ШКОЛЬНЫЕ ОЛИМПИАДЫ СПбГУ 2022

комплекс предметов «Инженерные системы»
(математика, информатика, физика, химия),
2021/22 учебный год.

ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП

Условия задач
(решения / ответы)

8–9 класс

Задача 1. (5 баллов)

1.1. Ленинградская атомная электростанция (ЛАЭС) вырабатывает за год примерно 28 млрд кВт · ч энергии. Сколько лет потребуется ЛАЭС, чтобы выработать столько же энергии, сколько Солнце вырабатывает за секунду? Светимость Солнца составляет $4 \cdot 10^{27}$Дж/с.

Решение. Найдем, сколько энергии ЛАЭС вырабатывает за 1 секунду:

$$28 \cdot 10^9 \cdot 10^3 \text{ Вт} \cdot \frac{\text{час}}{\text{год}} = 2{,}8 \cdot 10^{13} \ \frac{\text{Дж}}{\text{с}} \cdot \frac{3600 \text{ с}}{(365{,}25 \cdot 24 \cdot 3600) \text{ с}} \approx 3{,}2 \cdot 10^9 \ \frac{\text{Дж}}{\text{с}}.$$

Значит, $4 \cdot 10^{27}$Дж ЛАЭС выработает за

$$\frac{4 \cdot 10^{27}}{3{,}2 \cdot 10^9} = 1{,}25 \cdot 10^{18} \text{ с} \approx 40 \text{ млрд лет.}$$

Ответ: 40 млрд лет.

1.2. Кольская атомная электростанция (АЭС) вырабатывает за год примерно 9 млрд кВт · ч энергии. Сколько лет потребуется Кольской АЭС, чтобы выработать столько же энергии, сколько Солнце вырабатывает за минуту? Светимость Солнца составляет $4 \cdot 10^{27}$Дж/с.

Ответ: 7,6 трлн лет.

1.3. Балаковская атомная электростанция (АЭС) вырабатывает за год примерно 31 млрд кВт · ч энергии. Сколько лет потребуется Балаковской АЭС, чтобы выработать столько же энергии, сколько Солнце вырабатывает за час? Светимость Солнца составляет $4 \cdot 10^{27}$Дж/с.

Ответ: 130 трлн лет.

Задача2. (5 баллов)

2.1. Автомобиль Rimac Nevera оснащается четырьмя электродвигателями, а Tesla Model S Plaid -тремя и имеет мощность почти вдвое меньше. В рамках схватки электромобили провели заезд на 0,5 км. За какое время каждый автомобиль преодолеет всю дистанцию, если известно, что Tesla разгоняется до 100 км/ч за 2.1 с и имеет максимальную скорость 322 км/ч, а Rimac разгоняется до 300 км/ч за 9.3 с и его максимальная скорость 412 км/ч. Ускорение считать постоянным.

Решение.

Переведем все заданные в условии скорости в м/с:

Rimac

$$v_R = 300\frac{\text{км}}{\text{ч}} = 300 \cdot \frac{1000\text{м}}{3600\text{с}} = 83{,}333\text{м/с}$$

$$v_{maxR} = 412\frac{\text{км}}{\text{ч}} = 114{,}444\text{м/с}$$

Tesla

$$v_T = 100\frac{\text{км}}{\text{ч}} = 27{,}778\text{м/с}$$

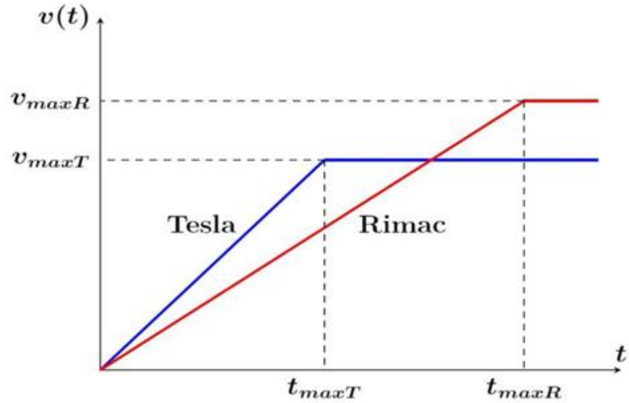
$$v_{maxT} = 322\frac{\text{км}}{\text{ч}} = 89{,}444\text{м/с}$$

Найдем ускорение обоих автомодилей:

Rimac: $a_R = \frac{83.333\text{м/с}}{9{,}3\text{с}} = 8{,}961\text{м/с}^2$

Tesla: $a_T = \frac{27.778\text{м/с}}{2{,}1\text{с}} = 13{,}228\text{м/с}^2$

Согласно условию, скорость каждого из автомобилей после старта растет линейно за счет движения с постоянным ускорением, а затем, достигнув максимального значения, остается постоянной (график изменения скорости электромобилей представлен на рисунке).



