ШКОЛЬНЫЕ ОЛИМПИАДЫ СПбГУ 2022

комплекс предметов «Инженерные системы»
(математика, информатика, физика, химия),
2021/22 учебный год.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

Условия задач
(решения / ответы)

8–9 класс

Задача 1. (5 баллов)

1.1. Ракета Falcon 9 с туристическим экипажем на борту за 160 с после старта разгоняется до скорости 7025 км/ч, набирая высоту 81,1 км, на которой разделяются ступени. Определите угол наклона траектории к горизонту, если считать, что движение ракеты прямолинейное и равноускоренное. Шарообразность Земли не учитывать.

Решение.
Переведем заданную в условии скорости в м/с: 7025/3.6 = 1951 м/с
Найдем ускорение:

$$a = {}^{V}\!/_{t} = {}^{1951}\!/_{160} = 12{,}19 \text{ м/с}^2$$

Найдем путь:

$$S = at^2 = 12{,}19 \cdot 160^2 = 312064\text{м} \approx 312{,}1\text{км}$$

Угол наклона траектории:

$$arcsin\left({}^{81{,}1}\!/_{312{,}1}\right) \approx 15{,}6°$$

Ответ: ≈ 15.06°

1.2. Ракета Falcon 9 с туристическим экипажем на борту стартует под углом 15° к горизонту и за 160 с разгоняется до скорости 7025 км/ч, при которой разделяются ступени. Определите, на какой высоте произошло разделение ступеней, если считать, что движение ракеты прямолинейное и равноускоренное. Шарообразность Земли не учитывать.

Ответ: ≈ 81 км

Задача 1. (5 баллов)
Задача 2. (5 баллов)

2.1. У Васи есть 4 грузика и двое электронных весов: если на одни из них положить грузик массой m грамм, то они показывают на табло число, равное m («прямые» весы), а если этот же грузик положить на вторые весы, то они показывают число, равное $1/m$ («обратные» весы). Вася положил один из своих грузиков на «прямые» весы, а три остальные — на «обратные». При этом и те, и другие весы показали на табло одинаковое число. После того как Вася переложил один из грузиков с «обратных» весов на «прямые», показания обоих весов снова совпали. Найдите массы всех Васиных грузиков, если известно, что их суммарная масса равна 3 грамма и что массы по крайней мере двух из них одинаковы.

Решение. Обозначим массы Васиных грузиков через m_1, m_2, m_3 и m_4, а их суммарную массу — через M:

$$m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = M.$$

Пусть в первом случае равенства показаний весов на «прямых» весах был грузик m_1, а на «обратных» — грузики m_2, m_3 и m_4. Тогда

$$m_1 = \frac{1}{m_2 + m_3 + m_4} = \frac{1}{M - m_1}.$$

Значит,

$$m_1(M - m_1) = 1. \qquad (*)$$

Отсюда получаем квадратное уравнение

$$m_1{}^2 - Mm_1 + 1 = 0$$

для определения m_1. Решение этого уравнения

$$m_1 = \frac{M \pm \sqrt{M^2 - 4}}{2}.$$

Заметим, что при $M \geq 2$ оба этих корня являются вещественными положительными числами, поэтому могут представлять собой значение массы грузика (у нас по условию $M = 3$).

Будем считать, что Вася переложил с «обратных» весов на «прямые» грузик m_2. Тогда

$$m_1 + m_2 = \frac{1}{m_3 + m_4} = \frac{1}{M - m_1 - m_2} \ \rightarrow \ (m_1 + m_2)(M - m_1 - m_2) = 1.$$

Раскроем скобки в последнем равенстве:

$$m_1(M - m_1) - m_1 m_2 + m_2(M - m_1 - m_2) = 1$$

Принимая во внимание соотношение (*) и сокращая на m_2, получаем, что

$$M = 2m_1 + m_2 \ \rightarrow \ m_2 = M - 2m_1.$$

Подставим возможные значения массы m_1:

$$m_1 = \frac{M - \sqrt{M^2 - 4}}{2} \;\rightarrow\; m_2 = \sqrt{M^2 - 4}\,,$$

$$m_1 = \frac{M + \sqrt{M^2 - 4}}{2} \;\rightarrow\; m_2 = -\sqrt{M^2 - 4}\,.$$

Вторая пара значений m_1 и m_2 нам не подходит, поскольку грузик не может иметь отрицательную массу.

Найдем массы двух оставшихся грузиков, m_3 и m_4. С одной стороны,

$$M = m_1 + m_2 + m_3 + m_4\,,$$

а с другой стороны, $M = 2m_1 + m_2$. Поэтому $m_3 + m_4 = m_1$. По условию хотя бы два грузика имеют одинаковые массы. Ясно, что $m_1 > m_3$ и $m_1 > m_4$. Сравним m_1 и m_2:

$$m_2 - m_1 = \sqrt{M^2 - 4} - \frac{M - \sqrt{M^2 - 4}}{2} = \frac{3\sqrt{M^2 - 4} - M}{2} \geq 0\,,$$

если

$$3\sqrt{M^2 - 4} \geq M \;\rightarrow\; 9M^2 - 36 \geq M^2 \;\rightarrow M \geq \sqrt{4{,}5}\,.$$

В нашем случае это неравенство верно, поскольку $M = 3$.

Таким образом, $m_2 > m_1$. Это означает, что равные массы могут иметь только грузики m_3 и m_4:

$$m_3 = m_4 = \frac{m_1}{2} = \frac{M - \sqrt{M^2 - 4}}{4}.$$

Подставив заданное в условии задачи $M = 3$, получим искомые значения m_1, m_2, m_3 и m_4.

Ответ: $m_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, $m_2 = \sqrt{5}$, $m_3 = m_4 = \frac{3-\sqrt{5}}{4}$.

2.2. У Василисы есть 4 грузика и двое электронных весов: если на одни из них положить грузик массой m грамм, то они показывают на табло число, равное m («прямые» весы), а если этот же грузик положить на вторые весы, то они показывают число, равное $1/m$ («обратные» весы). Василиса положила три своих грузика на «прямые» весы, а четвертый — на «обратные». При этом и те, и другие весы показали на табло одинаковое число. После того как Василиса переложила один из грузиков с «прямых» весов на «обратные», показания обоих весов снова совпали. Найдите массы всех Василисиных грузиков, если известно, что их суммарная масса равна 4 грамма и что массы по крайней мере двух из них одинаковы.

Ответ: $m_1 = 2 - \sqrt{3}$, $m_2 = 2\sqrt{3}$, $m_3 = m_4 = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$.

Задача 3. (5 баллов)

3.1. Миша и Маша играют в следующую игру: сначала Миша называет два различных натуральных числа, затем Маша тоже называет два различных натуральных числа, не совпадающих ни с одним из чисел Миши. Числа Миши служат длинами оснований, а числа Маши — длинами боковых сторон трапеции. Если трапеции с такими сторонами не существует, то игра заканчивается и победившим считается Миша. В противоположном случае Миша считает сумму большего основания и меньшей боковой стороны, а Маша — сумму меньшего основания и большей боковой стороны. Побеждает тот, у кого получилось меньшее число.

А) Предложите алгоритм, с помощью которого ребята могут проверить, существует ли трапеция с заданными ими длинами сторон.

Б) Всегда ли Маша может обеспечить себе выигрыш в такой игре?

Решение.

Обозначим основания возможной трапеции AD и BC (AD>BC), а боковые стороны – AB и CD (AB<CD). Опишем алгоритм построения трапеции ABCD. На отрезке AD отметим точку E такую, что AE=BC. Проведем окружность с центром в точке E с радиусом AB, проведем окружность с центром в точке D с радиусом DC. Если построенные окружности пересекаются в двух точках, то интересующая нас трапеция существует. Возьмем любую из двух точек пересечения – это и есть вершина C. Далее с помощью известных из школьного курса процедур можем построить через точку C прямую, параллельную AD и завершить построение искомой трапеции.

