САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Олимпиада школьников СПбГУ по математике

Примеры заданий отборочного этапа

2021/2022 учебный год

6-11 классы

Олимпиада школьников СПбГУ по математике
Примеры заданий отборочного этапа
2021/2022 учебный год

Задания для 10–11 классов

1. (10 баллов) *Будем называть дату разнообразной, если в её записи вида ДД/ММ/ГГ (день-месяц-год) встречаются все цифры от 0 до 5. Сколько разнообразных дат в 2013 году?*

Ответ: 2.

Решение. Заметим, что в любой дате 2013 года в указанной форме записи используются цифры 1 и 3, поэтому для дня и месяца разнообразной даты остаются цифры 0, 2, 4 и 5.

Обозначим через $Д_1$ и $Д_2$ первую и вторую цифры в записи дня, а через $М_1$ и $М_2$ — первую и вторую цифры в записи месяца. Поскольку в году 12 месяцев, $М_1 \leqslant 1$, откуда $М_1 = 0$. Кроме того, в каждом месяце не более 31 дня, и из оставшихся цифр для $Д_1$ подходит только 2. Цифры 4 и 5 могут располагаться на позициях $Д_2$ и $М_2$ произвольным образом, давая корректную дату.

2. (10 баллов) *Любой вид природопользования влияет хотя бы на один из природных ресурсов, к каковым относятся: литогенная основа, почва, вода, воздух, растительный мир, животный мир. Виды, влияющие на один и тот же набор ресурсов, относят к одному типу. В ходе исследований выяснилось, что виды природопользования, развивавшиеся в последние 700 лет, можно разделить на 23 типа. Сколько типов осталось незадействованными?*

Ответ: 40.

Решение. По условию имеется 6 природных ресурсов. Поэтому типы определяются упорядоченными наборами из шести нулей и единиц, где 1 соответствует задействованному ресурсу, а 0 — не задействованному. Кроме того, набор из одних нулей недопустим по условию. Таким образом, количество возможных типов равно $2^6 - 1 = 63$. Поскольку 23 типа были использованы, незадействованными остались $63 - 23 = 40$ типов.

3. (10 баллов) *Назовем словом любую конечную последовательность букв русского алфавита. Сколько различных шестибуквенных слов можно составить из букв слова СКАЛКА? А семибуквенных слов из букв слова ТЕФТЕЛЬ? В ответе укажите частное от деления большего из найденных чисел на меньшее.*

Ответ: 7.

Решение. В слове СКАЛКА шесть букв, но дважды встречается буква А и дважды встречается буква К. Следовательно, количество различных слов будет равно $\frac{6!}{2!\cdot 2!}$. В слове ТЕФТЕЛЬ семь букв, и дважды встречаются буквы Т и Е, поэтому количество различных слов из букв этого слова будет больше и будет равно $\frac{7!}{2!\cdot 2!}$. Легко видеть, что частное от деления большего на меньшее будет равно 7.

4. (20 баллов) *На доске написано несколько положительных чисел. Сумма пяти наибольших из них составляет* 0,29 *суммы всех чисел, а сумма пяти наименьших* — 0,26 *суммы всех чисел. Сколько всего чисел написано на доске?*

Ответ: 18.

Решение. Пусть общее количество чисел равно $k + 10$. Из условия ясно, что $k > 0$. Можно считать, что сумма всех чисел равна 1 (иначе поделим каждое из чисел на эту сумму, условие задачи сохранится). Упорядочим числа по возрастанию:

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant a_4 \leqslant a_5 \leqslant a_{5+1} \ldots \leqslant a_{5+k} \leqslant a_{6+k} \leqslant a_{7+k} \leqslant a_{8+k} \leqslant a_{9+k} \leqslant a_{10+k}.$$

Тогда

$$0{,}26 = a_1 + \ldots + a_5 \leqslant 5a_5 \leqslant 5a_6 \Longrightarrow a_6 \leqslant 0{,}26/5.$$

Кроме того,

$$0{,}29 = a_{k+6} + \ldots + a_{k+10} \geqslant 5a_{k+6} \geqslant 5a_{k+5} \Longrightarrow a_{k+5} \geqslant 0{,}26/5.$$

Пусть $s = a_6 + \ldots + a_{k+5}$. Заметим, что $s = 1 - 0{,}26 - 0{,}29 = 0{,}45$. Поэтому

$$0{,}45 = s \geqslant k \cdot a_6 \geqslant \frac{0{,}26k}{5}, \qquad 0{,}45 = s \leqslant k \cdot a_{k+5} \leqslant \frac{0{,}29k}{5}.$$

Следовательно,

$$\frac{0{,}45 \cdot 5}{0{,}29} \leqslant k \leqslant \frac{0{,}45 \cdot 5}{0{,}26} \Longleftrightarrow 7{,}75 < \frac{225}{29} \leqslant k \leqslant \frac{225}{26} < 8{,}65.$$

Из целых k этому двойному неравенству удовлетворяет только 8. Таким образом, всего на доске написано $8 + 10 = 18$ чисел.

5. (20 баллов) *Письменная работа студентов имеет двухбалльную систему оценивания, т. е. работа будет либо зачтена, если она выполнена хорошо, либо не зачтена, если выполнена плохо. Работы сначала проверяются нейронной сетью, дающей неверный ответ в 10% случаев, а затем все работы, признанные незачтенными, перепроверяются вручную экспертами, которые не ошибаются. Нейронная сеть может как отнести к незачтенным хорошую работу, так и наоборот — отнести к зачтенным плохую. Известно, что среди всех сданных студентами работ на самом деле 20% плохих. Какой наименьший процент плохих работ может быть среди тех, которые эксперты перепроверяют после отбора нейронной сетью? В ответе укажите целую часть числа.*

Ответ: 66.

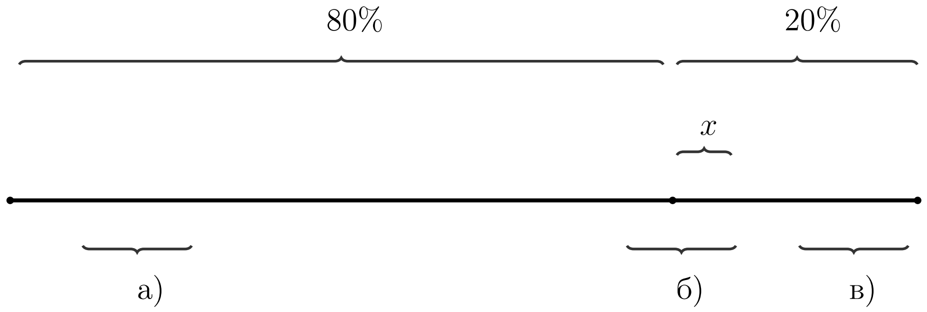
Решение. Работы студентов представим на рисунке ниже.