Rimac достигает своей максимальной скорости за время:

$$t_{maxR} = \frac{v_{maxR}}{v_R} = 12{,}771\text{с}$$

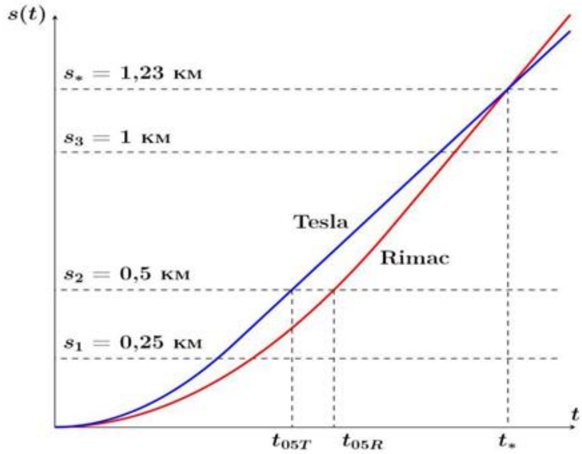
А Tesla за время:

$$t_{maxT} = \frac{v_{maxT}}{v_T} = 6{,}762\text{с}$$

До достижения максимальной скорости пройденный путь электромобиля, который двигается с постоянным ускорением, растет с течением времени квадратично как $at^2/2$; после достижения максимальной скорости пройденный путь растет линейно как $v_{max}t$. Таким образом, пройденный путь электромобиля:

$$s(t) = \frac{at^2}{2}, \quad \text{если } t < t_{max},$$
$$s(t) = \frac{at_{max}^2}{2} + v_{max}(t - t_{max}), \quad \text{если } t > t_{max},$$

График изменения пройденного пути представлен на рисунке:



Видно, что расстояния, равные 0,25км, 0,5км и 1км быстрее проходит Tesla за счет большего ускорения. На расстояниях, больших 1,23км вперед выходит Rimac за счет большей максимальной скорости. Расстояние 1,23км оба автомобиля проходят за *t*=17.13с

Посчитаем, за какое время оба электромобиля проходят расстояние 0,5км (500м). До достижения максимальной скорости Rimac проходит:

$$\frac{at_{maxR}^2}{2} = 730{,}840 > 500\text{м},$$
$$t_{0.5R} = \sqrt{\frac{500 \cdot 2}{a_R}} = 10{,}564c.$$

Tesla же до достижения максимальной скорости проходит:

$$\frac{at_{maxT}^2}{2} = 302{,}423 < 500\text{м}$$
$$t_{0.5T} = t_{maxT} + \sqrt{\frac{(500 - 302.423)\text{м}}{v_{maxT}}} = 6.762c + 1.486c = 8.248c.$$

Следовательно: $t_{0.5R} > t_{0.5T}$ т.е. на дистанции 500м Tesla быстрее чем Rimac.

Ответ: *t*=10,56с (Rimac); *t*=8,25с (Tesla).

2.2. Автомобиль Rimac Nevera оснащается четырьмя электродвигателями, а Tesla Model S Plaid -тремя и имеет мощность почти вдвое меньше. В рамках схватки электромобили провели заезд на 0,25 км. За какое время каждый автомобиль преодолеет всю дистанцию, если известно, что Tesla разгоняется до 100 км/ч за 2.1 с и имеет максимальную скорость 322 км/ч, а Rimac разгоняется до 300 км/ч за 9.3 с и его максимальная скорость 412 км/ч. Ускорение считать постоянным.

Ответ: *t*=7,47с (Rimac); *t*=6,15с (Tesla).

2.3. Автомобиль Rimac Nevera оснащается четырьмя электродвигателями, а Tesla Model S Plaid -тремя и имеет мощность почти вдвое меньше. В рамках схватки электромобили провели заезд на 1 км. За какое время каждый автомобиль преодолеет всю дистанцию, если известно, что Tesla разгоняется до 100 км/ч за 2.1 с и имеет максимальную скорость 322 км/ч, а Rimac разгоняется до 300 км/ч за 9.3 с и его максимальная скорость 412 км/ч. Ускорение считать постоянным.

Ответ: t=14,94с (Rimac); t=9,56с (Tesla).

Задача 3. (5 баллов)

3.1. Изотопологи – соединения одних и тех же химических веществ, отличающихся изотопным составом.
В таблице ниже представлен изотопный состав природного хлора и кислорода в процентах по массе:

Изотоп	^{16}O	^{17}O	^{18}O	^{35}Cl	^{37}Cl
Содержание	99,758	0,039	0,203	75,53	24,47

1. Какое число изотопологов оксида хлора(I) существует?
2. Рассчитайте, во сколько раз отличаются массы наиболее тяжелого и наиболее легкого изотопологов оксида хлора(I).
3. Рассчитайте, чему была бы равна относительная атомная масса кислорода, если бы содержание его природных изотопов было бы равным.
4. Считая изотопный состав указанных элементов постоянным, рассчитайте сколько атомов изотопов хлора каждого вида содержит 100 грамм газообразного хлора Cl_2?

Решение.
Формула оксида хлора(I) Cl_2O. Каждая молекула содержит два атома хлора и один атом кислорода. С учетом природного изотопного состава хлора и кислорода существует несколько изотопологов этого соединения: например, три, содержащие кислород-16 $^{35}Cl^{35}Cl^{16}O$, $^{35}Cl^{37}Cl^{16}O$, $^{37}Cl^{37}Cl^{16}O$. Всего таких изотопологов Cl_2O существует девять.
2. Наиболее легкий изотополог имеет состав $^{35}Cl^{35}Cl^{16}O$, наиболее тяжелый $^{37}Cl^{37}Cl^{18}O$. Масса одного моль наиболее легкого составляет 35+35+16 = 86 г/моль, наиболее тяжелого – 37+37+18 = 92 г/моль. Таким образом, при замене легких изотопов тяжелыми масса возрастает в 1,07 раз.
3. Расчет относительной атомной массы кислорода с учетом природного содержания изотопов составляет:

$$A_r(O) = \frac{\omega_1 * m({}^{16}_{8}O) + \omega_2 * m({}^{17}_{8}O) + \omega_3 * m({}^{18}_{8}O)}{\frac{1}{12} * m({}^{12}_{6}C)} =$$

$$= \frac{0{,}99758 * 16 + 0{,}00039 * 17 + 0{,}00203 * 18}{\frac{1}{12} * 12} = 16$$