При каких условиях окружности, описанные выше, пересекаются? Сумма их радиусов должна быть больше расстояния между центрами, то есть

$$AB+CD>AD-BC \qquad (1)$$

но большей радиус не должен превышать сумму меньшего радиуса и расстояния между центрами, то есть

$$CD<(AD-BC)+AB \qquad (2)$$

Обратим внимание, что выполнение условия (2) влечет справедливость неравенства

$$BC+CD<AD+AB,$$

что эквивалентно гарантированной победе Маши в случае существования трапеции. Осталось выяснить, всегда ли Маша может обеспечить выполнение условий (1) и (2).

После того как Миша назвал свои числа, величина AD-BC становится известной и фиксированной, тогда обеспечить выполнение условия (1) можно всегда. Перепишем условие (2) в виде

$$CD-AB<AD-BC.$$

Поскольку условие задачи подразумевает использование только натуральных и различных длин сторон трапеции, то Миша может назвать такие числа, что AD-BC=1. В этом случае победа Маши невозможна.

3.2. Миша и Маша играют в следующую игру: сначала Миша называет два различных натуральных числа, затем Маша тоже называет два различных натуральных числа, не совпадающих ни с одним из чисел Миши. Числа Миши служат длинами оснований, а числа Маши — длинами боковых сторон трапеции. Если трапеции с такими сторонами не существует, то игра заканчивается и победившим считается Миша. В противоположном случае Миша считает сумму большего основания и меньшей боковой стороны, а Маша — сумму меньшего основания и большей боковой стороны. Побеждает тот, у кого получилось большее число.

А) Предложите алгоритм, с помощью которого ребята могут проверить, существует ли трапеция с заданными ими длинами сторон.

Б) Может ли Маша обеспечить себе выигрыш в такой игре?

Ответ: алгоритм аналогичен решению задачи 3.1.

Задача 4. (5 баллов)

4. В большую колбу помещены ортофосфорная кислота (объем, молярная концентрация и плотность раствора кислоты равны X_1, Y_1 и Z_1 соответственно) и гидроксид натрия (объем, молярная концентрация и плотность раствора гидроксида равны X_2, Y_2 и Z_2соответственно).
Составьте компьютерную программу, которая по входным параметрам (X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2) рассчитывает массовые доли веществ в конечном растворе.
Примечание:
а) входные данные могут быть считаны из файла, а результат записан в файл; в случае, если чтение данных из файла еще не изучались, то ввод их осуществляется с клавиатуры;
б) программа должна содержать комментарии, обеспечивающие понимание алгоритма работы программы.

Решение.

Понимаем, что в любом случае в конечной смеси одновременно могут находиться только ДВА максимум вещества. (В случае равенства одно вещество). Можно отдельно прописать случаи когда объем или концентрация одного из веществ 0.

Находим число молей кислоты и щелочи путем перемножения концентрации на объем:

число молей кислоты: $X_1 * Y_1 = n_{к}$

число молей щелочи: $X_2 * Y_2 = n_{щ}$

Сравниваем полученные числа. Возможны 4 варианта:

1) если $n_{щ} \leq n_{к}$ в этом случае смесь состоит из двух веществ: дигидрофосфат и оставшаяся исходная кислота.

Число молей дигидрофосфата равно числу исходных молей щелочи: $n_{\text{диг}} = n_{\text{щ}}$, а число молей кислоты (остаток): $n_{\text{остаток}} = n_{\text{к}} - n_{\text{щ}}$.

Найдем массу (в граммах) дигидрофосфата путем умножения $n_{\text{диг}}$ на молярную массу дигидрофосфата натрия (которая равна 120):

$$M_{\text{диг}} = n_{\text{диг}} * 120$$

Массу остатка (в граммах) найдем аналогично т.е. умножив число молей ($n_{\text{остаток}}$) на молярную масса кислоты (которая равна 98):

$$M_{\text{остаток}} = n_{\text{остаток}} * 98$$

Масса конечного раствора состоит из массы составных его частей:

$$M_{end} = X_1 * Z_1 + X_2 * Z_2$$

В процентах:

$$\frac{M_{\text{диг}}}{M_{end}} * 100\% \quad \text{и} \quad \frac{M_{\text{остаток}}}{M_{end}} * 100\%$$

2) если $n_{\text{щ}}/2 \ \leq n_{\text{к}} \leq n_{\text{щ}}$ тогда получаем смесь из дигидрофосфата и гидрофосфата.

Число молей гидрофосфата равно числу молей исходной щелочи за вычетом числа молей исходной кислоты:

$$n_{\text{гидрофосф}} = n_{\text{щ}} - n_{\text{к}} \, .$$

Число молей дигидрофосфата равно удвоенному числу молей исходной кислоты за вычетом числа молей исходной щелочи:

$$n_{\text{диг}} = 2 * n_{\text{к}} - n_{\text{щ}}$$

Найдем массу дигидрофосфата путем умножения $n_{\text{диг}}$ на молярную массу дигидрофосфата натрия (которая равна 120):

$$M_{\text{диг}} = n_{\text{диг}} * 120$$

Массу гидрофосфата найдем путем умножения $n_{\text{гидрофосф}}$ на молярную массу гидрофосфата натрия (которая равна 142):

$$M_{\text{гидрофосф}} = n_{\text{гидрофосф}} * 142$$

Масса конечного раствора:

$$M_{end} = X_1 * Z_1 + X_2 * Z_2$$

В процентах:

$$\frac{M_{\text{диг}}}{M_{end}} * 100\% \quad \text{и} \quad \frac{M_{\text{гидрофосф}}}{M_{end}} * 100\%$$

3) если $n_{\text{щ}}/3 \ \leq n_{\text{к}} \leq n_{\text{щ}}/2$ тогда получаем смесь из гидрофосфата и фосфата.

Число молей фосфата равно числу молей исходной щелочи за вычетом удвоенного числа молей исходной кислоты:

$$n_{\text{фосфата}} = n_{\text{щ}} - 2 * n_{\text{к}}$$

Число молей гидрофосфата:

$$n_{\text{гидрофосф}} = 3 * n_{\text{к}} - n_{\text{щ}}$$

Находим массу:

$$M_{гидрофосф} = n_{гидрофосф} * 142$$
$$M_{фосф} = n_{фосф} * 164$$

Масса конечного раствора:

$$M_{end} = X_1 * Z_1 + X_2 * Z_2$$

В процентах:

$$\frac{M_{гидрофосф}}{M_{end}} * 100\% \quad \text{и} \quad \frac{M_{фосф}}{M_{end}} * 100\%$$

4) если $n_щ/3 \geq n_к$ тогда раствор состоит из фосфата и щелочи.

Число молей фосфата равно числу молей исходной кислоты:

$$n_{фосфата} = n_к$$

Число молей щелочи (остаток):

$$n_{остаток} = 3 * n_щ - n_к$$

Массу и доли считаем аналогично предыдущим случаям:

$$M_{фосф} = n_{фосф} * 164$$
$$M_{щелочи} = n_{щелочи} * 40$$

Масса конечного раствора:

$$M_{end} = X_1 * Z_1 + X_2 * Z_2$$

В процентах:

$$\frac{M_{щелочи}}{M_{end}} * 100\% \quad \text{и} \quad \frac{M_{фосф}}{M_{end}} * 100\%$$

Примечание: рассмотрены строгие неравенства, однако при равенстве условий т.е. в случаях когда выполняется:

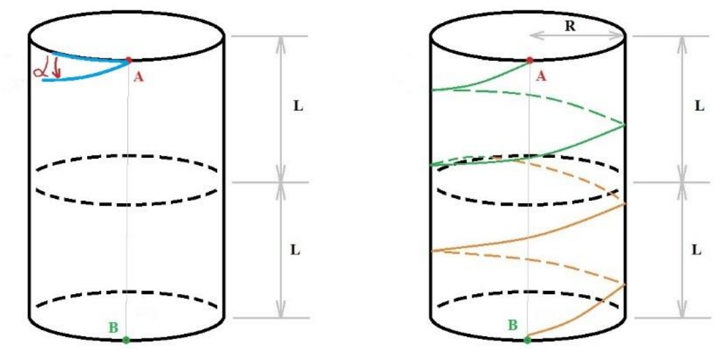
$$n_щ/2 \leq n_к \leq n_щ \quad \textit{и/или} \quad n_щ/3 \leq n_к \leq n_щ/2$$

тогда раствор состоит из одного вещества и одна из массовых долей =0.

