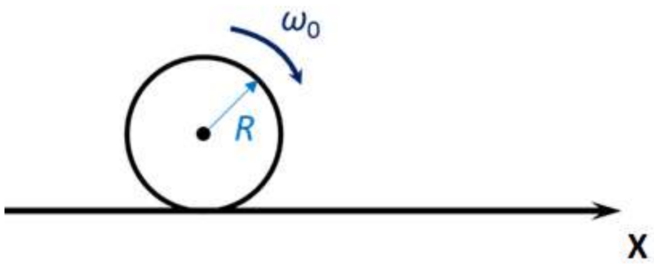
11 класс Вариант 1

Задача 1

Гимнаст раскручивает тонкий обруч радиусом ***R*** до угловой скорости $\boldsymbol{\omega_0}$ вокруг его оси, а затем ставит его на пол спортивного зала без начальной скорости так, как показано на рисунке. Коэффициент трения обруча о пол равен $\boldsymbol{\mu}$. Постройте график зависимости координаты центра обруча относительно оси *x* от времени.



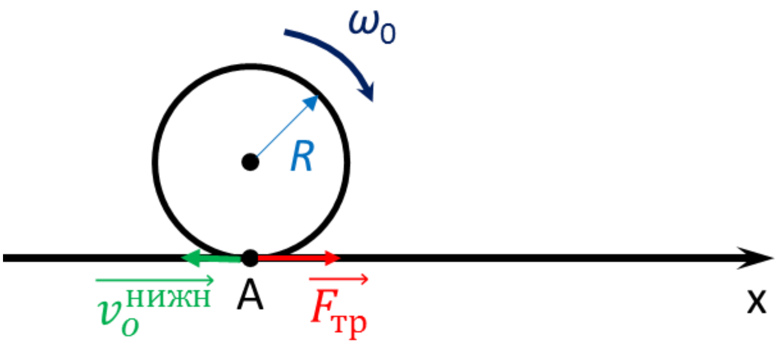
Примечание: Угловое ускорение **β** связано с моментом приложенных сил соотношением: ***I*β = *M***, где ***I*** – момент инерции тела относительно оси вращения, ***M*** – момент внешних сил. Для обруча, вращающегося вокруг своей оси $\boldsymbol{I=mR^2}$.

Решение

Запишем скорость нижней точки (обозначим её А) в начальный момент времени нижней точки обруча:

$$v_0^{\text{нижн}} = \omega_0 R \tag{1}$$

Согласно (1) скорость точки А в начальный момент времени направлена влево. Сперва обруч будет двигаться с проскальзыванием, т.к. скорость точки обруча “А” относительно земли отлична от нуля. При этом на обруч будет действовать сила трения скольжения по модулю равная μN. Сила трения препятствует движению, следовательно, она направлена противоположно, то есть вправо.



Сначала скорость поступательного движения колеса будет увеличиваться, колесо будет двигаться с проскальзыванием. Это будет происходить до тех пор, пока $v(t) < \omega(t)R$. Поступательное движение обруча на этом этапе можно рассматривать как равноускоренное, то есть координата его центра будет меняться по закону

$$x(t) = x_0 + \frac{at^2}{2}. \tag{2}$$

Найдем ускорение обруча из второго закона Ньютона:

$$F_{\text{тр}} = ma \;\Rightarrow\; \mu mg = ma \;\Rightarrow a = \mu g. \quad (3)$$

Координата центра обруча с учетом (3):

$$x(t) = x_0 + \frac{\mu g t^2}{2}. \quad (4)$$

Проскальзывание прекратится, когда суммарная скорость нижней точки обруча относительно земли будет равна нулю. Эта скорость складывается из скорости поступательного движения обруча и скорости из-за вращательного движения. Скорость поступательного движения направлена вправо, а вращение происходит по часовой стрелке, следовательно для прекращения проскальзывания модули скорости и ωR должны стать равными, т.е.

В момент времени $\tilde{t}$, при $v(\tilde{t}) = \omega(\tilde{t})R$ проскальзывание прекратится. Найдем этот момент времени. Скорость будет увеличиваться и с учетом (3)

$$v(\tilde{t}) = a\tilde{t} = \mu g\tilde{t}, \quad (5)$$

Угловая скорость будет уменьшаться

$$\omega(\tilde{t}) = \omega_0 + \beta\tilde{t}, \quad (6)$$

где *β* – угловое ускорение.

Запишем основное уравнение динамики твердого тела

$$I\beta = M, \quad (7)$$

I – момент инерции, *M* – момент силы (силы трения).

$$I\beta = -\mu mgR. \quad (8)$$

Обруч представляет собой тонкостенный цилиндр, тогда его момент инерции вдоль оси, проходящей через его ось равен $I = mR^2$.

Тогда

$$mR^2\beta = -\mu mgR. \quad (9)$$

Отсюда угловое ускорение

$$\beta = -\frac{\mu g}{R}. \quad (10)$$

Тогда (6) можно переписать как

$$\omega(\tilde{t}) = \omega_0 - \frac{\mu g}{R}\tilde{t}, \quad (11)$$

Приравниваем (6) и (11) и получаем

$$2\mu g\tilde{t} = \omega_0 R. \quad (12)$$

Тогда момент времени, в который проскальзывание прекратится

$$\tilde{t} = \frac{\omega_0 R}{2\mu g}. \qquad (13)$$

Координата центра обруча в момент времени $\tilde{t}$

$$x(\tilde{t}) = x_0 + \frac{\mu g \tilde{t}^2}{2} = x_0 + \frac{\mu g}{2}\left(\frac{\omega_0 R}{2\mu g}\right)^2 = x_0 + \frac{\omega_0^2 R^2}{8\mu g}. \qquad (14)$$

Скорость центра обруча в момент времени $\tilde{t}$ (5) можно переписать

$$v(\tilde{t}) = \mu g \frac{\omega_0 R}{2\mu g} = \frac{\omega_0 R}{2}. \qquad (15)$$

С момента $\tilde{t}$ проскальзывание прекратится и нижняя точка обруча "A" будет иметь нулевую скорость. Следовательно на обруч будет действовать сила трения покоя. Сила трения покоя может принимать значения от нуля до силы трения скольжения $0 \leq F_{\text{тр}} \leq \mu N$. Сила трения покоя компенсирует внешние силы. Т.к. на обруч не действуют внешние силы помимо силы трения покоя, она равна нулю и обруч будет двигаться равномерно

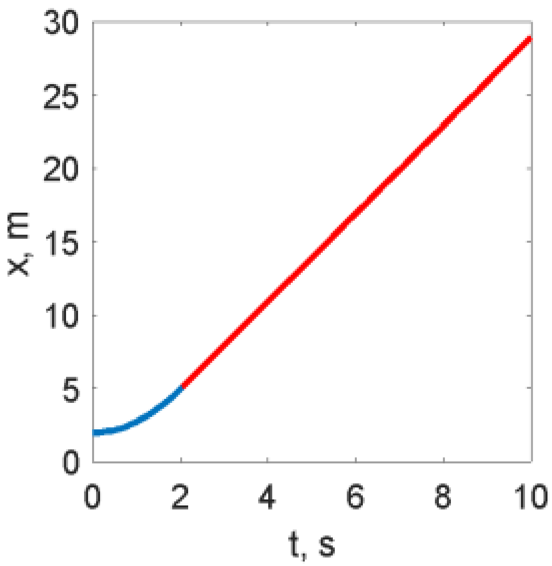
$$x(t) = x(\tilde{t}) + v(t - \tilde{t}) = x_0 + \frac{\omega_0^2 R^2}{8\mu g} + \frac{\omega_0 R}{2}\left(t - \frac{\omega_0 R}{2\mu g}\right). \qquad (16)$$

Тогда координата центра обруча меняется со временем следующим образом

$$x(t) = \{x_0 + \frac{\mu g t^2}{2} \text{ при } t < \frac{\omega_0 R}{2\mu g}\ x_0 + \frac{\omega_0^2 R^2}{8\mu g} \text{ при } t = \frac{\omega_0 R}{2\mu g}\ x_0 + \frac{\omega_0^2 R^2}{8\mu g} + \frac{\omega_0 R}{2}\Big(t - \qquad (17)$$

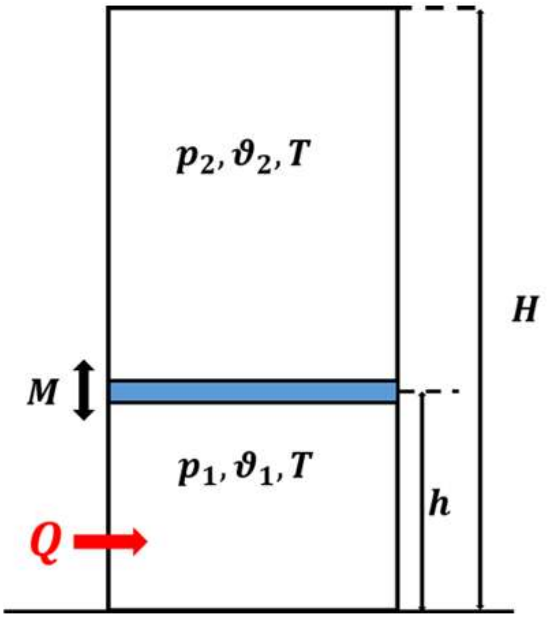
$$\omega 0R2\mu g \text{при } t > \omega 0R2\mu g\,.$$

Тогда график зависимости x(t)



Задача 2

Цилиндрический сосуд с площадью основания ***S*** и высотой ***H***, запаянный с обоих концов, расположен вертикально. Внутри сосуд герметично разделен на две части поршнем массой ***M***, способным двигаться вдоль него без трения. Начальная высота поршня над уровнем дна сосуда составляет ***h=H/3***. Внутри каждой из частей сосуда находится ν_1 и ν_2 моль идеального одноатомного газа, соответственно, при одинаковой температуре, причем $\boldsymbol{\nu_1 = 2\nu_2}$. Сосуду сообщают некоторое количество теплоты ***Q*** таким образом, что температура газа в сосудах остается одинаковой. Определите ***Q***, необходимое для того, чтобы объемы частей сосуда выше и ниже поршня оказались одинаковыми. Какое ***Q*** потребовалось бы, чтобы объемы верхней и нижней частей относились как **1:2**? Сосуд теплоизолирован от внешней среды. Толщиной поршня пренебречь.



Решение:

Пусть p_1 - давление в нижней части, p_2 - давление в верхней. Тогда:

$$p_1 = p_2 + \frac{Mg}{S}$$

(M - масса поршня, S - площадь основания сосуда).

Начальное состояние газа в каждом отсеке:

$$(p_2 + \frac{Mg}{S})hS = 2\nu RT$$

$$p_2(H - h)S = \nu RT$$

где R - универсальная газовая постоянная.

Отсюда получаем:

$$(p_2 + \frac{Mg}{S})hS = 2p_2(H - h)S$$

$$p_2 = \frac{Mg}{S\left(\frac{2H}{h} - 3\right)} = \frac{Mg}{3S}$$

(выделено выражение для произвольного h, будет использоваться в дальнейшем)

$$T = \frac{p_2(H-h)S}{\eta R} = \frac{Mg}{\eta R} * \frac{H-h}{\frac{2H}{h} - 3} = \frac{\frac{2}{9}MgH}{\nu R}$$

Далее сообщаем сосуду количество теплоты Q, которое пойдет на нагрев газа в обеих частях сосуда и на передвижение поршня вверх:

$$Q = \frac{3}{2}3\nu RdT + Mgdh$$

где ($dT = T' - T, dh = h' - h = \frac{1}{2}H - \frac{1}{3}H = \frac{1}{6}H$)

При этом для новых температуры T' и давления p2' имеем

$$(p_2' + \frac{Mg}{S})(h + dh)S = (p_2' + \frac{Mg}{S})\frac{1}{2}HS = 2\nu RT'$$

$$p_2'(H - h - dh)S = \nu RT'$$

Откуда:

$$p_2' = \frac{Mg}{S}$$

$$T' = \frac{mg}{2\nu R}$$

$$dT = T' - T = \frac{5}{18}\frac{MgH}{\nu R}$$

$$dh = \frac{1}{6}H$$

$$Q = \frac{3}{2}3\nu RdT + Mgdh = \frac{5}{4}MgH + \frac{1}{6}MgH = \frac{17}{12}Mgh;$$

Ответ на первый вопрос: $\frac{17}{12}Mgh$

Для ответа на второй вопрос рассмотрим выражение для давления и температуры при произвольном h:

$$p_2 = \frac{Mg}{S\left(\frac{2H}{h} - 3\right)}$$

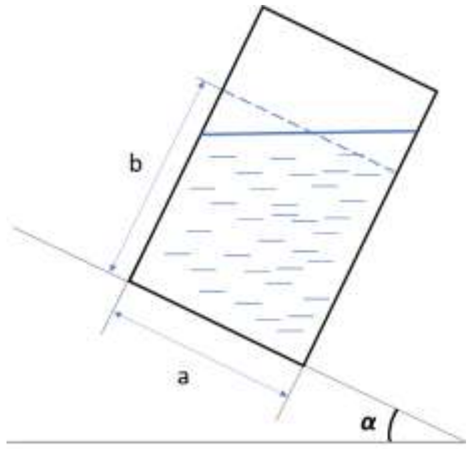
$$T = \frac{Mg}{\nu R} * \frac{H-h}{\frac{2H}{h} - 3}$$

для данного по условию отношения объемов S*(H-h)/(Sh)=H/h-1=1/2 высота уровня поршня над дном сосуда будет h=2/3H. Такое отношение будет устанавливаться, когда давление и температура в обеих частях будут бесконечными. Для этого потребовалось бы бесконечная энергия.

Ответ на второй вопрос: бесконечность (как вариант - ситуация невозможна, нефизична).

Задача 3

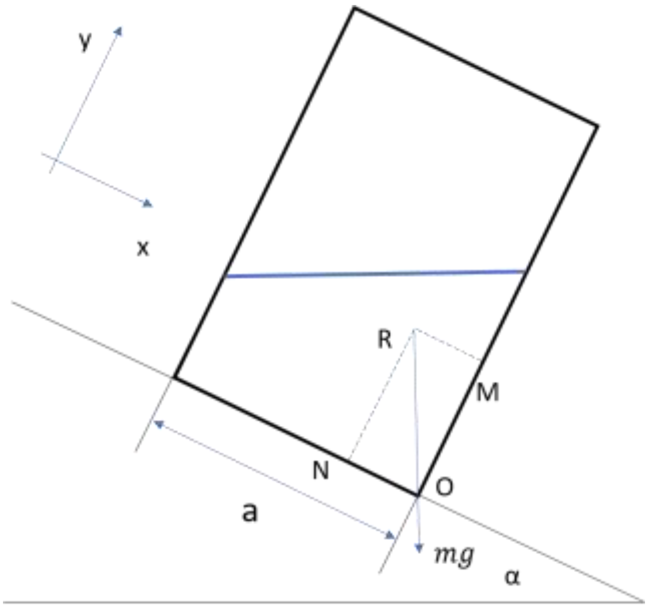
Сосуд квадратного сечения со стороной ***a*** и высокими стенками заполняют водой до некоторого уровня ***b > a/2*** и затем ставят на наклонную плоскость с углом наклона ***α* = 30°**. Определите, при каком *минимальном* объеме воды сосуд перевернется. Сосуд с плоскости не соскальзывает. Массой пустого сосуда пренебречь.



Примечание: центр тяжести однородного треугольника находится в точке пересечения медиан.

Решение

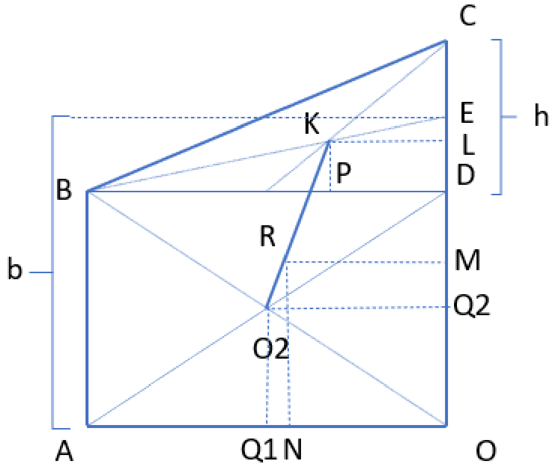
Сосуд с водой перевернется, когда моменты сил относительно точки O, стремящиеся перевернуть сосуд, будут равны моментам сил, этому мешающим. Эти силы – проекции силы тяжести. Чтобы определить моменты этих сил, необходимо найти координаты центра массы воды в стакане.



$$m_{\text{в}} g sin\alpha \cdot RN = m_{\text{в}} g cos\alpha \cdot RM$$

Условие *b>a/2* и угол наклона в $30°$ однозначно определяют, что объем, занимаемый водой в сосуде, будет трапециевидной формы. Центр масс воды обозначим точкой R. Чтобы найти плечи RN и RM, к которым приложены проекции силы тяжести, рассмотрим в плоскости XY прямоугольную трапецию.

Положение центра масс этой трапеции можно найти, рассмотрев по отдельности положения центров масс прямоугольника и прямоугольного треугольника (см рисунок), а затем найти положение центра масс составной фигуры.



Центр масс прямоугольного треугольника находится в точке пересечения медиан. При этом медианы делятся точкой пересечения в отношении 2 к 1, считая от вершины. Введем обозначения *OE = b*, *CD = h* и tg*α = h/a*. При этом для треугольника BCD:

$$KL = \frac{1}{3}BD = \frac{1}{3}a, \qquad KP = \frac{1}{3}CD = \frac{1}{3}h$$

Для прямоугольника ABDO:

$$O_2Q_2 = \frac{1}{2}AO = \frac{1}{2}a, \qquad O_2Q_1 = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}(b - \frac{h}{2}),$$

Координаты центра масс трапеции найдем по формуле для центра масс:

$$x_0 = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} = \frac{S_1x_1 + S_2x_2}{S_1 + S_2}$$

Где x – координата центра масс фигуры, S – ее площадь (плотность воды и поперечный размер сосуда сокращаются).

