим теперь вторую и четвертую пары в $(*)$. Последней восьмеричной цифрой x будет 3, а предпоследней — $(4a + 3) \bmod 8$, так как $\bigl(7(a + 1) + 5a + 4\bigr) \bmod 8 = (4a + 3) \bmod 8$. Нечетные a не подходят по условию $n \geqslant 2$, так как число $73_8 + 8$ уже трехзначное. Поэтому восьмеричная запись x оканчивается на 33. Значит, x может быть одним из чисел

$$4333_8,\ 534333_8,\ 63534333_8,\ 7363534333_8.$$

Второе и третье не подходят, поскольку они делятся на 3 (суммы цифр на четных и нечетных позициях различаются на 3 и 6 соответственно). Кроме того,

$$(4333_8 + 9) \bmod 3 = (6 - 7 + 9) \bmod 3 = 2 \quad \text{и} \quad (7363534333_8 + 9) \bmod 3 = (15 - 25 + 9) \bmod 3 = 2.$$

Поэтому числа $4333_8 + 9$ и $7363534333_8 + 9$ не являются точными квадратами, что невозможно. Таким образом, $x = 7767_8$ — единственный ответ. $\square$

5. *В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством $3n - 1$, $6n + 1$, $6n + 4$ и $6n + 7$ пиастров, где n — натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?*

Ответ: $6n^2 + 4n - 5$.

Решение. Назовем натуральное число s *разложимым*, если сумму s банк может выплатить монетами достоинством только $6n + 1$, $6n + 4$ и $6n + 7$ пиастров. Для любого $r = 1, \ldots, 3n - 2$

обозначим через m_r наименьшее разложимое число, дающее при делении на $3n-1$ остаток r. Докажем два утверждения.

1) *Если* $r \in \{1, \ldots, 3n-2\}$, $s \bmod (3n-1) = r$, *то при* $s \geqslant m_r$ *сумму* s *банк выплатить сможет, а при* $s < m_r$ *— не сможет.* Первое утверждение очевидно: надо вначале выплатить сумму m_r, а затем добавить некоторое количество монет по $3n-1$ пиастров. Предположим теперь, что $s < m_r$ и сумму s выплатить можно. При этом придется использовать несколько монет по $3n-1$ пиастров. Убрав все эти монеты, мы получим разложимую сумму, меньшую m_r и тоже дающую остаток r при делении на $3n-1$. Это противоречит минимальности m_r.

2) *Числа* $3k \bmod (3n-1)$ *пробегают значения* $\{1, \ldots, 3n-2\}$ *при* $k = 1, \ldots, 3n-2$. Действительно, нам достаточно показать, что все они различны. Если $(3k-3k') \vdots (3n-1)$, то $(k-k') \vdots (3n-1)$. Так как $|k-k'| \leqslant 3n-2$, мы получаем $k = k'$.

Очевидно, что суммы, кратные $3n-1$, выплатить можно. Тогда в силу 1) ответом задачи будет $\max\{m_1, \ldots, m_{3n-2}\} - (3n-1)$. Найдем наибольшее из чисел m_r. Пусть $r \in \{1, \ldots, 3n-2\}$. Заметим, что

$$6n+1 = 2(3n-1)+3, \quad 6n+4 = 2(3n-1)+6 \quad \text{и} \quad 6n+7 = 2(3n-1)+9.$$

В силу 2) существует единственное число $k \in \{1, \ldots, 3n-2\}$, для которого $3k \bmod (3n-1) = r$. Поскольку остатки монет по модулю $3n-1$ принимают значения 3, 6 и 9, нам надо представить $3k$ в виде суммы минимального количества этих чисел. Она реализуется так: складываем девятки, пока не получится самое большое число, не превосходящее $3k$, а затем при необходимости добавляем 3 или 6. В этой сумме будет $\left[\frac{k+2}{3}\right]$ слагаемых. Тогда

$$m_r = 3k + \left[\tfrac{k+2}{3}\right] \cdot 2(3n-1) \leqslant 3(3n-2) + 2n(3n-1) = 6n^2 + 7n - 6,$$

причем равенство реализуется при $k = 3n-2$. Значит, ответом в задаче будет

$$(6n^2+7n-6) - (3n-1) = 6n^2 + 4n - 5. \quad \square$$

Вариант 6

1. *Натуральные числа от 1 до 2023 записаны в ряд в некотором порядке. Оказалось, что любые три числа, расположенные через одно, дают разные остатки от деления на 3. Какое число может быть на первом месте?*

   Ответ: любое число, дающее остаток 1 от деления на 3.

   Решение. Разобьем диапазон от 1 до 2023 на группы чисел, дающих при делении на 3 остатки 0, 1 и 2. Первая и третья группа содержит по 674 чисел, а вторая — 675 чисел. В любой шестерке идущих подряд чисел есть ровно по два числа из каждой группы, поскольку на позициях $1, 3, 5$, а также на позициях $2, 4, 6$ находятся числа из разных групп. Разобьем диапазон со второй по 2023-ю позицию на блоки по 6 чисел. Каждый блок содержит одинаковое количество чисел из каждой группы, а тогда и весь диапазон тоже. Оставшееся число дает при делении на 3 остаток 1, и только оно может быть первым.

   Покажем, что любое число из второй группы может оказаться на первой позиции. Допустимость конфигурации чисел зависит не от самих чисел, а только от их остатков при делении на 3. Расположим эти остатки по схеме

$$1\,220011\,220011\,\ldots\,220011\,.$$

Она удовлетворяет условию задачи. Значит, первым может оказаться любое число, дающее при делении на 3 остаток 1. $\square$

2. *При $a, b, c > 0$ найдите максимальное значение выражения*

$$A = \frac{a^4 + b^4 + c^4}{(a+b+c)^4 - 80\,(abc)^{4/3}}.$$

   Ответ: 3.

   Решение. Заметим, что $(a+b+c)^4 = a^4 + b^4 + c^4 + B$, где

$$B = 4\left(a^3b + ab^3 + b^3c + bc^3 + c^3a + ca^3\right) + 6\left(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2\right) + 12\left(abc^2 + bca^2 + cab^2\right) \geqslant$$
$$\geqslant 24\sqrt[6]{(abc)^8} + 18\sqrt[3]{(abc)^4} + 36\sqrt[3]{(abc)^4} = 78\,(abc)^{4/3}$$

(мы воспользовались неравенством Коши). Тогда

$$a^4 + b^4 + c^4 \leqslant (a+b+c)^4 - 78\,(abc)^{4/3}.$$

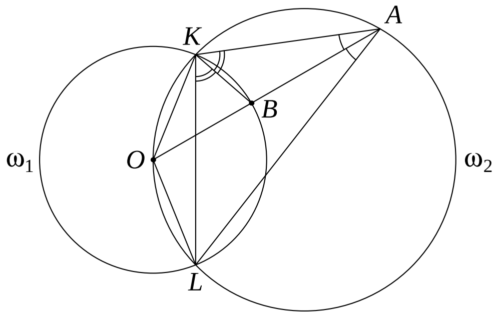
Положим $t = \dfrac{(a+b+c)^4}{(abc)^{4/3}}$. По неравенству Коши $t \geqslant 81$, откуда

$$A \leqslant \frac{(a+b+c)^4 - 78\,(abc)^{4/3}}{(a+b+c)^4 - 80\,(abc)^{4/3}} = \frac{t-78}{t-80} = 1 + \frac{2}{t-80} \leqslant 3.$$

Равенство реализуется при $a = b = c$. $\square$

3. *Окружность ω_1 с центром O пересекается в точках K и L с окружностью ω_2, проходящей через точку O. Через точку O проведена прямая, вторично пересекающая окружность ω_2 в точке A. Отрезок OA пересекает окружность ω_1 в точке B. Найдите отношение расстояний от точки B до прямых AL и KL.*

   Ответ: $1 : 1$.



Решение. Заметим, что $\angle OAK = \angle OAL$ как углы, опирающиеся на равные хорды OK и OL. Значит, AB — биссектриса угла LAK. Кроме того, $\angle AKL = \angle AOL$ как углы, опирающиеся на дугу AL. Тогда

$$\angle BKL = \tfrac{1}{2}\angle BOL = \tfrac{1}{2}\angle AKL.$$

Поэтому KB — биссектриса угла AKL. Таким образом, точка B — центр вписанной окружности треугольника AKL. Значит, она равноудалена от прямых AL и KL. $\square$

4. *Петя написал на доске подряд n двузначных восьмеричных чисел ($n \geqslant 2$), образующих арифметическую прогрессию с разностью 8, причем первое число не содержит цифру 2. Вася подумал, что это восьмеричная запись натурального числа x, и разложил x на простые множители. Оказалось, что их всего два, и они различаются на 2. Что написано на доске?*

Ответ: 3343.