Ошибки нейронной сети могут:

а) отнести все 10% хороших работ к плохим;

б) отнести часть хороших работ к плохим, а часть плохих — к хорошим;

в) отнести все 10% плохих работ к хорошим.



Проанализируем общий случай. Пусть x — процент от общего числа работ, ошибочно отнесенных к хорошим (это те из плохих работ, которые не попадут к экспертам); $0 \leqslant x \leqslant 10$. Тогда на перепроверку эксперты получат (в процентах от всех работ):

плохие работы, в которых нейронная сеть не ошиблась — их $(20 - x)\%$;

хорошие работы, ошибочно отнесенные к плохим — их $(10 - x)\%$.

Таким образом, процент перепроверяемых плохих работ равен

$$\frac{(20-x)\times 100}{(20-x)+(10-x)} = \frac{(20-x)\times 100}{30-2x} = 50 + \frac{500}{30-2x}.$$

Эта функция возрастает на всей области определения, поэтому в условиях задачи принимает наименьшее значение при $x = 0$. Это значение равно $66\frac{2}{3}$, а его целая часть равна 66.

6. (20 баллов) *Пусть дана последовательность неотрицательных целых чисел*

$$k,\ k+1,\ k+2,\ \ldots,\ k+n.$$

Найдите наименьшее k, при котором сумма всех чисел последовательности равна 100.

Ответ: 9.

Решение. Указанная последовательность чисел является арифметической прогрессией с $n+1$ членами. Ее сумма равна $\frac{(n+1)(2k+n)}{2}$. Поэтому условие перепишется в виде $(n+1)(2k+n) = 200$, где n — неотрицательное целое число. Очевидно, что k уменьшается при увеличении n. Значит, нам надо подобрать наибольшее n, при котором k окажется целым. Заметим, что

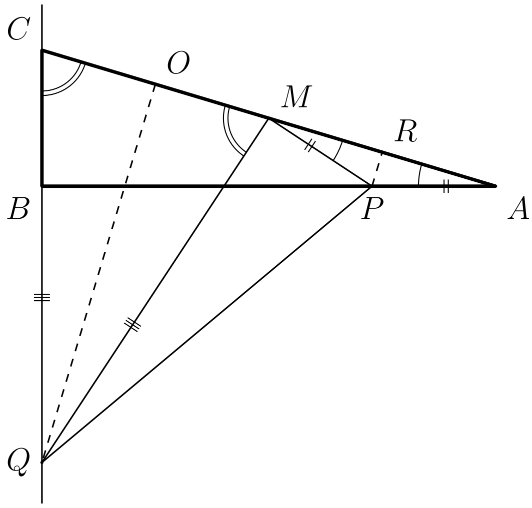
$$200 = (n+1)(2k+n) > n^2 \Longrightarrow n < \sqrt{200} \Longrightarrow n \leqslant 14.$$

Кроме того, $200 = 2^3 \cdot 5^2$. Рассмотрим два случая.

1) n четно. Наибольшее $n \leqslant 14$, при котором 200 делится на $n+1$, равно 4, откуда $k = \frac{40-4}{2} = 18$.

2) n нечетно. Тогда n может быть равно только 1, 3, 7 (иначе 200 не делится на $n+1$). При $n=7$ мы получим $k=9$. Оно и будет наименьшим.

7. (30 баллов) *Точка M — середина гипотенузы AC прямоугольного треугольника ABC. Точки P и Q на прямых AB и BC соответственно таковы, что $AP = PM$ и $CQ = QM$. Найдите величину угла $\angle PQM$, если $\angle BAC = 17°$.*



Ответ: 17°.

Решение. Поскольку в прямоугольном треугольнике ABC угол $BAC = 17°$, угол $BCA = 73°$. Заметим, что треугольник QMC является равнобедренным с основанием MC, так как по условию $QM = QC$. Аналогично, треугольник PMA — равнобедренный с основанием MA. Следовательно, углы при основаниях этих треугольников равны. Отсюда получаем, что $\angle QMP = 180° - \angle PMA - \angle QMC = 180° - 17° - 73° = 90°$.

Пусть точки O и R — основания перпендикуляров, опущенных на прямую AC из точек Q и P соответственно. Легко заметить, что треугольники QOM и MRP подобны по двум углам. Поскольку $CM = MA$, из равнобедренности треугольников QCM и PMA вытекает, что

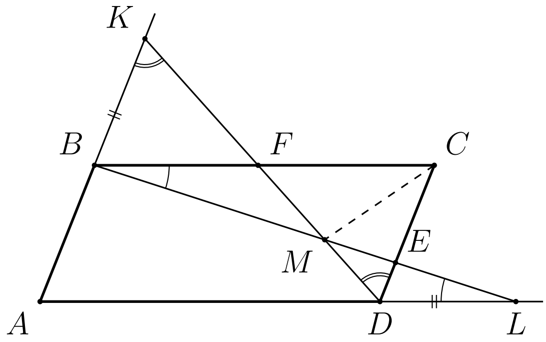
$$MO = \tfrac{1}{2}CM = \tfrac{1}{2}MA = MR.$$

Обозначим $x = MO$. Из прямоугольных треугольников QOM и PMR получаем, что $MQ = \frac{x}{\cos 73°}$ и $MP = \frac{x}{\cos 17°}$ соответственно. Таким образом, для треугольника MQP имеем

$$\operatorname{tg}\angle PQM = \frac{MP}{MQ} = \frac{x}{\cos 17°}\cdot\frac{\cos 73°}{x} = \frac{\cos(\pi/2 - 17°)}{\cos 17°} = \operatorname{tg} 17°.$$

Поскольку в прямоугольном треугольнике MQP угол PQM острый, из последнего равенства вытекает, что $\angle PQM = 17°$.