Подготовим все значения для расчета по формуле (индексы tr – треугольник, pr – прямоугольник, координаты отсчитываются от точки O):

$$S_{tr} = \frac{1}{2}ah$$

$$S_{pr} = a(b - \frac{h}{2})$$

$$S_{tr} + S_{pr} = ab$$

$$x_{tr} = KL = \frac{1}{3}a$$

$$y_{tr} = KP = b - \frac{1}{6}h$$

$$x_{pr} = \frac{1}{2}a$$

$$y_{pr} = \frac{1}{2}b - \frac{1}{4}h$$

Координаты центра масс тогда:

$$x_c = RM = \frac{1}{2}a - \frac{ah}{12b}$$

$$y_c = RN = \frac{1}{2}b + \frac{1}{24}\frac{h^2}{b}$$

Вернемся к равенству моментов сил:

$$m_{\text{в}} g sin\alpha \cdot RN = m_{\text{в}} g cos\alpha \cdot RM$$

$$tg\alpha \cdot RN = RM$$

Получаем квадратное уравнение относительно b:

$$b^2 - \frac{ab}{tg\alpha} + \frac{1}{12}a^2(tg^2\alpha + 2) = 0$$

$$D = \frac{a^2}{tg^2\alpha} - \frac{a^2}{3}(2 + tg^2\alpha)$$

Корни уравнения:

$$b_{1,2} = \frac{1}{2}a\left(\frac{1}{tg\alpha} \pm \sqrt{\frac{1}{tg^2\alpha} - \frac{1}{3}(2 + tg^2\alpha)}\right)$$

в условии b>a/2. Оценивая численно выражение в скобках, берем ответ со знаком +. Ответ с минусом даст значение объема, при котором будет треугольник, а не трапеция, что потребует иного рассмотрения задачи (поиска центра масс).

Объем воды тогда находится как:

$$V = ba^2$$

Задача 4

В открытом сосуде площадью основания ***S*** на границе раздела двух несмешивающихся жидкостей плавает тело, имеющее форму прямоугольного параллелепипеда. Высота тела ***H***, плотность $\boldsymbol{\rho_m}$, площадь основания ***S/2***. В состоянии равновесия тело погружено в нижний слой жидкости на глубину $\boldsymbol{h_0<H}$, а его основание ориентировано параллельно границе раздела жидкостей. Определите частоту малых колебаний тела, возникающих при выведении его из равновесия слабым толчком по его верхней грани. Известно, что плотность жидкости в нижнем слое в ***n* раз больше** плотности жидкости в верхнем слое. Тело всегда остается частично погруженным в каждую из жидкостей, а его ориентация при колебаниях остается неизменной. Скорости движения тела и жидкостей в любой момент времени считайте малыми. Вязкостью жидкостей пренебрегите.

Решение:

2-й закон Ньютона для тела в жидкости:

$$ma = -mg + \frac{\rho_1 g S_0}{2} h + \frac{\rho_2 g S_0}{2}(H - h)$$

где S_0- площадь основания параллелепипеда.

Находим плотность жидкости в верхнем слое ρ_2из уравнения для положения равновесия (по условию $\rho_1 = n\rho_2$):

$$m = n\rho_2 S_0 h_0 - \rho_2 S_0 h_0 + \rho_2 S_0 H$$

$$\rho_т S_0 H = S_0 h_0 \rho_2 (n-1) + \rho_2 S_0 H$$

$$\rho_2 = \rho_т H/(h_0(n-1) + H)$$

Пусть тело смещается из положения равновесия на y (допустим, в нижнюю жидкость). Изменение объема погруженной части тела должен учитывать подъем уровня нижней жидкости $y_{ж1}$:

$$\Delta V = S(y + y_{ж1})$$

При этом:

$$S_0(y + y_{ж1}) = S y_{ж1}$$

$$\Delta V = \frac{SS_0}{S - S_0} y,$$

На тот же объем уменьшается погружение тела в верхний слой жидкости. Поскольку площадь основания тела всего в два раза меньше

Если тело движется вверх (в положительном направлении), то сила Архимеда верхней жидкости растет (знак +), а нижней уменьшается:

$$m\frac{d^2 y}{dt^2} = -\rho_1 g dV + \rho_2 g dV = -\rho_2 g(n-1)\frac{SS_0}{S - S_0} y$$

Получаем уравнение колебаний:

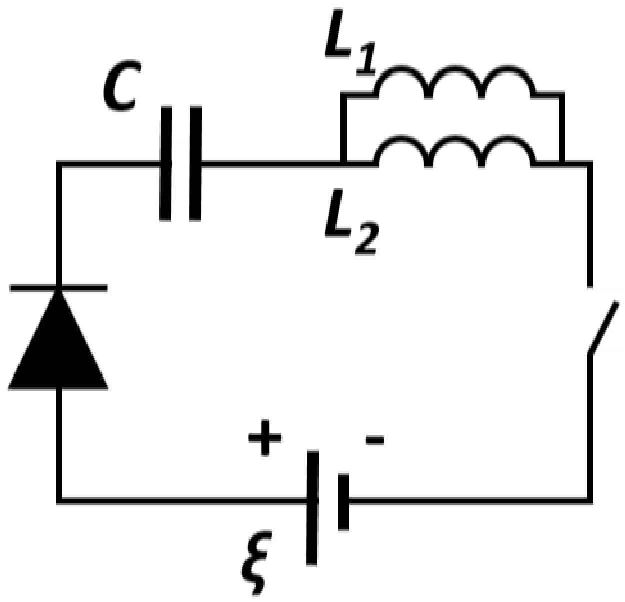
$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{g(n - 1)\frac{S}{S - S_0}}{h_0(n - 1) + H} y = 0$$

Откуда частота колебаний:

$$w = \sqrt{\frac{2g(n - 1)}{h_0(n - 1) + H}}$$

Задача 5

Источник ЭДС в **1В**, конденсатор емкостью **1 мкФ**, две катушки индуктивностями **3** и **9 мкГн**, ключ и диод соединены в цепь, как показано на рисунке. Вначале ключ разомкнут, конденсатор не заряжен. Диод имеет нулевое сопротивление при протекании тока в направлении по стрелке диода и не пропускает ток в противоположную сторону. В какой-то момент ключ замыкают. Определите заряд конденсатора и ток в цепи через **6 мкс** после замыкания ключа. Взаимной индукцией катушек пренебречь. Внутреннее сопротивление источника равно 0.



Решение:

Рассмотрим протекание тока через две параллельно соединенные катушки. Пусть через катушкуL_1 – ток i_1, через катушка L_2 – ток i_2, тогда в цепи течет ток $i = i_1 + i_2$. Используя правило Кирхгофа для замкнутого контура имеем:

$$L_1 \frac{di_1}{dt} - L_2 \frac{di_2}{dt} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(L_1 i_1 - L_2 i_2) = 0$$

$$L_1 i_1 - L_2 i_2 = const$$

Выразим ток через катушку L_1:

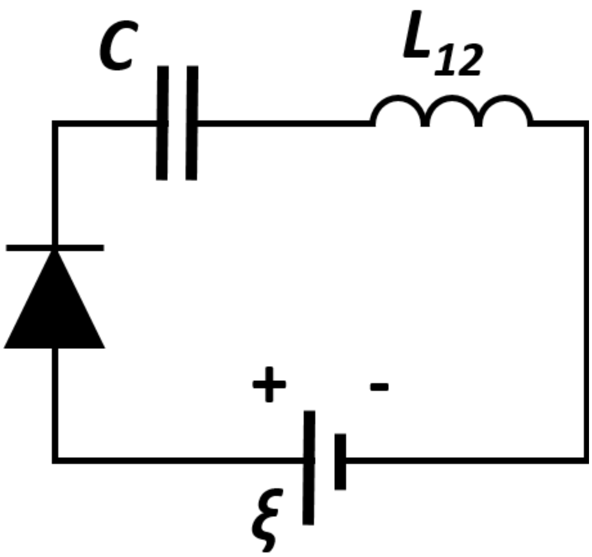
$$i_1 = \frac{const + L_2 i}{L_1 + L_2}$$

Падение напряжения на катушке 1:

$$\Delta U_L = L_1 \frac{di_1}{dt} = L_1 \frac{d}{dt}\left(\frac{const + L_2 i}{L_1 + L_2}\right) = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}\frac{di}{dt} = L_{12}\frac{di}{dt}$$

Где $L_{12} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$ – индуктивность параллельно соединенных катушек.

Далее заменяем две катушки на одну с индуктивностью L_{12} и рассматриваем контур:



По правилу Кирхгофа:

$$\Delta U_L + \Delta U_C = \xi$$

$$L_{12}\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = \xi$$

Получаем дифференциальное уравнение на колебания заряда конденсатора:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{L_{12}C} = \frac{\xi}{L_{12}}$$

В цепи начнутся колебания с частотой:

$$w = \sqrt{\frac{1}{L_{12}C}} = \frac{2}{3} * 10^6 \text{ Гц}$$

Решение:

$$q(t) = Acos(wt) + Bsin(wt) + C\xi$$

Вначале конденсатор разряжен:

$$q(0) = A + C\xi = 0, A = -C\xi$$

И тока нет:

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = C\xi wsin(wt) + Bwcos(wt)$$

$$i(0) = Bw = 0$$

Тогда:

$$q(t) = C\xi(1 - cos(wt))$$

$$i(t) = C\xi wsin(wt)$$

Далее рассматриваем диод. После первого полупериода ток должен начать течь в противоположную сторону, однако диод этого не позволяет. Период колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{w} = 3\pi * 10^{-6} c$$

Поэтому конденсатор заряжается до величины:

$$q\left(\frac{T}{2}\right) = 2C\xi = 2 * 10^{-6} \text{ Кл}$$

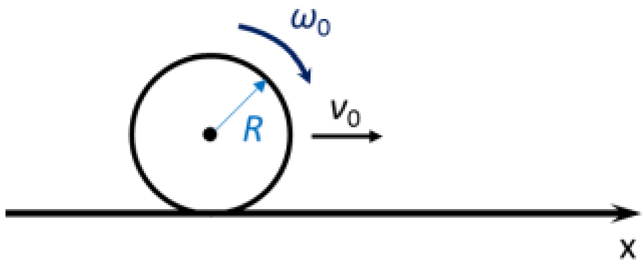
И остается заряженным, а ток в цепи будет равен нулю. Интересующее по условию задачи время – 6 мкс – больше половины периода.

Ответ: 2 мкКл, 0 А.

11 класс Вариант 2

Задача 1

Гимнаст раскручивает тонкий обруч радиусом ***R*** до угловой скорости $\boldsymbol{\omega_0}$ вокруг его оси, а затем ставит его на пол спортивного зала и придает ему начальную скорость $\boldsymbol{v_0}$ в направлении вдоль пола так, как показано на рисунке. Известно, что в начальный момент времени модуль скорости поступательного движения обруча был меньше модуля скорости вращательного движения. Коэффициент трения обруча о пол равен $\boldsymbol{\mu}$. Постройте график зависимости координаты центра обруча относительно оси *x* от времени.



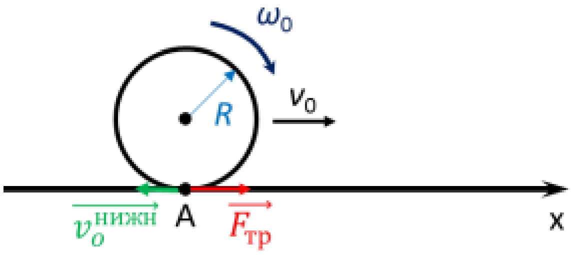
Примечание: Угловое ускорение **β** связано с моментом приложенных сил соотношением: ***Iβ = M***, где ***I*** – момент инерции тела относительно оси вращения, ***M*** – момент внешних сил. Для обруча, вращающегося вокруг своей оси $\boldsymbol{I=mR^2}$.

Решение

Запишем скорость нижней точки (обозначим её А) в начальный момент времени нижней точки обруча:

$$v_0^{\text{нижн}} = \omega_0 R - v_0 \quad (1)$$

Согласно (1) и условию $v_0 < \omega_0 R$ скорость точки А в начальный момент времени направлена влево. Сперва обруч будет двигаться с проскальзыванием, т.к. скорость точки обруча "А" относительно земли отлична от нуля. При этом на обруч будет действовать сила трения скольжения по модулю равная μN. Сила трения препятствует движению, следовательно, она направлена противоположно, то есть вправо.



Сначала скорость поступательного движения колеса будет увеличиваться, колесо будет двигаться с проскальзыванием. Проскальзывание прекратится, когда суммарная скорость нижней точки обруча относительно земли будет равна нулю. Эта скорость складывается из скорости поступательного движения обруча и скорости из-за вращательного движения. Скорость поступательного движения направлена вправо, а вращение происходит по часовой стрелке, следовательно для прекращения проскальывания модули скорости и ωR должны стать равными, т.е.$v(t) = \omega(t)R$

Поступательное движение обруча на этом этапе движения с проскальзыванием можно рассматривать как равноускоренное, то есть координата его центра будет меняться по закону

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}. \tag{2}$$

Найдем ускорение обруча из второго закона Ньютона:

$$F_{\text{тр}} = ma \Rightarrow \mu mg = ma \Rightarrow a = \mu g. \tag{3}$$

Координата центра обруча с учетом (3):

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{\mu g t^2}{2}. \tag{4}$$

В момент времени $\tilde{t}$, при $v(\tilde{t}) = \omega(\tilde{t})R$ проскальзывание прекратится. Найдем этот момент времени. Скорость будет увеличиваться и с учетом (3)

$$v(\tilde{t}) = v_0 + a\tilde{t} = v_0 + \mu g\tilde{t}, \tag{5}$$

Угловая скорость будет уменьшаться

$$\omega(\tilde{t}) = \omega_0 + \beta\tilde{t}, \tag{6}$$

где *в* – угловое ускорение.

Запишем основное уравнение динамики твердого тела

$$I\beta = M, \tag{7}$$

I – момент инерции, *M* – момент силы (силы трения).

$$I\beta = -\mu mgR. \tag{8}$$

Обруч представляет собой тонкостенный цилиндр, тогда его момент инерции вдоль оси, проходящей через его ось равен $I = mR^2$.

Тогда

$$mR^2\beta = -\mu mgR. \tag{9}$$

Отсюда угловое ускорение

$$\beta = -\frac{\mu g}{R}. \tag{10}$$

Тогда (6) можно переписать как

$$\omega(\tilde{t}) = \omega_0 - \frac{\mu g}{R}\tilde{t}, \tag{11}$$

Приравниваем (6) и (11) и получаем

$$2\mu g\tilde{t} = \omega_0 R - v_0. \tag{12}$$

Тогда момент времени, в который проскальзывание прекратится

$$\tilde{t} = \frac{\omega_0 R - v_0}{2\mu g}. \quad (13)$$

Координата центра обруча в момент времени $\tilde{t}$

$$x(\tilde{t}) = x_0 + v_0\tilde{t} + \frac{\mu g \tilde{t}^2}{2} = x_0 + v_0\frac{\omega_0 R - v_0}{2\mu g} + \frac{\mu g}{2}\left(\frac{\omega_0 R - v_0}{2\mu g}\right)^2 = x_0 + v_0\frac{\omega_0 R - v_0}{2\mu g} + \frac{(\omega_0 R - v_0)^2}{8\mu g}. \quad (14)$$

Скорость центра обруча в момент времени $\tilde{t}$ (5) можно переписать

$$v(\tilde{t}) = v_0 + \mu g\frac{\omega_0 R - v_0}{2\mu g} = v_0 + \frac{\omega_0 R - v_0}{2} = \frac{v_0 + \omega_0 R}{2}. \quad (15)$$

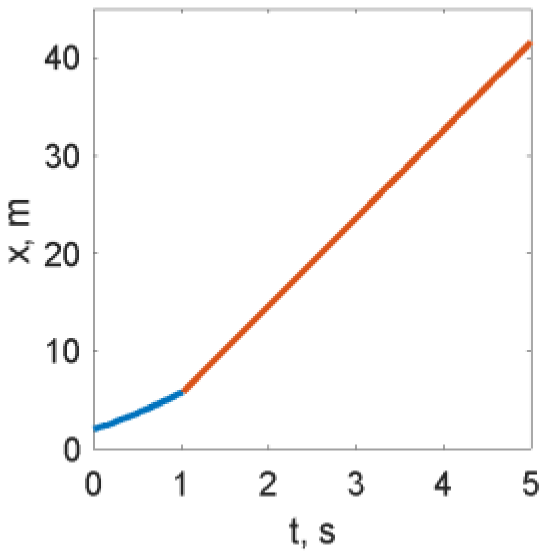
С момента $\tilde{t}$ проскальзывание прекратится и нижняя точка обруча "A" будет иметь нулевую скорость. Следовательно на обруч будет действовать сила трения покоя. Сила трения покоя может принимать значения от нуля до силы трения скольжения $0 \le F_{\text{тр}} \le \mu N$. Сила трения покоя компенсирует внешние силы. Т.к. на обруч не действуют внешние силы помимо силы трения покоя, она равна нулю и обруч будет двигаться равномерно

$$x(t) = x(\tilde{t}) + v(t - \tilde{t}) = x_0 + v_0\frac{\omega_0 R - v_0}{2\mu g} + \frac{(\omega_0 R - v_0)^2}{8\mu g} + \frac{v_0 + \omega_0 R}{2}\left(t - \frac{\omega_0 R - v_0}{2\mu g}\right). \quad (16)$$

Тогда координата центра обруча меняется со временем следующим образом

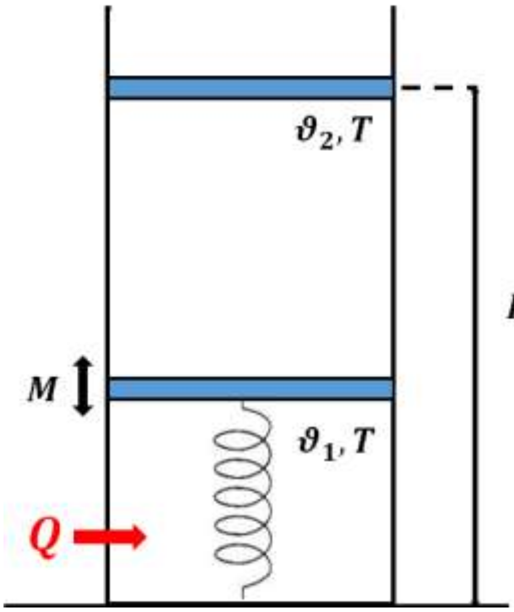
$$x(t) = \begin{cases} x_0 + v_0 t + \frac{\mu g t^2}{2} \text{ при } t < \frac{\omega_0 R - v_0}{2\mu g} \\ x_0 + v_0\frac{\omega_0 R - v_0}{2\mu g} + \frac{(\omega_0 R - v_0)^2}{8\mu g} \text{ при } t = \frac{\omega_0 R - v_0}{2\mu g} \\ x_0 + v_0\frac{\omega_0 R - v_0}{2\mu g} + \frac{(\omega_0 R - v_0)^2}{8\mu g} + \frac{v_0 + \omega_0 R}{2}\left(t - \frac{\omega_0 R - v_0}{2\mu g}\right) \text{ при } t > \frac{\omega_0 R - v_0}{2\mu g} \end{cases}. \quad (17)$$

Тогда график зависимости x(t)



Задача 2

Открытый сверху цилиндрический сосуд с площадью основания ***S*** расположен вертикально внутри вакуумной камеры. Внутри сосуда размещены два одинаковых поршня массой ***M***, герметично разделяющие его на две части. Поршни могут двигаться вдоль сосуда без трения. Нижний поршень прикреплен ко дну сосуда пружиной жесткостью ***k***. Начальная высота верхнего поршня над дном сосуда – ***H***, пружина не деформирована. Внутри каждой части сосуда находится идеальный одноатомный газа при одинаковой температуре. Количество вещества в нижней части в два раза больше количества вещества в верхней. Сосуду сообщили некоторое количество теплоты ***Q*** таким образом, что температура газа в сосудах оставалась одинаковой. Пружина при этом растянулась на величину ***dx***. Определите ***Q***. Сосуд теплоизолирован от внешней среды. Толщиной поршней пренебречь.