Решение. Пусть y, z — простые делители x, $z = y + 2$. Заметим, что число $x + 1$ равно $\left(\frac{y+z}{2}\right)^2$, то есть оно является точным квадратом. Запишем возможные пары (y, z) в восьмеричной форме:

$$\left(\overline{\ldots a1}, \overline{\ldots a3}\right), \quad \left(\overline{\ldots a3}, \overline{\ldots a5}\right), \quad \left(\overline{\ldots a5}, \overline{\ldots a7}\right), \quad \left(\overline{\ldots a7}, \overline{\ldots (a+1)1}\right). \qquad (*)$$

Для первой и третьей пар последней восьмеричной цифрой x будет 3, а предпоследней — $4a \bmod 8$ или $(12a + 4) \bmod 8$. Эта цифра ненулевая, так как числа в прогрессии двузначные. Поэтому в обоих случаях она равна 4, а восьмеричная запись x оканчивается на 43. С учетом условия x может принимать значения 3343_8 или 13233343_8. Первое число нам подходит, поскольку

$$x + 1 = 3343_8 + 1 = 1764 = 42^2 \quad \text{и} \quad x = 41 \cdot 43.$$

Пусть $x = 13233343_8$. Тогда

$$(x + 1) \bmod 3 = (12 - 10 + 1) \bmod 3 = 0 \quad \text{и} \quad (x + 1) \bmod 9 = (12 - 10 + 1) \bmod 9 = 3.$$

Значит, число $x + 1$ делится на 3 и не делится на 9, а потому оно не является точным квадратом.

Рассмотрим теперь вторую и четвертую пары в $(*)$. Последней восьмеричной цифрой x будет 7, а предпоследней — 1 или 7. Первого случая не может быть при $n \geqslant 2$, поскольку число $17_8 - 8$ не является двузначным. Значит, с учетом условия возможны следующие значения x:

$$6777_8,\ 576777_8,\ 47576777_8,\ 3747576777_8,\ 17273747576777_8.$$

Заметим, что $x + 1 = \ldots 7000_8 = \ldots 7_8 \cdot 2^9$. Тогда число $x + 1$ делится на 2^9 и не делится на 2^{10}, а потому оно не является точным квадратом. Таким образом, $x = 3343_8$ — единственный ответ. $\square$

5. *В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством $3n - 2$, $6n - 1$, $6n + 2$ и $6n + 5$ пиастров, где n — натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?*

Ответ: $6n^2-4n-3$.

Решение. Назовем натуральное число s *разложимым*, если сумму s банк может выплатить монетами достоинством только $6n-1$, $6n+2$ и $6n+5$ пиастров. Для любого $r=1,\dots,3n-3$ обозначим через m_r наименьшее разложимое число, дающее при делении на $3n-2$ остаток r. Докажем два утверждения.

1) *Если $r \in \{1,\dots,3n-3\}$, $s \bmod (3n-2)=r$, то при $s \geqslant m_r$ сумму s банк выплатить сможет, а при $s<m_r$ — не сможет.* Первое утверждение очевидно: надо вначале выплатить сумму m_r, а затем добавить некоторое количество монет по $3n-2$ пиастров. Предположим теперь, что $s<m_r$ и сумму s выплатить можно. При этом придется использовать несколько монет по $3n-2$ пиастров. Убрав все эти монеты, мы получим разложимую сумму, меньшую m_r и тоже дающую остаток r при делении на $3n-2$. Это противоречит минимальности m_r.

2) *Числа $3k \bmod (3n-2)$ пробегают значения $\{1,\dots,3n-3\}$ при $k=1,\dots,3n-3$.* Действительно, нам достаточно показать, что все они различны. Если $(3k-3k') \vdots (3n-2)$, то $(k-k') \vdots (3n-2)$. Так как $|k-k'| \leqslant 3n-3$, мы получаем $k=k'$.

Очевидно, что суммы, кратные $3n-2$, выплатить можно. Тогда в силу 1) ответом задачи будет $\max\{m_1,\dots,m_{3n-3}\}-(3n-2)$. Найдем наибольшее из чисел m_r. Пусть $r \in \{1,\dots,3n-3\}$. Заметим, что

$$6n-1=2(3n-2)+3, \quad 6n+2=2(3n-2)+6 \quad \text{и} \quad 6n+5=2(3n-2)+9.$$

В силу 2) существует единственное число $k \in \{1,\dots,3n-3\}$, для которого $3k \bmod (3n-2)=r$. Поскольку остатки монет по модулю $3n-2$ принимают значения 3, 6 и 9, нам надо представить $3k$ в виде суммы минимального количества этих чисел. Она реализуется так: складываем девятки, пока не получится самое большое число, не превосходящее $3k$, а затем при необходимости добавляем 3 или 6. В этой сумме будет $\left[\frac{k+2}{3}\right]$ слагаемых. Тогда

$$m_r=3k+\left[\tfrac{k+2}{3}\right]\cdot 2(3n-2) \leqslant 3(3n-3)+2(n-1)(3n-2)=6n^2-n-5,$$

причем равенство реализуется при $k=3n-3$. Значит, ответом в задаче будет

$$(6n^2-n-5)-(3n-2)=6n^2-4n-3. \quad \square$$

Вариант 7

1. *Можно ли в таблице 35×35 расставить различные целые числа так, чтобы значения в клетках, имеющих общую сторону, отличались не более чем на 18?*

Ответ: нет.

Решение. Пусть m — наименьшее число в таблице. Перемещаясь каждый раз на одну клетку в горизонтальном или вертикальном направлении, мы сможем попасть в любую клетку таблицы за не более чем $34 \cdot 2 = 68$ шагов. По условию на каждом шаге значение в клетке может увеличиться не более чем на 18. Поэтому все числа таблицы лежат в промежутке $[m, m + 68 \cdot 18]$. Этот диапазон содержит $68 \cdot 18 + 1 = 1225$ чисел, то есть ровно столько, сколько клеток в таблице. Значит, таблица заполнена в некотором порядке числами от m до $m + 68 \cdot 18$. Заметим, что минимальное и максимальное числа располагаются в противоположных углах таблицы. При перемещении от минимального числа к максимальному по маршруту, состоящему из 68 шагов, нам нужно каждый раз увеличивать значение ровно на 18. Но таких маршрутов много. Например, мы можем пройти от m к $m + 68 \cdot 18$ через любую из двух клеток, граничащих с m. Значит, в этих клетках стоят одинаковые числа. $\square$

2. *При $a, b, c > 0$ найдите максимальное значение выражения*

$$A = \frac{a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b)}{a^3 + b^3 + c^3 - 2abc}.$$

Ответ: 6.

Решение. По неравенству Коши

$$a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) = \tfrac{1}{3}\left((a+b+c)^3 - (a^3+b^3+c^3+6abc)\right) \leqslant \tfrac{1}{3}\left((a+b+c)^3 - 9abc\right).$$

Заметим, что

$$a^3 + b^3 + c^3 - 2abc \geqslant \tfrac{1}{9}\,(a+b+c)^3 - 2abc = \tfrac{1}{9}\left((a+b+c)^3 - 18abc\right).$$

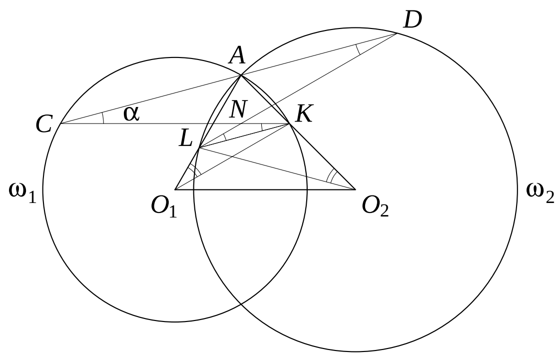
Положим $t = \dfrac{(a+b+c)^3}{abc}$. По неравенству Коши $t \geqslant 27$, откуда

$$A \leqslant \frac{3\left((a+b+c)^3 - 9abc\right)}{(a+b+c)^3 - 18abc} = \frac{3\,(t-9)}{t-18} = 3\left(1 + \frac{9}{t-18}\right) \leqslant 6.$$

Равенство реализуется при $a = b = c$. $\square$

3. *Окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 соответственно пересекаются в точке A. Отрезок O_2A вторично пересекает окружность ω_1 в точке K, а отрезок O_1A вторично пересекает окружность ω_2 в точке L. Прямая, проходящая через точку A параллельно KL, вторично пересекает окружности ω_1 и ω_2 в точках C и D соответственно. Отрезки CK и DL пересекаются в точке N. Найдите угол между прямыми O_1A и O_2N.*

Ответ: 90°.



Решение. Треугольники O_1AK и O_2AL равнобедренные и имеют общий угол при основании. Значит, их углы при вершине равны. Обозначим общее значение этих углов через 2α. Поскольку вписанный угол в два раза меньше соответствующего ему центрального угла, справедливо равенство $\angle ADL = \angle ACK = \alpha$. Так как $KL \parallel CD$, мы получаем также $\angle KLN = \angle LKN = \alpha$. Тогда

$$\angle LNK = 180^\circ - 2\angle KLN = 180^\circ - 2\alpha = 180^\circ - \angle AO_2L = 180^\circ - \angle KO_2L.$$

Поэтому четырехугольник $LNKO_2$ вписанный, откуда

$$\angle KO_2N = \angle KLN = \alpha = \tfrac{1}{2}\angle AO_2L.$$

Значит, прямая O_2N — биссектриса угла при вершине в равнобедренном треугольнике AO_2L, а потому и высота. Таким образом, прямые O_2N и O_1A перпендикулярны. $\square$

4. *В файле записано подряд 2021 двузначных пятеричных чисел, причем числа на нечетных позициях равны и на 1 больше чисел на четных позициях. Компьютер считал данные из файла как одно пятеричное число и разложил его на простые множители. Оказалось, что таких множителей ровно два и они различаются на 2. Могло ли такое быть?*

   Ответ: нет.