8. (30 баллов) *На продолжении стороны AB параллелограмма $ABCD$ за точку B отмечена точка K, а на продолжении стороны AD за точку D — точка L. Оказалось, что $BK = DL$. Отрезки BL и DK пересекаются в точке M. Докажите, что CM — биссектриса угла BCD.*



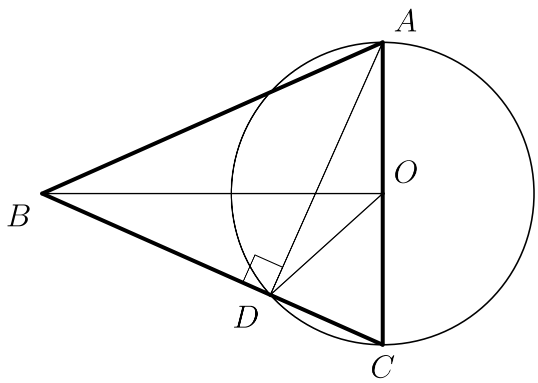
Решение.

Поскольку $AB \parallel DC$, то треугольники BKM и MDE подобны по двум углам. Следовательно, $\frac{BM}{ME} = \frac{BK}{DE}$. По условию $BK = DL$. Отсюда получаем, что $\frac{BM}{ME} = \frac{DL}{DE}$.

Заметим, что треугольники BCE и DEL подобны по двум углам, поэтому $\frac{BC}{CE} = \frac{DL}{DE}$. Таким образом, $\frac{BC}{CE} = \frac{BM}{ME}$. Это равенство эквивалентно тому, что CM — биссектриса треугольника BCE, то есть угла BCE.

9. (30 баллов) *На стороне AC треугольника ABC как на диаметре построена окружность с центром O, пересекающая сторону BC этого треугольника в точке D. Найдите радиус вписанной окружности треугольника ABC, если $OD = 4$, $DC = 3$, а центр описанной окружности треугольника ABC лежит на BO.*

Ответ: $\dfrac{4\sqrt{55}}{11}$.



Решение. Точка O — середина AC. Поскольку центр описанной окружности треугольника ABC лежит на его медиане BO, то эта медиана совпадает с серединным перпендикуляром к стороне AC, и треугольник ABC — равнобедренный с основанием AC.

Угол ADC прямой как вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности. В треугольнике ABC проведены две высоты — BO и AD. Следовательно, треугольник DOC подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия $k = \cos\angle ACB = \frac{DC}{AC} = \frac{3}{8}$. По формуле Герона

$$p_{DOC} = \frac{2DO + DC}{2} = \frac{11}{2}, \qquad S_{DOC} = \sqrt{\frac{11}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{55}}{2}.$$

Поэтому

$$r_{ABC}=\frac{r_{DOC}}{k}=\frac{3\sqrt{55}}{4}:\frac{11}{2}:\frac{3}{8}=\frac{4\sqrt{55}}{11}.$$

10. (40 баллов) *На бал пришли 100 мальчиков и 100 девочек, пронумерованных числами от 1 до 100. Иногда мальчики и девочки танцевали (в танце участвуют пары из мальчика и девочки). После всех танцев оказалось, что для каждой девочки можно поделить всех мальчиков на две группы так, что суммарно с мальчиками из первой группы девочка танцевала столько же раз, сколько и с мальчиками из второй группы. Докажите, что для некоторого k мальчик k танцевал с девочкой k не более половины всех своих танцев.*

Решение. Предположим, что для любого k мальчик k танцевал с девочкой k более половины своих танцев. Тогда, суммируя по всем мальчикам, мы получим, что танцев между мальчиком и девочкой с одинаковыми номерами было больше, чем между мальчиками и девочками с разными номерами. Теперь посмотрим на ситуацию со стороны девочек. Мальчик k попал в одну из двух групп мальчиков, с которыми девочка k танцевала половину своих танцев. Значит, с мальчиком k эта девочка танцевала не более половины всех своих танцев. Суммируя по всем k, мы получим, что танцев между мальчиком и девочкой с одинаковыми номерами было НЕ больше, чем между мальчиками и девочками с разными номерами. Противоречие с доказанным ранее.

11. (40 баллов) *Назовём хвостом натурального числа любое число, которое получается из него отбрасыванием одной или нескольких первых цифр. Например, 234, 34 и 4 — хвосты числа 1234. Существует ли шестизначное число без нулей в десятичной записи, которое делится на каждый из своих хвостов?*

Ответ: Да (подходит 721875).

Решение. Предположим, что требуемое число существует. Запишем его в виде $A = \overline{a_5a_4\ldots a_0}$. Тогда A делится на свой пятизначный хвост, то есть на $\overline{a_4\ldots a_0}$. Значит, на $\overline{a_4\ldots a_0}$ делится разность A и его хвоста, равная $a_5\cdot 10^5$. Следовательно, нам нужно перебрать пятизначные делители $a_5\cdot 10^5$ без нулей в десятичной записи. Любой делитель числа $a_5\cdot 10^5$ есть произведение a_5 на некоторые степени пятерки и двойки. Поскольку на 0 это произведение оканчиваться не должно, оно не может содержать одновременно и двойку, и пятерку. Если мы берем только двойки, то получаем число, не превосходящее $a_5\cdot 2^5\leqslant 9\cdot 2^5=288$, то есть не пятизначное. Значит, нам нужно число $a_5\cdot 5^n$, причем с нечетным a_5. Заметим, что $n=5$, иначе $a_5\cdot 5^n\leqslant 9\cdot 625=5625$, и это число также не пятизначное. Наконец, $a_5>3$, поскольку число $3\cdot 5^5=9375$ четырехзначное.

С учетом рассмотренных ограничений мы получаем три возможных варианта: $5\cdot 5^5$, $7\cdot 5^5$, $9\cdot 5^5$. Второй из них дает число 721875, которое нам подходит:

$$721875/21875=33; 721875/1875=385; 721875/875=825;$$
$$721875/75=9625; 721875/5=144375.$$

Несложно проверить, что два других варианта не годятся. Но в этом нет необходимости, поскольку ответ уже получен.

12. (40 баллов) *Петя задумал некоторое натуральное число. За один ход он может домножить его на любое рациональное число от* $1/3$ *до* 2. *Докажите, что за несколько таких операций Петя сможет получить число* 1001.

Первое решение. Заметим, что любое рациональное число из интервала $[1001/2; 1001 \cdot 3]$ можно умножить на рациональное число из интервала $[1/3; 2]$, чтобы в итоге получилось число 1001. Докажем, что произвольное положительное число домножениями на разрешенные числа можно поместить в этот интервал. Если мы имеем число, меньшее $1001/2$, то будем умножать его на 2. Рассмотрим первый момент, когда число стало больше или равно $1001/2$. Пусть до этого было число $N < 1001/2$, а стало $2N \geqslant 1001/2$. Тогда $2N < 1001/2 \cdot 2 < 1001 \cdot 3$. Следовательно, $2N$ лежит в нужном интервале. Если изначально число было больше, чем $1001 \cdot 3$, то аналогично будем умножать его на $1/2$, пока оно не станет меньше $1001 \cdot 3$.