Программная реализация дынной задачи состоит в последовательной проверке условий для всех 4 пунктов, вычисление долей и вывод результатов на экран.

Задача 5. (5 баллов)

5. Посадочный модуль космического аппарата, который летит горизонтально к поверхности планеты, использует для спуска спиральную траекторию, лежащую на поверхности некоторого цилиндра с радиусом основания R. Начав спуск в точке A, высота которой равна $2L$, модуль должен приземлиться в точке B, расположенной на поверхности планеты точно под точкой A. При сходе с орбиты аппарат имеет скорость 20 единиц в секунду и изменяет траекторию на угол α, который отсчитывается против часовой стрелки от горизонтальной траектории аппарата (см. рисунок). При прохождении высоты L аппарат снижает скорость до 10 единиц в секунду и увеличивает угол до значения β.



Пусть $R = 20$, $L = 50$, $5^o \leq \alpha \leq 10^o$, $15^o \leq \beta \leq 20^o$. Составьте компьютерную программу, которая найдет:

а) минимальное и максимальное количество витков спиральной траектории модуля для достижения точки B;

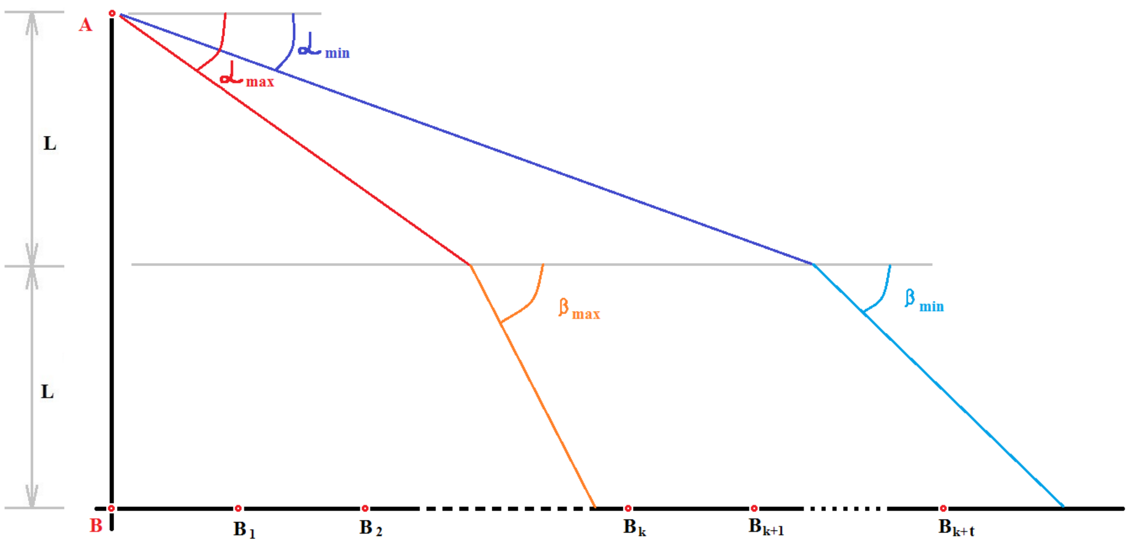
б) минимальное и максимальное время спуска модуля по спиральной траектории из точки A в точку B.

Решение.

«Разрежем» цилиндр по лини AB и рассмотрим его развертку на плоскости.

Точки B_k находится на расстоянии, кратном длине окружности R.

На высоте L проведем горизонтальную прямую на которой будет располагаться точка перехода (изменение угла снижения).



Угол α меняется от 5 до 10 градусов т.е. мы можем найти минимальное $l_{1(min)}$ и максимальное $l_{1(max)}$ расстояние на которое может улететь аппарат (по горизонтали) до того момента как угол снижения изменится на значение β.

Угол β меняется от 15 до 25 градусов т.е. мы можем найти минимальное $l_{2(min)}$ и максимальное $l_{2(max)}$ расстояние на которое может улететь аппарат от точки изменения угла до уровня точки B (по горизонтали).

Расстояние до точки B:

$$l_{min} = l_{1(min)} + l_{2(min)} = L * ctg\alpha_{max} + L * ctg\beta_{max} = \\ = 50 * [ctg10° + ctg20°] = 420{,}95,$$

$$l_{max} = l_{1(max)} + l_{2(max)} = L * ctg\alpha_{min} + L * ctg\beta_{min} = \\ = 50 * [ctg5° + ctg15°] = 758{,}1.$$

Если в промежуток [l_{min} ; l_{max}] попадает одна точка B_k то она является единственным решением для ответа на пункт 1 задачи. При этом k является количеством витков по цилиндру.
Если таких точек несколько то B_k покажет минимальное количество витков (k), а B_{k+t} покажет максимально количество витков ($k + t$).

Выясним сколько точек B может попасть в найденный промежуток [420,95 ; 758,1].
Т.к. расстояние между точками B кратно длине окружности т.е. $2\pi R$ то разделим каждую из границ на $2\pi R$ и округлим до целого следующим образом:

$$\frac{l_{min}}{2\pi R} = \frac{420{,}95}{2 * \pi * 20} \approx 3{,}3498$$

округлим в большую сторону т.е. минимально потребуется 4 витка.

$$\frac{l_{max}}{2\pi R} = \frac{758{,}1}{2 * \pi * 20} \approx 6{,}0328$$

округлим в меньшую сторону т.е. максимально потребуется 6 витков.

Время которое необходимо для спуска:

$$t_{min} = \frac{l_{1(min)}}{20} + \frac{l_{2(min)}}{10} = L * \left[\frac{ctg\alpha_{max}}{20} + \frac{ctg\beta_{max}}{10}\right] = \\ = 50 * \left[\frac{ctg10°}{20} + \frac{ctg20°}{10}\right] = 27{,}9175$$

$$t_{max} = \frac{l_{1(max)}}{20} + \frac{l_{2(max)}}{10} = L * \left[\frac{ctg\alpha_{min}}{20} + \frac{ctg\beta_{min}}{10}\right] = \\ = 50 * \left[\frac{ctg5°}{20} + \frac{ctg15°}{10}\right] = 47{,}235$$

Найденное время:

$$t_{min} = 27{,}9175$$
$$t_{max} = 47{,}235$$

является приближенными оценками и не дают ответ на вопрос №2 задачи т.к. это время для достижения уровня на котором находятся точки B_k, но это не время при котором достигается вполне определенная точка B_k.

Для ответа на вопрос №2 т.е. для поиска минимального и максимального времени спуска модуля по спиральной траектории из точки A в точку B необходимо, при некотором малом ε добиться выполнения условий :

$$|k_{min} - 4| \le \varepsilon,$$
$$|k_{max} - 6| \le \varepsilon.$$

Или иначе:

$$k_{min} = \frac{l_{min}}{2\pi R} = \frac{L * [ctg\alpha_{max} + ctg\beta_{max}]}{2\pi R} \to 4$$
$$k_{max} = \frac{l_{max}}{2\pi R} = \frac{L * [ctg\alpha_{min} + ctg\beta_{min}]}{2\pi R} \to 6$$

Это мы можем сделать путем изменения углов α и β в тех пределах который заданы в условии задачи.

Вычисление минимального времени можно оформить в виде программы:

Вычисляем: $t_{temp} = t_{min} = 27{,}9175$
Начало Цикла 1: изменяем α_{max} *в пределах от 10° до 5° с шагом 0,01,*
Начало Цикла 2: изменяем β_{max} *в пределах от 20° до 15° с шагом 0,01.*
Вычисляем k_{min}
Если $|k_{min} - 4| \leq \varepsilon$
тогда
вычисляем $t = L * \left[\frac{ctg\alpha}{20} + \frac{ctg\beta}{10}\right]$
если $t < t_{temp}$ *тогда* $t_{temp} := t$ *;*
Конец Цикла 2
Конец Цикла 1
Вывод на печать значения t_{temp}.