   Решение. Договоримся писать пятеричные числа в скобках, чтобы отличать их от десятичных. Пусть x — считанное число, u и v — его простые делители, $v = u+2$. Заметим, что число $x+1$ четно и равно $\left(\frac{u+v}{2}\right)^2$, то есть является точным квадратом. В частности, $x+1$ кратно 4. Будем писать x, u, v в пятеричной системе. Числа u и v оканчиваются не на 0, иначе одно из них равно 5 и $x \leqslant 35$. Поэтому допустимые пары последних цифр u и v — $(1,3)$, $(2,4)$, $(4,1)$. Значит, x оканчивается на 3 или 4. Рассмотрим два случая.

1) *x оканчивается на 4.* Тогда $x+1$ оканчивается на 0, откуда $(x+1) \,\vdots\, 25$. Значит, последними цифрами $x+1$ будут (00), а x оканчивается на (44). Поэтому

$$x = (44\,4344\,\ldots\,4344\,4344) \quad \text{и} \quad x+1 = (44\,4344\,\ldots\,4344\,4400).$$

В запись $x+1$ входит $\frac{2021-3}{2} = 1009$ троек. Тогда $(x+1) \bmod 4 = 1009 \cdot 3 \bmod 4 \neq 0$, что невозможно.

2) *x оканчивается на 3.* Пусть a — предпоследняя цифра x. Тогда в пятеричную запись x цифра a входит 2021 раз, двойка и тройка — 1010 и 1011 раз соответственно. Поэтому

$$0 = (x+1) \bmod 4 = (2021a + 1010 \cdot 5 + 3 + 1) \bmod 4 = (a+2) \bmod 4,$$

откуда $a = 2$ и $x = (23\,2223\,\ldots\,2223)$. По признаку делимости на 6 в пятеричной системе

$$x \bmod 6 = \big(1010 \cdot (3 - 2 + 2 - 2) + 3 - 2\big) \bmod 6 = 1011 \bmod 6 = 3.$$

Таким образом, $x \,\vdots\, 3$, что невозможно. $\square$

5. *В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством 5^n, $5^{n-1} \cdot 7$, $5^{n-2} \cdot 7^2$, $5^{n-3} \cdot 7^3$, … , $5 \cdot 7^{n-1}$, 7^n пиастров, где n — натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?*

   Ответ: $2 \cdot 7^{n+1} - 3 \cdot 5^{n+1}$.

   Решение. Натуральное число s назовем *n-разложимым*, если сумму s можно выплатить монетами достоинством 5^n, $5^{n-1} \cdot 7$, … , 7^n пиастров, и *n-неразложимым* в противном случае. При $n = 1$ доступны только монеты по 5 и 7 пиастров. Если $s \geqslant 28$, то найдется такое $r \in \{0,1,2,3,4\}$, что $(s - 7r) \,\vdots\, 5$. Тогда s имеет вид $7r + 5k$, то есть является 1-разложимым. Очевидно также, что числа

$27, 26, 25, 24$ будут 1-разложимыми, а 23 — нет. Таким образом, максимальным 1-неразложимым числом является $23 = 2 \cdot 7^2 - 3 \cdot 5^2$.

Докажем, что для любого натурального n число $2\cdot 7^{n+1} - 3\cdot 5^{n+1}$ будет n-неразложимым. Сделаем это по индукции. Базу мы уже проверили. Пусть для $n-1$ утверждение справедливо. Допустим, что число $s = 2 \cdot 7^{n+1} - 3 \cdot 5^{n+1}$ оказалось n-разложимым. Если в сумму s входит m монет по 7^n пиастров, то $m < 14$ и $(2 \cdot 7^{n+1} - m \cdot 7^n) \vdots 5$, откуда $m = 4$ или $m = 9$. Найдутся неотрицательные целые числа $k_1, \ldots, k_n$, для которых

$$s = m \cdot 7^n + k_1 \cdot 7^{n-1} \cdot 5 + \ldots + k_n \cdot 5^n.$$

Тогда

$$k_1 \cdot 7^{n-1} + k_2 \cdot 7^{n-2} \cdot 5 + \ldots + k_n \cdot 5^{n-1} = \frac{s - m \cdot 7^n}{5}.$$

Правая часть равна $2 \cdot 7^n - 3 \cdot 5^n$ или $7^n - 3 \cdot 5^n$. Но оба этих числа $(n-1)$-неразложимы: первое — по индукционному предположению, второе — поскольку из него можно получить первое добавлением $7 \cdot 7^{n-1}$. Таким образом, мы получили противоречие.

Докажем теперь, что если $s > 2 \cdot 7^{n+1} - 3 \cdot 5^{n+1}$, то число s является n-разложимым. Снова воспользуемся индукцией по n. Базу мы уже проверили. Предположим, что для $n-1$ утверждение справедливо. Выберем $r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ так, чтобы $s - r \cdot 7^n$ делилось на 5. Положим $N = \dfrac{s - r \cdot 7^n}{5}$. Тогда

$$N > \frac{2 \cdot 7^{n+1} - 3 \cdot 5^{n+1} - r \cdot 7^n}{5} = \frac{(14 - r)\, 7^n - 3 \cdot 5^{n+1}}{5} \geqslant \frac{10 \cdot 7^n - 15 \cdot 5^n}{5} = 2 \cdot 7^n - 3 \cdot 5^n,$$

и по индукционному предположению N будет $(n-1)$-разложимым. Значит, найдутся неотрицательные целые числа $k_1, \ldots, k_n$, для которых

$$N = k_1 \cdot 7^{n-1} + k_2 \cdot 7^{n-2} \cdot 5 + \ldots + k_n \cdot 5^{n-1}, \quad \text{то есть} \quad s = r \cdot 7^n + k_1 \cdot 7^{n-1} \cdot 5 + \ldots + k_n \cdot 5^n.$$

Таким образом, число s является n-разложимым. $\square$

Вариант 8

1. *Можно ли в таблице* 25×41 *расставить различные целые числа так, чтобы числа, стоящие в клетках, имеющих общую сторону, отличались не более чем на 16?*

   Ответ: нет.

   Решение. Пусть m — наименьшее число в таблице. Перемещаясь каждый раз на одну клетку в горизонтальном или вертикальном направлении, мы сможем попасть в любую клетку таблицы за не более чем $24+40=64$ шагов. По условию на каждом шаге значение в клетке может увеличиться не более чем на 16. Поэтому все числа таблицы лежат в промежутке $[m, m+64\cdot 16]$. Этот диапазон содержит $64\cdot 16+1=1025$ чисел, то есть ровно столько, сколько клеток в таблице. Значит, таблица заполнена в некотором порядке числами от m до $m+64\cdot 16$. Заметим, что минимальное и максимальное числа располагаются в противоположных углах таблицы. При перемещении от минимального числа к максимальному по маршруту, состоящему из 64 шагов, нам нужно каждый раз увеличивать значение ровно на 16. Но таких маршрутов много. Например, мы можем пройти от m к $m+64\cdot 16$ через любую из двух клеток, граничащих с m. Значит, в этих клетках стоят одинаковые числа. $\square$

2. *При* $a, b, c > 0$ *найдите максимальное значение выражения*

$$A=\frac{a^3(b+c)+b^3(c+a)+c^3(a+b)}{(a+b+c)^4-79\,(abc)^{4/3}}.$$

   Ответ: 3.

   Решение. По неравенству Коши

$$a^3(b+c)+b^3(c+a)+c^3(a+b)=(a+b+c)\left(a^3+b^3+c^3\right)-\left(a^4+b^4+c^4\right)\leqslant(a+b+c)\left(a^3+b^3+c^3\right)-3\,(abc)^{4/3}.$$

Заметим, что $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+6abc+B$, где

$$B=3\left(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2\right)\geqslant 18\sqrt[6]{a^6b^6c^6}=18abc$$

(мы воспользовались неравенством Коши). Тогда $a^3+b^3+c^3\leqslant(a+b+c)^3-24abc$ и

$$(a+b+c)\left(a^3+b^3+c^3\right)-3\,(abc)^{4/3}\leqslant(a+b+c)^4-24abc\,(a+b+c)-3\,(abc)^{4/3}\leqslant(a+b+c)^4-75\,(abc)^{4/3}.$$

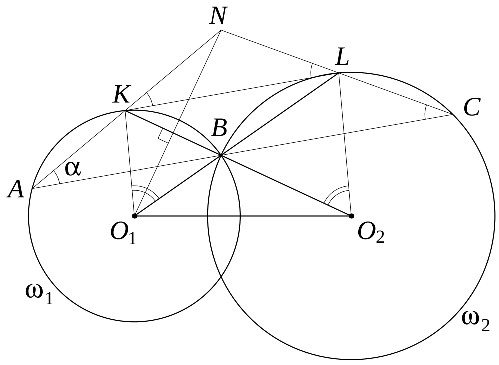
Положим $t=\dfrac{(a+b+c)^4}{(abc)^{4/3}}$. По неравенству Коши $t\geqslant 81$, откуда

$$A\leqslant\frac{(a+b+c)^4-75\,(abc)^{4/3}}{(a+b+c)^4-79\,(abc)^{4/3}}=\frac{t-75}{t-79}=1+\frac{4}{t-79}\leqslant 3.$$

Равенство реализуется при $a=b=c$. $\square$

3. *Окружности* ω_1 *и* ω_2 *с центрами* O_1 *и* O_2 *соответственно пересекаются в точке* B. *Продолжение отрезка* O_2B *за точку* B *пересекает окружность* ω_1 *в точке* K, *а продолжение отрезка* O_1B *за точку* B *пересекает окружность* ω_2 *в точке* L. *Прямая, проходящая через точку* B *параллельно* KL, *вторично пересекает окружности* ω_1 *и* ω_2 *в точках* A *и* C *соответственно. Лучи* AK *и* CL *пересекаются в точке* N. *Найдите угол между прямыми* O_1N *и* O_2B.