Второе решение. Если в какой-то момент мы имеем число n, то умножив его на $\frac{n+1}{n}$, мы получим $n+1$. А умножив его на $\frac{n-1}{n}$, мы получим $n-1$. Очевидно, что операциями увеличения или уменьшения на 1 из любого натурального числа можно получить 1001. Осталось только проверить, что мы умножаем на разрешенные числа. Действительно, $1 < \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \leqslant 2$ и при $n \geqslant 2$ выполнено $1/3 \leqslant 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} < 1$.

13. (40 баллов) *В лагерь приехали 90 школьников. Известно, что среди любых 10 школьников обязательно найдутся два друга. Скажем, что группа школьников образует цепочку дружб, если детей в группе можно занумеровать числами от 1 до* k *так, что 1-й и 2-й — друзья, 2-й и 3-й — друзья, ...,* $(k-1)$*-й и* k*-й — друзья. Докажите, что всех школьников можно разбить не более чем на 9 групп, каждая из которых образует цепочку дружб. (Группа из одного школьника тоже образует цепочку дружб.)*

Решение. Возьмем какое-то разбиение школьников на цепочки (например, на одноэлементные группы). Пусть A и B — крайние школьники из разных цепочек. Если они дружат, то их группы можно объединить, связав A и B друг с другом. Будем проводить такие объединения до тех пор, пока это возможно. Если осталось более 9 цепочек, то выберем в каждой из них по крайнему школьнику. Их не менее 10, и по условию среди них найдутся два друга. Но тогда их цепочки можно объединить, что неверно. Значит, осталось не более 9 цепочек.

14. (40 баллов) *Определите знак суммы*

$$\left(\sqrt{2021} - \sqrt{2020}\right)^3 + \left(\sqrt{2020} - \sqrt{2019}\right)^3 + \left(\sqrt{2019} - \sqrt{2021}\right)^3,$$

не выполняя возведение слагаемых в третью степень.

Ответ: Выражение отрицательно.

Решение. Если $a+b+c=0$, то $a^3+b^3+c^3=3abc$, поскольку

$$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3-3abc+(ab+bc+ac)(a+b+c).$$

У нас $a=\sqrt{2021}-\sqrt{2020}>0, b=\sqrt{2020}-\sqrt{2019}>0, c=\sqrt{2019}-\sqrt{2021}<0$.

Олимпиада школьников СПбГУ по математике
Примеры заданий отборочного этапа
2021/2022 учебный год

Задания для 8–9 классов

1. (10 баллов) *16 детей различного роста встали в круг, все лицом в центр. Каждый из них сказал: «Мой правый сосед выше моего левого соседа». Какое наименьшее количество детей могло сказать правду?*

а) 0;
б) 1;
в) 2;
г) больше 2.

Ответ: в).

Решение: Пронумеруем места расположения детей в круге числами от 1 до 16 против часовой стрелки. Разделим детей на 2 группы: стоящих на местах с нечетными номерами — *первая* группа, и стоящих на местах с четными номерами — *вторая* группа. Заметим, что высказывания детей из первой группы относятся только к детям из второй группы, и наоборот. Так как все дети разного роста, в каждой из групп есть самый высокий ребенок. Таким образом, как минимум 2 высказывания являются правдой — это высказывания ребенка из первой группы, стоящего слева от самого высокого во второй группе, и ребенка из второй группы, стоящего слева от самого высокого в первой группе.

Приведем пример расположения, для которого верны ровно 2 высказывания. Выстроим детей по убыванию их роста (то есть первым будет самый высокий, а 16-м — самый низкий). Легко заметить, что при таком расположении будут верны только высказывания детей, стоящих на 1-м и 16-м местах.

2. (10 баллов) *У Васи имеются:*
а) 2 различных тома из собрания сочинений А. С. Пушкина; высота каждого тома — 30 см;
б) собрание сочинений Е. В. Тарле в 4-х томах; высота каждого тома — 25 см;
в) книга лирических стихов высотой 40 см, опубликованных самим Васей.
Вася хочет расположить эти книги на полке так, чтобы его творение было в центре, а книги, стоящие от него на одинаковом расстоянии слева и справа, имели равную высоту. Сколькими способами это можно сделать?

а) $3 \cdot 2! \cdot 4!$*;*
б) $2! \cdot 3!$*;*
в) $\frac{51}{3! \cdot 2!}$*;*
г) ни один из указанных ответов не является верным.

Ответ: а).

Решение: Из условия симметричности расстановки вытекают два вывода.

1) Слева и справа от стихов Васи должны стоять один том Пушкина и два тома Тарле.

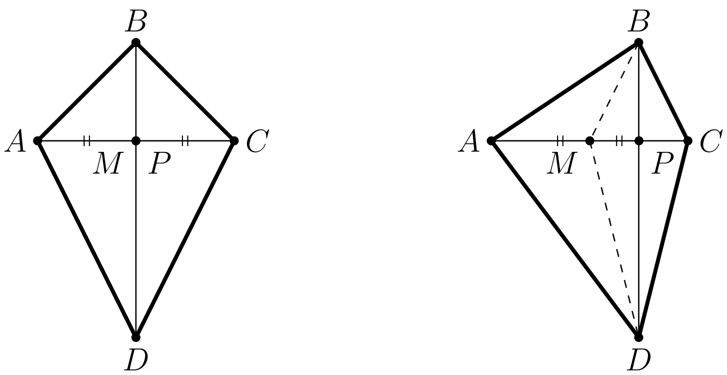
2) Для томов Пушкина допустимы 3 пары позиций: (1,7), (2,6), (3,5). Остальные свободные места должны занимать книги Тарле.

Расставить тома Пушкина на выбранных для них позициях можно 2! способами. После этого книги Тарле на оставшихся местах независимо расставляются 4! способами. Таким образом, окончательное количество расстановок — $3 \cdot 2! \cdot 4!$.

3. (10 баллов) *Диагонали AC и BD четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P, на диагонали AC отмечена точка M такая, что $AM = MC$. Отметьте верные утверждения.*

а) Расстояния от точки M до концов диагонали BD равны: $BM = MD$.
б) Сумма площадей треугольников ABM и AMD равна сумме площадей треугольников BMC и CMD.
в) Сумма площадей треугольников ABM и CPD равна сумме площадей треугольников BMC и APD.
г) Среди перечисленных утверждений нет верных.