Решение:

давление в верхней части:

$$p_2 = \frac{Mg}{S}$$

давление в нижней части:

$$p_1 = p_2 + \frac{Mg}{S} = \frac{2Mg}{S}$$

Пусть h – начальная высота нижнего поршня. Записываем уравнения Менделеева-Клапейрона для каждой части:

$$\frac{Mg}{S}(H - h)S = \nu RT$$

$$\frac{2Mg}{S}hS = 2\nu RT$$

Откуда находим h и T:

$$h = \frac{H}{2}$$

$$T = \frac{MgH}{2\nu R}$$

Далее, сообщаем сосуду количество теплоты Q. Оно пойдет на нагрев газа, на передвижение поршней и на растяжение пружины (изменение уровня нижнего поршня равно растяжению пружины):

$$Q = \frac{3}{2}3\eta RdT + \ Mg(dh + dx) + k\frac{dx^2}{2}$$

Где $dT = T' - T$ – изменение температуры

Давление газа в верхней части не изменилось, а изменение объема пропорционально разности изменений уровней верхнего и нижнего поршней $(dh - dx)$:

$$\frac{Mg}{S}(\frac{H}{2} + dh - dx)S = \nu RT'$$

$$\frac{MgH}{2} + Mg(dh - dx) = \nu RT'$$

ранее мы имели:

$$\frac{MgH}{2} = \nu RT$$

откуда:

$$Mg(dh - dx) = \nu R(T' - T) = \nu RdT$$

Давление в нижней части:

$$p_1 = p_2 + \frac{Mg + kdx}{S} = \frac{2Mg + kdx}{S}$$

Из уравнение Менделеева-Клапейрона для нижней части находим установившуюся температуру:

$$(2Mg + kdx)(\frac{H}{2} + dx) = 2\nu RT'$$

$$dT = T' - T = \frac{\left(Mg + \frac{kdx}{2}\right)\left(\frac{H}{2} + dx\right) - Mg * \frac{H}{2}}{\nu R} = \frac{\frac{kdxH}{4} + Mgdx + \frac{kdx^2}{2}}{\nu R}$$
$$= \frac{dx(\frac{kH}{4} + Mg + \frac{kdx}{2})}{\nu R}$$

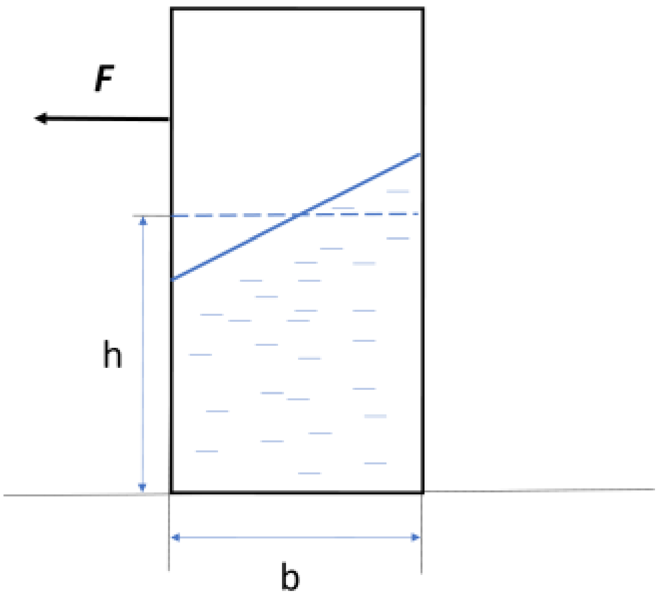
Расписываем Q:

$$Q = \frac{3}{2}3\eta RdT + \ Mg(dh + dx) + \frac{kdx^2}{2} \ = \frac{9}{2}\nu RdT + Mgdh - Mgdx + 2Mgdx + \frac{kdx^2}{2} =$$
$$= \frac{9}{2}\nu RdT + \nu RdT + 2Mgdx + k\frac{dx^2}{2} = \frac{11}{2}\nu RdT + 2Mgdx + k\frac{dx^2}{2}$$
$$= \frac{11}{2}dx\left(\frac{kH}{4} + Mg + \frac{kdx}{2}\right) + 2Mgdx + k\frac{dx^2}{2}$$
$$= dx\big(7.5Mg + k(1.375H + 3.25dx)\big)$$

Ответ: $dx\big(7.5Mg + k(1.375H + 3.25dx)\big)$

Задача 3

Прямоугольный сосуд с высокими стенками с дном в форме квадрата со стороной ***b*** заполнен водой до уровня ***h***, причем ***h>b/2***. Сосуд тянут по горизонтальной поверхности за левую боковую грань с силой ***F=mg***, где ***m*** – полная масса воды в сосуде. Определите, на каком минимальном расстоянии от дна сосуда должна быть расположена точка приложения силы, чтобы сосуд перевернулся. Силой трения и массой пустого сосуда пренебречь.



Примечание: центр тяжести однородного треугольника находится в точке пересечения медиан.

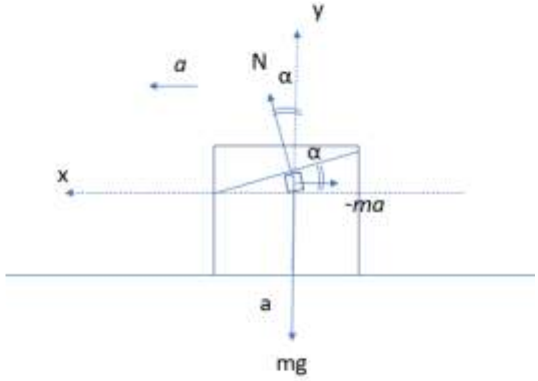
Решение:

Сосуд с водой будем двигаться равноускоренно под действием прикладываемой силы, пока не опрокинется. По второму закону Ньютона:

$$ma = F$$

Где m – масса воды в стакане (может быть определена через плотность и объем, дано по условию).

При равноускоренном движении поверхность воды будет расположены под некоторым углом к горизонтали. Рассмотрим малый элемент воды массой Δm. В неинерциальной системе отсчета, связанной с сосудом, элемент покоится у поверхности. На него будут действовать сила тяжести, сила реакции опоры и сила инерции:



Рассмотрим проекции сил на оси X и У:

$$\Delta ma = Nsin\alpha$$

$$Ncos\alpha = \Delta mg$$

Получаем:$F = mgtg\alpha$

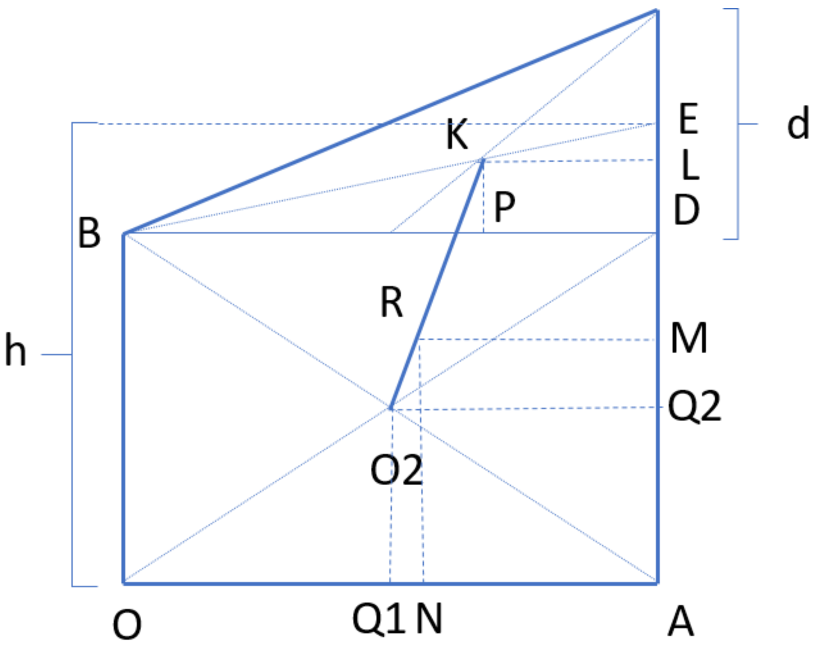
$$tg\alpha = \frac{F}{mg}$$

Здесь α – угол наклона поверхности воды к горизонту. Поскольку по условия $F = mg$, то $\alpha = 45°$.

Сосуд с водой перевернется тогда, когда моменты сил относительно точки O, стремящиеся перевернуть сосуд, будут равны моментам сил, этому мешающим:

$$Fl = mg \cdot l_1 + ma \cdot l_2$$

Здесь l_1 и l_2 – плечи сил, определяемые положением центра масс объема воды, l – искомая точка приложения силы F. Условие $b > a/2$ вместе с найденным углом $\alpha = 45°$ однозначно определяют, что объем, занимаемый водой в сосуде, будет трапециевидной формы:



Центр масс воды обозначим точкой R. Чтобы найти плечи ON и NR, рассмотрим в плоскости XY прямоугольную трапецию: Центр тяжести прямоугольного треугольника находится в точке пересечения медиан. При этом медианы делятся точкой пересечения в отношении 2 к 1, считая от вершины. Введем обозначения *OE = b*, *CD = h* и tg*α = h/a.* При этом для треугольника BCD:

$$KL = \frac{1}{3}BD = \frac{1}{3}b, \qquad KP = \frac{1}{3}CD = \frac{1}{3}d$$

Для прямоугольника ABDO:

$$O_2Q_2 = \frac{1}{2}AO = \frac{1}{2}b, \qquad O_2Q_1 = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}(h - \frac{d}{2}),$$

Координаты центра тяжести трапеции найдем по формуле центра масс:

$$x_0 = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} = \frac{S_1x_1 + S_2x_2}{S_1 + S_2}$$

Где x – координата центра масс фигуры, S – ее площадь (плотность воды и поперечный размер сосуда сокращаются).

Подготовим все значения для расчета по формуле (индексы tr – треугольник, pr – прямоугольник, координаты отсчитываются от точки O):

$$S_{tr} = \frac{1}{2}bd$$

$$S_{pr} = bh - \frac{bd}{2}$$

$$S = bh$$

$$x_{tr} = KL = \frac{2}{3}b$$

$$y_{tr} = KP = h - \frac{1}{6}d$$

$$x_{pr} = \frac{1}{2}b$$

$$y_{pr} = \frac{1}{2}h - \frac{1}{4}d$$

Расчет дает следующее значение:

$$x_c = ON = \frac{1}{2}b + \frac{bd}{12h} = \frac{1}{2}b + \frac{b^2tg\alpha}{12h}$$

$$y_c = RN = \frac{1}{2}h + \frac{1}{24}\frac{d^2}{h} = \frac{1}{2}h + \frac{1}{24}\frac{b^2tg(\alpha)^2}{h}$$

Вернемся к равенству моментов сил:

$$Fl = mgl_1 + Fl_2$$

$$l = \frac{mg}{F} l_1 + l_2$$

$$l_1 = \frac{1}{2} b + \frac{btg\alpha}{12h} = \frac{1}{2} b + \frac{b^2}{12h}$$

$$l_2 = \frac{1}{2} h + \frac{b^2}{24h}$$

Откуда

$$l = \frac{b}{2} + \frac{b^2}{12h} + \frac{1}{2} h + \frac{b^2}{24h} = \frac{b+h}{2} + \frac{b^2}{8h}$$

Задача 4

В закрытом сосуде площадью основания ***S***, частично заполненном жидкостью плотностью ***ρ***, находится тело, имеющее форму прямоугольного параллелепипеда, прикрепленное пружиной ко дну. Высота тела – ***H***, плотность – $\boldsymbol{\rho_m}$, площадь основания – ***S/2***.В состоянии равновесия тело погружено в жидкость на глубину $\boldsymbol{h_0<H}$, его основание параллельно границе жидкости, а пружина растянута на величину $\boldsymbol{\Delta y_0}$. Определите частоту малых колебаний тела, возникающих при выведении его из равновесия слабым толчком по его верхней грани. Во сколько раз будет отличаться частота таких колебаний в перевернутом вверх дном сосуде? В положении равновесия в перевернутом сосуде тело погружено на глубину $\boldsymbol{h_1<H}$, а пружина остается растянутой. Тело всегда остается частично погруженным в жидкость, а его ориентация при колебаниях остается неизменной. Скорости движения тела и жидкости в любой момент времени считайте малыми. Объемом пружины и вязкостью жидкости пренебрегите.

Решение:

2-й закон Ньютона для тела в жидкости:

$$ma = mg + k\Delta y - \rho g S_0 h$$

где S_0- площадь основания параллелепипеда. Находим жесткость пружины из уравнения для положения равновесия

$$mg = -k\Delta y_0 + \rho g S_0 h_0$$

$$k = gS_0(-\rho_{\text{т}} H + \rho h_0)/\Delta y_0$$

Пусть тело смещается из положения равновесия на y (допустим, вниз). Изменение объема погруженной части тела должен учитывать подъем уровня нижней жидкости $y_{\text{ж}1}$:

$$\Delta V = S_0(y + y_{\text{ж}1})$$

При этом:

$$S_0(y + y_{\text{ж}1}) = S y_{\text{ж}1}$$

$$\Delta V \ = \ \frac{SS_0}{S - S_0} y$$

При смещении из положения равновесия вниз, поскольку изначально пружина, которой тело прикреплено ко дну сосуда, растянута, то сила Архимеда будет увеличиваться, а сила упругости – уменьшаться. Записываем уравнение движения (y – смещение из положения равновесия):

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -\rho g \Delta V - ky \ = -\rho g\ \frac{SS_0}{S - S_0} y - \frac{gS_0(-\rho_{\text{т}} H + \rho h_0)}{\Delta y_0} y$$

Получаем уравнение колебаний:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{g}{\rho_{\text{т}} H}\left(\rho\ \frac{S}{S - S_0} + \frac{(-\rho_{\text{т}} H + \rho h_0)}{\Delta y_0}\right) y = 0$$

$$w = \sqrt{\frac{g}{\rho_{\text{т}} H}\left(2\rho + \frac{(-\rho_{\text{т}} H + \rho h_0)}{\Delta y_0}\right)}$$

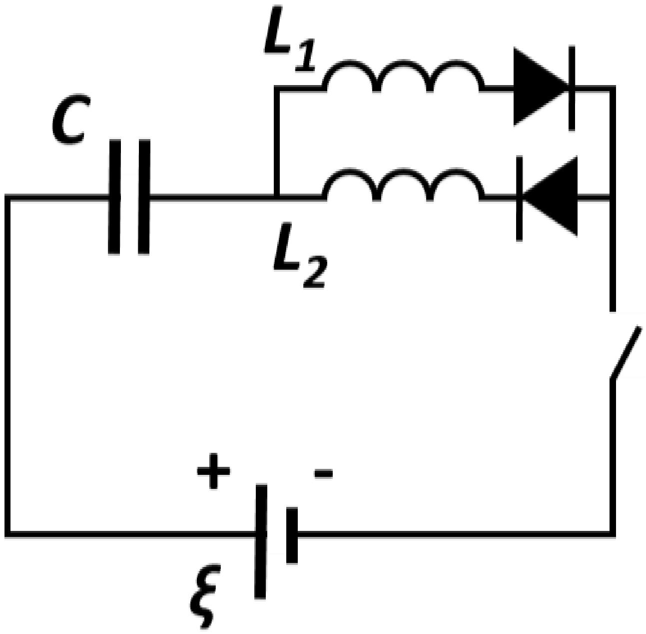
Сосуд перевернули. Жесткости пружины уже нашли. Уравнение движение останется прежним:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -\rho g \Delta V - ky \ = -\rho g \ \frac{SS_0}{S - S_0} y - \frac{gS_0(-\rho_{\text{т}} H + \rho h_0)}{\Delta y_0} y$$

Соответственно, частота колебаний не изменилась.

Задача 5

Источник ЭДС в **1В**, конденсатор емкостью **1 мкФ**, две катушки индуктивностями **1 и 4 мкГн**, ключ и два диода соединены в цепь, как показано на рисунке. Вначале ключ разомкнут, конденсатор не заряжен. Диод имеет нулевое сопротивление при протекании тока в направлении по стрелке диода и не пропускает ток в противоположную сторону. В какой-то момент ключ замыкают. Определите заряд конденсатора и ток в цепи через время **$t=5/2\,\pi\cdot 10^{-6}$ секунд** после замыкания ключа. Взаимной индукцией катушек пренебречь. Внутреннее сопротивление источника равно 0.



Решение:

После замыкания ключа ток потечет через катушку L_1. По правилу Кирхгофа для замкнутого контура имеем:

$$\Delta U_{L_1} + \Delta U_{\mathrm{C}} = \xi$$

$$L_1 \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = \xi$$

Получаем дифференциальное уравнение на колебания заряда конденсатора:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q}{L_1 C} = \frac{\xi}{L_1}$$

В цепи начнутся колебания с частотой:

$$w_1 = \sqrt{\frac{1}{L_1 C}} = \frac{1}{2} * 10^6 \text{ Гц}$$

Решение:

$$q(t) = A_1 cos(w_1 t) + B_1 sin(w_1 t) + C\xi$$

Вначале конденсатор разряжен:

$$q(0) = A_1 + C\xi = 0, A_1 = -C\xi$$

И тока нет:

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = C\xi w_1 sin(w_1 t) + B_1 w_1 cos(w_1 t)$$

$$i(0) = B_1 = 0$$

Тогда:

$$q(t) = C\xi(1 - cos(w_1 t))$$

$$i(t) = C\xi w_1 sin(w_1 t)$$

После первого полупериода $\frac{T_1}{2} = \frac{\pi}{w_1}$ ток начинает течь в противоположную сторону, через катушку L_2. В этот момент заряд на конденсаторе:

$$q\left(\frac{T_1}{2}\right) = C\xi\big(1 - cos(\pi)\big) = 2C\xi$$

$$i\left(\frac{T_1}{2}\right) = C\xi w_1 sin(\pi) = 0$$

Аналогично получаем

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{L_2 C} = \frac{\xi}{L_1}$$

Решение:

$$q(t) = A_2 cos(w_2 t') + B_2 sin(w_2 t') + C\xi$$

Где частота электромагнитных колебаний в контуре:

$$w_2 = \sqrt{\frac{1}{L_2 C}} = 10^6 \text{ Гц}$$

Для удобства вводим время $t' = t - \frac{T_1}{2}$ (отсчитываем от момента «переключения»). Подставляем начальные условия:

$$q(t' = 0) = A + C\xi = 2C\xi, A = C\xi$$

$$i(t' = 0) = Bw_2 = 0$$

Тогда:

$$q(t) = C\xi(1 + cos\left(w_2(t - \frac{\pi}{w_1}\right))$$

$$i(t) = -C\xi w_2 sin\left(w_2(t - \frac{\pi}{w_1}\right)$$

После полупериода $\frac{T_2}{2} = \frac{\pi}{w_2}$, отсчитываемого от первого полупериода, ток вновь поменяет знак, и ситуация повторится.