   Ответ: 90°.



Решение. Так как $\angle O_1BK = \angle O_2BL$, равнобедренные треугольники O_1BK и O_2BL подобны. Значит, их углы при вершине равны. Обозначим общее значение этих углов через 2α. Поскольку вписанный угол в два раза меньше соответствующего ему центрального угла, справедливо равенство $\angle BCL = \angle BAK = \alpha$. Так как $KL \parallel AC$, мы получаем также $\angle KLN = \angle LKN = \alpha$. Тогда

$$\angle LNK = 180^\circ - 2\angle LKN = 180^\circ - 2\alpha = 180^\circ - \angle BO_1K = 180^\circ - \angle LO_1K.$$

Поэтому четырехугольник $LNKO_1$ вписанный, откуда

$$\angle LO_1N = \angle LKN = \alpha = \tfrac{1}{2}\angle BO_1K.$$

Значит, прямая O_1N — биссектриса угла при вершине в равнобедренном треугольнике BO_1K, а потому и высота. Таким образом, прямые O_1N и O_2B перпендикулярны. $\square$

4. *В файле записано подряд 2023 двузначных пятеричных чисел, причем числа на нечетных позициях равны и на 1 больше чисел на четных позициях. Компьютер считал данные из файла как одно пятеричное число и разложил его на простые множители. Оказалось, что таких множителей ровно два и они различаются на 2. Могло ли такое быть?*

Ответ: нет.

Решение. Договоримся писать пятеричные числа в скобках, чтобы отличать их от десятичных. Пусть x — считанное число, u и v — его простые делители, $v = u+2$. Заметим, что число $x+1$ четно и равно $\left(\frac{u+v}{2}\right)^2$, то есть является точным квадратом. В частности, $x+1$ кратно 4. Будем писать x, u, v в пятеричной системе. Числа u и v оканчиваются не на 0, иначе одно из них равно 5 и $x \leqslant 35$. Поэтому допустимые пары последних цифр u и v — $(1,3)$, $(2,4)$, $(4,1)$. Значит, x оканчивается на 3 или 4. Рассмотрим два случая.

1) *x оканчивается на 4.* Тогда $x+1$ оканчивается на 0, откуда $(x+1) \vdots 25$. Значит, последними цифрами $x+1$ будут (00), а x оканчивается на (44). Поэтому

$$x = (44\,4344\,\ldots\,4344\,4344) \quad \text{и} \quad x+1 = (44\,4344\,\ldots\,4344\,4400).$$

В запись $x+1$ входит $\frac{2023-3}{2} = 1010$ троек. Тогда $(x+1) \bmod 4 = 1010 \cdot 3 \bmod 4 \neq 0$, что невозможно.

2) *x оканчивается на 3.* Пусть a — предпоследняя цифра x. Тогда в пятеричную запись x цифра a входит 2023 раза, двойка и тройка — 1011 и 1012 раз соответственно. Поэтому

$$0 = (x+1) \bmod 4 = (2023a + 1011 \cdot 5 + 3 + 1) \bmod 4 = (3a+3) \bmod 4,$$

откуда $a = 3$ и $x = (33\,3233\,\ldots\,3233)$. По признаку делимости на 6 в пятеричной системе

$$x \bmod 6 = 1011 \cdot (3 - 3 + 2 - 3) \bmod 6 = (-1011) \bmod 6 = 3.$$

Таким образом, $x \vdots 3$, что невозможно. $\square$

5. *В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством 3^n, $3^{n-1} \cdot 4$, $3^{n-2} \cdot 4^2$, $3^{n-3} \cdot 4^3$, ... , $3 \cdot 4^{n-1}$, 4^n пиастров, где n — натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?*

Ответ: $2 \cdot 4^{n+1} - 3^{n+2}$.

Решение. Натуральное число s назовем *n-разложимым*, если сумму s можно выплатить монетами достоинством 3^n, $3^{n-1} \cdot 4$, ... , 4^n пиастров, и *n-неразложимым* в противном случае. При $n = 1$ доступны только монеты по 3 и 4 пиастра. Если $s \geqslant 8$, то найдется такое $r \in \{0, 1, 2\}$, что $(s - 4r) \vdots 5$. Тогда s имеет вид $4r + 3k$, то есть является 1-разложимым. Очевидно также, что числа 7 и 6 будут 1-разложимыми, а 5 — нет. Таким образом, максимальным 1-неразложимым числом является $5 = 2 \cdot 4^2 - 3^3$.

Докажем, что для любого натурального n число $2 \cdot 4^{n+1} - 3^{n+2}$ будет n-неразложимым. Сделаем это по индукции. Базу мы уже проверили. Пусть для $n - 1$ утверждение справедливо. Допустим, что число $s = 2 \cdot 4^{n+1} - 3^{n+2}$ оказалось n-разложимым. Если в сумму s входит m монет по 4^n пиастров, то $m < 8$ и $(2 \cdot 4^{n+1} - m \cdot 4^n) \vdots 3$, откуда $m = 2$ или $m = 5$. Найдутся неотрицательные целые числа $k_1, \ldots, k_n$, для которых

$$s = m \cdot 4^n + k_1 \cdot 4^{n-1} \cdot 3 + \ldots + k_n \cdot 3^n.$$

Тогда

$$k_1 \cdot 4^{n-1} + k_2 \cdot 4^{n-2} \cdot 3 + \ldots + k_n \cdot 3^{n-1} = \frac{s - m \cdot 4^n}{3}.$$

Правая часть равна $2 \cdot 4^n - 3^{n+1}$ или $4^n - 3^{n+1}$. Но оба этих числа $(n - 1)$-неразложимы: первое — по индукционному предположению, второе — поскольку из него можно получить первое добавлением $4 \cdot 4^{n-1}$. Таким образом, мы получили противоречие.

Докажем теперь, что если $s > 2 \cdot 4^{n+1} - 3^{n+2}$, то число s является n-разложимым. Снова воспользуемся индукцией по n. Базу мы уже проверили. Предположим, что для $n - 1$ утверждение справедливо. Выберем $r \in \{0, 1, 2\}$ так, чтобы $s - r \cdot 4^n$ делилось на 3. Положим $N = \dfrac{s - r \cdot 4^n}{3}$. Тогда

$$N > \frac{2 \cdot 4^{n+1} - 3^{n+2} - r \cdot 4^n}{3} = \frac{(8 - r)\, 4^n - 3^{n+2}}{3} \geqslant \frac{6 \cdot 4^n - 3 \cdot 3^{n+1}}{3} = 2 \cdot 4^n - 3^{n+1},$$

и по индукционному предположению N будет $(n - 1)$-разложимым. Значит, найдутся неотрицательные целые числа $k_1, \ldots, k_n$, для которых

$$N = k_1 \cdot 4^{n-1} + k_2 \cdot 4^{n-2} \cdot 3 + \ldots + k_n \cdot 3^{n-1}, \quad \text{то есть} \quad s = r \cdot 4^n + k_1 \cdot 4^{n-1} \cdot 3 + \ldots + k_n \cdot 3^n.$$

Таким образом, число s является n-разложимым. $\square$

Олимпиада школьников СПбГУ по математике

Заключительный этап. 2020/2021 учебный год

Задания для 8-9 классов

(Правильное и полное решение каждой задачи оценивается в 20 баллов)

9 класс. Первый вариант

1. Докажите, что для любых вещественных чисел a и b уравнение

$$(a^2-b^2)x^2+2(a^3-b^3)x+(a^4-b^4)=0$$

имеет решение.

Решение. Если $a=b$, то любой x является решением уравнения. Если $a\neq b$, то нам нужно доказать, что квадратный трехчлен имеет корень. Для этого достаточно проверить, что его дискриминант неотрицателен. Дискриминант, деленный на 4, равен

$$(a^3-b^3)^2-(a^2-b^2)(a^4-b^4)=a^4b^2+a^2b^4-2a^3b^3=a^2b^2(a-b)^2,$$

что всегда не меньше нуля.

2. На острове живут лжецы и рыцари. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Каждый житель острова про каждого из остальных знает рыцарь он или лжец. Както раз встретились 19 островитян. Трое из них сказали: «Ровно трое из нас лжецы», затем шестеро из остальных сказали: «Ровно шестеро из нас лжецы», наконец, девять из оставшихся сказали: «Ровно девять из нас лжецы». Сколько лжецов было среди встретившихся? Приведите все возможные варианты и докажите, что других нет.

Ответ: 9, 18 или 19.

Решение. Пусть третья фраза верна. Тогда все говорившие ее — рыцари, и лжецов должно быть ровно девять. Поэтому все говорившие остальные фразы — лжецы. Их девять, а значит, промолчавший — рыцарь, и такая ситуация возможна. Пусть третья фраза неверна. Тогда говорившие ее — лжецы, и лжецов не менее девяти. Поэтому в первых двух группах тоже лгут. Следовательно, лжецов не менее 18. Последний же может быть кем угодно.

3. Вещественные числа a, b, c и d удовлетворяют условию $a^6+b^6+c^6+d^6=64$. Найдите наибольшее значение выражения $a^7+b^7+c^7+d^7$.