Ответ: б).



Решение: Рассмотрим каждое из утверждений.

а) Равенство $BM = DM$ эквивалентно тому, что точка M лежит на серединном перпендикуляре к BD. На рисунке слева приведен пример четырехугольника $ABCD$, для которого это не так. Значит, утверждение а) неверно.

б) У треугольников ABM и BMC равны основания AM и MC, а также высоты, опущенные из вершины B. Следовательно, площади этих треугольников равны. Аналогичным образом равны площади треугольников AMD и CMD. Поэтому

$$S_{\triangle ABM} + S_{\triangle AMD} = S_{\triangle BMC} + S_{\triangle CMD},$$

то есть б) верно.

в) В силу б) $S_{\triangle ABM} = S_{\triangle BMC}$. Поэтому в) равносильно равенству площадей $\triangle CPD$ и $\triangle APD$. Высоты этих треугольников равны перпендикуляру, опущенному из вершины D на прямую AC. Но основания CP и AP треугольников совпадать не обязаны (соответствующий пример показан на рисунке справа). Значит, утверждение в) неверно.

4. (20 баллов) *В марсианском календаре год состоит из 5882 дней, а в каждом месяце 100 или 77 дней. Сколько месяцев в марсианском календаре?*

Ответ: 74.

Решение: Пусть x — количество месяцев, в которых 100 дней, y — количество месяцев, в которых 77 дней. По условию, $100x + 77y = 5882$. Очевидно, $y \leqslant 66$, иначе $x < 0$. Заметим, что

$$x \mod 11 = 100x \mod 11 = 5882 \mod 11 = 8.$$

Значит, $x = 11k + 8$ при некотором целом k, откуда

$$(11k+8)\cdot 100 + 77y = 5882 \Longleftrightarrow 1100k = 5082 - 77y = 77(66-y).$$

Правая часть делится на 100, но 77 и 100 взаимно просты. Тогда на 100 делится число $66 - y$, лежащее между 0 и 65. Это возможно лишь в случае $y = 66$. Поэтому $x = 0,01\cdot(5882 - 76\cdot 66) = 8$ и $x + y = 74$.

5. (20 баллов) *Профессор К., желая прослыть остряком, планирует на каждой своей лекции рассказывать не менее двух, но и не более трех разных анекдотов. При этом множества анекдотов, рассказанных на разных лекциях, не должны совпадать. Сколько всего лекций сможет прочесть профессор К., если он знает 8 анекдотов?*

Ответ: 84.

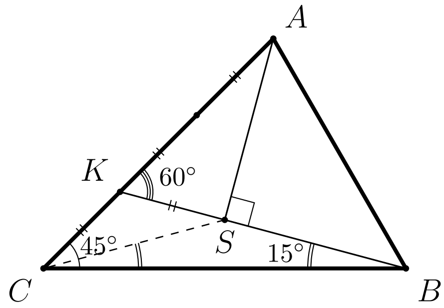
Решение: Профессор может задействовать все возможные тройки анекдотов (их число равно $C_8^3 = 56$), а также все пары анекдотов (их $C_8^2 = 28$). Таким образом, максимальное количество наборов анекдотов, которые профессор может использовать на лекциях, равно $56 + 28 = 84$.

6. (20 баллов) *Назовем словом любую конечную последовательность букв русского алфавита. Сколько различных пятибуквенных слов можно составить из букв слова САМСА? А из букв слова ПАСТА? В ответе укажите сумму найденных чисел.*

Ответ: 90.

Решение: В слове САМСА дважды встречается буква А и дважды встречается буква С. Следовательно, количество различных слов будет равно $\frac{5!}{2!\cdot 2!} = 30$. В слове ПАСТА только буква А встречается дважды. Поэтому количество различных слов в этом случае будет равно $\frac{5!}{2!} = 60$. В сумме получим $30 + 60 = 90$.

7. (30 баллов) *На стороне AC треугольника ABC, в котором $\angle ACB = 45^\circ$, отмечена точка K такая, что $AK = 2KC$. На отрезке BK нашлась такая точка S, что $AS \perp BK$ и $\angle AKS = 60^\circ$. Докажите, что $AS = BS$.*



Решение: В прямоугольном треугольнике ASK с прямым углом S угол AKS равен $60°$, следовательно, $KS = \frac{1}{2}AK$.

В треугольнике KSC угол CKS равен $180° - \angle AKS = 120°$, а $KC = \frac{1}{2}AK = KS$. Получаем, что треугольник KSC — равнобедренный с основанием SC и углами при основании, равными $30°$. Тогда

$$\angle SBC = 180° - \angle BKC - \angle BCK = 180° - 120° - 45° = 15°,$$

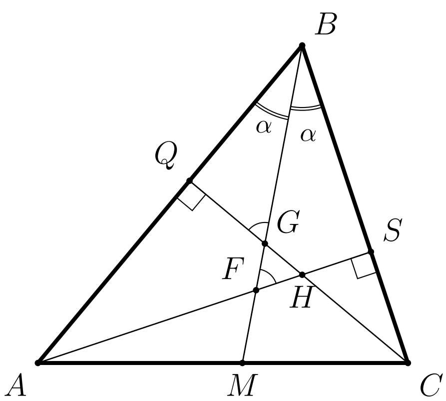
а также

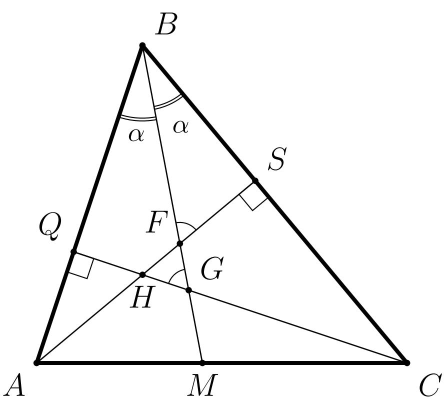
$$\angle SCB = \angle BCK - \angle SCK = 45° - 30° = 15°.$$

Таким образом, треугольник SCB — равнобедренный с основанием CB, откуда $SC = SB$.

Рассмотрим треугольник ASC. В нем $\angle SAC = 30° = \angle ACS$. Следовательно, это равнобедренный треугольник с основанием AC, то есть $SA = SC$. В итоге получаем $SA = SC = SB$.