В случае равенства содержания природных изотопов (≈33,33%):

$$A_r(O) = \frac{\omega_1 * m({}^{16}_{8}O) + \omega_2 * m({}^{17}_{8}O) + \omega_3 * m({}^{18}_{8}O)}{\frac{1}{12} * m({}^{12}_{6}C)} =$$

$$= \frac{0{,}3333 * 16 + 0{,}3333 * 17 + 0{,}3333 * 18}{\frac{1}{12} * 12} = 17$$

4. Если изотопный состав постоянен, то масса каждой порции газообразного хлора складывается из масс изотопологов с учетом их доли (природного содержания). Найдем массу атомов ^{35}Cl в 100 граммах газообразного хлора:

$$\omega(^{35}_{17}Cl) = \frac{m(^{35}_{17}Cl)}{m_{\text{обр}}}\ ; m(^{35}_{17}Cl) = 0{,}7553 * 100 = 75{,}53\ \text{г}$$

Аналогично найдем массу атомов ^{37}Cl. Она равна 24,47 г.

Найдем число атомов:

$$\frac{m}{M} = \frac{N}{N_A}\ ; N(^{35}_{17}Cl) = \frac{6{,}022 * 10^{23} * 75{,}53}{35} = 1{,}3 * 10^{24}\ \text{атомов}$$

Аналогично ведем расчет для атомов ^{37}Cl. Их количество составляет $4*10^{23}$ атомов.

Ответ:

1. N_2O, 9 изотопологов
2. В 1,09 раз.
3. 17.
4. $N(^{37}Cl) = 4*10^{23}$ атомов, $N(^{35}Cl) = 1{,}3*10^{24}$ атомов.

3.2. Изотопологи – соединения одних и тех же химических веществ, отличающихся изотопным составом.

В таблице ниже представлен изотопный состав природного азота и кислорода в процентах по массе:

Изотоп	^{16}O	^{17}O	^{18}O	^{14}N	^{15}N
Содержание	99,758	0,039	0,203	99,635	0,365

1. Какое число изотопологов оксида азота(I) существует?
2. Рассчитайте, во сколько раз отличаются массы наиболее тяжелого и наиболее легкого изотопологов оксида азота(I).
3. Рассчитайте, чему была бы равна относительная атомная масса кислорода, если бы содержание его природных изотопов было бы равным.
4. Считая изотопный состав указанных элементов постоянным, рассчитайте сколько атомов изотопов хлора каждого вида содержит 100 грамм газообразного азота N_2?

Ответ:

1. N_2O, 9 изотопологов
2. В 1,09 раз.
3. 17.
4. $N(^{14}N) = 4{,}3*10^{24}$ атомов, $N(^{15}N) = 1{,}5*10^{22}$ атомов.

Задача 4. (5 баллов)

4.1. Миша и Маша играют в игру с вещественными числами: Миша первым придумывает и объявляет число a, потом Маша – число b, причем $b \neq a$. Миша вычисляет значение выражения $M_1 := \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2}$, Маша вычисляет значение выражения $M_2 := \frac{2}{1+ab}$. Если $M_1 > M_2$, то в игре побеждает Миша, а Маша побеждает в противном случае.

А) Напишите компьютерную программу, которая определяет победителя игры для всех значений $-5 \le a \le 5$ и $-5 \le b \le 5$ шагом 0,1 и выводит на экран частоту побед Миши.
Б) Укажите для Маши выигрышную стратегию.

Решение:
А) Программа перебирает все возможные варианты (два вложенных цикла) с шагом 0,1. Необходимо обратить внимание на возможность выполнения равенства $1 + ab = 0$. Условие задачи этот случай явно не регламентирует, но стандартные правила математики продолжают действовать, будем считать в таком случае игру не состоявшейся и не будем учитывать при подсчете частоты выигрыша Миши. Кроме того, обращение с вещественными числами требует аккуратности при сравнении значений.
Пример программы на языке Pascal:

```
program Game;
var
   a,b, M1, M2 : real;
   i, j : integer;

begin
  i:=0; // счетчик количества игр
  j:=0; // счетчик количества побед Миши
  a:=-5.0;
  b:=-5.0;
  while a<5.01 do
  begin
    while b<5.01 do
    begin
      if ((abs(1+a*b) >0.001) and (abs(a-b)>0.001)) then // проверка значений a и b
      begin
        i:=i+1;
        M1:=1/(1+a*a)+1/(1+b*b);
        M2:=2/(1+a*b);
        if (M1-M2 > 0) then
        begin
          j:=j+1;
        end;
      end;
      b:=b+0.1;
    end;
    a:=a+0.1;
    b:=-5.0;
  end;
  writeln('Количество игр:',i);
  writeln('Количество побед Миши:',j);
  writeln('Частота побед Миши:', (j/i):2:5);
end.
```

Б) Рассмотрим $M_1 - M_2 = \frac{(ab-1)(a-b)^2}{(1+a^2)(1+b^2)(1+ab)} \le 0$ при $-1 < ab \le 1$ или $a = b$, но $a \ne b$ по условию. Если Миша объявляет свое число первым, то Маша действительно всегда может выбрать число, гарантирующее ей победу: если $a = 0$, то $b -$ любое число, кроме 0; если $a = 1$, то b $-$ любое число из интервала $(-1; 1)$; если $a \ne 0$ и $a \ne 1$, то, например, $b = \frac{1}{a}$. (Это, конечно, не единственное возможное правило выбора числа b для Маши.)