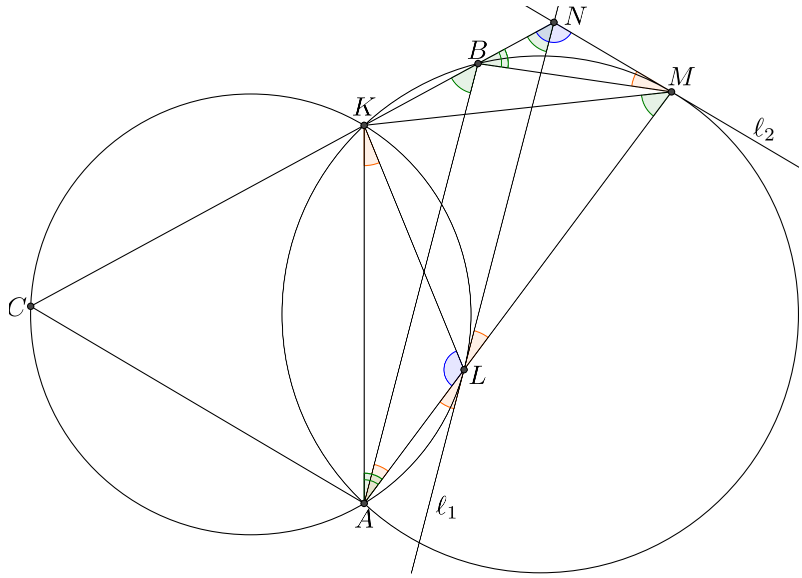
Ответ: 128

Решение. По условию $a^6\leqslant a^6+b^6+c^6+d^6=64$, поэтому $a\leqslant 2$. Аналогично получаем, что $b\leqslant 2$, $c\leqslant 2$ и $d\leqslant 2$. Следовательно,

$$a^7+b^7+c^7+d^7=a\cdot a^6+b\cdot b^6+c\cdot c^6+d\cdot d^6\leqslant 2(a^6+b^6+c^6+d^6)=2\cdot 64=128.$$

Равенство достигается, когда $a=2$, $b=c=d=0$. Поэтому $a^7+b^7+c^7+d^7$ не превосходит 128 и может ему равняться.

4. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка K. К описанной окружности треугольника AKC проведена касательная ℓ_1, параллельная прямой AB и ближайшая к ней. Она коснулась окружности в точке L. Прямая AL пересекла описанную окружность треугольника ABK в точке M ($M \neq A$). К этой окружности в точке M проведена касательная ℓ_2. Докажите, что прямые BK, ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются в одной точке.



Решение. Пусть N — точка пересечения прямых BC и ℓ_1. Если мы докажем, что NM — касательная к описанной окружности треугольника ABK, то точка N будет лежать на прямой ℓ_2, а значит, прямые BK, ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются в одной точке.

Поскольку прямые AB и LN параллельны, а четырехугольник $AMBK$ вписанный, $\angle LNK = \angle ABK = \angle AMK$. Следовательно, четырехугольник $KLMN$ вписанный и, значит, $\angle MNK = \angle ALK$. Четырехугольник $AMBK$ вписанный, поэтому $\angle MBN = \angle MAK$. Следовательно, $\angle AKL = \angle BMN$. Поскольку угол между касательной и секущей равен вписанному углу, опирающемуся на дугу, которую стягивает секущая, $\angle AKL = \angle MLN$. Таким образом, $\angle BMN = \angle AKL = \angle MLN = \angle BAM$ (последнее — из параллельности прямых AB и LN). Стало быть, NM — касательная к описанной окружности треугольника ABK.

5. Дана клетчатая доска 2020×2021. Петя и Вася играют в следующую игру. Они по очереди ставят фишки в свободные клетки доски. Выигрывает тот игрок, после хода которого в каждом квадрате 4×4 будет стоять фишка. Начинает Петя. Кто из игроков может обеспечить себе победу вне зависимости от действий соперника?

Ответ: Вася

Решение. Вася должен ходить так, чтобы Петя не смог выиграть следующим ходом. Покажем, что он всегда сможет этого добиться. Если на доске есть пара непересекающихся пустых квадратов 4×4, Петя должен поставить фишку так, чтобы они остались и после его хода. Если такой ход невозможен, то на доске свободно всего два непересекающихся пустых квадрата 4×4, а остальные клетки заняты фишками. Следовательно, на доску поставлено $2020 \cdot 2021 - 32$ фишек. Их четное число и, значит, сейчас ход Пети. Если же любые два пустых квадрата 4×4 пересекаются, то найдется клетка, общая для всех квадратов. Тогда Вася поставит фишку в эту клетку и выиграет.

6. Найдите все пары такие простых чисел p и q, что $p^2+5pq+4q^2$ является квадратом натурального числа.

Ответ: $(13,3)$, $(7,5)$, $(5,11)$

Решение. Пусть $p^2+5pq+4q^2=n^2$ для некоторого натурального n. Тогда

$$pq=n^2-(p+2q)^2=(n-p-2q)(n+p+2q).$$

Левая часть раскладывается в произведение двух чисел, одно из которых целое, а другое натуральное, четырьмя способами: $pq\cdot 1$, $p\cdot q$, $q\cdot p$ и $1\cdot pq$. Число $n+p+2q$ больше и p, и q, поэтому первые три случая невозможны. Стало быть, $n-p-2q=1$ и $n+p+2q=pq$. Таким образом, $2p+4q=pq-1$. Следовательно, $(p-4)(q-2)=9$ и, значит, $p-4=\pm1,\pm3,\pm9$. Тогда $p=4\pm1$, 4 ± 3 или 4 ± 9. Из них простыми числами будут только 3, 5, 7 и 13. Соответствующими им q будут -7, 11, 5 и 3. Поэтому первый вариант не подходит, а остальные подходят.

9 класс. Второй вариант

1. Докажите, что для любых вещественных чисел a и b уравнение

$$(a^6 - b^6)x^2 + 2(a^5 - b^5)x + (a^4 - b^4) = 0$$

имеет решение.

Решение. Если $a = b$, то любой x является решением уравнения. Если $a \neq b$, то нам нужно доказать, что квадратный трехчлен имеет корень. Для этого достаточно проверить, что его дискриминант неотрицателен. Дискриминант, деленный на 4, равен

$$(a^5 - b^5)^2 - (a^4 - b^4)(a^6 - b^6) = a^6b^4 + a^4b^6 - 2a^5b^5 = a^4b^4(a-b)^2,$$

что всегда не меньше нуля.

2. На острове живут лжецы и рыцари. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Каждый житель острова про каждого из остальных знает рыцарь он или лжец. Как-то раз встретились 28 островитян. Двое из них сказали: «Ровно двое из нас лжецы», затем четверо из остальных сказали: «Ровно четверо из нас лжецы», потом восемь из оставшихся сказали: «Ровно восемь из нас лжецы», наконец, все оставшиеся 14 сказали: «Ровно 14 из нас лжецы». Сколько лжецов было среди встретившихся? Приведите все возможные варианты и докажите, что других нет.

Ответ: 14 или 28.

Решение. Пусть последняя фраза верна. Тогда все говорившие ее — рыцари, и лжецов должно быть ровно 14. Поэтому все говорившие остальные фразы — лжецы и такая ситуация возможна. Пусть последняя фраза неверна. Тогда говорившие ее — лжецы и лжецов не менее 14. Поэтому первые три фразы неверны и, значит, в первых трех группах тоже лгут. Поэтому все встретившиеся — лжецы.

3. Сумма неотрицательных чисел a, b и c равна 3. Найдите наибольшее значение выражения $ab + bc + 2ca$.

Ответ: $\frac{9}{2}$

Первое решение. По условию

$$9 = (a+b+c)^2 = 2(ab+bc+ca) + a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 2(ab+bc+ca) + b^2 + 2ca \geqslant 2(ab+bc+2ca).$$

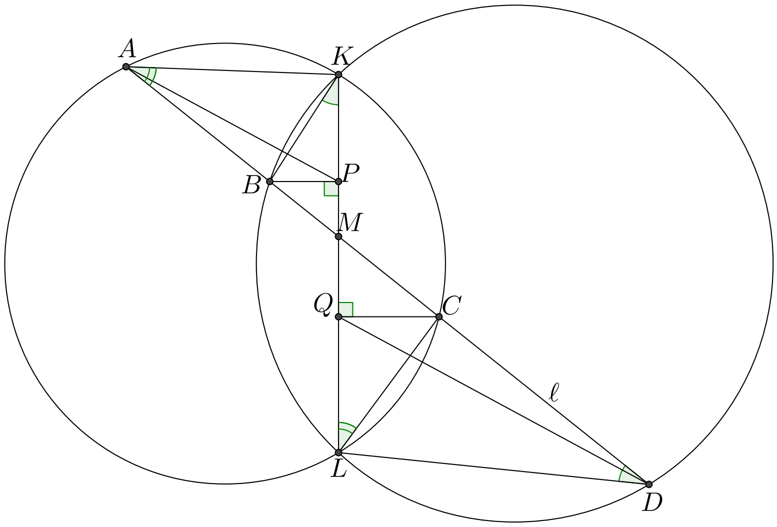
Равенство достигается, когда $b = 0$ и $a = c = \frac{3}{2}$. Поэтому наибольшим значением будет $\frac{9}{2}$.

Второе решение. Заметим, что

$$ab + bc + 2ca = (a+c)(3-a-c) + 2ca = 3a + 3c - a^2 - c^2 = \frac{9}{2} - \left(a - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(c - \frac{3}{2}\right)^2 \leqslant \frac{9}{2},$$

и равенство достигается, когда $a = c = \frac{3}{2}$. Поэтому наибольшим значением будет $\frac{9}{2}$.

4. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках K и L. Прямая ℓ пересекает окружность ω_1 в точках A и C, а окружность ω_2 — в точках B и D, причем точки идут на прямой ℓ в алфавитном порядке. Обозначим через P и Q соответственно проекции точек B и C на прямую KL. Докажите, что прямые AP и DQ параллельны.



Решение. Обозначим точку пересечения прямых KL и AD через M. Из вписанности четырехугольника $BKDL$ заключаем, что $\angle BKL = \angle BDL$. Поэтому треугольники BKM и LDM подобны и, значит, $\frac{BM}{KM} = \frac{LM}{DM}$. Из вписанности четырехугольника $AKCL$ заключаем, что $\angle CAK = \angle CLK$. Поэтому треугольники AKM и LCM подобны и, значит, $\frac{AM}{KM} = \frac{LM}{CM}$. Таким образом, $\frac{AM}{BM} = \frac{DM}{CM}$. Поскольку прямые BP и CQ перпендикулярны прямой KL, треугольники BPM и CQM подобны и, значит, $\frac{BM}{CM} = \frac{PM}{QM}$. Следовательно, $\frac{PM}{QM} = \frac{BM}{CM} = \frac{AM}{DM}$. Стало быть, треугольники APM и DQM подобны по углам и отношению сторон. Тогда $\angle APM = \angle DQM$ и, значит, прямые AP и DQ параллельны.

5. Дана клетчатая доска 2021×2021. Петя и Вася играют в следующую игру. Они по очереди ставят фишки в свободные клетки доски. Выигрывает тот игрок, после хода которого в каждом прямоугольнике 3×5 и 5×3 будет стоять фишка. Начинает Петя. Кто из игроков может обеспечить себе победу вне зависимости от действий соперника?

Ответ: Петя

Решение. Петя должен ходить так, чтобы Вася не смог выиграть следующим ходом. Покажем, что он всегда сможет этого добиться. Если на доске есть пара непересекающихся пустых прямоугольников 3×5, Петя должен поставить фишку так, чтобы они остались и после его хода. Если такой ход невозможен, то на доске свободно всего два непересекающихся пустых прямоугольника 3×5, а остальные клетки заняты фишками. Следовательно, на доску поставлено $2021^2 - 30$ фишек. Их нечетное число и, значит, сейчас ход Васи. Если же любые два пустых прямоугольника 3×5 пересекаются, то найдется клетка, общая для всех квадратов. Тогда Петя поставит фишку в эту клетку и выиграет.

6. Найдите все такие натуральные числа n, что число $2^n + n^2 + 25$ является кубом простого числа.

Ответ: $n = 6$

Решение. Пусть $2^n + n^2 + 25 = p^3$ для некоторого простого числа p. Поскольку $p > 3$, p — нечетное простое число. Тогда n — четное число, и 2^n дает остаток 1 при делении на три. Если n не делится на три, то n^2 дает остаток 1 при делении на три, а тогда $2^n + n^2 + 25$ кратно трем, что невозможно. Таким образом, n делится на шесть и можно записать $n = 6k$. Следовательно, $2^n + n^2 + 25 = 64^k + 36k^2 + 25 > (4^k)^3$. Поэтому

$$64^k + 36k^2 + 25 \geqslant (4^k + 1)^3 = 64^k + 3 \cdot 16^k + 3 \cdot 4^k + 1.$$

Если $k \geqslant 2$, то $3 \cdot 4^k > 25$ и $3 \cdot 16^k \geqslant 36k^2$ (последнее вытекает, например, из легко проверяемого по индукции неравенства $4^k \geqslant 6k$). Таким образом, $k = 1$ и $n = 6$. Осталось убедиться, что такое n подходит: $2^6 + 6^2 + 25 = 125 = 5^3$.

9 класс. Третий вариант

1. Найдите все такие значения a, для которых квадратные трехчлены x^2+2x+a и $x^2+ax+2=0$ имеют по два корня, причем сумма квадратов корней первого трехчлена равна сумме квадратов корней второго трехчлена.

Ответ: $a=-4$

Решение. Если x_1 и x_2 — корни трехчлена x^2+px+q, то по теореме Виета

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=p^2-2q.$$

Следовательно, нужно найти такие числа a, для которых $2^2-2a=a^2-2\cdot 2$. Таким образом, надо решить уравнение $a^2+2a-8=0$. Его корнями являются $a=-4$ и $a=2$. Первый вариант подходит, а второй вариант не подходит, поскольку трехчлен x^2+2x+2 не имеет корней.

2. Каждый из островитян либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт (и те, и другие на острове есть). Каждый житель острова про каждого знает рыцарь он или лжец. Часть жителей острова заявила, что на острове проживает четное число рыцарей, а все оставшиеся жители заявили, что на острове проживает нечетное число лжецов. Может ли на острове быть ровно 2021 житель?

Ответ: нет

Решение. Поскольку 2021 — нечетное число, на острове либо нечетное число рыцарей и четное число лжецов, либо нечетное число лжецов и четное число рыцарей. Первый случай невозможен, поскольку оба заявления ложны и, значит, никакой рыцарь не мог сделать ни первое, ни второе заявление. Во втором случае оба заявления истины, поэтому никакой лжец не мог сделать ни первое, ни второе заявление.

3. Для произвольных вещественных чисел a и b ($b\neq 0$) найдите наименьшее значение выражения $a^2+b^2+\frac{a}{b}+\frac{1}{b^2}$.

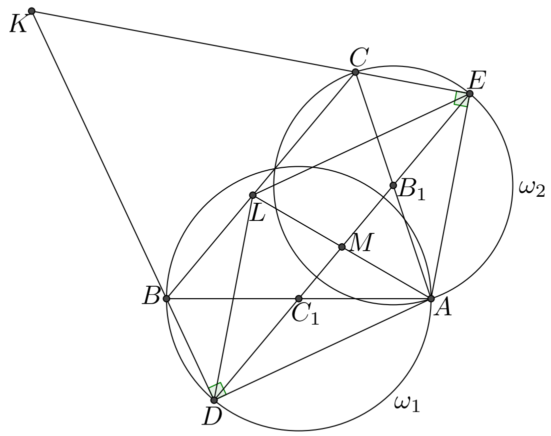
Ответ: $\sqrt{3}$

Решение. Поскольку

$$a^2+b^2+\frac{a}{b}+\frac{1}{b^2}=\left(a+\frac{1}{2b}\right)^2+b^2+\frac{3}{4b^2}\geqslant b^2+\frac{3}{4b^2}\geqslant 2\sqrt{b^2\cdot\frac{3}{4b^2}}=\sqrt{3},$$

выражение $a^2+b^2+\frac{a}{b}+\frac{1}{b^2}$ всегда не меньше $\sqrt{3}$. Равенство достигается, если $a+\frac{1}{2b}=0$ и $b^2=\frac{3}{4b^2}$, т. е. когда $b=\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}$ и $a=-\frac{1}{\sqrt[4]{3}\sqrt{2}}$.

4. Точки B_1 и C_1 — середины сторон AC и AB треугольника ABC. На сторонах AB и AC как на диаметрах построены окружности ω_1 и ω_2. Обозначим за D точку пересечения прямой B_1C_1 с окружностью ω_1, лежащую по другую сторону от C относительно прямой AB. Обозначим за E точку пересечения прямой B_1C_1 с окружностью ω_2, лежащую по другую сторону от B относительно прямой AC. Прямые BD и CE пересекаются в точке K. Докажите, что прямая BC проходит через точку пересечения высот треугольника KDE.



Решение. Пусть M — середина отрезка DE, а прямые AM и BC пересекаются в точке L. Поскольку B_1C_1 — средняя линия треугольника ABC, прямые B_1C_1 и BC параллельны. Значит, B_1M — средняя линия треугольника ACL и, в частности, M — середина отрезка AL. Тогда диагонали четырехугольника $ADLE$ делятся своей точкой пересечения пополам, поэтому $ADLE$ является параллелограммом. Следовательно, $AD \parallel LE$ и $AE \parallel DL$. Поскольку угол $\angle AEC$ опирается на диаметр окружности ω_2, прямые AE и KE перпендикулярны, а, значит, прямые DL и KE также перпендикулярны. Аналогично $AD \perp KD$ и, значит, $EL \perp KD$. Таким образом, L — ортоцентр треугольника KDE.

5. На центральной клетке доски 11×11 стоит фишка. Петя и Вася играют в следующую игру. Каждым своим ходом Петя передвигает фишку на одну клетку по вертикали или горизонтали. Каждый своим ходом Вася возводит стенку с одной из сторон любой из клеток. Двигать фишку через стенку Петя не может. Игроки ходят по очереди, начинает Петя. Петя выигрывает, если сможет фишкой уйти с доски. Может ли он обеспечить себе победу вне зависимости от действий соперника?

Ответ: нет

Решение. Первым своим ходом Вася выбирает одну из угловых клеток и возводит в ней по одной из двух внешних сторон стенку. Следующими тремя своими ходами он строит аналогичные стенки для трех оставшихся угловых клеток. За эти четыре хода Петя не успеет дойти до края доски. Если каким-то ходом Петя передвигает фишку в клетку на краю доски, то в ответ Вася строит стенку по внешней стороне этой клетки. Если каким-то ходом Петя передвигает фишку в угловую клетку, то Вася в ответ построит стенку на еще незастроенной внешней стороне этой клетки. В остальных случаях, а также если какая-то из нужных уже была построена ранее, Вася строит произвольную стенку. При такой игре ни с какой из крайних клеток Петя не сможет выйти за пределы доски. Значит, фишка никогда не покинет доску и Петя не сможет выиграть.