В задаче просят найти ток и заряд конденсатора в момент времени $t^* = \frac{5}{2}\pi * 10^{-6}$. Определим, в какой из полупериодов он попадает.

$$\frac{T_1}{2} = \frac{\pi}{w_1} = 2\pi * 10^{-6}\ \text{с}$$

$$\frac{T_2}{2} = \frac{\pi}{w_2} = \pi * 10^{-6}\ \text{с}$$

Попадает во второй полупериод. Подставляем время в выражения для заряда конденсатора и тока:

$$q(t^*) = C\xi\left(1 + cos\left(10^6(\frac{5}{2}\pi * 10^{-6} - 2\pi * 10^{-6}\right)\right) = C\xi = 10^{-6}\text{Кл}$$

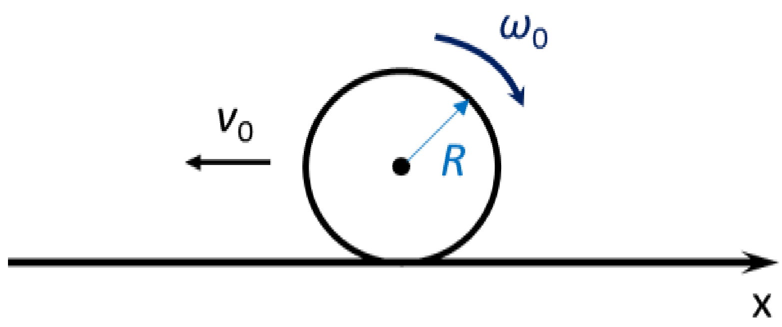
$$i(t) = -C\xi w_2 sin\left(10^6(\frac{5}{2}\pi * 10^{-6} - 2\pi * 10^{-6}\right) = -C\xi w_2 = -1\text{А}$$

Ответ: 1 мкКл, -1 А.

11 класс Вариант 3

Задача 1

Гимнаст раскручивает тонкий обруч радиусом $\boldsymbol{R}$ до угловой скорости $\boldsymbol{\omega_0}$ вокруг его оси, а затем ставит его на пол спортивного зала и придает ему начальную скорость $\boldsymbol{v_0}$ в направлении вдоль пола так, как показано на рисунке. Известно, что в начальный момент времени модуль скорости поступательного движения обруча был больше модуля скорости вращательного движения. Коэффициент трения обруча о пол равен $\boldsymbol{\mu}$. Постройте график зависимости координаты центра обруча относительно оси *x* от времени.



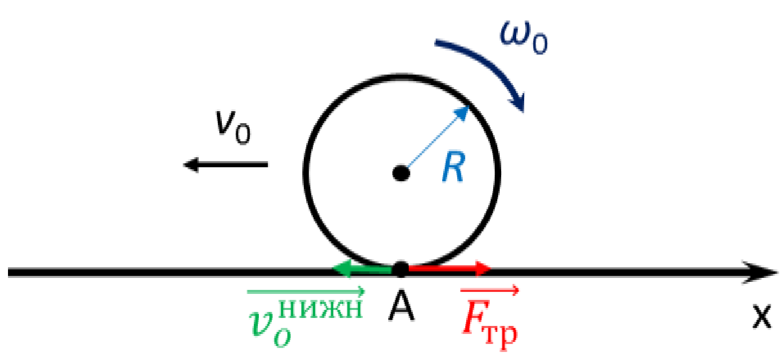
Примечание: Угловое ускорение **β** связано с моментом приложенных сил соотношением: ***Iβ = M***, где ***I*** – момент инерции тела относительно оси вращения, ***M*** – момент внешних сил. Для обруча, вращающегося вокруг своей оси $\boldsymbol{I=mR^2}$.

Решение

Запишем скорость нижней точки (обозначим её А) в начальный момент времени нижней точки обруча:

$$v_0^{\text{нижн}} = \omega_0 R + v_0 \tag{1}$$

Согласно (1) скорость точки А в начальный момент времени направлена влево. Сперва обруч будет двигаться с проскальзыванием, т.к. скорость точки обруча "А" относительно земли отлична от нуля. При этом на обруч будет действовать сила трения скольжения по модулю равная μN. Сила трения препятствует движению, следовательно, она направлена противоположно, то есть вправо.



Сначала колесо будет двигаться с проскальзыванием. Проскальзывание прекратится, когда суммарная скорость нижней точки обруча относительно земли будет равна нулю.

Эта скорость складывается из скорости поступательного движения обруча и скорости из-за вращательного движения. Скорость поступательного движения направлена вправо, а вращение происходит по часовой стрелке, следовательно для прекращения проскальывания модули скорости и ωR должны стать равными, т.е. $v(t) = \omega(t)R$. Поступательное движение обруча на этом этапе движения с проскальзыванием можно рассматривать как равноускоренное, то есть координата его центра будет меняться по закону

$$x(t) = x_0 - v_0 t + \frac{at^2}{2}. \tag{2}$$

Найдем ускорение обруча из второго закона Ньютона:

$$F_{\text{тр}} = ma \ \Rightarrow\ \mu mg = ma \ \Rightarrow a = \ \mu g. \tag{3}$$

Координата центра обруча с учетом (3):

$$x(t) = x_0 - v_0 t + \frac{\mu g t^2}{2}. \tag{4}$$

В момент времени $\tilde{t}$, при $v(\tilde{t}) = \omega(\tilde{t})R$ проскальзывание прекратится. Найдем этот момент времени. Скорость будет уменьшаться по модулю и с учетом (3)

$$v(\tilde{t}) = -v_0 + a\tilde{t} = -v_0 + \mu g\tilde{t}, \tag{5}$$

Угловая скорость будет уменьшаться

$$\omega(\tilde{t}) = \omega_0 + \beta\tilde{t}, \tag{6}$$

где β – угловое ускорение.

Запишем основное уравнение динамики твердого тела

$$I\beta = M, \tag{7}$$

I – момент инерции, *M* – момент силы (силы трения).

$$I\beta = -\mu mgR. \tag{8}$$

Обруч представляет собой тонкостенный цилиндр, тогда его момент инерции вдоль оси, проходящей через его ось равен $I = mR^2$.

Тогда

$$mR^2\beta = -\mu mgR. \tag{9}$$

Отсюда угловое ускорение

$$\beta = -\frac{\mu g}{R}. \tag{10}$$

Тогда (6) можно переписать как

$$\omega(\tilde{t}) = \omega_0 - \frac{\mu g}{R}\tilde{t}, \tag{11}$$

Приравниваем (6) и (11) и получаем

$$2\mu g\tilde{t} = \omega_0 R + v_0. \tag{12}$$

Тогда момент времени, в который проскальзывание прекратится

$$\tilde{t} = \frac{\omega_0 R + v_0}{2\mu g}. \tag{13}$$

Координата центра обруча в момент времени $\tilde{t}$

$$x(\tilde{t}) = x_0 - v_0\tilde{t} + \frac{\mu g \tilde{t}^2}{2} = x_0 - v_0\frac{\omega_0 R + v_0}{2\mu g} + \frac{\mu g}{2}\left(\frac{\omega_0 R + v_0}{2\mu g}\right)^2 = x_0 - v_0\frac{\omega_0 R + v_0}{2\mu g} + \frac{(\omega_0 R + v_0)^2}{8\mu g}. \tag{14}$$

Скорость центра обруча в момент времени $\tilde{t}$ (5) можно переписать

$$v(\tilde{t}) = -v_0 + \mu g\frac{\omega_0 R + v_0}{2\mu g} = -v_0 + \frac{\omega_0 R + v_0}{2} = \frac{\omega_0 R - v_0}{2}. \tag{15}$$

Т.к. по условию$\omega_0 R < v_0$, скорость обруча будет направлена влево ($v_0 < 0$)

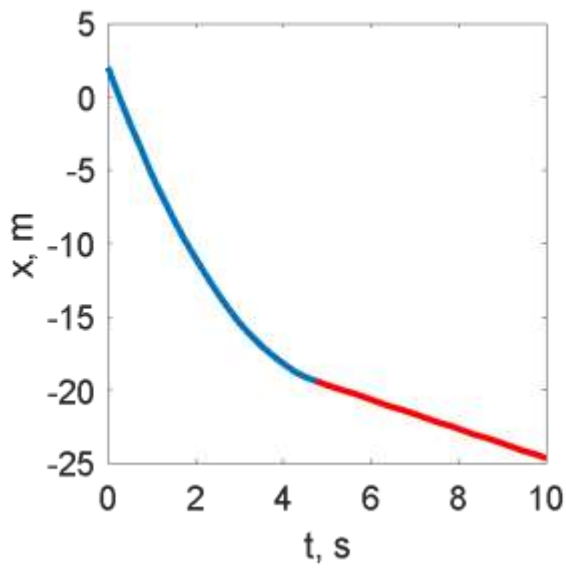
С момента $\tilde{t}$ проскальзывание прекратится и нижняя точка обруча “A” будет иметь нулевую скорость. Следовательно на обруч будет действовать сила трения покоя. Сила трения покоя может принимать значения от нуля до силы трения скольжения $0 \leq F_{\text{тр}} \leq \mu N$. Сила трения покоя компенсирует внешние силы. Т.к. на обруч не действуют внешние силы помимо силы трения покоя, она равна нулю и обруч будет двигаться равномерно

$$x(t) = x(\tilde{t}) + v(t - \tilde{t}) = x_0 - v_0\frac{\omega_0 R + v_0}{2\mu g} + \frac{(\omega_0 R + v_0)^2}{8\mu g} + \frac{\omega_0 R - v_0}{2}\left(t - \frac{\omega_0 R + v_0}{2\mu g}\right). \tag{16}$$

Тогда координата центра обруча меняется со временем следующим образом

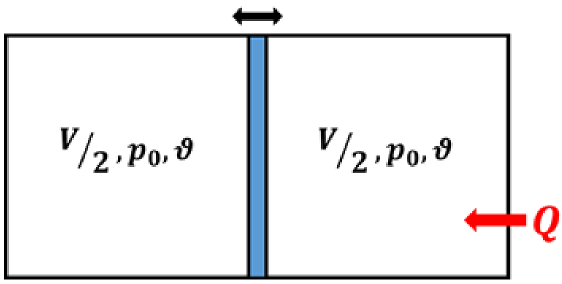
$$x(t) = \begin{cases} x_0 - v_0 t + \frac{\mu g t^2}{2} & \text{при } t < \frac{\omega_0 R + v_0}{2\mu g} \\ x_0 - v_0\frac{\omega_0 R + v_0}{2\mu g} + \frac{(\omega_0 R + v_0)^2}{8\mu g} & \text{при } t = \frac{\omega_0 R + v_0}{2\mu g} \\ x_0 - v_0\frac{\omega_0 R + v_0}{2\mu g} + \frac{(\omega_0 R + v_0)^2}{8\mu g} + \frac{\omega_0 R - v_0}{2}\left(t - \frac{\omega_0 R + v_0}{2\mu g}\right) & \text{при } t > \frac{\omega_0 R + v_0}{2\mu g} \end{cases}. \tag{17}$$

Тогда график зависимости x(t)



Задача 2

Цилиндрический сосуд объемом ***V***, запаянный с обоих концов, расположен горизонтально. Внутри сосуд герметично разделен на две одинаковые части невесомым тонким поршнем, способным двигаться вдоль него без трения. Внутри каждой части находится по ***ν*** моль идеального одноатомного газа при известном давлении p_0. Обе части теплоизолированы друг от друга, а сам сосуд теплоизолирован от внешней среды. Какое количество теплоты нужно сообщить в правую часть, чтобы объем левой уменьшился **в два раза**?



Примечание: процесс в теплоизолированной системе описывается уравнением адиабаты pV^γ **=const**, где ***p*** – давление газа, ***V*** – объем, $\gamma = C_p/C_v$ – показатель адиабаты (C_p и C_v – теплоемкости газа соответственно при постоянном давлении и объеме). Для одноатомного газа ***γ=5/3***.

Решение:

Передаваемое в правую часть тепло пойдет на нагрев газа в нем и на передвижение невесомого поршня (расширение газа):

$$Q = A + dU_1$$

Где A - работа, совершаемая газом в правой части над поршнем, dU_1 - изменение внутренней энергии газа в правой части.

Поскольку поршень невесомый, вся совершенная над ним работа пойдем на нагрев газа в левой части:

$$A = dU_2$$

Тогда все передаваемое в сосуд тепло пойдет на нагрев газа в обеих частях:

$$Q = dU_1 + dU_2 = \frac{3}{2}\eta R dT_1 + \frac{3}{2}\eta R dT_2 = \frac{3}{2}\eta R(dT_1 + dT_2)$$

где η - известное количество вещества в каждой части; dT_1, dT_2 - изменение температуры газа в правой и левой части, соответственно.

Давление газа в обеих частях сосуда всегда одинаковое. Обозначим через p_0 начальное давление газа в сосуде, p – конечное. Для каждой части сосуда записываем уравнение Менделеева-Клапейрона для начального и конечного состояния. Поскольку начальные объемы и количества вещества равны, то начальные температуры газа в обеих частях сосуда тоже одинаковые, и уравнение состояния идентично:

$$\frac{p_0 V}{2} = \nu R T_0$$

(T0 - начальная температура)

конечное состояние:

$$pV_1 = \nu R T_1$$

$$pV_2 = \nu R T_2$$

Математические преобразования:

Почленно вычитаем из каждого уравнения системы уравнение начального состояния:

$$pV_1 - \frac{p_0 V}{2} = \nu R T_1 - \nu R T_0 = \nu R dT_1$$

$$pV_2 - \frac{p_0 V}{2} = \nu R dT_2$$

Суммируем оба уравнения:

$$p(V_1 + V_2) - p_0 V = \nu R(dT_1 + dT_2)$$

Поскольку общий объем сосуда не меняется $V = V_1 + V_2$ получаем:

$$(p - p_0)V = \nu R(dT_1 + dT_2)$$

Используя ранее полученное для Q имеем:

$$Q = \frac{3}{2}(p - p_0)V$$

далее, поскольку левая часть теплоизолирована, то процесс сжатия газа в ней адиабатический. Записываем уравнение адиабаты:

$$pV^\gamma = const$$

($\gamma = 5/3$ – показатель адиабаты для одноатомного газа)

$$p_0 \left(\frac{V}{2}\right)^\gamma = p \left(\frac{V}{4}\right)^\gamma$$

$$p = p_0 2^\gamma$$

Подставляя в выражение для Q, получаем ответ:

$$Q = \frac{3}{2} p_0 (2^\gamma - 1)V$$

Ответ: $Q = \frac{3}{2} p_0 (2^\gamma - 1)V$

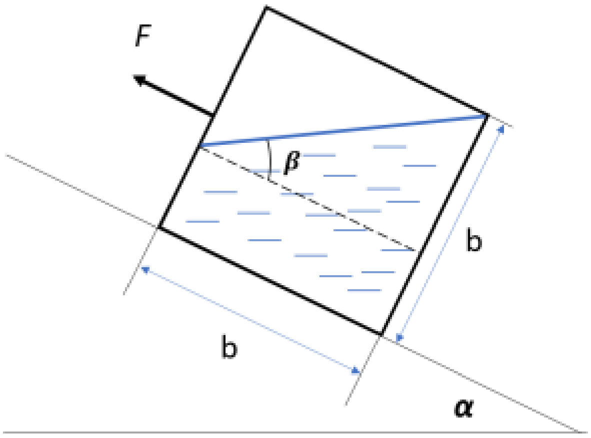
Задача 3

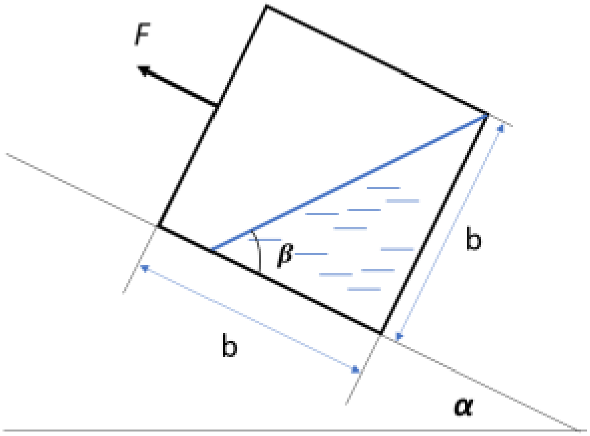
Кубический сосуд с длиной ребра ***b*** наполнен водой до уровня ***h<b/2***. Сосуд ставят на наклонную плоскость, угол наклона ***α*** которой может меняться, и начинают тянуть вверх по плоскости с силой, приложенной к середине боковой грани и постепенно увеличивающейся до значения ***F***. Определите минимальный угол наклона плоскости ***α***, при котором вода начнет переливаться через край сосуда. Массой пустого сосуда и трением пренебречь.

Решение

По условию кубический сосуд кубический сосуд с длиной ребра b наполнен водой до уровня h. Под действием силы F сосуд будет двигаться равноускоренно, и поверхность воды будет отклоняться от горизонтали и от наклонной плоскости, и вода переливается через его край, дальний по направлению движения. Обозначим угол отклонения поверхности воды от наклонной плоскости как β**.** Угол β зависит от объема воды в сосуде и ускорения, с которым он движется. В общем угол может меняться в диапазоне от 0 (внешняя сила отсутствует, сосуд заполнен полностью и скользит вниз под действием силы тяжести, тогда плоскость воды параллельна наклонной плоскости, и $\beta = \alpha$**)** до 90 (сосуд почти пуст, ускорение очень велико).

В зависимости от значения h возможны два сценария, изображенные на рисунках:





Поскольку сосуд имеет кубическую форму, то первый случай (левая картинка) реализуется, когда угол β меняется в диапазоне от 0 до 45 градусов, что соответствует случаю, когда сосуд изначально заполнен больше, чем наполовину ($h > b/2$). В этом случае объем воды в сосуде имеет трапецевидную форму. Второй случай (правая картинка) реализуется, когда угол β меняется в диапазоне от 45 до 90 градусов, что соответствует случаю, когда сосуд изначально заполнен меньше, чем наполовину ($h < b/2$). Он нас и интересует по условию задачи.