4.2. Миша и Маша играют в игру с вещественными числами: Миша первым придумывает и объявляет число a, потом Маша – число b, причем $b \neq a$. Миша вычисляет значение выражения $M_1 \coloneqq \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2}$, Маша вычисляет значение выражения $M_2 \coloneqq \frac{2}{1+ab}$. Если $M_1 > M_2$, то в игре побеждает Миша, а Маша побеждает в противоположном случае.
А) Напишите компьютерную программу, которая определяет победителя игры для всех значений $-10 \leq a \leq 10$ и $-10 \leq b \leq 10$ шагом 0,2 и выводит на экран частоту побед Миши.
Б) Может ли Миша выбирать число a так, чтобы Маша выигрывала, даже выбирая число b случайным образом?

Ответ:
А) в программе, приведенной для задачи 4.1, нужно изменить граничные значения a и b и шаг.
Б) Если Миша выбирает a=0, то Маша может назвать любое число (кроме b=0) и победить.

4.3. Миша и Маша играют в игру с вещественными числами: Миша придумывает и объявляет число a, Маша – число b, причем $b \neq a$. Миша вычисляет значение выражения $M_1 \coloneqq \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2}$, Маша вычисляет значение выражения $M_2 \coloneqq \frac{2}{1+ab}$. Если $M_1 > M_2$, то в игре побеждает Миша, а Маша побеждает в противоположном случае.
А) Напишите компьютерную программу, которая определяет победителя игры для всех значений $-5 \leq a \leq 5$ и $-5 \leq b \leq 5$ шагом 0,1 и выводит на экран частоту побед Маши.
Б) Может ли кто-то из участников гарантировать себе победу в игре?

Ответ:
А) в программе, приведенной для задачи 4.1, можно изменить последние две строки на `writeln('Количество побед Маши:',i-j);` `writeln('Частота побед Маши:', (1-j/i):2:5).`
Б) гарантировать себе победу может участник, который выбирает число вторым, если Миша и Маша называют числа в какой-то очередности. Если они предъявляют числа одновременно (например, записав их на карточках), то гарантировать победу не может ни один из участников.

10–11 класс

Задача 1. (5 баллов)

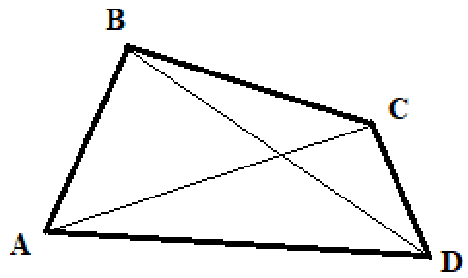
1.1 На поляне растут четыре дерева – дуб, клен, береза и осина, так, что, прислонившись хотя бы с одной стороны спиной к каждому из деревьев, человек может видеть другие три дерева. Саша бежит от осины к березе, от березы к дубу. Паша бежит от осины к клену, от клена к дубу. Мальчики стартуют одновременно и бегут с одинаковой скоростью по кратчайшему пути. Саша оказался у дуба раньше Паши. Можно ли определить, кто из мальчиков раньше достиг «промежуточного» дерева – Саша березы или Паша клена?

Решение.

В условии спрятан выпуклый (т.к. угол зрения человека по горизонтали равен 180 градусов) четырехугольник с вершинами A (осина), B (береза), C (клен) и D (дуб), в котором $AB + BD < AC + CD$. Кратчайший путь подразумевает, что мальчики двигаются по отрезкам, соединяющим вершины (по сторонам или диагоналям) четырехугольника. Поскольку скорости мальчиков считаются равными, требуется сравнить длину отрезков AB и AC.

Возможны несколько вариантов порядка расположения вершин четырехугольника. Рассмотрим каждый из них.

1.)



Рассмотрим четырехугольник $ABCD$, в котором $AB + BD < AC + CD$.

Докажем, что $AB < AC$.

Пусть $AB \geq AC$.

Тогда $\angle BCA \geq \angle ABC$ по неравенству треугольника.

Далее, $\angle BCD > \angle BCA \geq \angle ABC > \angle DBC$, следовательно, $BD \geq CD$.

Сложим неравенства:

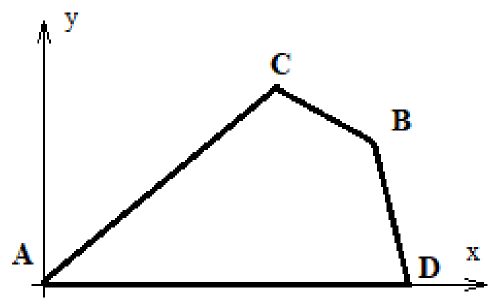
$$\begin{cases} BD > CD \\ AB \geq AC \end{cases}$$

Получаем, что $AB + BD > AC + CD$, т.е. противоречие, а значит: $AB < AC$ чтд.

2.) Для четырехугольника $ACBD$ возможен вариант $AB > AC$.

Составим соответствующий пример:

пусть $A(0;0)$, $D(10;0)$, $C(5;10)$, $B(8;8)$.

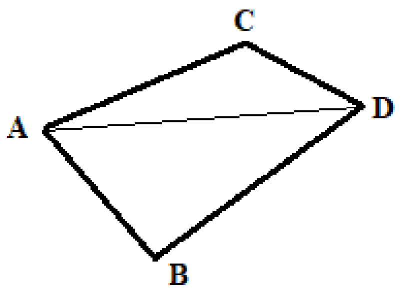


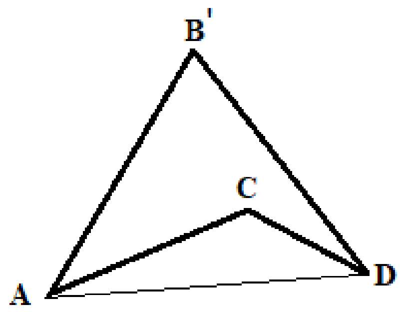
Тогда: $AC = CD = 5\sqrt{5}$, $AC + CD = 10\sqrt{5}$, $AB = 8\sqrt{2}$, $BD = 2\sqrt{17}$, $AB + BD = 8\sqrt{2} + 2\sqrt{17}$ и $AB > AC$ т.к. $(8\sqrt{2})^2 = 128 > 125 = (5\sqrt{5})^2$, но $AC + CD = 10\sqrt{5} > 8\sqrt{2} + 2\sqrt{17} = AB + BD$.