6. Докажите, что существует бесконечно много таких натуральных чисел n, что количество различных нечетных простых делителей числа $n(n+3)$ кратно трем.

Решение. Обозначим через a_n количество различных нечетных простых делителей числа $n(n+3)$. Предположим, что чисел, для которых a_n кратно трем, лишь конечное количество. Тогда для некоторого m при $n \geqslant m$ число a_n не будет делиться на три.

Рассмотрим произведение

$$n(n+1)(n+3)(n+4) = n(n+4) \cdot (n+1)(n+3) = n(n+4) \cdot \big(n(n+4)+3\big).$$

Посмотрим какие общие простые делители могут быть у чисел $n(n+3)$ и $(n+1)(n+4)$. Числа n и $n+1$, а также числа $n+3$ и $n+4$ взаимно просты. Числа $n+1$ и $n+3$, а также числа n и $n+4$ могут иметь в качестве общего простого делителя только двойку. Следовательно, $a_{n(n+4)} = a_n + a_{n+1}$. Если $n \geqslant m$, то a_n, a_{n+1} и $a_{n(n+4)}$ не делятся на три. Но это будет не так, если остатки у чисел a_n и a_{n+1} различны. Это означает, что остатки у чисел a_n и a_{n+1} при $n \geqslant m$ одинаковы. Тогда все остатки от деления на три у чисел a_n при $n \geqslant m$ одинаковы и не равны нулю. Но это противоречит равенству $a_{n(n+4)} = a_n + a_{n+1}$.

9 класс. Четвертый вариант

1. Найдите все такие значения a, для которых квадратные трехчлены $x^2 - 6x + 4a$ и $x^2 + ax + 6 = 0$ имеют по два корня, причем сумма квадратов корней первого трехчлена равна сумме квадратов корней второго трехчлена.

Ответ: $a = -12$

Если x_1 и x_2 — корни трехчлена $x^2 + px + q$, то по теореме Виета

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = p^2 - 2q.$$

Следовательно, нужно найти такие числа a, для которых $6^2 - 8a = a^2 - 2\cdot 6$. Таким образом, надо решить уравнение $a^2 + 8a - 48 = 0$. Его корнями являются $a = -12$ и $a = 4$. Первый вариант подходит, а второй вариант не подходит, поскольку трехчлен $x^2 - 6x + 16$ не имеет корней.

2. На острове живут лжецы и рыцари, всего 2021 человек. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Каждый житель острова про каждого знает рыцарь он или лжец. В один прекрасный день все жители острова построились в шеренгу. После этого каждый житель острова заявил: «Количество стоящих справа от меня лжецов больше количества стоящих слева от меня рыцарей». Сколько на острове рыцарей? Приведите все возможные варианты и докажите, что других нет.

Ответ: 1010

Решение. Самый правый островитянин не может говорить правду, поскольку левее его вообще никого нет и, в частности, нет лжецов. Поэтому он лжец. Самый левый островитянин не может врать, поскольку левее его есть хотя бы один лжец, а правее его нет никого и, в частности, нет рыцарей. Поэтому он рыцарь. Временно уберем этих двоих из шеренги. Для всех остальных количество лжецов справа и количество рыцарей слева уменьшилось на единицу, поэтому истинность и ложность их утверждений не поменялась. Поэтому, проделав еще раз то же рассуждение, мы установим, что самый правый островитянин — лжец, а самый левый — рыцарь. Снова уберем двух крайних островитян, и так будем действовать до тех пор, пока не останется ровно один житель. Он врет и поэтому является лжецом. Таким образом, в середине шеренги стоит лжец, все справа от него также лжецы, а все слева от него — рыцари. Следовательно, рыцарей 1010.

3. Для произвольных вещественных чисел a и b ($a \neq 0$) найдите наименьшее значение выражения $\frac{1}{a^2} + 2a^2 + 3b^2 + 4ab$.

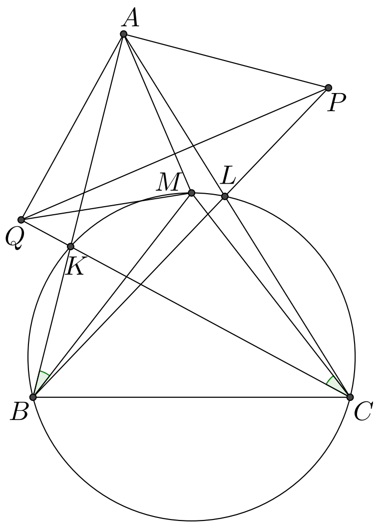
Ответ: $\sqrt{\frac{8}{3}}$

Поскольку

$$\frac{1}{a^2} + 2a^2 + 3b^2 + 4ab = \left(\sqrt{3}b + \frac{2a}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{2a^2}{3} + \frac{1}{a^2} \geqslant \frac{2a^2}{3} + \frac{1}{a^2} \geqslant 2\sqrt{\frac{2a^2}{3}\cdot\frac{1}{a^2}} = \sqrt{\frac{8}{3}},$$

выражение $\frac{1}{a^2} + 2a^2 + 3b^2 + 4ab$ всегда не меньше $\sqrt{\frac{8}{3}}$. Равенство достигается, если $\sqrt{3}b + \frac{2a}{\sqrt{3}} = 0$ и $\frac{2a^2}{3} = \frac{1}{a^2}$, т. е. когда $a = \sqrt[4]{\frac{3}{2}}$ и $b = -\left(\frac{2}{3}\right)^{3/4}$.

4. Проходящая через точки B и C окружность ω пересекает стороны AB и AC треугольника ABC в точках K и L соответственно ($K \neq B$ и $L \neq C$). На луче BL отмечена такая точка P, что $BP = AC$, а на луче CK отмечена такая точка Q, что $CQ = AB$. Докажите, что центр описанной окружности треугольника APQ лежит на ω.



Решение. Пусть точка M — середина дуги BKC. Тогда хорды BM и CM стягивают равные углы и поэтому равны. Кроме того углы $\angle KBM$ и $\angle KCM$ равны, поэтому $\angle ABM = \angle QCM$. Следовательно, треугольники ABM и QCM равны по двум сторонам и углу между ними ($AB = CQ$ по условию). Стало быть, $AM = QM$. Аналогично доказывается, что $AM = PM$. Таким образом, точка M является центром окружности, описанной вокруг треугольника APQ.

5. Дана клетчатая доска 3×2021 (3 клетки по вертикали и 2021 клетка по горизонтали) и неограниченный запас картонных полосок 1×3. Петя и Вася играют в следующую игру. Они по очереди без наложений размещают на доске полоски (по клеточкам), по одной полоске за ход. Петя кладет свои полоски горизонтально, а Вася — вертикально. Проигрывает игрок, не имеющий хода, начинает Петя. Кто из игроков может обеспечить себе победу вне зависимости от действий соперника?

Ответ: Петя

Решение. Поскольку на доске всего $3 \cdot 2021$ клеток, обоими игроками в сумме будет сделано не больше, чем 2021 ход. Покажем, как должен действовать Петя, чтобы выиграть. Он мысленно разделит доску на 673 квадрата 3×3 и один прямоугольник 2×3. Первыми своими ходами Петя будет размещать полоски в тех квадратах, в которых еще ничего нет. И действовать по этой схеме он будет до тех пор, пока такое возможно. Поскольку своим ходом Вася может занять не больше одного квадрата, Петя сделает не меньше, чем 337 ходов. В прямоугольники, занятые Петиными полосками, Вася не сможет походить. Поэтому дальше Петя может сделать еще по крайней мере $2 \cdot 337$ ходов. А, значит, всего он сможет сделать не меньше, чем $337 + 2 \cdot 337 = 1011$ ходов. Но это больше половины от общего числа допустимых ходов. Поэтому на каждый ход Васи у Пети будет возможность ответить, а если Вася не проиграет раньше, то после 1011 хода Пети доска будет полностью покрыта и Вася не сможет походить.

6. Найдите все такие простые числа p и q, что $p^{q+1} + q^{p+1}$ является квадратом натурального числа.

Ответ: $p = q = 2$

Решение. Ясно, что $p = q = 2$ подходит. Пусть p нечетно и $p^{q+1} + q^{p+1} = n^2$. Тогда

$$p = 2k - 1 \quad \text{и} \quad p^{q+1} = n^2 - q^{2k} = (n - q^k)(n + q^k).$$

Обозначим наибольший общий делитель чисел $n - q^k$ и $n + q^k$ через d. Тогда d является степенью p и число $2q^k = (n + q^k) - (n - q^k)$ делится на d. Поскольку p нечетно, отсюда следует, что либо $d = 1$, либо $p = q$. В последнем случае $n^2 = p^{q+1} + q^{p+1} = 2p^{p+1}$, что невозможно, так как p нечетно. Стало быть, $d = 1$. Множители $n - q^k$ и $n + q^k$ являются степенью p, поэтому $n - q^k = 1$ и $n + q^k = p^{q+1}$. Следовательно, $2q^k = p^{q+1} - 1$. Если q нечетно, что левая часть дает остаток 2 при делении на четыре, а правая часть кратна четырем. Таким образом, $q = 2$ и, значит,

$$2^{k+1} = p^3 - 1 = (p - 1)(p^2 + p + 1) = 2k(4k^2 - 2k + 1).$$

Поэтому $k = 2^m$ и $2^\ell = 4k^2 - 2k + 1 = 2^{2m+2} - 2^{m+1} + 1$. Последнее равенство невозможно, ибо число $2^{2m+2} - 2^{m+1} + 1$ больше единицы и нечетно, а значит, не является степенью двойки.