8. (30 баллов) *Высоты остроугольного неравнобедренного треугольника ABC, опущенные из вершин A и C, пересекаются в точке H, а также пересекают биссектрису угла ABC в точках F и G соответственно. Докажите, что треугольник FGH — равнобедренный.*



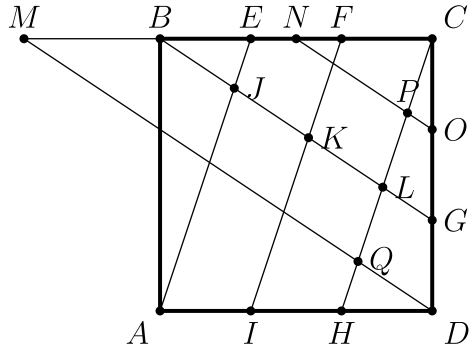


Решение: Пусть M — основание биссектрисы угла B. Заметим, что возможны два варианта взаимного расположения точек F и G на биссектрисе BM: точка G лежит между точками B и F (рисунок слева) или точка F лежит между точками B и G (рисунок справа).

Пусть Q и S — основание высот, опущенных из вершин C и A соответственно. Рассмотрим прямоугольные треугольники BQG и BFS. Они подобны по двум углам, так как BM — биссектриса. Следовательно, $\angle BGQ = \angle BFS$, и один из этих углов является углом треугольника FGH, а второй — вертикальным с другим углом треугольника FGH. Таким образом, в треугольнике FGH равны углы при вершинах F и G, т.е. треугольник является равнобедренным.

9. (30 баллов) *На стороне BC квадрата $ABCD$ отмечены точки E и F так, что $BE : EC = CF : FB = 1 : 2$. На стороне CD отмечена точка G так, что $CG : GD = 2 : 1$. На стороне AD отмечены точки H и I так, что $AI : ID = DH : HA = 1 : 2$. Отрезок BG пересекает отрезки AE, IF и HC в точках J, K и L соответственно. Площадь какого из четырехугольников больше – $EFKJ$ или $GDHL$?*

Ответ: Площадь $GDHL$ больше.



Решение: Обозначим $S_{ABCD} = 36S$, $S_{CLG} = x$. Тогда $S_{CDH} = 6S$ и $S_{GDHL} = 6S - x$, $S_{BCG} = 12S$ и $S_{BCL} = 12S - x$. Из равенств $BE = EF = FC = AI = IH = HD$ вытекает, что $AE \parallel IF \parallel CH$, и по теореме Фалеса $BJ = JK = KL$. Значит, треугольники BJE, BKF и BLC подобны. Далее находим $S_{BJE} = \frac{1}{9}S_{BCL}$, $S_{BKF} = \frac{4}{9}S_{BCL}$ и $S_{EFKJ} = S_{BKF} - S_{BJE} = \frac{1}{3}S_{BCL} = 4S - \frac{x}{3}$.

Для того, чтобы сравнить площади заданных четырехугольников, осталось найти x. Обозначим через N середину стороны BC. Продлим сторону BC за точку B и отметим такую точку M, что $CN = NB = BM$. На стороне CD отметим точку O – середину отрезка CG, то есть $CO = OG = GD$. Тогда $NO \parallel BG \parallel MD$, и по теореме Фалеса $CP = PL = LQ$. Рассмотрим треугольники QHD и QMC. Они подобны с коэффициентом, равным $\frac{HD}{CM} = \frac{2}{9} = \frac{HQ}{QC}$. Следовательно, $\frac{CL}{LH} = \frac{6}{5}$. Тогда $x = \frac{6}{11} \cdot \frac{2}{3}S_{CHD} = \frac{4}{11} \cdot 6S = \frac{24}{11}S$, откуда $S_{GDHL} = \frac{42}{11}S$, $S_{EFKJ} = \frac{36}{11}S$.

10. (40 баллов) *Пусть $P(n)$ обозначает произведение цифр натурального числа n. При каком наибольшем натуральном k найдётся такое натуральное число $n > 10$, что*

$$P(n) < P(2n) < \ldots < P(kn)?$$

Ответ: 9.

Решение: Покажем вначале, что $k < 10$. Действительно, при $k \geqslant 10$ в наш набор чисел входит $P(10n)$. Оно равно нулю, поскольку число $10n$ заканчивается на 0. Тогда $P(n) < 0$, что невозможно.

Приведем теперь реализацию для $k = 9$. В качестве n можно взять число вида $\underbrace{\overline{11\ldots1}}_{j}$ при любом $j \geqslant 2$. В этом случае $P(sn) = s^j$, $s = 1, \ldots, k$, а числа s^j, очевидно, возрастают.

11. (40 баллов) *Числа от 1 до 600 разбиты на несколько групп. Известно, что если в группе более одного числа, то сумма любых двух чисел из этой группы делится на 6. Какое наименьшее количество групп может быть?*

Ответ: 202.

Решение: При $k = 0, 1, \ldots, 5$ обозначим через G_k множество чисел от 1 до 600, дающие при делении на 6 остаток k. Пусть число a из G_k входит в некоторую группу. Если в нее входит еще число b, то оно принадлежит G_{6-k}, иначе $a+b$ не кратно 6. Пусть в этой группе есть третье число c. Тогда оно лежит и в G_k, и в G_{6-k}. Это возможно только при $k = 0$ и $k = 3$. Числа, не входящие в G_0 и G_3, можно включать только в двухэлементные группы, а всего таких чисел 400. Значит, они дают не менее 200 групп. Множества G_0 и G_3 могут образовывать группы, но объединить в одну их нельзя. Таким образом, всего потребуется по крайней мере 202 группы.

Приведем реализацию разбиения на 202 группы. Одной них будет G_0, другой — G_3, а также выберем группы вида $\{6n + k, 6n + 6 - k\}$, где $n = 0, 1, \ldots, 99$ и $k = 1, 2$.

12. (40 баллов) *Пять мальчиков играли в слова: каждый из них написал по 7 различных слов. Оказалось, что у каждого мальчика есть ровно по 2 слова, которые не встречаются ни у одного из остальных мальчиков. Какое наибольшее количество различных слов могли суммарно написать мальчики?*

Ответ: 22.

Решение: Всего было написано $5 \times 7 = 35$ слов. Поскольку каждый мальчик написал ровно 2 слова, которые не встречались ни у одного из остальных мальчиков, то таких неповторяющихся слов было суммарно написано $5 \times 2 = 10$. Из оставшихся 25 слов (повторяющихся) каждое было написано хотя бы дважды. Следовательно, их не более $\left[\frac{25}{2}\right] = 12$, а общее количество слов не превосходит $10 + 12 = 22$.