По результатам п.1) и п.2) уже можно говорить, что однозначно установить, кто достиг «промежуточного» дерева раньше, невозможно, и в принципе, вместо доказательства п.1) можно предъявить подходящий пример, как и в п.2).

Однако, рассмотрим еще один вариант взаимного расположения точек A, B, C и D.

3.) Точки B и C лежат по разные стороны от прямой AD.

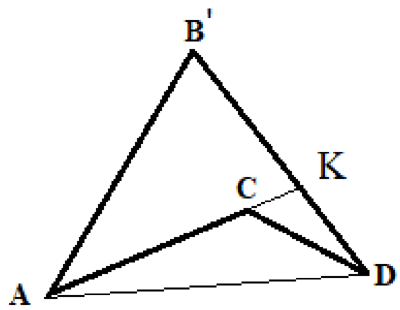




Пусть $AB \geq AC$, тогда отразим точку B симметрично относительно прямой AD: получим точку B', такую что C лежит внутри окружности с центром в A и радиусом AB, т.е. точка C внутри треугольника $AB'D$.

Докажем, что $AB' + B'D = AB + BD > AC + CD$, что противоречит условию задачи.

Продлим AC до пересечения с $B'D$ в точке K.



Тогда по неравенству треугольника:
в $\Delta AB'K$ имеем: $AK < AB' + B'K$;
в ΔCKD имеем: $CD < CK + KD$.
Сложим эти неравенства:

$$AK + CD < AB' + B'K + CK + KD,$$

$(AC + CK) + CD < AB' + (B'K + KD) + CK$.
Сократим на CK и получим:
$AC + CD < AB' + B'D$.
Следовательно, в рассмотренной конфигурации $AB < AC$.

Ответ: невозможно определить, кто из мальчиков раньше достиг «промежуточного» дерева – Саша березы или Паша клена.

1.2 На поляне растут четыре дерева – дуб, клен, береза и осина, так, что, прислонившись хотя бы с одной стороны спиной к каждому из деревьев кроме дуба, человек может видеть другие три дерева. Саша бежит от осины к березе, от березы к дубу. Паша бежит от осины к клену, от клена к дубу. Мальчики стартуют одновременно и бегут с одинаковой скоростью по кратчайшему пути. Саша оказался у дуба раньше Паши. Можно ли определить, кто из мальчиков раньше достиг «промежуточного» дерева – Саша березы или Паша клена?

Решение.
В условии спрятан невыпуклый четырехугольник с вершинами A (осина), B (береза), C (клен) и D (дуб), в котором $AB + BD < AC + CD$, причем точка D лежит внутри треугольника ABC. Кратчайший путь подразумевает, что мальчики двигаются по отрез-

кам, соединяющим вершины (по сторонам или диагоналям) четырехугольника. Поскольку скорости мальчиков считаются равными, требуется сравнить длину отрезков AB и AC. Как и в задаче 1.1 возможны несколько вариантов расположения точек, но для краткости (в отличие от приведенного выше решения задачи 1.1) ограничимся двумя примерами, иллюстрирующими противоположные результаты.

1.) Пусть $A(0;0), B(8;8), D(4;0), C(5;-10)$. Тогда $AC = 5\sqrt{5}, CD = \sqrt{101}, AB = 8\sqrt{2}, BD = 4\sqrt{5}$. Здесь $AC + CD > AB + BD$ и $AB > AC$.
2.) Пусть $A(0;0), B(8;8), D(4;0), C(5;-11)$. Тогда $AC = \sqrt{146}, CD = \sqrt{122}, AB = 8\sqrt{2}, BD = 4\sqrt{5}$. Здесь $AC + CD > AB + BD$ и $AC > AB$.

Ответ: невозможно определить, кто из мальчиков раньше достиг «промежуточного» дерева – Саша березы или Паша клена.

1.3 На поляне растут четыре дерева – дуб, клен, береза и осина, так, что, прислонившись хотя бы с одной стороны спиной к каждому из деревьев кроме осины, человек может видеть другие три дерева. Саша бежит от осины к березе, от березы к дубу. Паша бежит от осины к клену, от клена к дубу. Мальчики стартуют одновременно и бегут с одинаковой скоростью по кратчайшему пути. Саша оказался у дуба раньше Паши. Можно ли определить, кто из мальчиков раньше достиг «промежуточного» дерева – Саша березы или Паша клена?

Решение аналогично решению задачи 1.2 с точностью до перестановки точек A и D.

Ответ: невозможно определить, кто из мальчиков раньше достиг «промежуточного» дерева – Саша березы или Паша клена.