Вычисление максимального времени так же можно оформить в виде программы:

Вычисляем: $t_{temp} = t_{max} = 47{,}235$
Начало Цикла 1: изменяем α_{max} *в пределах от 5° до 10° с шагом 0,01,*
Начало Цикла 2: изменяем β_{max} *в пределах от 15° до 20° с шагом 0,01.*
Вычисляем k_{max}
Если $|k_{max} - 6| \leq \varepsilon$
тогда
вычисляем $t = L * \left[\frac{ctg\alpha}{20} + \frac{ctg\beta}{10}\right]$
если $t > t_{temp}$ *тогда* $t_{temp} := t$ *;*
Конец Цикла 2
Конец Цикла 1
Вывод на печать значения t_{temp}.

Следует заметить, что для вычисленного значения витков $k_{max} = 6{,}0328$ ответ о максимальном времени достаточно близок к искомому т.к. при условии $\varepsilon = 0{,}1$ выполняется условие:

$$|k_{max} - 6| \leq \varepsilon.$$

Однако при $\varepsilon = 0{,}01$ данное условие уже не будет выполняться.

В программный код, наряду с проверкой $|k_{max} - 6| \leq \varepsilon$, можно дополнительно включить проверку условия:

$$\left|t - t_{temp}\right| \leq \varepsilon.$$

Это приведет к более точному и надежному вычислению значений времени.

10–11 классы

Задача 1. (5 баллов)

1. На круговой дороге расставлено 20 столбов, расстояния между которыми одинаковы. Автомобиль проезжает расстояние между столбами за 1 минуту, а пешеход проходит это же расстояние за 9 минут. Пусть от одного из столбов автомобиль и пешеход отправились одновременно, но в разные стороны. Сколько раз автомобиль и пешеход одновременно окажутся возле одного и того же столба перед тем, как пешеход вернется к первому столбу?

Решение.

Перенумеруем столбы от 1 до 20. Пусть пешеход двигается от 1-го ко 2-му, к 3-му и т.д., а автомобиль от 1-го к 20-му, к 19-му и т.д. Обозначим скорость пешехода через $v_{\text{п}}$, а скорость автомобиля — через $v_{\text{а}}$. Тогда путь, пройденный пешеходом за время t, есть

$$y = v_{\text{п}} t.$$

Пусть l — расстояние между столбами; поделим на него обе части предыдущей формулы:

$$\frac{y}{l} = \frac{v_{\text{п}}}{l}\, t$$

— это есть путь, пройденный пешеходом, выраженный в расстояниях между столбами; при этом $n = 1 + y/l$ дает номер столба, возле которого находится пешеход (дробные значения n соответствуют тому, что пешеход находится между столбами) .

Если выражать время t в минутах и учесть, что $l/v_{\text{п}} = 9$ минут, то уравнение движения пешехода можно записать в следующем виде:

$$n = \frac{1}{9}\, t + 1.$$

Аналогичным образом записывается и уравнение движения автомобиля:

$$n = -t + 21 + 20m,$$

где m — количество кругов, пройденных автомобилем; знак «минус» означает, что автомобиль движется в направлении противоположном тому, в котором движется пешеход. Также в этой формуле учтено, что $l/v_{\text{а}} = 1$ минута, и что первый столб для автомобиля является 21-м столбом для пешехода, при этом к этому столбу автомобиль возвращается каждые 20 минут — это учитывается слагаемым $20m$.

Приравнивая правые части обоих уравнений движения, получаем уравнение

$$t = 18(m + 1).$$

Поскольку $t < 180$, т. к. пешеход вернется к первому столбу через 180 минут, то подходят значения m от 0 до 8. Например, при $m = 0$ получаем $t = 18$ минут — это означает, что пешеход прошел расстояние, равное удвоенному расстоянию между столбами. Таким образом, первая встреча пешехода и автомобиля состоится у столба с номером 3. Остальные встречи произойдут у столбов с номерами 5, 7, 9, …, 19.

Ответ: 9 раз.

Задача 2. (5 баллов)

2.1. Для того чтобы выйти на круговую орбиту Земли высотой 250 км, искусственный спутник должен набрать скорость равную как минимум 8360 м/с. Предполагается, что для запуска спутника будет использована двухступенчатая ракета-носитель с жидкостным ракетным двигателем. Пусть масса второй ступени такой ракеты равна 50 тонн, а масса спутника (то есть полезной нагрузки) равна 13 тонн. Также известно, что масса топлива составляет 84 % от массы каждой ступени.

Выберите подходящее ракетное топливо (пару горючее-окислитель) и рассчитайте общую массу данной ракеты.

При расчетах используйте формулу Циолковского (отдельно для каждой ступени, считая, что полное сгорание топлива в любой ступени позволяет набрать половину от необходимой скорости):

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{I} \times \ln(\boldsymbol{M_1}/\boldsymbol{M_2}),$$

где $\boldsymbol{V}$ — конечная скорость летательного аппарата;

$\boldsymbol{I}$ — удельный импульс ракетного двигателя (отношение тяги двигателя к секундному расходу массы топлива);

$\boldsymbol{M_1}$ — начальная масса летательного аппарата (полезная нагрузка + конструкция аппарата + топливо);

$\boldsymbol{M_2}$ — конечная масса летательного аппарата (полезная нагрузка + конструкция аппарата).

Характеристики пар двухкомпонентного топлива

Номер топлива	**Окислитель**	**Горючее**	**Удельный импульс, м/с**
1	Кислород	Водород	4194,4
2	Кислород	Керосин ($C_{10}H_{22}$)	3283,0
3	Кислород	Несимметричный диметилгидразин	3371,2
4	Кислород	Гидразин	3390,8
5	Кислород	Аммиак	3165,4
6	Тетраоксиддиазота	Керосин($C_{10}H_{22}$)	3028,2
7	Тетраоксиддиазота	Несимметричный диметилгидразин	3116,4

8	Тетраоксиддиазота	Гидразин	3155,6
9	Фтор	Водород	4400,2
10	Фтор	Гидразин	3939,6
11	Фтор	Пентаборан (B_5H_9)	3537,8

Напишите уравнения реакций горения каждого топлива из таблицы.

Решение.

Найдем значение импульса которое потребуется для подъема ракеты с заданной массой и набора заданной скорости:

$$V_1 = I \cdot ln\left(\frac{M_{\text{второйступениигруза}}}{M_{\text{конструкциивторойступениигруза}}}\right) = \frac{8360}{2} = 4180$$

$$I = \frac{V_1}{ln\left(\frac{M_{\text{второйступениигруза}}}{M_{\text{конструкциивторойступениигруза}}}\right)} =$$

$$\frac{4180}{ln\left(\frac{(50+13)}{(50\cdot 0{,}16+13)}\right)} = \frac{4180}{ln\left(\frac{63}{21}\right)} = \frac{4180}{ln(3)} = \frac{4180}{1{,}1} = 3800$$

Выберем из таблицы в условии задачи топливо с компонентом большим либо равным найденному значению: подходят №1, 9, 10.

Используем формулу Циолковского для нахождения общей массы ракеты. Обозначим массу первой ступени через $\boldsymbol{x}$. Тогда:

$$4180 = 3800 \cdot ln\left(\frac{(x+13+50)}{(x\cdot 0{,}16+13+50)}\right)$$

$$\frac{4180}{3800} = 1{,}1 = ln(3) = ln\left(\frac{(x+13+50)}{(x\cdot 0{,}16+13+50)}\right)$$

$$\frac{(x+63)}{(x\cdot 0{,}16+63)} = 3$$

$$x + 63 = 3\cdot(x\cdot 0{,}16+63)$$

Откуда получаем: $x = 242{,}3$ т.е. масса первой ступени = 242.3 тонн.