Пример распределения повторяющихся слов (s_i):

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}	s_{11}	s_{12}
M_1	+	+	+	+	+							
M_2	+				+	+	+	+				
M_3		+				+			+	+		+
M_4			+				+		+		+	+
M_5				+				+		+	+	+

13. (40 баллов) *В магазине, где все товары стоят целое число рублей, действуют два специальных предложения:*

1) *Покупатель, купивший одновременно не менее трех товаров, может выбрать в подарок (бесплатно) один товар, стоимость которого не превышает минимальной из стоимостей оплаченных товаров;*
2) *Покупатель, купивший ровно один товар на сумму не менее N рублей, получает скидку 20% на следующую покупку (из любого количества товаров).*

Покупатель, впервые пришедший в данный магазин, хочет приобрести ровно четыре товара суммарной стоимостью 1000 рублей, самый дешевый из которых стоит не менее 99 рублей. Определите наибольшее N, при котором второе предложение для него выгоднее первого.

Ответ: 504.

Решение: Обозначим через S суммарную стомость четырех заинтересовавших покупателя товаров, а через X — минимальную возможную стоимость товаров. Заинтересованость ровно в четырех товарах означает, что покупатель может воспользоваться либо предложением 1, либо предложением 2, но не обоими.

Пусть товары стоят s_1, s_2, s_3, s_4 рублей, где $s_1 \geqslant s_2 \geqslant s_3 \geqslant s_4 \geqslant X$. В случае первого специального предложения покупатель может получить в подарок только товар со стоимостью s_4; следовательно, он потратит $S - s_4$ рублей. В случае второго специального предложения покупатель потратит

$$s_i + 0{,}8(S - s_i) = 0{,}2s_i + 0{,}8S,$$

где s_i — минимальная из стоимостей, не меньшая N (она существует, иначе вторым предложением нельзя будет воспользоваться).

Покупателю выгоднее второе специальное предложение, если

$$0{,}2s_i + 0{,}8S < S - s_4 \Leftrightarrow 0{,}2s_i < 0{,}2S - s_4 \Leftrightarrow s_i < S - 5s_4,$$

откуда $N \leqslant s_i < S - 5s_4 \leqslant S - 5X$, то есть $N \leqslant S - 1 - 5X = 1000 - 1 - 5 \cdot 99 = 504$.

Проверим, что значение 504 реализуется для N. Пусть стоимости товаров равны 99, 198, 199 и 504 рубля. И пусть для использования второго специального предложения покупатель приобретает товар стоимостью 504 рубля. Тогда он заплатит сумму $504 + {} + 0{,}8 \cdot 496 = 900{,}8$, которая меньше суммы, потраченной в случае использования первого специального предложения — $1000 - 99 = 901$.

14. (40 баллов) *Докажите, что среди трех чисел* $777^{2021} \cdot 999^{2021} - 1$, $999^{2021} \cdot 555^{2021} - 1$ *и* $555^{2021} \cdot 777^{2021} - 1$ *только одно делится на 4.*

Решение: Пусть m и n — нечетные натуральные числа. Если они дают одинаковый остаток от деления на 4, то либо $mn \mod 4 = 1$, либо $mn \mod 4 = 9 \mod 4 = 1$. В любом случае $mn - 1$ кратно 4. Если m и n дают разные остатки от деления на 4, то $mn \mod 4 = 3$, и $mn - 1$ на 4 не делится.

Заметим, что при делении на 4 число 777^{2021} дает остаток 1, а 555^{2021} и 999^{2021} — остаток 3. Значит, на 4 делится только число $999^{2021} \cdot 555^{2021} - 1$.

Олимпиада школьников СПбГУ по математике
Примеры заданий отборочного этапа
2021/2022 учебный год

Задания для 6–7 классов

1. (15 баллов) *В книжном магазине установлено правило «суммирования» скидок: «если на товар действуют разные виды скидок, то они применяются последовательно друг за другом». Например, если на товар действуют две скидки А% и Б%, то первая скидка применяется к исходной стоимости товара, а вторая — к результату действия первой скидки. Сейчас в магазине действуют две скидки: «Осенняя» в 25% и «Рандомная» — ненулевая скидка на целое число процентов, определяемая в момент оформления покупки. Некто, имеющий карту постоянного покупателя, дающую скидку 20% на все товары, приобрел за 69 рублей книгу, начальная стоимость которой была 230 рублей. Каков был размер «Рандомной» скидки?*

Ответ: 50%.

Решение. Заметим, что последовательность применений скидок несущественна, т. к. применение скидки в А% равносильно умножению стоимости товара на $\left(1-\frac{A}{100}\right)$. Пусть R — величина «рандомной» скидки. Тогда в результате «суммирования» трех скидок мы получим

$$230 \cdot \left(1-\frac{25}{100}\right) \cdot \left(1-\frac{20}{100}\right) \cdot \left(1-\frac{R}{100}\right) = 69 \Longleftrightarrow R = 50.$$

2. (15 баллов) *Назовем словом любую конечную последовательность букв русского алфавита. Сколько различных четырехбуквенных слов можно составить из букв слова КАША? А из букв слова ХЛЕБ? В ответе укажите сумму найденных чисел.*

Ответ: 36.

Решение. В слове ХЛЕБ все буквы различные. Значит, переставляя буквы, мы получим $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ слова. Из слова КАША можно составить 12 слов. Действительно, для букв К и Ш есть $4 \cdot 3 = 12$ позиций, а на оставшиеся места пишем буквы А. Таким образом, в сумме получаем $24 + 12 = 36$ слов.

3. (35 баллов) *Журналисты выяснили, что*

а) в роду царя Пафнутия все потомки — мужчины: у самого царя было 2 сына, у 60 его потомков — тоже по 2 сына, а у 20 — по одному;

б) в роду царя Зиновия все потомки — женщины: у самого царя было 4 дочери, у 35 его потомков — по 3 дочери, у других 35 — по одной.

У остальных потомков обоих царей детей не было. У кого из царей потомков было больше?

Ответ: У Зиновия.

Решение. Нам нужно найти суммарное количество детей в роду Пафнутия, включая детей самого царя. Оно равно $60 \cdot 2 + 20 \cdot 1 + 2 = 142$. Суммарное количество детей в роду царя Зиновия равно $4 + 35 \cdot 3 + 35 \cdot 1 = 144$.