Задача 2. (5 баллов)

2.1. После аварии на атомной электростанции в Фукусиме 1 млн тонн воды, загрязненной тритием, складируют в специальных резервуарах. Концентрация трития в этой воде на уровне $4 \cdot 10^6$ Бк/кг (1 беккерель — один распад в секунду). Оцените отношение числа радиоактивных молекул воды в резервуаре к числу обычных, если период полураспада трития 12,3 года. Молярную массу воды принять равной 18 г/моль, а число Авогадро — $6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

Решение. Переведем период полураспада трития в секунды. В среднем в году содержится 365,25 дней, каждый из которых состоит из 24 часов. Учитывая, что в часе 3600 секунд, найдем, что в году всего

$$365{,}25 \cdot 24 \cdot 3600 \approx 3{,}16 \cdot 10^7 \text{ секунд.}$$

Поэтому период полураспада трития составляет

$$12{,}3 \cdot 3{,}16 \cdot 10^7 = 3{,}89 \cdot 10^8 \text{ секунд.}$$

Согласно условию, в настоящий момент в одном килограмме загрязненной воды происходит $4 \cdot 10^6$ распадов трития в секунду. При такой же скорости распада за время, равное периоду полураспада трития, в одном килограмме загрязненной воды произойдет всего

$$4 \cdot 10^6 \cdot 3{,}89 \cdot 10^8 = 1{,}56 \cdot 10^{15} \text{ распадов.}$$

По определению период полураспада — это время, за которое распадается половина имеющихся радиоактивных ядер. Соответственно в одном килограмме загрязненной воды на текущий момент имеется всего

$$\sim 2 \cdot 1{,}56 \cdot 10^{15} = 3{,}1 \cdot 10^{15} \text{ молекул воды с тритием.}$$

Как известно, масса одного литра воды составляет 1 кг, поэтому в литре содержится

$$\frac{1\ \text{кг} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}\ \text{моль}^{-1}}{0{,}018\ \text{кг/моль}} = 3{,}3 \cdot 10^{25} \text{ молекул воды.}$$

Таким образом, в загрязненной воде обычных молекул больше примерно в $1{,}1 \cdot 10^{10}$ раз, чем молекул воды с радиоактивным тритием (обычные молекулы воды — это H_2O, молекулы с тритием — это T_2O, где T — химический символ трития).

Заметим, что атомная масса трития равна 3, поэтому молярная масса T_2O равна 0,022 кг/моль. Однако, учитывая, что на одну молекулу T_2O приходится 10^{10} молекул H_2O, молярная масса которой 0,018 кг/моль, увеличение средней молярной массы загрязненной воды по сравнению с 0,018 кг/моль крайне мало. Гораздо больший вклад дает тяжелая вода с дейтерием D_2O (молярная масса 0,020 кг/моль), природное содержание которого $\sim 1{,}2 \cdot 10^{-4}$, что гораздо больше, чем 10^{-10}. Кроме того, в природе также существуют в малом количестве стабильные тяжелые изотопы кислорода ^{17}O и ^{18}O. С учетом наличия тяжелых изотопов водорода и кислорода молярная масса природной воды оказывается равной 0,01801528 кг/моль.

Более существенное приближение, которое было сделано выше при решении задачи, состоит в следующем. Мы приняли, что скорость распада трития в загрязненной воде в течение всех 12,3 лет неизменна и находится на современном уровне $4 \cdot 10^6$ распадов трития в секунду в одном килограмме. Однако из-за того, что количество трития вследствие распада с течением времени уменьшается, то и количество его распадов в секунду должно уменьшаться, причем равномерно в каждом килограмме загрязненной воды. Это означает, что за 12,3 года произойдет не $1{,}56 \cdot 10^{15}$ распадов, а меньше. Поэтому найденное число молекул воды с тритием $3{,}1 \cdot 10^{15}$ — это лишь оценка сверху истинного числа таких молекул.

Точное решение рассматриваемой задачи можно получить с помощью закона радиоактивного распада. Этот закон говорит о том, что число распадов dN, происходящих в течение малого промежутка времени dt в некоторой массе вещества, содержащем радиоактивные атомные ядра, пропорционально dt и общему числу радиоактивных ядер N (при этом подразумевается, что это число весьма велико). Можно записать закон радиоактивного распада в следующем виде:

$$dN = -\lambda N dt,$$

где λ — так называемая постоянная распада, а знак «минус» в правой части равенства показывает, что общее число радиоактивных ядер с течением времени уменьшается.

Эта формула, описывающая закон радиоактивного распада, представляет собой дифференциальное уравнение, решение которого дает закон изменения числа ядер N с течением времени t:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}, \qquad (*)$$

где N_0 — число ядер в начальный момент времени $t = 0$, а число

$$e = 2{,}718281828\,...$$

— известная математическая константа (основание натуральных логарифмов). При этом говорят, что N убывает по экспоненциальному закону (или экспоненциально).
Скорость радиоактивного распада I, то есть число распадов в единицу времени, также убывает экспоненциально с течением времени

$$I(t) = -\frac{dN}{dt} = \lambda N = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = I_0 e^{-\lambda t}$$

(здесь $I_0 = \lambda N_0$ — скорость распада в начальный момент времени $t = 0$). Величина I_0 для одного килограмма загрязненной воды нам дана в условии: $4 \cdot 10^6$ распадов в секунду. Таким образом, чтобы найти искомую величину N_0, достаточно определить постоянную распада λ — это можно сделать, зная период полураспада трития $t_{1/2}$. За время $t_{1/2}$ от начального числа ядер N_0 останется половина. Поэтому на основании формулы (*) можно записать

$$N(t_{1/2}) = N_0/2 = N_0 e^{-\lambda t_{1/2}}.$$

Отсюда получаем, что

$$\lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} = \frac{\ln 2}{3{,}89 \cdot 10^8} = 1{,}78 \cdot 10^{-9}\ \text{с}^{-1}.$$

Тогда

$$N_0 = \frac{I_0}{\lambda} = \frac{4 \cdot 10^6\ \text{с}^{-1}}{1{,}78 \cdot 10^{-9}\ \text{с}^{-1}} \approx 2{,}2 \cdot 10^{15}$$

— столько молекул воды с тритием содержится в одном килограмме загрязненной воды в настоящее время. Как видим, полученная выше оценка содержания молекул воды с тритием оказалась завышенной в 1,4 раза.

