САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Олимпиада школьников СПбГУ по математике

Задания заключительного этапа

2021/2022 учебный год

Олимпиада школьников СПбГУ по математике

Заключительный этап. 2021/2022 учебный год.

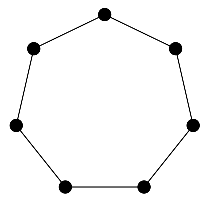
Задания для 10-11 классов

(Правильное и полное решение каждой задачи оценивается в 20 баллов)

Олимпиада школьников СПбГУ по математике.
Заключительный этап. 2021/2022 учебный год. 10 – 11 классы.

Вариант 1

1. *На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Саша выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа так, чтобы для всех этих чисел выполнялось свойство:*
если числа a и b не соединены отрезком, то сумма $a + b$ должна быть взаимно проста с n, а если соединены, то числа $a + b$ и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1. При каком наименьшем n существует такая расстановка?



Ответ: $n = 35$.

Решение. Сделаем два замечания.

1) *n нечетно.* Действительно, пусть n четно. Среди семи чисел всегда есть три числа одной четности, и по условию они должны быть попарно соединены. Но на картинке нет циклов длины 3.

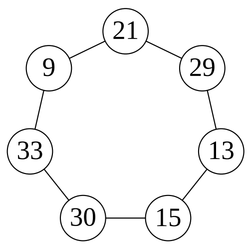
2) *Если q — простой делитель n, то среди четырех последовательно соединенных чисел существует пара соседних, сумма которых не кратна q.* Возьмем цепочку (a, b, c, d) последовательно соединенных чисел. По условию

$$a + d = (a + b) - (b + c) + (c + d) \;\vdots\; p.$$

Тогда числа a и d тоже соединены, то есть на картинке получился цикл длины 4, которого там нет.

Из 1) и 3) вытекает, что число n имеет по крайней мере два различных нечетных простых делителя. Пусть их ровно два (скажем, p и q). Покажем, что они отличны от 3. Допустим, например, что $p = 3$. Не более двух чисел делятся на 3 (если их три, то они образуют цикл). Остальные числа разобьем на две группы, дающие при делении на 3 остатки 1 и 2. Одна из этих групп пуста, иначе любое число из меньшей группы будет соединено по крайней мере с тремя числами из другой группы, что невозможно. Сумма чисел из одной группы на 3 не делится. Поэтому существует трехзвенная цепочка, в которой сумма любой пары соединенных чисел не кратна 3 и, значит, делится на q. Но это противоречит 2).

Таким образом, если n имеет ровно два различных нечетных простых делителя, то $n \geqslant 5 \cdot 7 = 35$. Если же таких делителей больше двух, то $n \geqslant 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105 > 35$. Расстановка для $n = 35$ приведена на рисунке. □



2. *При $x, y, z \in (0, 2]$ найдите максимальное значение выражения*

$$A = \frac{(x^3 - 6)\sqrt[3]{x + 6} + (y^3 - 6)\sqrt[3]{y + 6} + (z^3 - 6)\sqrt[3]{z + 6}}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Ответ: 1.

Решение. При $x \in (0,2]$ справедливы неравенства $\sqrt[3]{x+6} \leqslant 2$ и $x^3 \leqslant 2x^2$, откуда

$$(x^3-6)\sqrt[3]{x+6} \leqslant 2\,(2x^2-6).$$

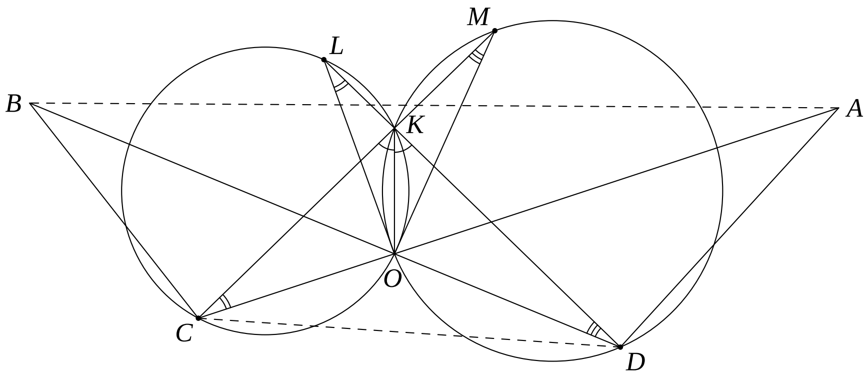
Аналогичным образом оцениваются два других слагаемых в числителе A. Поэтому

$$A \leqslant 2 \cdot \frac{2x^2-6+2y^2-6+2z^2-6}{x^2+y^2+z^2} = 4 - \frac{36}{x^2+y^2+z^2} \leqslant 4 - \frac{36}{12} = 1.$$

Равенство реализуется при $x=y=z=2$. $\square$

3. *Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Внутри треугольника AOB выбрана такая точка K, что прямая KO является биссектрисой угла CKD. Луч DK вторично пересекает описанную окружность треугольника COK в точке L, а луч CK вторично пересекает описанную окружность треугольника DOK в точке M. Найдите отношение площадей треугольников ALO и BMO.*

Ответ: 1.