Объем воды в сосуде в таком случае будет равен:

$$V = \frac{b^2 x}{2} = \frac{b^3}{2tg\beta}$$

Где $x = b/tg\beta$ – катет, параллельный наклонной плоскости. Поскольку вода еще не вылилась из сосуда, ее объем равен исходному:

$$V = hb^2$$

Приравниваем:

$$\frac{b}{2tg\beta} = h, tg\beta = \frac{b}{2h}$$

С другой стороны, угол β определяется ускорением, с которым движется сосуд.

Под действием силы F сосуд будет двигаться равноускоренно:

$$ma = -mgsin\alpha + F$$

$$a = -gsin\alpha + F/m$$

Где $m = \rho ab^2$ – масса воды в сосуде (ρ – плотность воды). Рассмотрим малый элемент воды массой Δm у поверхности. В неинерциальной системе отсчета, связанной с сосудом, элемент покоится, на него будут действовать сила тяжести, сила реакции опоры и сила инерции:

$$0 = -\Delta ma - \Delta mgsin\alpha + Nsin\beta$$

$$Ncos\beta = \Delta mgcos\alpha$$

Т.о.

$$a = -gsin\alpha + gcos\alpha tg\beta$$

Подставим ранее полученное выражение для ускорения:

$$\frac{F}{m} - gsin\alpha = -gsin\alpha + gcos\alpha tg\beta$$

$$F = mgcos\alpha tg\beta$$

$$tg\beta = \frac{F}{mgcos\alpha}, cos\,\alpha = \frac{F}{mg\,tg\beta}$$

$$cos\,\alpha = \frac{2hF}{mgb}$$

Ответ:

$$\alpha = arccos\left(\frac{2aF}{mgb}\right)$$

Задача 4

В закрытом сосуде площадью основания ***S***, частично заполненном жидкостью плотностью ***ρ***, находится тело, имеющее форму прямоугольного параллелепипеда, прикрепленное к верхнему и нижнему основаниям сосуда с помощью пружин. Высота тела – ***H***, плотность – $\boldsymbol{\rho_m}$, площадь основания – ***S/2***.Известно, что жесткость верхней пружины в **n раз больше** жесткости нижней. В состоянии равновесия тело погружено в жидкость на глубину $\mathbf{h_0<H}$, его основание ориентировано параллельно границе жидкости, а верхняя и нижняя пружины растянута на $\boldsymbol{\Delta y_{10}}$ и $\boldsymbol{\Delta y_{20}}$, соответственно. Определите частоту малых колебаний тела, возникающих при выведении его из равновесия слабым толчком по его верхней грани. Тело всегда остается частично погруженным в жидкость, а его ориентация при колебаниях остается неизменной. Скорости движения тела и жидкости в любой момент времени считайте малыми. Вязкостью жидкости пренебрегите.

Решение:

Пусть S_0- полщадь основания тела.

2-й закон Ньютона для тела в жидкости (по условию жесткость верхней пружины k_1=nk_2):

$$ma = mg - nk\Delta y_1 + k\Delta y_2 - \rho g S_0 h$$

Находим жесткость пружины из уравнения для положения равновесия

$$mg = nk\Delta y_{10} - k\Delta y_{20} + \rho g S_0 h_0$$

$$k = \frac{gS_0(\rho_{\text{т}}H - \rho h_0)}{n\Delta y_{10} - \Delta y_{20}}$$

Пусть тело смещается из положения равновесия на y (допустим, вниз). Изменение объема погруженной части тела должен учитывать подъем уровня жидкости $y_{\text{ж}1}$:

$$\Delta V = S_0(y + y_{\text{ж}1})$$

При этом:

$$S_0(y + y_{\text{ж}1}) = Sy_{\text{ж}1}$$

$$\Delta V = \frac{SS_0}{S - S_0}y$$

При смещении из положения равновесия, например, вниз, поскольку изначально пружины растянуты, то сила Архимеда будет увеличиваться, сила упругости нижней пружины – уменьшаться, верхней – увеличиваться. Записываем уравнение движения (y – смещение из положения равновесия):

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -\rho g\Delta V - nky - ky = -\rho g\frac{SS_0}{S - S_0}y - k(n+1)y$$

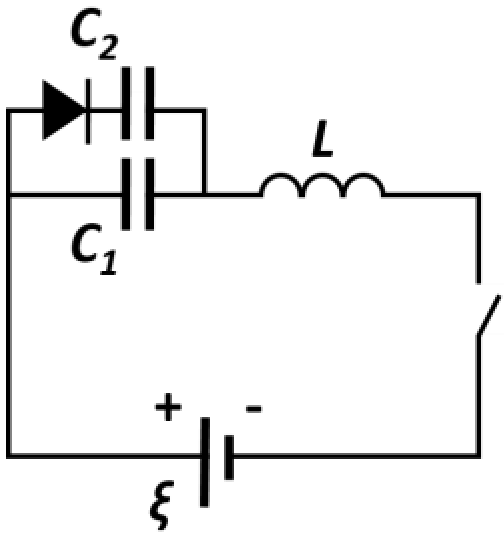
Получаем уравнение колебаний:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\rho g\frac{SS_0}{S - S_0} + k(n+1)\right)y = 0$$

$$w = \sqrt{\frac{g}{\rho_{\text{т}} H}\left(2\rho + (n+1)\frac{(\rho_{\text{т}} H - \rho h_0)}{n\Delta y_{10} - \Delta y_{20}}\right)}$$

Задача 5

Источник ЭДС в **1В**, два конденсатора емкостями **1 и 3 мкФ**, катушка индуктивностью **1 мкГн**, ключ и диод соединены в цепь, как показано на рисунке. Вначале ключ разомкнут, конденсаторы не заряжены. Диод имеет нулевое сопротивление при протекании тока в направлении по стрелке диода и не пропускает ток в противоположную сторону. В какой-то момент ключ замыкают. Определите заряды конденсаторов и ток в цепи через время **$t=5/2\ \pi\cdot 10^{-6}$ секунд** после замыкания ключа. Внутреннее сопротивление источника равно 0.



Решение:

После замыкания ключа ток потечет через оба конденсатора. Заряды на конденсаторах:

$$q_1 = C_1 \Delta U_C, q_2 = C_2 \Delta U_C$$

Два конденсатора можно заменить одним с зарядом:

$$q = q_1 + q_2 = (C_1 + C_2)\Delta U_C$$

По правилу Кирхгофа для замкнутого контура имеем:

$$\Delta U_L + \Delta U_C = \xi$$

$$L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C_1 + C_2} = \xi$$

Получаем дифференциальное уравнение на колебания заряда конденсатора:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q}{L(C_1 + C_2)} = \frac{\xi}{L_1}$$

В цепи начнутся колебания с частотой

$$w_1 = \sqrt{\frac{1}{L(C_1 + C_2)}} = \frac{1}{2} * 10^6 \text{ Гц}$$

Решение:

$$q(t) = A_1 cos(w_1 t) + B_1 sin(w_1 t) + C\xi$$

Вначале конденсаторы разряжены:

$$q(0) = A_1 + (C_1 + C_2)\xi = 0, A_1 = -(C_1 + C_2)\xi$$

И тока нет:

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = (C_1 + C_2)\xi w_1 sin(w_1 t) + B_1 w_1 cos(w_1 t)$$

$$i(0) = B_1 = 0$$

Тогда:

$$q(t) = \xi(C_1 + C_2)(1 - cos(w_1 t))$$

$$i(t) = \xi w_1 (C_1 + C_2) sin(w_1 t)$$

После первого полупериода $\frac{T_1}{2} = \frac{\pi}{w_1}$ ток начинает течь в противоположную сторону. Диод запирает конденсатор C_2. В этот момент суммарный заряд на конденсаторах и на каждом в отдельности будет:

$$q\left(\frac{T_1}{2}\right) = \xi(C_1 + C_2)\big(1 - cos(\pi)\big) = 2(C_1 + C_2)\xi$$

$$q_1\left(\frac{T_1}{2}\right) = 2C_1\xi$$

$$q_2\left(\frac{T_1}{2}\right) = 2C_2\xi$$

Заряд второго конденсатора с этого момента меняться не будет.

$$i\left(\frac{T_1}{2}\right) = \xi(C_1 + C_2) w_1 sin(\pi) = 0$$

После этого ток потечет в обратную сторону через конденсатор C_1, и начнутся колебания с другой частотой (теперь смотрим заряд только на первом конденсаторе):

$$\frac{d^2 q_1}{dt^2} + \frac{q_1}{LC_1} = \frac{\xi}{L_1}$$

$$w_2 = \sqrt{\frac{1}{LC_1}} = 10^6 \text{Гц}$$

Решение:

$$q_1(t) = A_2 cos(w_2 t') + B_2 sin(w_2 t') + C\xi$$

Для удобства вводим время $t' = t - \frac{T_1}{2}$ (отсчитываем от момента «переключения»).

Подставляем начальные условия:

$$q_1(t' = 0) = A + C_1\xi = 2C_1\xi, A = C_1\xi$$

$$i(t' = 0) = Bw_2 = 0$$

Тогда:

$$q_1(t) = C_1\xi(1 + cos\left(w_2(t - \frac{\pi}{w_1}\right))$$

$$i(t) = -C_1\xi w_2 sin\left(w_2(t - \frac{\pi}{w_1}\right)$$

В задаче просят найти ток и заряд конденсатора в момент времени $t^* = \frac{5}{2}\pi * 10^{-6}$. Определим, в какой из полупериодов он попадает.

$$\frac{T_1}{2} = \frac{\pi}{w_1} = 2\pi * 10^{-6}\ \text{с}$$

$$\frac{T_2}{2} = \frac{\pi}{w_2} = \pi * 10^{-6}\ \text{с}$$

Попадает во второй полупериод. Подставляем время в выражения для заряда конденсатора и тока:

$$q_1(t^*) = C_1\xi\left(1 + cos\left(10^6(\frac{5}{2}\pi * 10^{-6} - 2\pi * 10^{-6}\right)\right) = C_1\xi = 10^{-6}\text{Кл}$$

$$q_2(t^*) = 2C_2\xi = 6 * 10^{-6}\text{Кл}$$

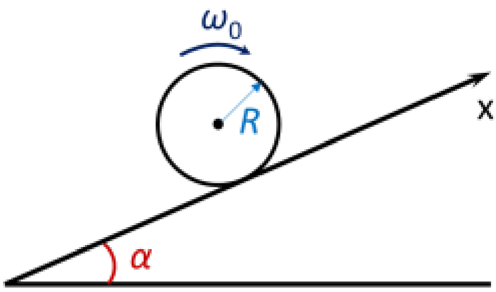
$$i(t) = -C_1\xi w_2 sin\left(10^6(\frac{5}{2}\pi * 10^{-6} - 2\pi * 10^{-6}\right) = -C_1\xi w_2 = -1\text{А}$$

Ответ: 1 мкКл, 6 мкКл, -1 А.

11 класс Вариант 4

Задача 1

Тонкий обруч радиусом $\boldsymbol{R}$ раскрутили до угловой скорости $\boldsymbol{\omega_0}$, а затем поставили на бесконечную наклонную плоскость с углом наклона $\boldsymbol{\alpha}$, как показано на рисунке. Коэффициент трения между наклонной плоскостью и обручем равен $\boldsymbol{\mu}$, причем $\boldsymbol{\mu>tg\alpha}$. Постройте график зависимости координаты центра обруча относительно оси x от времени.



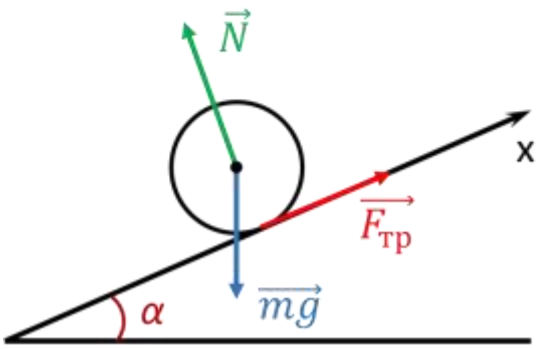
Примечание: Угловое ускорение **β** связано с моментом приложенных сил соотношением: $\boldsymbol{I\beta = M}$, где $\boldsymbol{I}$ – момент инерции тела относительно оси вращения, $\boldsymbol{M}$ – момент внешних сил. Для обруча, вращающегося вокруг своей оси $\boldsymbol{I=mR^2}$.

Решение

Скорость нижней точки обруча в начальный момент времени равна

$$v_0^{\text{нижн}} = \omega_0 R \tag{1}$$

И направлена вдоль наклонной плоскости вниз. Сперва обруч будет двигаться с проскальзыванием, т.к. скорость точки обруча “А” относительно земли отлична от нуля. При этом на обруч будет действовать сила трения скольжения по модулю равная μN. Сила трения скольжения направлена противоположно направлению скорости контактирующей с поверхностью точки тела, то есть вдоль наклонной плоскости вверх. Нарисуем силы, действующие на обруч.



Проскальзывание прекратится, когда суммарная скорость нижней точки обруча относительно земли будет равна нулю. Эта скорость складывается из скорости поступательного движения обруча и скорости из-за вращательного движения. Скорость поступательного движения направлена вправо, а вращение происходит по часовой стрелке, следовательно для прекращения проскальывания модули скорости и ωR должны стать равными, т.е. $v(t) = \omega(t)R$. До этого времени обруч будет подниматься по наклонной плоскости с проскальзыванием.

Поступательное движение обруча на этом этапе движения с проскальзыванием можно рассматривать как равноускоренное, то есть координата его центра будет меняться по закону

$$x(t) = x_0 + \frac{at^2}{2}. \qquad (2)$$

Найдем ускорение обруча из второго закона Ньютона:

$$F_{\text{тр}} - mg \cdot sin\alpha = ma \Rightarrow \mu mg \cdot cos\alpha - mg \cdot sin\alpha = ma \Rightarrow a = g(\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha). \qquad (3)$$

Координата центра обруча с учетом (3):

$$x(t) = x_0 + \frac{gt^2}{2}(\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha). \qquad (4)$$

В момент времени $\tilde{t}$, при $v(\tilde{t}) = \omega(\tilde{t})R$ проскальзывание прекратится. Найдем этот момент времени. Скорость будет увеличиваться и с учетом (3)

$$v(\tilde{t}) = a\tilde{t} = g\tilde{t}(\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha), \qquad (5)$$

Угловая скорость будет меняться

$$\omega(\tilde{t}) = \omega_0 + \beta\tilde{t}, \qquad (6)$$

где *β* – угловое ускорение.

Запишем основное уравнение динамики твердого тела

$$I\beta = M, \qquad (7)$$

I – момент инерции, *M* – момент силы (силы трения).

$$I\beta = -\mu mg \cdot cos\alpha \cdot R. \qquad (8)$$

Обруч представляет собой тонкостенный цилиндр, тогда его момент инерции вдоль оси, проходящей через его ось равен $I = mR^2$.

Тогда

$$mR^2\beta = -\mu mg \cdot cos\alpha \cdot R. \qquad (9)$$

Отсюда угловое ускорение

$$\beta = -\frac{\mu g \cdot cos\alpha}{R}. \qquad (10)$$

Тогда (6) можно переписать как

$$\omega(\tilde{t}) = \omega_0 - \frac{\mu g \cdot cos\alpha}{R}\tilde{t}, \qquad (11)$$

Приравниваем (5) и (11) и получаем

$$g\tilde{t}(\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha) = (\omega_0 - \frac{\mu g \cdot cos\alpha}{R}\tilde{t})R. \qquad (12)$$

Тогда момент времени, в который проскальзывание прекратится

$$\tilde{t} = \frac{\omega_0 R}{g(2\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha)}. \quad (13)$$

Координата центра обруча в момент времени $\tilde{t}$

$$x(\tilde{t}) = x_0 + \frac{a\tilde{t}^2}{2} = x_0 + \frac{\omega_0^2 \cdot R^2}{2g} \cdot \frac{\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha}{(2\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha)^2}. \quad (14)$$

Скорость центра обруча в момент времени $\tilde{t}$ (5) можно переписать

$$v(\tilde{t}) = (\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha) \cdot \frac{\omega_0 R}{(2\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha)}. \quad (15)$$

Заметим, что скорость положительна, т.е. обруч продолжит кататься вверх по наклонной плоскости.
При $t > \tilde{t}$ проскальзывание прекратится и обруч начнет по инерции катиться по наклонной плоскости при этом на него будет действовать сила трения покоя ($F_{\text{тр,п}} \leq F_{\text{тр.ск}}$). Найдем модуль этой силы. Для этого запишем второй закон Ньютона

$$F_{\text{тр,п}} - mg \cdot sin\alpha = ma \ \Rightarrow a = \ -g \cdot sin\alpha + \frac{F_{\text{тр,п}}}{m}. \quad (16)$$

Основное уравнение динамики твердого тела

$$I\beta = -F_{\text{тр,п}} R. \quad (17)$$

Отсюда угловое ускорение

$$\beta = \frac{-F_{\text{тр,п}} R}{I} = \frac{-F_{\text{тр,п}} R}{mR^2} = -\frac{F_{\text{тр,п}}}{mR}. \quad (18)$$

При движении без проскальзывания т.к. нижняя точка обруча покоится, ускорение нижней точки обруча также (как и скорость этой точки) должно быть равно нулю, следовательно, модули ускорения и углового ускорения обруча должны быть равны:$a = \beta R$. Тогда

$$-\frac{F_{\text{тр,п}}}{m} = \ -g \cdot sin\alpha + \frac{F_{\text{тр,п}}}{m}. \quad (19)$$

Отсюда модуль силы трения покоя

$$F_{\text{тр,п}} = \ \frac{mg \cdot sin\alpha}{2}. \quad (20)$$

И окончательно ускорение можно переписать как

$$a = -\frac{F_{\text{тр,п}}}{m} = \ -\frac{g \cdot sin\alpha}{2}. \quad (21)$$

Тогда скорость движения обруча при $t > \tilde{t}$

$$v(t) = \tilde{v} + a(t - \tilde{t}) = \ g(\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha) \cdot \frac{\omega_0 R}{g(2\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha)} - \frac{g \cdot sin\alpha}{2}\left(t - \frac{\omega_0 R}{g(2\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha)}\right). \quad (22)$$