Ответ: обычных молекул больше в $1{,}1 \cdot 10^{10}$ раз.

2.2. После аварии на атомной электростанции в Фукусиме 1 млн тонн воды, загрязненной тритием, складируют в специальных резервуарах. Концентрация трития в этой воде на уровне $4 \cdot 10^6$ Бк/кг (1 беккерель — один распад в секунду). Оцените период полураспада трития, если известно, что отношение числа молекул воды с тритием, содержащихся в резервуаре, к числу обычных молекул воды составляет $1{:}\,10^{10}$. Молярную массу воды принять равной 18 г/моль, а число Авогадро — $6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

Ответ: ~ 13 лет (из приближенного решения, не учитывающего уменьшения скорости распада с течением времени).

2.3. После аварии на атомной электростанции в Фукусиме 1 млн тонн воды, загрязненной тритием, складируют в специальных резервуарах. Известно, что отношение числа молекул воды с тритием, содержащихся в резервуаре, к числу обычных молекул воды составляет $1:10^{10}$. Оцените концентрацию трития в загрязненной воде в единицах Бк/кг (1 беккерель — один распад в секунду), если период полураспада трития 12,3 года. Молярную массу воды принять равной 18 г/моль, а число Авогадро — $6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

Ответ: $4{,}2 \cdot 10^{6}$ Бк/кг (из приближенного решения, не учитывающего уменьшения скорости распада с течением времени).

Задача 3. (5 баллов)

3.1. В химической технологии существует модель реактора идеального вытеснения. Это реактор, в котором частицы движутся упорядоченно в одном направлении и с одинаковой скоростью, не перемешиваясь с другими частицами. Для такого реактора установлена следующая зависимость времени пребывания в реакторе от степени превращения вещества для реакций первого порядка:

$$t = \frac{1}{k} * \ln(\frac{1}{1-x})$$

где t - время пребывания в реакторе, k – константа скорости реакции, x – степень превращения (в долях).

Определите, какая степень превращения будет достигнута на выходе реактора, представляющего собой цилиндр, радиусом 5 сантиметров и длиной 1 метр для реакции первого порядка разложения ацетальдегида на метан и угарный газ, если константа скорости этой реакции составляет 0.33 $с^{-1}$, а объемная скорость подачи реагента в реактор составляет 10 л/с.

Решение:

Объем реактора равен

$$V = \pi R^2 H = \pi \cdot 5^2 \cdot 100 = 7853{,}98 \text{ см}^3 = 7{,}854 \text{ л.}$$

Чтобы найти время пребывания каждой частицы, нужно объем реактора поделить на скорость подачи реагента:

$$t = \frac{7{,}854}{10} = 0{,}7854 \text{ с.}$$

Поскольку

$$\frac{1}{1-x} = \mathrm{e}^{kt} = \mathrm{e}^{0{,}33 \cdot 0{,}7854} = 1{,}2959,$$

то искомая степень превращения

$$x = 0{,}2283$$

или примерно 23%.

Ответ: ≈23%.

3.2. В химической технологии существует модель реактора идеального вытеснения. Это реактор, в котором частицы движутся упорядоченно в одном направлении и с одинаковой скоростью, не перемешиваясь с другими частицами. Для такого реактора установлена следующая зависимость времени пребывания в реакторе от степени превращения вещества для реакций первого порядка:

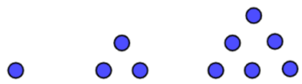
$$t = \frac{1}{k} * \ln(\frac{1}{1-x})$$

где t - время пребывания в реакторе, k – константа скорости реакции, x – степень превращения (в долях).
Определите, какая степень превращения будет достигнута на выходе реактора, представляющего собой цилиндр, радиусом 9 сантиметров и длиной 2 метра для реакции первого порядка разложения ацетальдегида на метан и угарный газ, если константа скорости этой реакции составляет 0.5 с$^{-1}$, а объемная скорость подачи реагента в реактор составляет 7 л/с.

Ответ: ≈97%

Задача 4. (5 баллов)

4.1. Треугольное число T_n - число точек, которые могут быть расставлены в форме правильного треугольника со стороной n точек. Например, $T_1 = 1, T_2 = 3, T_3 = 6$ (см. рисунок).



А) Напишите программу, которая вычисляет и хранит значения всех треугольных чисел для n от 1 до 2021 включительно.
Б) Сформулируйте гипотезу, как связаны значения чисел T_{i+j}, T_i, T_j, i, j.
В) Напишите программу, которая проверяет гипотезу для $T_{i+j} = T_{2021}$ и всех возможных значений i, j.
Г) Докажите гипотезу.

Решение:
А) Заметим, что каждый последующий треугольник получается добавлением одной линии точек. Число точек в добавляемой линии равно номеру соответствующего треугольного числа, то есть $T_n = T_{n-1} + n$.
Пример программы на Pascal:

```
program Dots;
var
   T: array[1..2021] of longint;
   i: integer;

begin
  T[1]:=1;
  for i:=2 to 2021 do
    T[i]:=T[i-1]+i;
end.
```

Обратим внимание, что значения треугольных чисел быстро растут, например, $T_{2021} = 2043231$, и для работы с такими числами нельзя использовать тип integer.