4. (35 баллов) *В государстве есть 11 городов и столица. Между столицей и остальными городами организованы двусторонние автобусные маршруты, каждый из которых (в обоих направлениях) занимает 7 часов. Нестоличные города соединены дорогами с двусторонним движением циклически: 1-й город со 2-м, 2-й с 3-м, ..., 10-й с 11-м, 11-й с 1-м. Время движения автобуса по любой из этих дорог составляет 3 часа. При использовании транзитного маршрута (между городами, не сообщающимися друг с другом напрямую) каждая пересадка требует 2 часов. Известно, что дольше всего добираться из города А в город Б. Пассажир выбрал оптимальный (по времени) маршрут из А в Б, после чего транспортная компания сократила время пересадок с 2-х до 1,5 часов. Сможет ли пассажир перестроить свой маршрут так, чтобы он занимал меньше времени (чем уже выбранный)?*

Ответ: Нет.

Решение. Пусть x — время, требуемое на пересадку, t — минимальное время проезда из А в Б. Проехать из 1-го нестоличного города в 6-й оптимальным образом можно либо транзитом через столицу, либо «по кольцу». В первом случае время проезда составит $2 \cdot 7 + x = 14 + x$ часов, а во втором — $5 \cdot 3 + 4 \cdot x = 15 + 4x$. По условию $t \geqslant \min\{14 + x,\ 15 + 4x\} = 14 + x$ часов. Но из А в Б тоже можно попасть за $14 + x$ часов транзитом через столицу (сами А и Б столицей быть не могут, поскольку $t \geqslant 14 + x > 7$). Таким образом, путь через столицу является оптимальным независимо от времени пересадки.

5. (35 баллов) *В классе на доске был записан пример на сложение двух целых чисел. Отличник Петя на перемене мысленно сложил эти числа и получил 2021. Хулиган Вася подрисовал к одному из чисел на конце цифру 0. Когда начался урок, решать пример к доске вызвали Васю. В результате сложения он получил число 2221. Можете ли вы определить, верно посчитал Вася или нет?*

Ответ: Вася посчитал неверно.

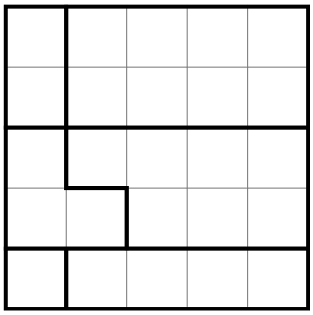
Решение. Обозначим написанные на доске целые числа через x и y. Тогда $x + y = 2021$. Пусть Вася подрисовал 0 к числу x. Если дальнейшие вычисления Васи верны, то $10x + y = 2221$. Вычитая записанные равенства, мы получим $9x = 200$, что невозможно ни для какого целого x.

6. (50 баллов) *Квадрат 5×5 клеточек разрезали на несколько частей разной площади, каждая из которых состоит из целого числа клеточек. Какое максимальное количество частей могло получиться при таком разрезании?*

Ответ: 6.

Решение. Покажем, что больше 6 частей быть не может. Действительно, суммарная площадь 7 частей не может быть меньше, чем $1+2+3+4+5+6+7=28$, то есть она превосходит площадь квадрата.

Теперь покажем, как можно разрезать квадрат 5×5 на 6 разновеликих частей:



Таким образом, площади кусочков будут равны 2, 8, 3, 7, 1 и 4.

7. (50 баллов) *Из чисел от 1 до 200 выбрали одно или несколько в отдельную группу, обладающую следующим свойством: если в группе есть хотя бы два числа, то сумма любых двух чисел из этой группы делится на 5. Какое наибольшее количество чисел может быть в группе с таким свойством?*

Ответ: 40.

Решение. Предположим, что в группу отобрали число A, дающее остаток $i \neq 0$ при делении на 5. Если в группе есть ещё число B, то оно должно давать остаток $5-i$ при делении на 5, чтобы $A+B$ делилось на 5. Покажем, что других чисел в этой группе быть не может. Пусть там есть еще число C, а $j = C \mod 5$. Тогда на 5 делятся числа $i+j$ и $5-i+j$, а также их разность, равная $2i-5$, что невозможно при $i \neq 0$.

Рассмотрим теперь альтернативный случай, когда все числа в группе делятся на 5. В указанном диапазоне есть ровно 40 чисел, кратных 5, и все эти числа можно одновременно включить в группу.

8. (50 баллов) *Каждый из 12 рыцарей, сидящих за круглым столом, задумал по числу, причем все числа различны. Каждый рыцарь утверждает, что задуманное им число больше чисел, задуманных его соседями справа и слева. Какое наибольшее количество этих утверждений может быть верно?*

Ответ: 6.

Решение. Перенумеруем рыцарей по порядку числами от 1 до 12. В парах (1, 2), (3, 4), ..., (11, 12) хотя бы один из рыцарей лжет (а именно, тот, кто загадал меньшее число). Значит, верных утверждений может быть не более 6. Теперь приведем пример, когда верны ровно 6 утверждений. Пусть рыцари с нечетными номерами загадали числа от 1 до 6, а с четными — числа от 7 до 12 (в любом порядке). Тогда правду говорят все рыцари с четными номерами.

9. (50 баллов) *В раздевалке детского сада в корзине для вещей-потеряшек оказалось 30 варежек, из них 10 синих, 10 зеленых, 10 красных, 15 правых и 15 левых. Всегда ли можно составить из этих варежек комплекты из правой и левой варежки одного цвета для 5 детей?*

Ответ: Можно всегда.

Решение. Предположим, что во всех цветах число левых и правых варежек различно (иначе сразу имеем 5 нужных комплектов). Тогда в каждом цвете определим, каких варежек меньше — правых или левых. Хотя бы в двух цветах из трех меньшим будет количество варежек одного типа (пусть это левые варежки синего и красного цвета). С другой стороны, в синем и красном цвете в сумме имеется не менее 5 левых варежек, так как левых зеленых варежек не больше 10. Осталось заметить, что для каждой левой варежки синего или красного цвета найдется правая варежка того же цвета, поскольку правых варежек больше.

10. (50 баллов) *В раздевалке детского сада в корзине для вещей-потеряшек оказалось 30 варежек, из них 10 синих, 10 зеленых, 10 красных, 15 правых и 15 левых. Всегда ли можно составить из этих варежек комплекты из правой и левой варежки одного цвета для 6 детей?*

Ответ: Нет, не всегда.

Решение. В корзине могло быть 10 правых красных варежек, 10 левых зеленых и по 5 штук правых и левых синих. Из них можно составить только 5 пар одного цвета (а именно, синего).