Общая масса ракеты равна:

$$M_{(общая)} = M_{(первой\ ступени)} + M_{(второй\ ступени)} + M_{(спутника)}$$

Подставим значения и получим ,что общая масса ракеты:

242.3 + 50 + 13 =305.3 тонн

Ответ: 305.3 тонн

Реакции:

1) $2H_2 + O_2 = 2H_2O$

2) $2C_{10}H_{22} + 31O_2 = 20CO_2 + 22H_2O$

3) $(CH_3)_2NNH_2 + 4O_2 = 2CO_2 + N_2 + 4H_2O$

4) $N_2H_4 + O_2 = N_2 + 2H_2O$

5) $4NH_3 + 3O_2 = 2N_2 + 6H_2O$

6) $4C_{10}H_{22} + 31N_2O_4 = 40CO_2 + 44H_2O + 31N_2$
7) $(CH_3)_2NNH_2 + 2N_2O_4 = 2CO_2 + 3N_2 + 4H_2O$
8) $2N_2H_4 + N_2O_4 = 3N_2 + 4H_2O$
9) $F_2 + H_2 = 2HF$
10) $2F_2 + N_2H_4 = N_2 + 4HF$
11) $B_5H_9 + 12F_2 = 5BF_3 + 9HF$

2.2. Для того чтобы выйти на круговую орбиту Земли высотой 250 км, искусственный спутник должен набрать скорость равную как минимум 8360 м/с. Предполагается, что для запуска спутника будет использована двухступенчатая ракета-носитель с жидкостным ракетным двигателем. Пусть масса второй ступени такой ракеты равна 32 тонны, а масса спутника (то есть полезной нагрузки) равна 10 тонн. Также известно, что масса топлива составляет 85 % от массы каждой ступени.

Выберите подходящее ракетное топливо (пару горючее-окислитель) и рассчитайте общую массу данной ракеты.

При расчетах используйте формулу Циолковского (отдельно для каждой ступени, считая, что полное сгорание топлива в любой ступени позволяет набрать половину от необходимой скорости):

$$\boldsymbol{V = I \times \ln(M_1/M_2)},$$

где $\boldsymbol{V}$ — конечная скорость летательного аппарата;

$\boldsymbol{I}$ — удельный импульс ракетного двигателя (отношение тяги двигателя к секундному расходу массы топлива);

$\boldsymbol{M_1}$ — начальная масса летательного аппарата (полезная нагрузка + конструкция аппарата + топливо);

$\boldsymbol{M_2}$ — конечная масса летательного аппарата (полезная нагрузка + конструкция аппарата).

Характеристики пар двухкомпонентного топлива

Номер топлива	**Окислитель**	**Горючее**	**Удельный импульс, м/с**
1	Кислород	Водород	4194,4
2	Кислород	Керосин ($C_{10}H_{22}$)	3283,0
3	Кислород	Несимметричный диметилгидразин	3371,2
4	Кислород	Гидразин	3390,8
5	Кислород	Аммиак	3165,4
6	Тетраоксиддиазота	Керосин($C_{10}H_{22}$)	3028,2
7	Тетраоксиддиазота	Несимметричный диметилгидразин	3116,4

8	Тетраоксиддиазота	Гидразин	3155,6
9	Фтор	Водород	4400,2
10	Фтор	Гидразин	3939,6
11	Фтор	Пентаборан (B_5H_9)	3537,8

Напишите уравнения реакций горения каждого топлива из таблицы.

Ответ: 176.4 тонн

Реакции:

1) $2H_2 + O_2 = 2H_2O$
2) $2C_{10}H_{22} + 31O_2 = 20CO_2 + 22H_2O$
3) $(CH_3)_2NNH_2 + 4O_2 = 2CO_2 + N_2 + 4H_2O$
4) $N_2H_4 + O_2 = N_2 + 2H_2O$
5) $4NH_3 + 3O_2 = 2N_2 + 6H_2O$
6) $4C_{10}H_{22} + 31N_2O_4 = 40CO_2 + 44H_2O + 31N_2$
7) $(CH_3)_2NNH_2 + 2N_2O_4 = 2CO_2 + 3N_2 + 4H_2O$
8) $2N_2H_4 + N_2O_4 = 3N_2 + 4H_2O$
9) $F_2 + H_2 = 2HF$
10) $2F_2 + N_2H_4 = N_2 + 4HF$
11) $B_5H_9 + 12F_2 = 5BF_3 + 9HF$

2.3. Для того чтобы выйти на круговую орбиту Земли высотой 250 км, искусственный спутник должен набрать скорость равную как минимум 8360 м/с. Предполагается, что для запуска спутника будет использована двухступенчатая ракета-носитель с жидкостным ракетным двигателем. Пусть масса второй ступени такой ракеты равна 60 тонн, а масса спутника (то есть полезной нагрузки) равна 15 тонн. Также известно, что масса топлива составляет 88 % от массы каждой ступени.

Выберите подходящее ракетное топливо (пару горючее-окислитель) и рассчитайте общую массу данной ракеты.

При расчетах используйте формулу Циолковского (отдельно для каждой ступени, считая, что полное сгорание топлива в любой ступени позволяет набрать половину от необходимой скорости):

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{I} \times \ln(\boldsymbol{M_1}/\boldsymbol{M_2}),$$

где $\boldsymbol{V}$ — конечная скорость летательного аппарата;

$\boldsymbol{I}$ — удельный импульс ракетного двигателя (отношение тяги двигателя к секундному расходу массы топлива);

$\boldsymbol{M_1}$ — начальная масса летательного аппарата (полезная нагрузка + конструкция аппарата + топливо);

$\boldsymbol{M_2}$ — конечная масса летательного аппарата (полезная нагрузка + конструкция аппарата).

Характеристики пар двухкомпонентного топлива

Номер топлива	Окислитель	Горючее	Удельный импульс, м/с
1	Кислород	Водород	4194,4
2	Кислород	Керосин ($C_{10}H_{22}$)	3283,0
3	Кислород	Несимметричный диметилгидразин	3371,2
4	Кислород	Гидразин	3390,8
5	Кислород	Аммиак	3165,4
6	Тетраоксиддиазота	Керосин($C_{10}H_{22}$)	3028,2
7	Тетраоксиддиазота	Несимметричный диметилгидразин	3116,4
8	Тетраоксиддиазота	Гидразин	3155,6
9	Фтор	Водород	4400,2
10	Фтор	Гидразин	3939,6
11	Фтор	Пентаборан (B_5H_9)	3537,8

Напишите уравнения реакций горения каждого топлива из таблицы.

Ответ: 412 тонн

Реакции:

1) $2H_2 + O_2 = 2H_2O$
2) $2C_{10}H_{22} + 31O_2 = 20CO_2 + 22H_2O$
3) $(CH_3)_2NNH_2 + 4O_2 = 2CO_2 + N_2 + 4H_2O$
4) $N_2H_4 + O_2 = N_2 + 2H_2O$
5) $4NH_3 + 3O_2 = 2N_2 + 6H_2O$
6) $4C_{10}H_{22} + 31N_2O_4 = 40CO_2 + 44H_2O + 31N_2$
7) $(CH_3)_2NNH_2 + 2N_2O_4 = 2CO_2 + 3N_2 + 4H_2O$
8) $2N_2H_4 + N_2O_4 = 3N_2 + 4H_2O$
9) $F_2 + H_2 = 2HF$
10) $2F_2 + N_2H_4 = N_2 + 4HF$
11) $B_5H_9 + 12F_2 = 5BF_3 + 9HF$

2.4. Для того чтобы выйти на круговую орбиту Земли высотой 250 км, искусственный спутник должен набрать скорость равную как минимум 8360 м/с. Предполагается, что для запуска спутника будет использована двухступенчатая ракета-носитель с жидкостным ракетным двигателем. Пусть масса второй ступени такой ракеты равна 47 тонн, а масса спутника (то есть полезной нагрузки) равна 12 тонн. Также известно, что масса топлива составляет 90 % от массы каждой ступени.

Выберите подходящее ракетное топливо (пару горючее-окислитель) и рассчитайте общую массу данной ракеты.