Б) Используя программу из пункта А) выведем на экран значения нескольких первых треугольных чисел и сформулируем гипотезу, как связаны значения чисел T_{i+j}, T_i, T_j, i, j.

$$T_1 = 1, T_2 = 3, T_3 = 6, T_4 = 10, T_5 = 15, T_6 = 21, \ldots$$
$$T_3 = T_{1+2} = T_1 + T_2 + 2,$$
$$T_4 = T_{1+3} = T_1 + T_3 + 3,$$
$$T_5 = T_{1+4} = T_1 + T_4 + 4,$$

$$T_6 = T_{1+5} = T_1 + T_5 + 5,$$
$$T_4 = T_{2+2} = T_2 + T_2 + 4,$$
$$T_5 = T_{2+3} = T_2 + T_3 + 6,$$
$$T_6 = T_{2+4} = T_2 + T_4 + 8,$$
$$T_6 = T_{3+3} = T_3 + T_3 + 9.$$

Гипотеза: $T_{i+j} = T_i + T_j + i \cdot j$.

В) С помощью программы проверим нашу гипотезу для $T_{i+j} = T_{2021}$.

```
program Dots;
var
    T: array[1..2021] of longint;
    i: integer;
    b: boolean;

begin
  T[1]:=1;
  for i:=2 to 2021 do
    T[i]:=T[i-1]+i;
  b:=true;
  i:=1;
  while (b and (i<2011)) do
  begin
    if (T[i]+T[2021-i]+i*(2021-i) <> T[2021]) then
      b:=false;
    i:=i+1;
  end;
  if b then
    writeln('Гипотеза верна')
    else
    writeln('Гипотеза неверна');
end.
```

В результате работы программы мы получили сообщение «Гипотеза верна».

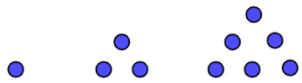
Заметим, что проверку гипотезы следует прекращать при появлении первого ложного результата и в силу коммутативности сложения и умножения проверку гипотезы достаточно провести для $i = 1, \dots, 1010$.

Г) Докажем гипотезу, сформулированную в п.Б), используя следующее наблюдение, по сути, сформулированное в п. А): значение треугольного числа T_n равно сумме S_n первых n членов арифметической прогрессии, где $a_1 = 1$ и разность $d = 1$. Следовательно, $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

$$T_{i+j} = \frac{1}{2}(i+j)(i+j+1) = \frac{1}{2}i(i+1) + \frac{1}{2}j(j+1) + ij = T_i + T_j + ij.$$

Ответ: Б) $T_{i+j} = T_i + T_j + i \cdot j$.

4.2. Треугольное число T_n - число точек, которые могут быть расставлены в форме правильного треугольника со стороной n точек. Например, $T_1 = 1, T_2 = 3, T_3 = 6$ (см. рисунок).



А) Напишите программу, которая вычисляет и хранит значения всех треугольных чисел для n от 1 до 2000 включительно.
Б) Сформулируйте гипотезу, как связаны значения чисел $T_{i\cdot j}$, T_i, T_j, T_{i-1}, T_{j-1}.
В) Напишите программу, которая проверяет гипотезу для $T_{i\cdot j} = T_{2000}$ и всех возможных значений i, j.
Г) Докажите гипотезу.

Решение для п. Б) и Г):
Б)

$$T_1 = 1, T_2 = 3, T_3 = 6, T_4 = 10, T_5 = 15, T_6 = 21, T_9 = 45, T_{10} = 55, T_{12} = 78, T_{20} = 210,$$

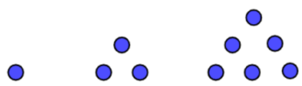
$$T_4 = T_{2\cdot 2} = T_2 \cdot T_2 + T_1 \cdot T_1,$$
$$T_6 = T_{2\cdot 3} = T_2 \cdot T_3 + T_1 \cdot T_2,$$
$$T_{12} = T_{3\cdot 4} = T_3 \cdot T_4 + T_2 \cdot T_3,$$
$$T_{12} = T_{2\cdot 6} = T_2 \cdot T_6 + T_1 \cdot T_5,$$
$$T_{20} = T_{4\cdot 5} = T_4 \cdot T_5 + T_3 \cdot T_4,$$
$$T_{20} = T_{2\cdot 10} = T_2 \cdot T_{10} + T_1 \cdot T_9.$$

Гипотеза: $T_{ij} = T_i \cdot T_j + T_{i-1} \cdot T_{j-1}$.
Г)

$$T_i \cdot T_j + T_{i-1} \cdot T_{j-1} = \frac{1}{2}i(i+1) \cdot \frac{1}{2}j(j+1) + \frac{1}{2}(i-1)i \cdot \frac{1}{2}(j-1)j =$$
$$= \frac{1}{4}ij\big((i+1)(j+1) + (i-1)(j-1)\big) = \frac{1}{2}ij(ij+1) = T_{i\cdot j}.$$

Ответ: $T_{i\cdot j} = T_i \cdot T_j + T_{i-1} \cdot T_{j-1}$.

4.3. Треугольное число T_n - число точек, которые могут быть расставлены в форме правильного треугольника со стороной n точек. Например, $T_1 = 1, T_2 = 3, T_3 = 6$ (см. рисунок).



А) Напишите программу, которая вычисляет и хранит значения всех треугольных чисел для n от 1 до 2022 включительно.
Б) Сформулируйте гипотезу, как связаны значения чисел T_{2i}, T_i, T_{i-1}.
В) Напишите программу, которая проверяет гипотезу для всех возможных значений T_{2i}, $i = 1, \dots, 1011$, вычисленных в пункте А).
Г) Докажите гипотезу.

Ответ: Б) $T_{2i} = 3T_i + T_{i-1}$.
Г) $3T_i + T_{i-1} = \frac{3}{2}i(i+1) + \frac{1}{2}(i-1)i = \frac{1}{2}i(3i+3+i-1) = \frac{1}{2}(2i)(2i+1) = T_{2i}$.