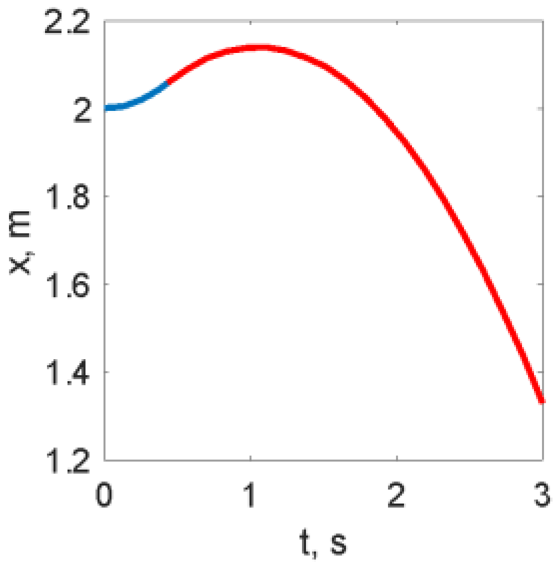
И координата центра обруча

$$x(t) = \tilde{x} + \tilde{v}(t-\tilde{t}) + \frac{a(t-\tilde{t})^2}{2} = x_0 + \frac{\omega_0^2 \cdot R^2}{2g} \cdot \frac{\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha}{(2\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha)^2} +$$
$$+(\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha) \cdot \frac{\omega_0 R}{(2\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha)} \cdot \left(t - \frac{\omega_0 R}{g(2\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha)}\right) - \qquad (23)$$
$$\frac{g \cdot sin\alpha}{4}\left(t - \frac{\omega_0 R}{g(2\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha)}\right)^2.$$

Заметим, что т.к. ускорение обруча отрицательно(направлено вниз по наклонной плоскости), то в некоторый момент времени обруч развернутся и станет катиться вниз по наклонной плоскости.
Тогда координата центра обруча меняется со временем следующим образом

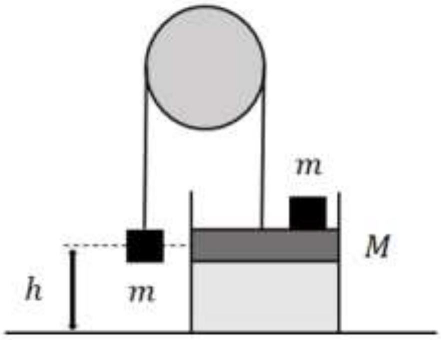
$$x(t) = \{x_0 + \frac{gt^2}{2}(\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha) \text{ при } t \le \frac{\omega_0 R}{g(2\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha)} \; x_0 + \frac{\omega_0^2 \cdot R^2}{2}$$
$$\frac{\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha}{(2\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha)^2} + (\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha)\frac{\omega_0 R}{(2\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha)}\left(t - \frac{\omega_0 R}{g(2\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha)}\right) - \frac{g \cdot sin\alpha}{4}\left(t - \right. \qquad (24)$$
$$\omega 0Rg(2\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha)2 \text{ при } t > \omega 0Rg(2\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha)\ \}.$$

Тогда график зависимости x(t)



Задача 2

Сосуд с идеальным газом закрыт тонким поршнем массой ***M***. Сосуд теплоизолирован от внешней среды. Поршень смазан и способен двигаться вдоль сосуда с вязким трением, величина которого пропорциональна скорости движения. Вся энергия от трения переходит на нагрев газа в сосуде. К поршню прикреплена веревка, перекинутая через блок. К другому концу веревки прикреплен груз массой ***m=M/3***. Груз и поршень изначально находились на одном уровне над землей $\boldsymbol{h_0}$. На поршень ставят такой же груз, дожидаются установления равновесия, и затем убирают. Определите, на сколько в результате сместился груз на веревке относительно земли. Размерами грузов и толщиной поршня пренебрегите. Вся конструкция находится в вакууме. Трением в оси блока пренебречь. В процессе перемещения левый груз не касается земли.



Решение:

Изначально поршень и груз находятся в равновесии на высоте h над землей. Т. к. поршень в равновесии, а трение вязкое, то давления на поршень сверху и снизу равны:

$$\frac{Mg}{S} - \frac{mg}{S} - p_0 = 0,$$

$$p_0 = (M - m)\frac{g}{S} = \frac{2mg}{S}$$

($M = 3m, p_0$ - начальное давление газа в сосуде)

Из уравнения Менделеева-Клапейрона для начальной температуры газа в сосуде имеем:

$$p_0 h_0 S = \eta R T_0,$$

$$T_0 = \frac{p_0 h_0 S}{\nu R} = \frac{2mgh_0}{\nu R}$$

Далее, на поршень ставят груз массой m. В результате поршень с грузом опускаются, и начинаются затухающие колебания. Новое положение равновесия смещено на dh_1 вниз. Находим новое давление и температуру:

$$\frac{(M+m-m)g}{S} - p_1 = 0,$$

$$p_1 = \frac{Mg}{S} = \frac{3mg}{S},$$

$$T_1 = \frac{3mg(h_0 - dh_1)}{\nu R}$$

Поскольку вся энергия от трения идет в газ, то в целом энергия не покидает систему блоки+газ, и можно записать закон сохранения энергии (потенциальная энергия двух грузов и поршня+внутренняя энергия газа):

$$(m+m+3m)gh_0 + 3/2\eta RT_0 = mg(h_0 + dh_1) + (m+3m)g(h_0 - h_1) + \frac{3}{2}\nu RT_1$$

$$3mgdh_1 = \frac{3}{2}\nu R(T_1 - T_0) = \frac{3}{2}mg(3(h_0 - dh_1) - 2h_0)$$

$$3dh_1 = 3/2h_0 - 9/2dh_1$$

$$dh_1 = h_0/5$$

Тогда

$$T_1 = \frac{12mgh_0}{5\nu R}$$

Затем груз с поршня убирают, и он поднимается. Возникающие колебания так же затухают, и новое положение равновесия расположено на dh_2 выше предыдущего уровня.

Поскольку система теперь состоит из тех же блоков, что и вначале, то давление газа в сосуде то же самое:

$$p_0 = \frac{2mg}{S}$$

Температура при этом другая:

$$T_2 = p_0\frac{(h_0 - dh_1 + dh_2)S}{\nu R} = \frac{2mg\left(\frac{4}{5}h_0 + dh_2\right)}{\nu R}$$

Записываем закон сохранения энергии (потенциальная энергия груза и поршня+внутренняя энергия газа):

$$mg(h_0 + dh_1) + 3mg(h_0 - dh_1) + \frac{3}{2}\nu RT_1$$
$$= mg(h_0 + dh_1 - dh_2) + 3mg(h_0 - dh_1 + dh_2) + \frac{3}{2}\nu RT_2$$

$$\frac{3}{2}\eta R(T_1 - T_2) = 2mgdh_2$$

$$\frac{3}{2}2mg(-\frac{4}{5}h_0 - dh_2 + \frac{6}{5}h_0) = 3mg(-dh_2 + \frac{2}{5}h_0) = 2mgdh_2$$

$$-3dh_2 + \frac{6}{5}h_0 = 2dh_2$$

$$dh_2 = \frac{6}{25}h_0$$

тогда, если начальное положение груза на веревке – h_0, то конечное $h_0 + \frac{h_0}{5} - \frac{6}{25}h_0 = \frac{24}{25}h_0$

Ответ: опустилась на $\frac{1}{25}h_0$

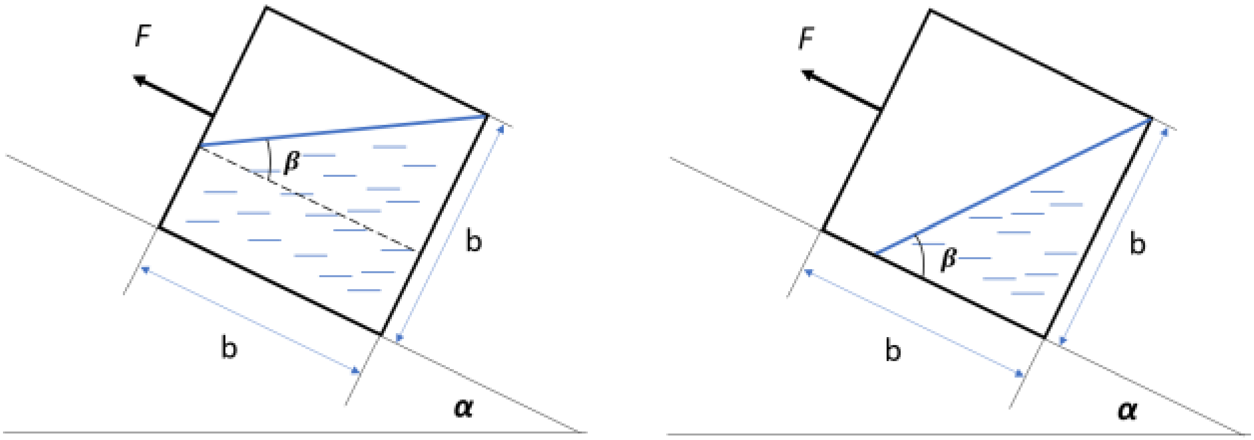
Задача 3

Кубический сосуд с длиной ребра ***b*** наполнен водой до уровня ***h>b/2***. Сосуд ставят на наклонную плоскость, угол наклона ***α*** которой может меняться, и начинают тянуть вверх по плоскости с силой, приложенной к середине боковой грани и постепенно увеличивающейся до значения ***F***. Определите минимальный угол наклона плоскости ***α***, при котором вода начнет переливаться через край сосуда. Массой пустого сосуда и трением пренебречь.

Решение

По условию кубический сосуд кубический сосуд с длиной ребра b наполнен водой до уровня h. Под действием силы F сосуд будет двигаться равноускоренно, и поверхность воды будет отклоняться от горизонтали и от наклонной плоскости, и вода переливается через его край, дальний по направлению движения. Обозначим угол отклонения поверхности воды от наклонной плоскости как β**.** Угол β зависит от объема воды в сосуде и ускорения, с которым он движется. В общем угол может меняться в диапазоне от 0 (внешняя сила отсутствует, сосуд заполнен полностью и скользит вниз под действием силы тяжести, тогда плоскость воды параллельна наклонной плоскости, и $\beta = \alpha$**)** до 90 (сосуд почти пуст, ускорение очень велико).

В зависимости от значения h возможны два сценария, изображенные на рисунках:



Поскольку сосуд имеет кубическую форму, то первый случай (левая картинка) реализуется, когда угол β меняется в диапазоне от 0 до 45 градусов, что соответствует случаю, когда сосуд изначально заполнен больше, чем наполовину ($h > b/2$). В этом случае объем воды в сосуде имеет трапецевидную форму. Второй случай (правая картинка) реализуется, когда угол β меняется в диапазоне от 45 до 90 градусов, что соответствует случаю, когда сосуд изначально заполнен меньше, чем наполовину ($h < b/2$). По условию нас интересует первый случай.

Пусть l – разница уровней воды между левой и правой стенками сосуда. Т.к. в условии сказано, что вода начнет переливаться через край, уровень воды справа будет равен b. В таком случае уровень воды слева будет равен $b - l$. Разница уровней воды l связана с углом β как:

$$l = b\ tg\beta$$

Объем воды в сосуде в таком случае будет равен:

$$V = \frac{(b + b - l)}{2} b \cdot b = b^3 - \frac{1}{2} l b^2 = b^3 \left(1 - \frac{1}{2} tg\beta\right)$$

Поскольку вода еще не вылилась из сосуда, ее объем равен исходному:

$$V = hb^2$$

Приравниваем:

$$b^3 \left(1 - \frac{1}{2} tg\beta\right) = hb^2$$

$$b \left(1 - \frac{1}{2} tg\beta\right) = h$$

$$tg\beta = 2\left(1 - \frac{h}{b}\right)$$

С другой стороны, угол β определяется ускорением, с которым движется сосуд.

Под действием силы F сосуд будет двигаться равноускоренно:

$$ma = -mgsin\alpha + F$$

$$a = -gsin\alpha + F/m$$

Где $m = \rho a b^2$ – масса воды в сосуде (ρ – плотность воды). Рассмотрим малый элемент воды массой Δm у поверхности. В неинерциальной системе отсчета, связанной с сосудом, элемент покоится, на него будут действовать сила тяжести, сила реакции опоры и сила инерции:

$$0 = -\Delta m a - \Delta m g sin\alpha + N sin\beta$$

$$N cos\beta = \Delta m g cos\alpha$$

Т.о.

$$a = -gsin\alpha + gcos\alpha tg\beta$$

Подставим ранее полученное выражение для ускорения:

$$\frac{F}{m} - gsin\alpha = -gsin\alpha + gcos\alpha tg\beta$$

$$F = mgcos\alpha tg\beta$$

$$tg\beta = \frac{F}{mgcos\alpha}, \cos\alpha = \frac{F}{mg\, tg\beta}$$

$$cos\alpha = \frac{F}{2mg\left(1 - \frac{h}{b}\right)}$$

Ответ: $\alpha = arccos\left(\frac{F}{2mg\left(1 - \frac{a}{b}\right)}\right)$

Задача 4

В бассейне, заполненном жидкостью плотностью $\boldsymbol{\rho}$, находится тело, имеющее форму цилиндра, прикрепленное пружиной ко дну бассейна. Высота тела – $\boldsymbol{H}$, плотность – $\boldsymbol{\rho_m}$, площадь основания много меньше площади бассейна. В состоянии равновесия тело погружено в жидкость на глубину $\boldsymbol{h_0<H}$, а пружина растянута на величину $\boldsymbol{\Delta y_0}$. Тело выводят из состояния равновесия слабым толчком по верхней грани. В результате в бассейне начинают распространяться кольцевые волны со скоростью $\boldsymbol{v}$. Найдите расстояние между гребнями волн. Тело всегда остается частично погруженным в жидкость, а его ориентация при колебаниях остается неизменной. Скорости движения тела и жидкости в любой момент времени считайте малыми. Вязкостью жидкости пренебрегите.

Решение:

2-й закон Ньютона для тела в жидкости:

$$ma = mg + k\Delta y - \rho g S h,$$

где S- площадь основания тела.

Находим жесткость пружины из уравнения для положения равновесия

$$mg = -k\Delta y_0 + \rho g S h_0$$

$$k = gS(-\rho_{\text{т}} H + \rho h_0)/\Delta y_0$$

При смещении из положения равновесия вниз, поскольку изначально пружина, которой тело прикреплено ко дну сосуда, растянута, то сила Архимеда будет увеличиваться, а сила упругости – уменьшаться. Записываем уравнение движения (y – смещение из положения равновесия):

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -\rho g \Delta V - ky \ = -\rho g S y - \frac{gS(-\rho_{\text{т}} H + \rho h_0)}{\Delta y_0} y$$

Находим частоту колебаний:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{g}{\rho_{\text{т}} H}\left(\rho + \frac{(-\rho_{\text{т}} H + \rho h_0)}{\Delta y_0}\right) y = 0$$

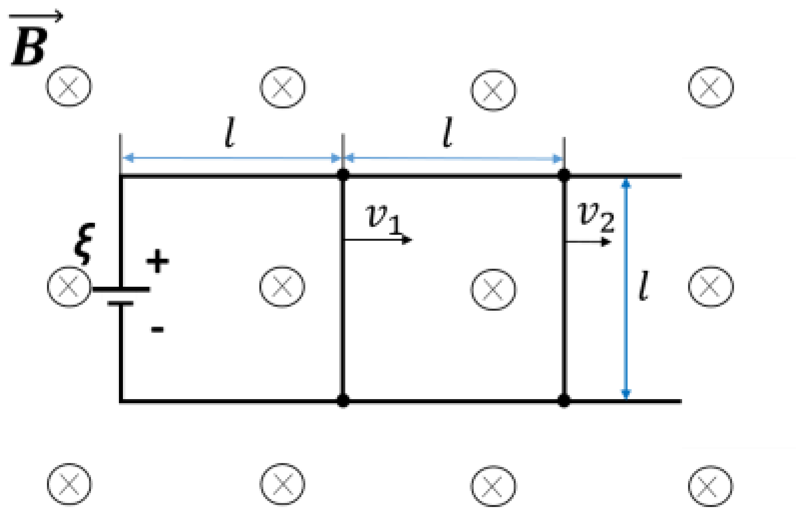
$$w = \sqrt{\frac{g}{\rho_{\text{т}} H}\left(\rho + \frac{(-\rho_{\text{т}} H + \rho h_0)}{\Delta y_0}\right)}$$

$$\omega = 2\pi v/\lambda$$

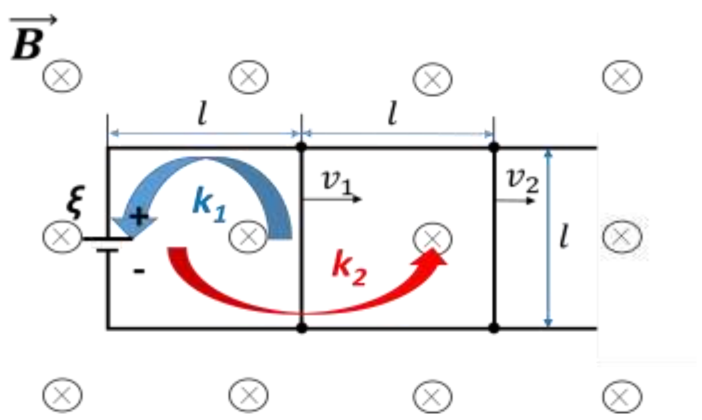
$$\lambda = \frac{2\pi v}{w} = 2\pi v \left(\sqrt{\frac{g}{\rho_{\text{т}} H}\left(\rho + \frac{(-\rho_{\text{т}} H + \rho h_0)}{\Delta y_0}\right)}\right)^{-1}$$

Задача 5

На проводящих рельсах расположены две подвижные проводящие перемычки. Рельсы с перемычками находятся в постоянном однородном магнитном поле ***B***, ориентированном как показано на рисунке. Рельсы с левого конца соединены такой же неподвижной перемычкой с источником постоянной ЭДС **ξ**. Подвижные перемычки двигают вдоль рельс с постоянными скоростями v_1 и v_2. Определите силы, действующие на перемычки в тот момент, когда первая из них находится на расстоянии ***l*** от левого края контура, а вторая - на расстоянии ***2l***? Рельсы и перемычки изготовлены из проводов одинакового материала с удельным сопротивлением ***ρ*** и площадью поперечного сечения ***S***. Внутреннее сопротивление источника равно 0. ЭДС самоиндукции пренебречь.