При расчетах используйте формулу Циолковского (отдельно для каждой ступени, считая, что полное сгорание топлива в любой ступени позволяет набрать половину от необходимой скорости):

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{I} \times \ln(\boldsymbol{M_1}/\boldsymbol{M_2}),$$

где $\boldsymbol{V}$ — конечная скорость летательного аппарата;

$\boldsymbol{I}$ — удельный импульс ракетного двигателя (отношение тяги двигателя к секундному расходу массы топлива);

$\boldsymbol{M_1}$ — начальная масса летательного аппарата (полезная нагрузка + конструкция аппарата + топливо);

$\boldsymbol{M_2}$ — конечная масса летательного аппарата (полезная нагрузка + конструкция аппарата).

Характеристики пар двухкомпонентного топлива

Номер топлива	**Окислитель**	**Горючее**	**Удельный импульс, м/с**
1	Кислород	Водород	4194,4
2	Кислород	Керосин ($C_{10}H_{22}$)	3283,0
3	Кислород	Несимметричный диметилгидразин	3371,2
4	Кислород	Гидразин	3390,8
5	Кислород	Аммиак	3165,4
6	Тетраоксиддиазота	Керосин($C_{10}H_{22}$)	3028,2
7	Тетраоксиддиазота	Несимметричный диметилгидразин	3116,4
8	Тетраоксиддиазота	Гидразин	3155,6
9	Фтор	Водород	4400,2
10	Фтор	Гидразин	3939,6
11	Фтор	Пентаборан (B_5H_9)	3537,8

Напишите уравнения реакций горения каждого топлива из таблицы.

Ответ: 355.5 тонн

Реакции:

1) $2H_2 + O_2 = 2H_2O$

2) $2C_{10}H_{22} + 31O_2 = 20CO_2 + 22H_2O$

3) $(CH_3)_2NNH_2 + 4O_2 = 2CO_2 + N_2 + 4H_2O$

4) $N_2H_4 + O_2 = N_2 + 2H_2O$

5) $4NH_3 + 3O_2 = 2N_2 + 6H_2O$
6) $4C_{10}H_{22} + 31N_2O_4 = 40CO_2 + 44H_2O + 31N_2$
7) $(CH_3)_2NNH_2 + 2N_2O_4 = 2CO_2 + 3N_2 + 4H_2O$
8) $2N_2H_4 + N_2O_4 = 3N_2 + 4H_2O$
9) $F_2 + H_2 = 2HF$
10) $2F_2 + N_2H_4 = N_2 + 4HF$
11) $B_5H_9 + 12F_2 = 5BF_3 + 9HF$

Задача 3. (5 баллов)

3.1. Небольшой шарик массой M покоится на вертикальном столбике высотой h. В центр шарика стреляют из ружья пулей массой m так, что она попадает в него, летя горизонтально со скоростью v_0. Пуля пробивает шарик насквозь и уносит с собой некоторую массу m' $(m' < M)$, отстреленную у шарика. Определите расстояние d, на котором пуля и прилипшая к ней отстреленная масса шарика коснутся земли, если известно, что шарик упал на землю на расстоянии s от столбика? Сопротивлением воздуха и трением шарика о поверхность столбика пренебречь.

Решение.

Введем следующие обозначения:

m – масса пули;
m' – масса куска который «прилип» к пуле;
M – масса шарика;
h – высота колонны;
v_0 – начальная скорость пули;
s – расстояние на котором упал шарик массой M после соударения.

По условию задачи необходимо найти: расстояние d, на котором пуля и прилипшая к ней отстреленная масса шарика коснутся земли.

Задача связана с законом сохранения импульса (ЗСИ). Обозначим за v и V скорости пули с прилипшем куском и шарика с оторванным куском после удара соответственно.
Изначально пуля движется вдоль горизонтальной оси X. Выпишем ЗСИ:

$$m \cdot v_0 = (m + m') \cdot v + (M - m') \cdot V$$

Выразим v:

$$v = {(m \cdot v_0 - (M - m') \cdot V)}\Big/{(m + m')}$$

Рассмотрим проекции векторов движения тел после соударения.
По оси Y оба тела после удара движутся как свободно падающие, т. е. с нулевой начальной скоростью. Тогда находим время такого падения из известной формулы:

$$gt^2/2 = h$$

Выражаем время: $t = \sqrt{2h/g}$

За это время по оси OX тела (шарик и пуля) пройдут: $S = Vt$ и $d = vt$ соответственно.

$$V = \frac{S}{t} = {}^{S}\Big/\sqrt{{}^{2h}/_{g}} = S \cdot \sqrt{{}^{g}/_{2h}}$$

$$v = {\left(m \cdot v_0 - (M - m') \cdot S \cdot \sqrt{{}^{g}/_{2h}}\right)}\Big/_{(m + m')}$$

$$\mathrm{d}{=}v \cdot t = \frac{m \cdot v_0 - (M - m') \cdot S \cdot \sqrt{{}^{g}/_{2h}}}{m + m'} \cdot S \cdot \sqrt{{}^{g}/_{2h}}$$

3.2. Небольшой шарик массой M покоится на вертикальном столбике высотой h. В центр шарика стреляют из ружья пулей массой m так, что она попадает в него, летя горизонтально со скоростью v_0. Пуля пробивает шарик насквозь и уносит с собой некоторую массу m' $(m' < M)$, отстреленную у шарика. Определите, какая часть кинетической энергии пули перешла в теплоту при ее прохождении сквозь шарик? Сопротивлением воздуха и трением шарика о поверхность столбика пренебречь.

Решение.

По условию задачи, необходимо найти часть кинетической энергии пули перешла в теплоту при ее прохождении сквозь шарик т.е. $p = dE/E_0$.

Воспользуемся обозначениями и найденными значениями из задачи 3.1.
Полная энергия системы: $E_0 = mv_0^2/2$
После соударения полная энергия – это сумма двух энергий:

$$E_{\text{пули}} = (m + m')v^2/2$$
$$E_{\text{шарика}} = (M - m')V^2/2$$

Разница уходит в тепловую энергию:

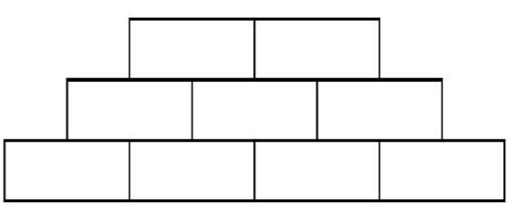
$$dE = E_0 - (E_{\text{пули}} + E_{\text{шарика}}).$$

Искомая величина есть соотношение:

$$p = dE/E_0.$$

Задача 4. (5 баллов)

4. У Васи имеется всего N одинаковых кирпичей, из которых он должен сложить идеальную стену. Стена считается идеальной только в том случае, если ее основание — это ряд из m штук целых кирпичей, приставленных друг к другу торцами, а в каждом последующем верхнем слое кирпичей ровно на один меньше, чем в предыдущем нижнем (см. пример идеальной стены из $N = 9$ кирпичей на рисунке).



4.1. Идеальные стены какой высоты H сможет сложить Вася так, чтобы у него не осталось лишних кирпичей, если $N = 999$, а высота кирпича равна 5 см? Проведите аналитическое решение задачи и составьте компьютерную программу для получения ответа.

Решение: Запишем общее число кирпичей в произвольной идеальной стене, сложив их количества в каждом слое:

$$m + (m-1) + (m-2) + \ldots + (m-j) = N,$$

где j — целое число такое, что $0 \le j < m$; при этом число слоев кирпичей, из которых состоит стена, равно $j+1$.

Воспользуемся формулой для суммы арифметической прогрессии:

$$\frac{\big(m + (m-j)\big)\cdot(j+1)}{2} = N.$$

Отсюда находим, что

$$m = \frac{2N + j^2 + j}{2j+2}\,. \qquad (*)$$

Пусть при каком-то j значение m, найденное по этой формуле, получается целым. Это означает, что из N кирпичей можно сложить идеальную стену из $j+1$ слоя, если в самом нижнем слое кирпичей будет m штук.

Найти подходящие j можно перебором, последовательно подставляя в $(*)$ значения j от 0 до $m-1$ и проверяя, получается ли m целым. Однако этот перебор можно существенно сократить — покажем это.