Олимпиада школьников СПбГУ по математике

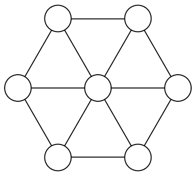
Заключительный этап. 2020/2021 учебный год

Задания для 6-7 классов

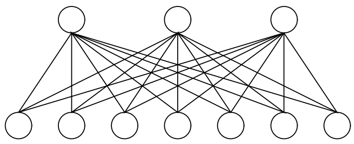
(Правильное и полное решение каждой задачи оценивается в 20 баллов)

6–7 класс

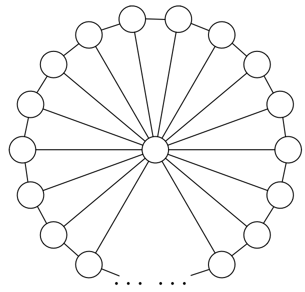
1. На картинке нарисовано n кружочков, некоторые кружочки соединены отрезками. Требуется расставить в кружочках числа от 1 до n (без повторений) так, чтобы выполнялось свойство: если кружочки соединены отрезками, то стоящие в них числа должны быть взаимно просты (то есть не иметь общих натуральных делителей, отличных от 1). Можно ли это сделать в каждом из следующих случаев? Если можно — опишите расстановку чисел, если нет — объясните, почему нельзя.



а) $n = 7$



б) $n = 10$



в) $n = 2022$: по кругу стоят 2021 кружочков, и еще один в центре

2. Назовем *каскадом, порожденным числом* r, набор из 12 натуральных чисел: r, $2r$, $\ldots$, $12r$.

а) Может ли какая-то пара чисел (a, b) содержаться в шести различных каскадах? Если да — приведите пример таких чисел, если нет — объясните, почему не может.

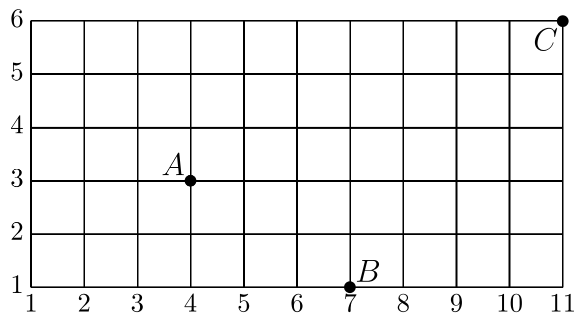
б) Верно ли, что множество натуральных чисел можно раскрасить в 12 цветов так, что в каждом каскаде все элементы будут разного цвета?

3. В треугольнике ABC точка D — середина стороны AB, E — середина стороны AC, F — середина биссектрисы AL, причем $DF = 1$, $EF = 2$. На плоскости изображены точки D, E, F так, что прямая DF горизонтальна, а остальные элементы чертежа стерты. Можно ли восстановить положение хотя бы одной из вершин треугольника, если известно, что вершина A находилась сверху от прямой DF?

4. Город имеет форму клетчатого прямоугольника 5×10 клеток: линии — улицы, клетки — жилые кварталы. Расстояние между перекрестками измеряется как длина самого короткого пути по улицам города, проходящего от одного перекрестка до другого. Например, для перекрестков A, B и C на картинке $AB = 5$, $AC = 10$, $BC = 9$. Можно ли отметить в этом городе k перекрестков так, чтобы все расстояния между этими перекрестками оказались различными числами? Если да — укажите эти перекрестки (например, перекресток C находится на пересечении 11-й вертикальной и 6-й горизонтальной улицы), если нет — объясните, почему нельзя.

Решите задачу для

а) $k = 5$; б) $k = 6$; в) $k = 7$.



Решения. **1.** а) Можно: в центре ставим 1, а по кругу ставим подряд 2, 3, 4, 5, 6, 7. Очевидно, число в центре взаимно просто с остальными. А вдоль круга рядом стоят либо соседние числа, которые взаимно просты, либо 2 и 7 — и они тоже взаимно просты.

б) Нельзя. Поскольку каждое верхнее число соединено с каждым нижним, все четные числа — 2, 4, 6, 8, 10 — должны стоять в нижнем ряду. Тогда числа 3 и 9 тоже должны быть в нижнем ряду, поскольку они не соединены с 6. Таким образом, в верхнем ряду окажутся числа 1, 5 и 7. Но в этом случае 5 и 10 будут соединены отрезком, что невозможно.

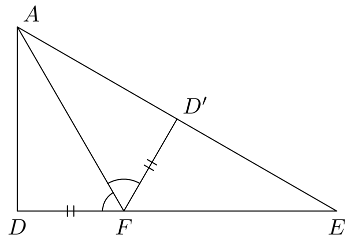
в) Нельзя. Очевидно, в центре должно стоять нечетное число. Но тогда по кругу стоит 2021 число, из которых 1011 четных. Значит, два четных числа окажутся рядом.

2. а) Может. Пусть $a < b$, Тогда a/b — правильная дробь со знаменателем не больше 12. Нетрудно подобрать 6 равных дробей со знаменателями не больше 12: $1/2 = 2/4 = 3/6 = \cdots = 6/12$. Каждая такая дробь задает места пары чисел a, b в каскаде: например, $3/6$ соответствует каскаду, где $a = 3x$, $b = 6x$. Чтобы существовали такие каскады, необходимо, чтобы a делилось на числа от 1 до 6. Подходят, например $a = 60$, $b = 120$. Требуемые каскады порождаются числами $r = 60$, 30, 20, 15, 12, 10.

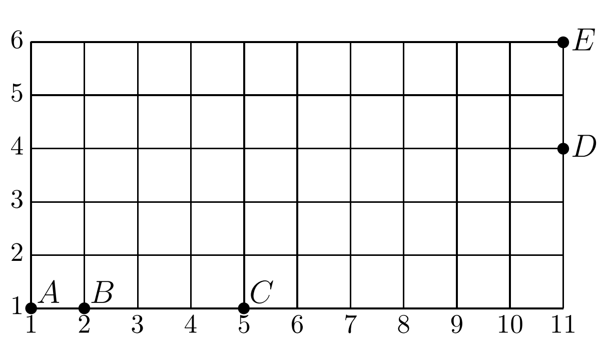
б) Да. Зададим раскраску следующим образом. Запишем каждое натуральное число n в виде $n = 13^s m$, где m не делится на 13. Пусть $r(m)$ обозначает остаток от деления m на 13. Будем считать, что $r(m)$ — это номер цвета, в который покрашено число n. Поскольку нулевой остаток в этой конструкции получиться не может, мы определили раскраску в 12 цветов. Осталось заметить, что если число $x = 13^s m$ порождает каскад, то при делении на 13 числа из каскада дают такие же остатки, как и числа m, $2m$, $\ldots$, $12m$. Так как число m имеет ненулевой остаток, все эти остатки различны по модулю 13.

3. Нельзя. Заметим, что если мы укажем точку A, для которой $\angle DAF = \angle FAE$, то отложив на луче AD отрезок $AB = 2AF$, а на луче AE отрезок $AC = 2AE$, мы получим треугольник ABC, удовлетворяющий условию задачи. При этом положение вершин B и C однозначно определяется положением вершины A.

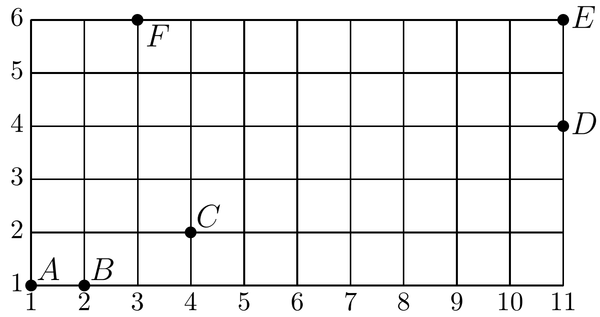
Поэтому достаточно показать, что вершина A может быть выбрана неоднозначно. Отложим от точки F отрезок FD', равный FD, в произвольном «северо-восточном» направлении. Обозначим через A точку пересечения прямой ED' с биссектрисой угла DFD'. Тогда треугольники DFA и $D'FA$ равны по двум сторонам и углу, откуда $\angle DAF = \angle FAD' = \angle FAE$, что нам и требовалось. Ясно, что при разных положениях отрезка FD' будут получаться разные положения точки A.



4. а) Можно. Построим требуемую конфигурацию. Удобно выбирать перекрестки либо только на самой нижней, либо только на самой правой улице — тогда между ними легко считать расстояния, двигаясь по этим улицам. На приведенной ниже картинке $1 = AB$, $2 = DE$, $3 = BC$, $4 = AC$, $9 = CD$, $11 = CE$, $12 = BD$, $13 = AD$, $14 = BE$, $15 = AE$.



б) Можно. Требуемую конфигурацию построить трудно. Здесь $1 = AB$, $2 = DE$, $3 = BC$, $4 = AC$, $5 = CF$, $6 = BF$, $7 = AF$, $8 = EF$, $9 = CD$, $10 = DF$, $11 = CE$, $12 = BD$, $13 = AD$, $14 = BE$, $15 = AE$.



в) Нельзя. В нашем городе все расстояния между перекрестками — целые числа. Самое большое из них — это расстояние между перекрестками, находящимися в противоположных углах города, оно равно 15. Но семь перекрестков определяют 21 попарное расстояние, поэтому среди них обязательно встретятся одинаковые.