Решение:

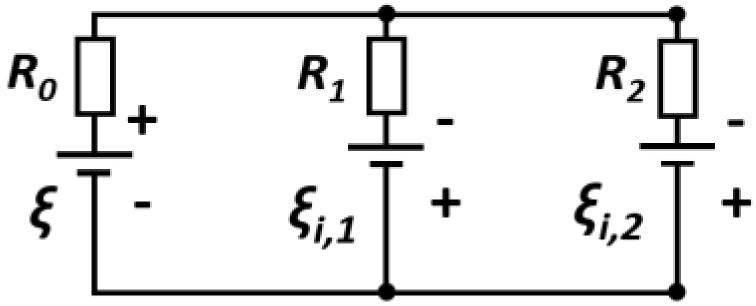


Каждая из перемычек, замыкающая рельсы, образует контур с дополнительной ЭДС индукции.

$$\xi_{i,1} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(BS)}{dt} = -Bl\frac{dx_1}{dt} = -Blv_1$$

$$\xi_{i,2} = -Blv_2$$

Согласно направлению магнитного поля и правилу левой руки, эдс индукции в обоих обмотках стремится породить ток, направленный в сторону, противоположную направлению ЭДС источника. Тогда можно рассматривать эквивалентную схему:



Сопротивления R_0, R_1, R_2 определяются длинной проводов:

$$R_0 = 3\lambda l, R_1 = \lambda l, R_2 = 3\lambda l$$

Где $\lambda = \rho/S$, ρ и S даны по условию

Записываем правила Кирхгофа:

$$\{IR_0 + I_1R_1 = \xi - \left|\xi_{i,1}\right|;\ IR_0 + I_2R_2 = \xi - \left|\xi_{i,2}\right|;\ I = I_1 + I_2$$

$$\{3\lambda lI + \lambda lI_1 = \xi - Bv_1l;\ 3\lambda lI + 3\lambda l(I - I_1) = \xi - Bv_2l$$

$$\{3I + I_1 = \frac{\xi - Bv_1l}{\lambda l};\ 6I - 3I_1 = \frac{\xi - Bv_2l}{\lambda l}$$

$$5I_1 = \frac{\xi - 2Bv_1l + Bv_2l}{\lambda l}$$

Выражение для I_1:

$$I_1 = \frac{\xi}{5\lambda l} + \frac{B}{5\lambda}(-2v_1 + v_2)$$

Далее:

$$3I = \frac{\xi - Bv_1l}{\lambda l} - \frac{\xi}{5\lambda l} - \frac{B}{5\lambda}(-2v_1 + v_2)$$

$$3I = \frac{4\xi}{5\lambda l} - \frac{Bv_1l}{\lambda l} - \frac{B}{5\lambda}(-2v_1 + v_2)$$

$$I = \frac{4\xi}{15\lambda l} - \frac{B}{15\lambda}(3v_1 + v_2)$$

Далее, находим I_2:

$$I_2 = I - I_1 = \frac{\xi}{15\lambda l} + \frac{B}{15\lambda}(3v_1 - 4v_2)$$

Силы Ампера, действующие на провода:

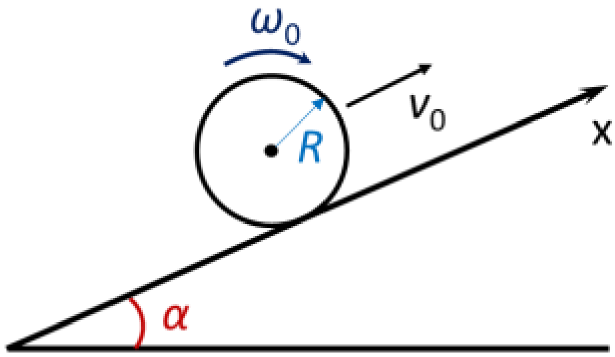
$$F_1 = I_1Bl = \frac{\xi B}{5\lambda} + \frac{B^2l}{5\lambda}(-2v_1 + v_2)$$

$$F_2 = I_2Bl = \frac{\xi B}{15\lambda} + \frac{B^2l}{15\lambda}(3v_1 - 4v_2)$$

11 класс Вариант 5

Задача 1

Тонкий обруч радиусом $\boldsymbol{R}$ раскрутили до угловой скорости $\boldsymbol{\omega_0}$, а затем поставили на бесконечную наклонную плоскость с углом наклона $\boldsymbol{\alpha}$, сообщив ему начальную скорость $\boldsymbol{v_0}$ вдоль плоскости, как показано на рисунке. Известно, что в начальный момент времени модуль скорости поступательного движения обруча меньше модуля скорости вращательного движения. Коэффициент трения между наклонной плоскостью и обручем равен $\boldsymbol{\mu}$, причем $\boldsymbol{\mu > tg\alpha}$. Постройте график зависимости координаты центра обруча относительно оси x от времени.



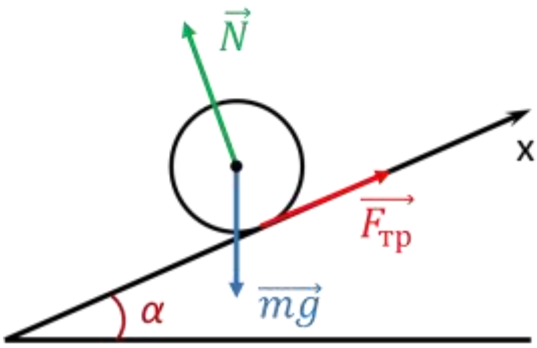
Примечание: Угловое ускорение $\boldsymbol{\beta}$ связано с моментом приложенных сил соотношением: $\boldsymbol{I\beta = M}$, где $\boldsymbol{I}$ – момент инерции тела относительно оси вращения, $\boldsymbol{M}$ – момент внешних сил. Для обруча, вращающегося вокруг своей оси $\boldsymbol{I=mR^2}$.

Решение

Скорость нижней точки обруча в начальный момент времени равна

$$v_0^{\text{нижн}} = v_0 + \omega_0 R \tag{1}$$

И направлена вдоль наклонной плоскости вниз. Сила трения препятствует движению, следовательно, она направлена противоположно, то вдоль наклонной плоскости вверх. Нарисуем силы, действующие на обруч.



Проскальзывание прекратится, когда суммарная скорость нижней точки обруча относительно земли будет равна нулю. Эта скорость складывается из скорости поступательного движения обруча и скорости из-за вращательного движения. Скорость поступательного движения направлена вправо, а вращение происходит по часовой стрелке, следовательно для прекращения проскальывания модули скорости и ωR должны стать равными, т.е. $v(t) = \omega(t)R$. До этого времени обруч будет подниматься по наклонной плоскости с проскальзыванием.

Поступательное движение обруча на этом этапе движения с проскальзыванием можно рассматривать как равноускоренное, то есть координата его центра будет меняться по закону

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}. \tag{2}$$

Найдем ускорение обруча из второго закона Ньютона:

$$F_{\text{тр}} - mg \cdot sin\alpha = ma \;\Rightarrow\; \mu mg \cdot cos\alpha - mg \cdot sin\alpha = ma \;\Rightarrow a = \; g(\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha). \tag{3}$$

Координата центра обруча с учетом (3):

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{gt^2}{2}(\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha). \tag{4}$$

В момент времени $\tilde{t}$, при $v(\tilde{t}) = \omega(\tilde{t})R$ проскальзывание прекратится. Найдем этот момент времени. Скорость будет увеличиваться и с учетом (3)

$$v(\tilde{t}) = v_0 + a\tilde{t} = v_0 + g\tilde{t}(\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha), \tag{5}$$

Угловая скорость будет меняться

$$\omega(\tilde{t}) = \omega_0 + \beta\tilde{t}, \tag{6}$$

где *β* – угловое ускорение.

Запишем основное уравнение динамики твердого тела

$$I\beta = M, \tag{7}$$

I – момент инерции, *M* – момент силы (силы трения).

$$I\beta = -\mu mg \cdot cos\alpha \cdot R. \tag{8}$$

Обруч представляет собой тонкостенный цилиндр, тогда его момент инерции вдоль оси, проходящей через его ось равен $I = mR^2$.

Тогда

$$mR^2\beta = -\mu mg \cdot cos\alpha \cdot R. \tag{9}$$

Отсюда угловое ускорение

$$\beta = -\frac{\mu g \cdot cos\alpha}{R}. \tag{10}$$

Тогда (6) можно переписать как

$$\omega(\tilde{t}) = \omega_0 - \frac{\mu g \cdot cos\alpha}{R}\tilde{t}, \tag{11}$$

Приравниваем (5) и (11) и получаем

$$v_0 + g\tilde{t}(\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha) = (\omega_0 - \frac{\mu g \cdot cos\alpha}{R}\tilde{t})R. \quad (12)$$

Тогда момент времени, в который проскальзывание прекратится

$$\tilde{t} = \frac{\omega_0 R - v_0}{g(2\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha)}. \quad (13)$$

Координата центра обруча в момент времени $\tilde{t}$

$$x(\tilde{t}) = x_0 + v_0\tilde{t} + \frac{a\tilde{t}^2}{2} = x_0 + v_0 \frac{\omega_0 R - v_0}{g(2\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha)} + \frac{(\omega_0 R - v_0)^2 \cdot}{2g} \cdot \frac{\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha}{(2\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha)^2}. \quad (14)$$

Скорость центра обруча в момент времени $\tilde{t}$ (5) можно переписать

$$v(\tilde{t}) = v_0 + (\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha) \cdot \frac{\omega_0 R - v_0}{(2\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha)}. \quad (15)$$

Заметим, что скорость положительна, т.е. обруч продолжит кататься вверх по наклонной плоскости.

При $t > \tilde{t}$ проскальзывание прекратится и обруч начнет по инерции катиться по наклонной плоскости при этом на него будет действовать сила трения покоя ($F_{\text{тр,п}} < F_{\text{тр}}$). Найдем модуль этой силы. Для этого запишем второй закон Ньютона

$$F_{\text{тр,п}} - mg \cdot sin\alpha = ma \Rightarrow a = -g \cdot sin\alpha + \frac{F_{\text{тр,п}}}{m}. \quad (16)$$

Основное уравнение динамики твердого тела

$$I\beta = -F_{\text{тр,п}}R. \quad (17)$$

Отсюда угловое ускорение

$$\beta = \frac{-F_{\text{тр,п}}R}{I} = \frac{-F_{\text{тр,п}}R}{mR^2} = -\frac{F_{\text{тр,п}}}{mR}. \quad (18)$$

При движении без проскальзывания т.к. нижняя точка обруча покоится, ускорение нижней точки обруча также (как и скорость этой точки) должно быть равно нулю, следовательно, модули ускорения и углового ускорения обруча должны быть равны: $a = \beta R$. Тогда

$$-\frac{F_{\text{тр,п}}}{m} = -g \cdot sin\alpha + \frac{F_{\text{тр,п}}}{m}. \quad (19)$$

Отсюда модуль силы трения качения

$$F_{\text{тр,п}} = \frac{mg \cdot sin\alpha}{2}. \quad (20)$$

И окончательно ускорение можно переписать как

$$a = -\frac{F_{\text{тр,п}}}{m} = -\frac{g \cdot sin\alpha}{2}. \quad (21)$$

Тогда скорость движения обруча при $t > \tilde{t}$

$$v(t) = \tilde{v} + a(t - \tilde{t}) = v_0 + g(\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha) \cdot \frac{\omega_0 R - v_0}{g(2\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha)} - \frac{g \cdot sin\alpha}{2}(t - \frac{\omega_0 R - v_0}{g(2\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha)}). \quad (22)$$

И координата центра обруча

$$x(t) = \tilde{x} + \tilde{v}(t - \tilde{t}) + \frac{a(t-\tilde{t})^2}{2} =$$

$$x_0 + v_0 \frac{\omega_0 R - v_0}{g(2\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha)} + \frac{(\omega_0 R - v_0)^2 \cdot}{2g} \cdot \frac{\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha}{(2\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha)^2} + \Big(v_0 + (\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha) \cdot \tag{23}$$

$$\omega 0R - v0(2\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha) \cdot t - \omega 0R - v0g(2\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha) - g \cdot sin\alpha 4(t - \omega 0R - v0g(2\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha))2.$$

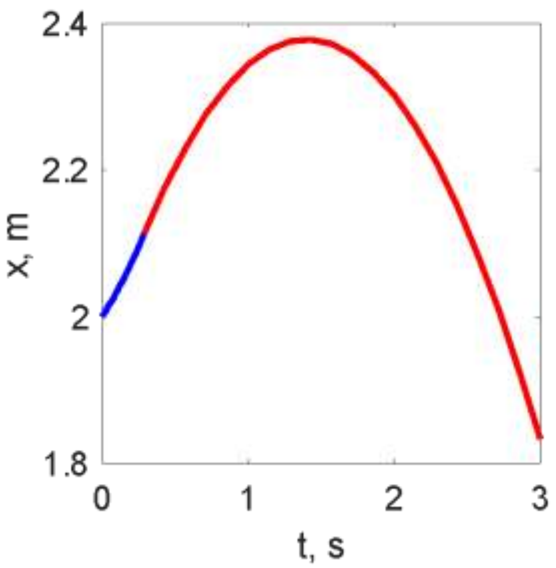
Заметим, что т.к. ускорение обруча отрицательно(направлено вниз по наклонной плоскости), то в некоторый момент времени обруч развернутся и станет катиться вниз по наклонной плоскости.

Тогда координата центра обруча меняется со временем следующим образом

$$x(t) = \{x_0 + v_0 t + \frac{gt^2}{2}(\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha) \text{ при } t \le \frac{\omega_0 R - v_0}{g(2\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha)}$$

$$x_0 + v_0 \frac{\omega_0 R - v_0}{g(2\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha)} + \frac{(\omega_0 R - v_0)^2 \cdot}{2g} \cdot \frac{\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha}{(2\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha)^2} + \left(v_0 + (\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha) \cdot \frac{\omega_0 R - v_0}{(2\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha)}\right) \cdot \tag{24}$$

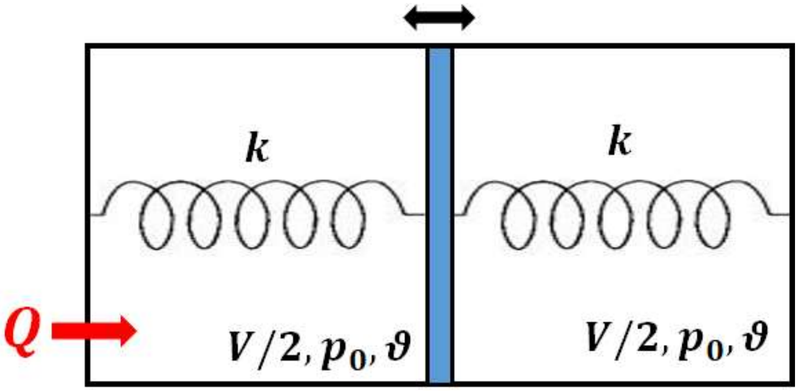
$$\cdot \left(t - \frac{\omega_0 R - v_0}{g(2\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha)}\right) - \frac{g \cdot sin\alpha}{4}\left(t - \frac{\omega_0 R - v_0}{g(2\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha)}\right)^2 \text{ при } t > \frac{\omega_0 R - v_0}{g(2\mu \cdot cos\alpha - sin\alpha)}.$$



Тогда график зависимости x(t)

Задача 2

Сосуд объемом ***V*** и площадью поперечного сечения ***S***, запаянный с обоих концов, расположен горизонтально. Внутри сосуд герметично разделен на две одинаковые части невесомым поршнем, способным двигаться вдоль него без трения. Поршень прикреплен к боковым стенкам сосуда одинаковыми пружинками жесткостью ***k***, изначально не растянутыми. Внутри каждой части находится по **ν** моль идеального одноатомного газа при известном давлении p_0. Обе части теплоизолированы друг от друга, а сам сосуд теплоизолирован от внешней среды. Какое количество теплоты нужно сообщать в левую часть, чтобы объем правой уменьшился в два раза? Толщиной поршня пренебречь.



Примечание: процесс в теплоизолированной системе описывается уравнением адиабаты **pV^γ =const**, где ***p*** – давление газа, ***V*** – объем, $\gamma = C_p/C_v$ – показатель адиабаты (C_p и C_v – теплоемкости газа соответственно при постоянном давлении и объеме). Для одноатомного газа $\gamma = 5/3$.

Решение:

Передаваемое в левую часть тепло пойдет на нагрев газа в нем, на передвижение невесомого поршня (расширение газа) и на растягивание пружины:

$$Q = A + dU_1 + k\frac{dx^2}{2}$$

Где A - работа, совершаемая газом в левой части над поршнем, dU_1 - изменение внутренней энергии газа в левой части.

Поскольку поршень невесомый, вся совершенная над ним работа пойдем на нагрев газа в правой части и на сжатие пружины в нем:

$$A = dU_2 + \frac{kdx^2}{2}$$

Тогда все передаваемое в сосуд тепло пойдет на нагрев газа в обеих частях и на деформацию двух пружинок:

$$Q = dU_1 + dU_2 + kdx^2 = \frac{3}{2}\nu RdT_1 + \frac{3}{2}\nu RdT_2 + kdx^2 = \frac{3}{2}\nu R(dT_1 + dT_2) + kdx^2$$

где ν - известное количество вещества в каждом сосуде; dT_1, dT_2 - изменение температуры газа в левой и правой части сосуда, соответственно. Поскольку по условию объем правой части уменьшился в два раза, то:

начальный объем: $\frac{V}{2} = \frac{Sh}{2}$

конечный объем: $\frac{V}{4} = \frac{Sh}{4}$

изменение длины пружины: $dx = \frac{h}{2} - \frac{h}{4} = \frac{h}{4}$

И тогда:

$$Q = \frac{3}{2}\nu R(dT_1 + dT_2) + \frac{kh^2}{16}$$

Поскольку изначально пружины не растянуты, начальное давление газа в обеих частях сосуда было одинаковое. Обозначим через p_0 начальное давление газа в сосуде. Поскольку начальные объемы и количества вещества равны, то начальные температуры газа в обеих частях сосуда тоже одинаковые, и уравнение состояния идентично:

$$\frac{p_0 V}{2} = \nu R T_0$$

(T_0- начальная температура)

При сообщении количества теплоты **Q** поршень перемещается вправо, левая пружина растягиваемся, правая сжимается. Записываем давление на поршень с каждой стороны:

$$p_1 - \frac{kdx}{S} = p_2 + \frac{kdx}{S}$$

$$p_1 = p_2 + \frac{2kdx}{S} = p_2 + \frac{kh}{2S}$$

(p_1 - давление газа в левой части, p_2 - давление газа в правой).