Самый верхний слой кирпичей содержит

$$m - j = \frac{2N + j^2 + j}{2j+2} - j = \frac{2N - j^2 - j}{2j+2}$$

кирпичей. Очевидно, число кирпичей в любом слое положительно. Поэтому

$$2N - j^2 - j > 0 \;\rightarrow\; j^2 < 2N - j < 2N \;\rightarrow j < \sqrt{2N}\,.$$

При $N = 999$ получаем, что $j < 44.69$ ..., то есть $j \le 44$, поскольку j число целое.

Составим компьютерную программу (пример программы на языке Pascal приведен ниже), которая находит верхнюю границу перебора j_max, последовательно подставляет в формулу $(*)$ в качестве j целые числа от 0 до j_max=44, вычисляет m и отбирает среди получившихся значений только целые числа. В итоге найдем, что из заданного количества кирпичей можно сложить 8 вариантов идеальной стены — они даны в ответе в таблице.

```
program stena;
  const
```

```
  N = 999; s=5;
 var
  m: real;
  j_max, i: integer;
 begin
  j_max:=trunc(sqrt(2.0*N));
  writeln('j_max = ' , j_max) ;
  for i:=0 to j_max do begin
   m:=(2.0*N + i*i + i)/(2.0*i + 2.0);
   if ((m-trunc(m))=0)  then
    writeln('n = ',i+1,'   m = ',trunc(m), '  H = ',(i+1)*s) ;
  end;
end.
```

Ответ:

H, см	кирпичей в основании	кирпичей в самом верхнем слое	число слоев
5	999	999	1
10	500	499	2
15	334	332	3
30	169	164	6
45	115	107	9
90	64	47	18
135	50	24	27
185	45	9	37

4.2. Идеальные стены какой высоты H сможет сложить Вася так, чтобы у него не осталось лишних кирпичей, если $N = 1001$, а высота кирпича равна 10 см? Проведите аналитическое решение задачи и составьте компьютерную программу для получения ответа.

Ответ:

H, см	кирпичей в основании	кирпичей в самом верхнем слое	число слоев
10	1001	1001	1

20	501	500	2
70	146	140	7
110	96	86	11
130	83	71	13
140	78	65	14
220	56	35	22
260	51	26	26

4.3. Идеальные стены какой высоты H сможет сложить Вася так, чтобы у него не осталось лишних кирпичей, если $N = 1023$, а высота кирпича равна 7 см? Проведите аналитическое решение задачи и составьте компьютерную программу для получения ответа.

Ответ:

H, см	кирпичей в основании	кирпичей в самом верхнем слое	число слоев
7	1023	1023	1
14	512	511	2
21	342	340	3
42	173	168	6
77	98	88	11
154	57	36	22
217	48	18	31
231	47	15	33

4.4. Идеальные стены какой высоты H сможет сложить Вася так, чтобы у него не осталось лишних кирпичей, если $N = 1026$, а высота кирпича равна 8 см? Проведите аналитическое решение задачи и составьте компьютерную программу для получения ответа.

Ответ:

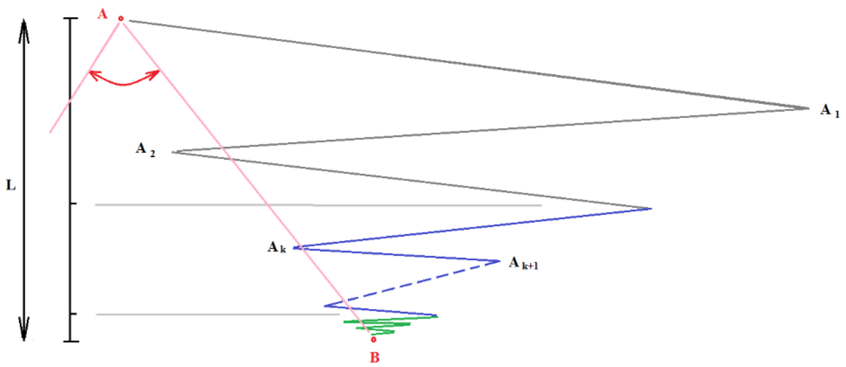
H, см	кирпичей в	кирпичей в самом	число

	основании	верхнем слое	слоев
8	1026	1026	1
24	343	341	3
32	258	255	4
72	118	110	9
96	91	80	12
152	63	45	19
216	51	25	27
288	46	11	36

Задача 5. (5 баллов)

5. На квадрокоптере установлен датчик, который смотрит вертикально вниз и сканирует поверхность на наличие точки В. Угол обзора датчика 30 градусов.

Алгоритм автоматической посадки квадрокоптера с высоты L в определенную точку В можно описать следующим образом (все участки пути прямолинейные и проходят точно над точкой В):



1. Когда в угол обзора датчика попадает точка В (или она оказывается на границе угла обзора) то он начинает прямолинейное снижение под углом 20 градусов к горизонту со скоростью 10 м/с, проходит точно над точкой В и продолжает движение до тех пор пока точка В не окажется на границе угла обзора датчика с противоположной стороны.
2. В тот момент, когда точка В покидает угол обзора датчика, попадая на его границу, квадрокоптер мгновенно останавливается и начинает снижение в противоположную сторону (т.е. в сторону точки В), сохраняя прежние угол (20 градусов) и скорость (10 м/с).
3. Специальный датчик отслеживает все точки изменения траектории (A_1, A_2, …, A_k, A_k+1, ….), а бортовой вычислитель считает время прохождения

между двумя последними точками. В том случае, если время между двумя последними пройденными точками изменения траектории становится менее 5 секунд, квадрокоптер меняет и угол снижения (теперь он становится 10 градусов), и свою скорость движения (5 м/с).

4. Квадрокоптер продолжает снижение с новыми параметрами и с прежним алгоритмом до тех пор пока время прохождения между двумя точками не станет менее 3 секунд. В этот момент опять меняется угол (становится равным 5 градусам) и скорость (3 м/с).
5. Процесс снижения продолжается до тех пор пока время прохождения между двумя точками не станет менее 2 секунд. В этот момент квадрокоптер начинает вертикальное снижение до высоты 0 метров со скоростью 0,5 м/с.

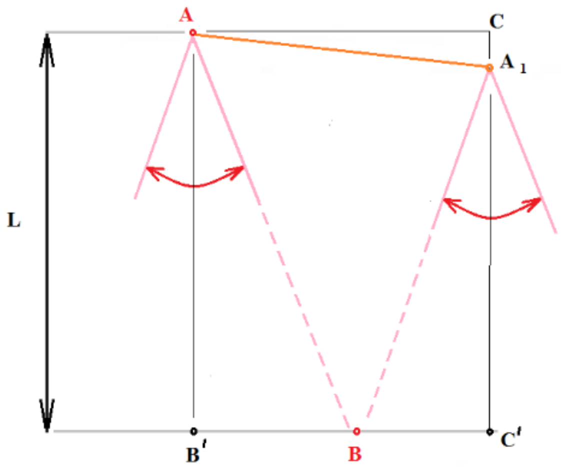
Необходимо написать программу, реализующую вычисление основных параметров снижения:

А) на какой высоте от земли произойдет каждое изменение скорости (описанное в пунктах 3, 4 и 5).

Б) Сколько потребует времени для снижения квадрокоптера из точки А в точку В по данному алгоритму? Как далеко от точки В приземлится квадрокоптер?

В) До какого интервала времени (прохождения между двумя точками) надо продолжать выполнение п.4, чтобы при переходе к п.5 отклонение приземлившегося аппарата от точки В было менее 1 метра?

Решение.
Рассмотрим элементы траектории снижения.



В первый проход квадрокоптер снижается на высоту, равную CA_1 которую можно вычислить по формулам:

Треугольник ACA_1: $tg20°=CA_1/AC$ => $AC=CA_1*ctg20°$

Треугольник $AB'B$: $tg15°=B'B/AB'$ => $B'B=AB'*tg15°$

Треугольник $A_1C'B$: $tg15°=BC'/C'A_1$ => $BC'=C'A_1*tg15°$

$$B'B+BC'=AC \quad => \quad AB'*tg15°+C'A_1*tg15°=CA_1*ctg20°$$

$$C'A_1=L*(ctg20°-tg15°) / (ctg20°+tg15°)$$

Следующий шаг алгоритма повторяет процедуру но с учетом того, что вместо L используется значение = $C'A_1$.

$C'A_1$=*L*(ctg20°-tg15°) / (ctg20°+tg15°)*

Пройденное расстояние AA_1 находим из треугольника ACA_1:

$$AA_1 = (L - C'A_1)/sin20°$$

Затраченное время:

$$t_1 = \frac{(L - C'A_1)/sin20°}{10\text{м.с.}}$$

Программный код достаточно прост и подразумевает вычисление нескольких параметров по найденным выше формулам.

Результат вычислений можно представить в виде таблицы :

шаг	L	$C'A_1$	AA_1	t_i
1	1000	822,2811	519,6154	51,96154
2	822,2811	676,1462	427,2699	42,72699
3	676,1462	555,9822	351,3359	35,13359
4	555,9822	457,1736	288,8969	28,88969
5	457,1736	375,9252	237,5545	23,75545
6	375,9252	309,1162	195,3365	19,53365
7	309,1162	254,1804	160,6215	16,06215
8	254,1804	209,0077	132,076	13,2076
9	209,0077	171,8631	108,6036	10,86036
10	171,8631	141,3198	89,30271	8,930271
11	141,3198	116,2046	73,43193	7,343193
12	116,2046	95,55282	60,38168	6,038168
13	95,55282	**78,57128**	49,65072	**4,965072**

В ходе вычислений получаем, что на 13-ом шаге время между прохождением двух соседних точек составит **4,9651**сек т.е. это меньше 5сек, а следовательно выполнится условие п.3 задачи.

Время которое потратил квадрокоптер на снижения с высоты 1000м до высоты **78,57128**м можно найти просуммировав соответствующий столбец или по формуле:

(1000 – 78,57128) / sin 20 / 10м.с. = 269,4077сек

Согласно п.3 условия, в этот момент изменится угол (было 10, а станет 5) и скорость (было 20, а станет 10) т.е. необходимо внести соответствующие изменения в формулы:

$$C'A_1 = L*(ctg10° - tg15°) / (ctg10° + tg15°)$$

$$t_1 = \frac{(L - C'A_1)/sin10°}{5м.с.}$$

Проведем вычисления и получим:

14	**78,57128**	**71,48177**	**40,82684**	**8,165369**
15	71,48177	65,03195	37,14303	7,428606
16	65,03195	59,1641	33,7916	6,75832
17	59,1641	53,82571	30,74258	6,148515
18	53,82571	48,969	27,96867	5,593733
19	48,969	44,55051	25,44505	5,089009
20	44,55051	40,53071	23,14913	4,629827
21	40,53071	36,87361	21,06038	4,212076
22	36,87361	33,5465	19,1601	3,832019
23	33,5465	30,51959	17,43128	3,486255
24	30,51959	27,7658	15,85845	3,17169
25	27,7658	**25,26048**	14,42754	**2,885507**

На 25-ом шаге время между двумя соседними точками составит 2,885507сек, а это меньше 3сек т.е. выполнится условие п.4 задачи.

Время которое потратил квадрокоптер на выполнение снижения с высоты 78,57128м до высоты 25,26048м:

(78,57128 - 25,26048) / sin 10 / 5м.с. = 61,40093сек

Для дальнейшего снижения квадрокоптеру вновь надо изменить угол и скорость:

$$C'A1 = L*(ctg5° - tg15°) / (ctg5° + tg15°)$$

$$t_1 = \frac{(L - C'A_1)/sin5°}{3\ м.с.}$$

Проведем вычисления и получим:

26	**25,26048**	**24,10327**	**13,2775**	**4,425834**
27	24,10327	22,99907	12,66925	4,223082
28	22,99907	21,94546	12,08885	4,029618

29	21,94546	20,94012	11,53505	3,845017
30	20,94012	19,98083	11,00662	3,668872
31	19,98083	19,06548	10,50239	3,500797
32	19,06548	18,19207	10,02127	3,340422
33	18,19207	17,35867	9,56218	3,187393
34	17,35867	16,56345	9,124126	3,041375
35	16,56345	15,80466	8,70614	2,902047
36	15,80466	15,08063	8,307302	2,769101
37	15,08063	14,38977	7,926735	2,642245
38	14,38977	13,73056	7,563603	2,521201
39	13,73056	13,10155	7,217106	2,405702
40	13,10155	12,50135	6,886482	2,295494
41	12,50135	11,92865	6,571005	2,190335
42	11,92865	11,38219	6,26998	2,089993
43	11,38219	**10,86076**	5,982745	**1,994248**

На 43-ем шаге время между двумя точками квадрокоптер будет проходить менее чем за 2сек т.е. выполнено условие п.4.

Время которое потратил квадрокоптер на выполнение снижения с высоты 25,26048м до высоты 10,86076м:

$$(25{,}26048 - 10{,}86076) / \sin 5 / 3\text{м.с.} = 55{,}07278\text{сек}$$

Все три этапа снижения похожи и их можно запрограммировать, например в виде функции:

procedure time_fly(angle, speed: integer; t_temp: real) ;
begin
вычисляем: $C'A_1$*=L*(ctg***(angle)***-tg15°) / (ctg***(angle)***+tg15°)*
вычисляем: $t\_temp = \frac{(L - C'A_1)/\sin(\boldsymbol{angle})}{\boldsymbol{speed}}$
L:= $C'A_1$ *// текущее значение высоты изменилось//*
end;

В программе будем последовательно, при вычислении первых трех этапов снижения, вызывать эту функцию.

t_sum:=0
L:=1000 *// начальное значение высоты //*
t:=1000 *// временное значение для первого шага цикла //*

// первый этап: пока время не будет меньше 5с. выполняем//
while t > 5 do
begin
time_fly (20, 10, t); *// угол=20, скорость =10 //*

```
                t_sum := t_ sum +t_temp ;
        end;

    // второй этап: пока время не будет меньше 3с. выполняем//
    while t > 3 do
        begin
                time_fly (10, 5, t);            // угол=10, скорость =5 //
                t_sum := t_ sum +t_temp ;
        end;

    // второй этап: пока время не будет меньше 2с. выполняем//
    while t > 2 do
        begin
                time_fly (5, 3, t)              // угол=5, скорость =3 //
                t_sum := t_ sum +t_temp ;
        end;
writeln(t_temp);          // выводим суммарное время снижения //
```

Находясь в крайней точке траектории (на высоте 10,86076м), согласно п.5 условия, квадрокоптер начинает вертикальное снижение со скоростью 1м.с.
Для достижения земли потребуется:

10,86076 / 1м.с. = 10,86076 сек.

Суммируем время, необходимое для прохождения каждого из этапов и получаем:

269,4077сек + 61,40093сек + 55,07278сек + 10,86076 сек. = 396,7422 сек.

Для ответа на второй вопрос п.Б задачи т.е. **для поиска отклонения точки посадки от точки В** необходимо найти расстояние *B'B* (для четного шага) или *BC'* (для нечетного шага).

В нашем случае аппарат опустился до высоты 10,86076 на четном шаге т.о. расстояние от точки приземления до точки *B* составит:

B'B = tg 15 * 10,86076 = 2.910131м

Если снижение будет продолжаться с параметрами п.4 условия задачи то выполнение пункта В задачи («*расстояние от приземлившегося аппарата до точки В составит менее 1м*») произойдет после завершения 66-го шага. В этот момент квадрокоптер будет находится на высоте 3,693604м

65-ый шаг	**66-ой шаг**
достигнута высота 3,870936м отклонение (при вертикальном снижении): *B'B* = tg 15 * 3,870936 = 1,037214м Время между крайними точками: 0,678218с	достигнута высота 3,693604м т.е. отклонение (при вертикальном снижении): *B'B* = tg 15 * 3,693604 = **0,989698**м Время между крайними точками: 0,647148с

Если в п.5 установить ограничение на время между крайними точками = 0,647с. то после выполнения п.5 квадрокоптер окажется на земле на расстоянии менее 1м от точки В.