Для каждой части сосуда записываем уравнение Менделеева-Клапейрона для конечного состояния:

$$p_1 V_1 = (p_2 + \frac{kh}{2S}) S \frac{3h}{4} = \nu R T_1$$

$$p_2 V_2 = p_2 \frac{h}{4} S = \nu R T_2$$

Математические преобразования:

Почленно вычитаем из каждого уравнения системы уравнение начального состояния:

$$(p_2 S + \frac{kh}{2}) \frac{3h}{4} - \frac{p_0 Sh}{2} = (\frac{3}{2} p_2 - p_0) S \frac{h}{2} + \frac{3kh^2}{8} = \nu R dT_1$$

$$p_2 S \frac{h}{4} - p_0 S \frac{h}{2} = (\frac{p_2}{2} - p_0) S \frac{h}{2} = \nu R dT_2$$

Суммируем оба уравнения:

$$(p_2 - p_0)Sh + \frac{3kh^2}{8} = \nu R(dT_1 + dT_2)$$

Далее найдем p_2. Поскольку правая часть сосуда теплоизолирована от левой, процесс в нем – адиабатический. Уравнение адиабаты:

$$p_0\left(\frac{V}{2}\right)^\gamma = p_2\left(\frac{V}{4}\right)^\gamma$$

$$p_2 = p_0 2^\gamma$$

Тогда:

$$(2^\gamma - 1)p_0V + \frac{3k}{8}\left(\frac{V}{S}\right)^2 = \nu R(dT_1 + dT_2)$$

Используя ранее полученное для Q имеем:

$$Q = \frac{3}{2}\nu R(dT_1 + dT_2) + \frac{k}{16}\left(\frac{V}{S}\right)^2 = \frac{3}{2}(2^\gamma - 1)p_0V + \frac{9k}{16}\left(\frac{V}{S}\right)^2 + \frac{k}{16}\left(\frac{V}{S}\right)^2$$
$$= \frac{3}{2}(2^\gamma - 1)p_0V + \frac{5}{8}k\left(\frac{V}{S}\right)^2$$

Ответ: $\frac{3}{2}(2^\gamma - 1)p_0V + \frac{5}{8}k\left(\frac{V}{S}\right)^2$

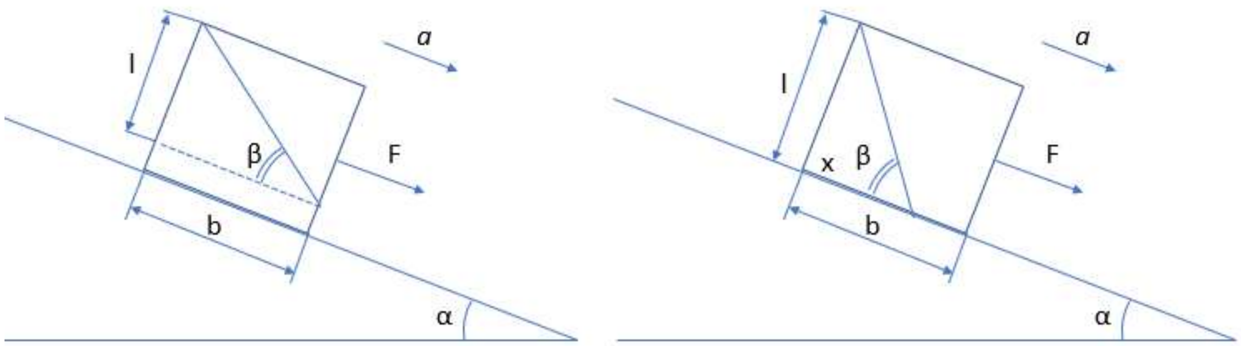
Задача 3

Кубический сосуд с длиной ребра ***b*** наполнен водой до уровня ***h>b/2***. Сосуд ставят на наклонную плоскость, угол наклона ***α*** которой может меняться, и начинают тянуть вниз по плоскости с силой, приложенной к середине боковой грани и постепенно увеличивающейся до значения ***F***. Определите минимальный угол наклона плоскости ***α***, при котором вода начнет переливаться через край сосуда. Массой пустого сосуда и трением пренебречь.

Решение

По условию кубический сосуд кубический сосуд с длиной ребра b наполнен водой до уровня h. Под действием силы F сосуд будет двигаться равноускоренно, и поверхность воды будет отклоняться от горизонтали и от наклонной плоскости, и вода переливается через его край, дальний по направлению движения. Обозначим угол отклонения поверхности воды от наклонной плоскости как β**.** Угол β зависит от объема воды в сосуде и ускорения, с которым он движется. В общем случае угол может меняться в диапазоне от 0 (внешняя сила отсутствует, сосуд заполнен полностью и скользит вниз под действием силы тяжести, тогда плоскость воды параллельна наклонной плоскости, и $\beta = \alpha$) до 90 (сосуд почти пуст, ускорение очень велико).

В зависимости от значения h возможны два сценария, изображенные на рисунках:



Поскольку сосуд имеет кубическую форму, то первый случай (левая картинка) реализуется, когда угол β меняется в диапазоне от 0 до 45 градусов, что соответствует случаю, когда сосуд изначально заполнен больше, чем наполовину ($h > b/2$). В этом случае объем воды в сосуде имеет трапецевидную форму. Второй случай (правая картинка) реализуется, когда угол β меняется в диапазоне от 45 до 90 градусов, что соответствует случаю, когда сосуд изначально заполнен меньше, чем наполовину ($h < b/2$). По условию нас интересует первый случай.

Пусть l – разница уровней воды между левой и правой стенками сосуда. Т.к. в условии сказано, что вода начнет переливаться через край, уровень воды справа будет равен b. В таком случае уровень воды слева будет равен $b - l$. Разница уровней воды l связана с углом β как:

$$l = b\, tg\beta$$

Объем воды в сосуде в таком случае будет равен:

$$V = \frac{(b + b - l)}{2} b \cdot b = b^3 - \frac{1}{2} l b^2 = b^3 \left(1 - \frac{1}{2} tg\beta\right)$$

Поскольку вода еще не вылилась из сосуда, ее объем равен исходному:

$$V = hb^2$$

Приравниваем:

$$b^3 \left(1 - \frac{1}{2} tg\beta\right) = hb^2$$

$$b \left(1 - \frac{1}{2} tg\beta\right) = h$$

$$tg\beta = 2\left(1 - \frac{h}{b}\right)$$

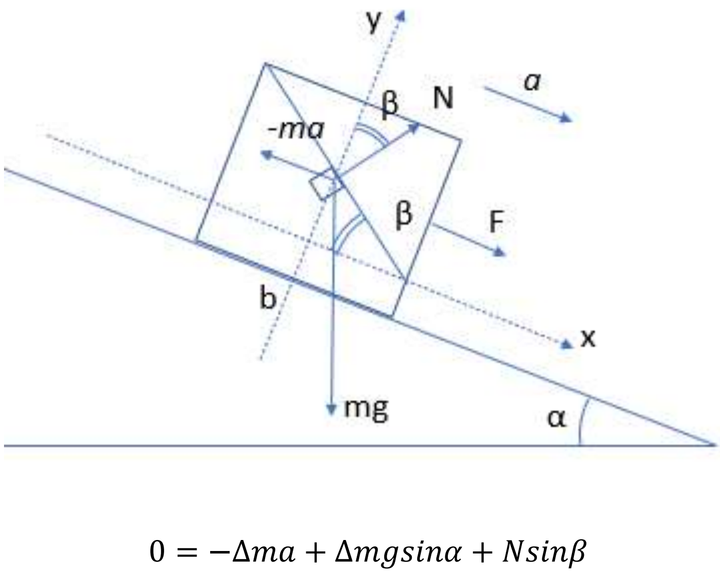
С другой стороны, угол β определяется ускорением, с которым движется сосуд.

Под действием силы F сосуд будет двигаться равноускоренно:

$$ma = mgsin\alpha + F$$

$$a = gsin\alpha + F/m$$

Где $m = \rho a b^2$ – масса воды в сосуде (ρ – плотность воды). Рассмотрим малый элемент воды массой Δm у поверхности. В неинерциальной системе отсчета, связанной с сосудом, элемент покоится, на него будут действовать сила тяжести, сила реакции опоры и сила инерции:



$$0 = -\Delta ma + \Delta mgsin\alpha + Nsin\beta$$

$$Ncos\beta = \Delta mgcos\alpha$$

Т.о.

$$a = gsin\alpha + gcos\alpha tg\beta$$

Подставим ранее полученное выражение для ускорения:

$$\frac{F}{m} + gsin\alpha = gsin\alpha + gcos\alpha tg\beta$$

$$F = mgcos\alpha tg\beta$$

$$tg\beta = \frac{F}{mgcos\alpha}, cos\,\alpha = \frac{F}{mg\,tg\beta}$$

$$cos\alpha = \frac{F}{2mg\left(1 - \frac{h}{b}\right)}$$

Ответ: $\alpha = arccos\left(\frac{F}{2mg\left(1-\frac{a}{b}\right)}\right)$

Задача 4

В закрытом сосуде площадью основания ***S***, частично заполненном жидкостью плотностью ***ρ***, находится тело, имеющее форму прямоугольного параллелепипеда, прикрепленное двумя последовательно скрепленными пружинами к верхней грани сосуда. Высота тела – ***H***, плотность – $\boldsymbol{\rho_m}$. Известно, что жесткость одной из пружин в ***n* раз больше** жесткости другой, равной ***k***. В состоянии равновесия тело погружено в жидкость на глубину $\boldsymbol{h_0<H}$, его основание ориентировано параллельно границе жидкости, а пружины суммарно растянуты на $\boldsymbol{\Delta y_0}$. Определите частоту колебаний тела, возникающих при выведении его из равновесия слабым толчком по его верхней грани. Тело всегда остается частично погруженным в жидкость, а его ориентация при колебаниях остается неизменной. Скорость движения тела и жидкостей в любой момент времени считайте малыми. Вязкостью жидкости пренебрегите.

Решение:

2-й закон Ньютона

$$ma = mg - k'\Delta y - \rho g S_0 h,$$

$$\text{где } k' = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} = nk/(n+1)$$

Находим площадь основания тела S_0 из уравнения для положения равновесия

$$mg = k'\Delta y_0 + \rho g S_0 h_0,$$

$$gS_0(\rho_т H - \rho h_0) = k'\Delta y_0$$

$$S_0 = \frac{nk\Delta y_0}{g(\rho_т H - \rho h_0)(n+1)}$$

Пусть тело смещается из положения равновесия на y (допустим, вниз). Изменение объема погруженной части тела должен учитывать подъем уровня нижней жидкости $y_{ж1}$:

$$\Delta V = S_0(y + y_{ж1})$$

При этом:

$$S_0(y + y_{ж1}) = Sy_{ж1}$$

$$\Delta V = \frac{SS_0}{S - S_0} y$$

При смещении из положения равновесия, например, вниз, поскольку изначально пружины растянуты, то сила Архимеда и сила упругости будут увеличиваться (направлены в противоположную смещению сторону). Записываем уравнение движения (y – смещение из положения равновесия):

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -\rho g\Delta V - k'y = -\rho g\frac{SS_0}{S - S_0}y - \frac{nk}{n+1}y$$

Получаем уравнение колебаний:

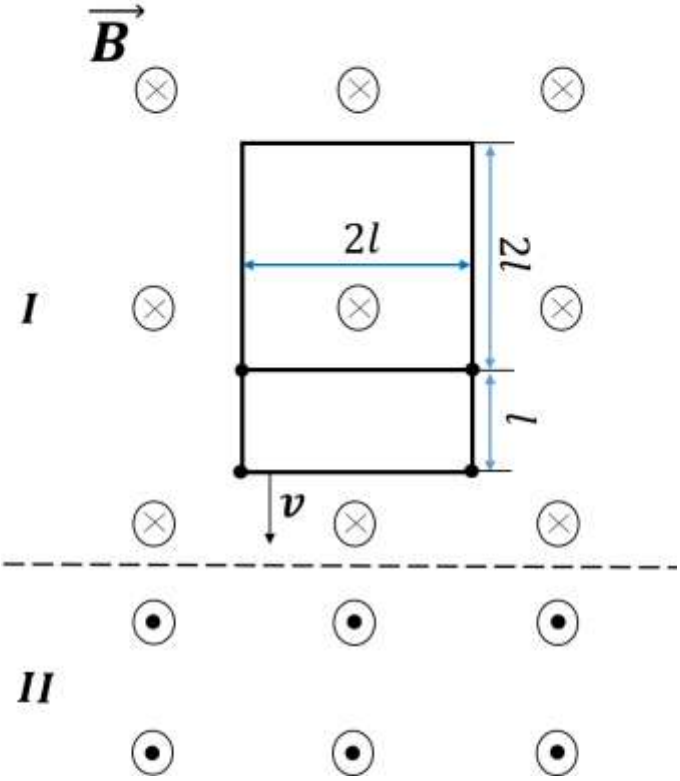
$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{\rho_т S_0 H}\left(\rho g\frac{SS_0}{S - S_0} + \frac{nk}{n+1}\right)y = 0$$

Откуда:

$$w = \sqrt{\frac{g}{\rho_{\text{т}} H}\left(\frac{\rho}{1 - \frac{nk\Delta y_0}{gS(\rho_{\text{т}} H - \rho h_0)(n+1)}} + \frac{\rho_{\text{т}} H - \rho h_0}{\Delta y_0}\right)}$$

Задача 5

Прямоугольную металлическую рамку размерами **2*l*** на **3*l*** с горизонтальной неподвижной перемычкой, расположенной на расстоянии ***l*** от нижней стороны рамки, двигают с постоянной скоростью **v** через границу раздела областей **I** и **II**. В области **I** имеется однородное магнитное поле величины **B**, перпендикулярное плоскости рамки, в области **II** – такое же по величине и противоположное по направлению. Определите величину силы, действующей на рамку по мере ее полного перемещения из области **I** в область **II**. Рамка сделана из однородных металлических стержней из материала с удельным сопротивлением **ρ** и площадью поперечного сечения **S**.



Решение:

ЭДС индукции определяется изменением магнитного потока через контур:

$$\xi_i = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Поэтому при движении рамки в постоянном поле ЭДС возникать не будет, не будет тока, и соответственно, силы.

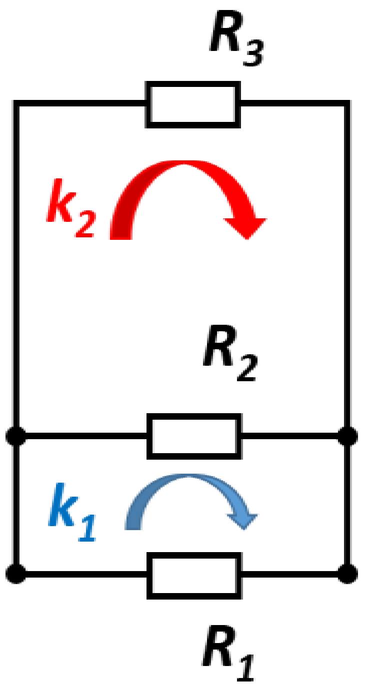
ЭДС будет возникать в нижнем контуре после пересечения нижней стороной рамки границы раздела областей и до пересечения перемычкой этой границы, а ЭДС в нижнем контуре будет возникать после пересечения перемычкой границы .

Сначала границу раздела областей пересекает нижняя сторона рамки. ЭДС индукции равна(так как величина поля меняется на 2B, с –B на B):

$$\xi_{i,1} = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -\frac{2BdS_1}{dt} = -2B * 2lv = -4Bvl$$

Имеется два контура, k_1 и k_2. Сначала ЭДС индукции возникает в k_1.

Направление тока в связи с направлением поля и скорости вдвигания будет по часовой стрелке.



Сопротивления проводов определяются длиной соответствующий участков:

$$R_1 = \frac{4\rho l}{S}, R_2 = \frac{2\rho l}{S}, R_3 = \frac{6\rho l}{S}$$

Сила, действующая на горизонтальные провода, есть сила Ампера:

$$F = IBl$$

Поэтому необходимо найти токи, протекающие через сопротивления R_1, R_2, R_3.

Рассматриваем контур k_2, в нем магнитный поток не меняется и ЭДС индукции равно нулю, следовательно имеем параллельное соединение сопротивлений R_2 и R_3:

$$U_3 = U_2 => I_3 R_3 = I_2 R_2$$

$$I_1 = I_2 + I_3 => I_3 = I_1 - I_2 => (I_1 - I_2)R_3 = I_2 R_2$$

$$(I_1 - I_2)R_3 = I_2 R_2 => I_1 R_3 = I_2(R_2 + R_3)$$

$$I_2 = \frac{R_3}{R_2 + R_3} = \frac{3}{4} I_1$$

$$I_3 = \frac{R_2}{R_2 + R_3} = \frac{1}{4} I_1$$

По правилу Кирхгофа в контуре k_1 имеем:

$$I_1 R_1 + I_2 R_2 = |\xi_{i,1}|$$

$$I_1(R_1 + \frac{3}{4}R_2) = |\xi_{i,1}|$$

$$\frac{11}{2}\frac{\rho l}{S}I_1 = 4Bvl => I_1 = \frac{8}{11}\frac{BvS}{\rho}$$

$$I_2 = \frac{6}{11}\frac{BvS}{\rho}$$

$$I_3 = \frac{2}{11}\frac{BvS}{\rho}$$

Силы ампера, действующие на рамку, будут направлены вверх, и их равнодействующая будет равна:

$$F = F_1 + F_2 + F_3 = 2Bl(I_1 + I_2 + I_3) = \frac{32}{11}\frac{B^2vlS}{\rho}$$

Когда перемычка пересечет границу раздела областей, ЭДС индукции будет в контуре k_2, а в контуре k_1 магнитный поток не меняется и ЭДС индукции равно нулю, следовательно Сопротивления R_1 и R_2 подключены параллельно:

$$U_1 = U_2 => I_1R_1 = I_2R_2$$

$$I_3 = I_1 + I_2 => I_1 = I_3 - I_2 => (I_3 - I_2)R_1 = I_2R_2$$

$$(I_3 - I_2)R_1 = I_2R_2 => I_3R_1 = I_2(R_1 + R_2)$$

$$I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{2}{3}I_3$$

$$I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1}{3}I_3$$

По правилу Кирхгофа в контуре k_2 имеем:

$$I_2R_2 + I_3R_3 = |\xi_{i,2}|$$

$$I_3(R_3 + \frac{2}{3}R_2) = |\xi_{i,3}|$$

$$\frac{22}{3}\frac{\rho l}{S}I_3 = 4Bvl => I_3 = \frac{6}{11}\frac{BvS}{\rho}$$

$$I_2 = \frac{4}{11}\frac{BvS}{\rho}$$

$$I_1 = \frac{2}{11}\frac{BvS}{\rho}$$

Силы ампера, действующие на рамку, будут направлены вверх, и равнодействующая:

$$F = F_1 + F_2 + F_3 = 2Bl(I_1 + I_2 + I_3) = \frac{24}{11}\frac{B^2vlS}{\rho}$$

Ответ: до пересечения перемычкой границы раздела: $\frac{32}{11}\frac{B^2vlS}{\rho}$, после $\frac{24}{11}\frac{B^2vlS}{\rho}$