Решение. Пусть r_1 и r_2 — радиусы окружностей, описанных около треугольников COK и DOK соответственно. Заметим, что

$$\angle LKO = 180^\circ - \angle DKO = 180^\circ - \angle CKO = \angle MKO,$$

откуда $\dfrac{LO}{MO} = \dfrac{r_1}{r_2}$. Кроме того, из вписанности $ABCD$ вытекает, что треугольники AOD и BOC подобны по двум углам. Тогда

$$\frac{AO}{BO} = \frac{OD}{OC} = \frac{r_2}{r_1},$$

так как хорды OD и OC соответствуют одинаковым вписанным углам. Поэтому

$$\frac{LO}{MO} \cdot \frac{AO}{BO} = 1 \Longleftrightarrow LO \cdot AO = MO \cdot BO.$$

Поскольку $\angle KMO = \angle KDO$ и $\angle KLO = \angle KCO$, треугольники MCO и DLO подобны, откуда

$$\begin{aligned}\angle AOL = \angle AOM + \angle LOM = 180^\circ - \angle COM + \angle LOM = \\ = 180^\circ - \angle DOL + \angle LOM = \angle BOL + \angle LOM = \angle BOM.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$S_{AOL} = \tfrac{1}{2} \cdot LO \cdot AO \cdot \sin\angle AOL = \tfrac{1}{2} \cdot MO \cdot BO \cdot \sin\angle BOM = S_{BOM}. \quad \square$$

4. *Натуральное число x в системе счисления с основанием r ($r \leqslant 36$) имеет вид $\overline{ppqq}$, причем $2q = 5p$. Оказалось, что r-ичная запись числа x^2 представляет собой семизначный палиндром с нулевой средней цифрой. (Палиндромом называется число, которое читается одинаково слева направо и справа налево). Найдите сумму r-ичных цифр числа x^2.*

Ответ: 36.

Решение. Договоримся писать $u \equiv v \pmod{w}$, если $(u-v) \vdots w$. Пусть $p = 2s$, $q = 5s$. Тогда $x = \overline{ppqq}_r = (pr^2+q)(r+1) = s\,(2r^2+5)(r+1)$. Из условия на x^2 вытекает равенство

$$s^2(2r^2+5)^2(r^2+2r+1) = a\bigl(1+r^6\bigr) + b\bigl(r+r^5\bigr) + c\bigl(r^2+r^4\bigr), \qquad (*)$$

где a, b, c — некоторые r-ичные цифры. Сделаем два наблюдения.

1) При любом натуральном n

$$r^n = (1+r-1)^n \equiv (-1)^n \bigl(1 - n(1+r)\bigr) \pmod{(1+r)^2}.$$

Правая часть $(*)$ кратна $(1+r)^2$, откуда

$$0 \equiv a\bigl(2-6(1+r)\bigr) - b\bigl(2-6(1+r)\bigr) + c\bigl(2-6(1+r)\bigr) = 2\bigl(1-3(1+r)\bigr)(a-b+c) \pmod{(1+r)^2}.$$

Поскольку $1-3(1+r)$ взаимно просто с $(1+r)^2$, на $(1+r)^2$ делится $2\,(a-b+c)$. Но это число лежит в интервале $(-2r, 4r) \subset \bigl(-(1+r)^2, (1+r)^2\bigr)$, откуда $b = a+c$.

2) Приравняем остатки левой и правой частей $(*)$ от деления на $1+r^2$:

$$18s^2r \equiv br(1+r^4) \equiv 2br \pmod{(1+r^2)}.$$

Поскольку r взаимно просто с $1+r^2$, на $1+r^2$ делится $2\,(9s^2-b)$. Заметим, что $4s^2 \leqslant r-1$, иначе число x^2 будет восьмизначным. Кроме того, $r \geqslant 5s+1 \geqslant 6$. Поэтому

$$2\,(9s^2-b) < 18s^2 \leqslant \tfrac{9}{2}\,(r-1) < 6r < 1+r^2, \quad 2\,(9s^2-b) \geqslant -2b > -2r > -1-r^2.$$

Таким образом, $b = 9s^2$.

Поскольку b — r-ичная цифра, из 2) вытекает, что $9s^2 < r \leqslant 36$, откуда $s^2 < 4$. Так как $s > 0$, мы получаем $s = 1$ и $b = 9$. В силу 1) сумма цифр x^2 равна $2\,(a+b+c) = 4b = 36$. $\square$

Замечание. Прямым вычислением проверяется, что $2255_{21}^2 = 4950594_{21}$. Таким образом, описанная в условии ситуация реализуется.

5. *При каких n клетчатую доску $n \times n$ можно разбить по клеточкам на один квадрат 2×2 и некоторое количество полосок из пяти клеток так, что квадрат будет примыкать к стороне доски?*

Ответ: при всех n, дающих остаток 2 от деления на 5.

Решение. Если доску $n \times n$ удалось разрезать на один квадрат 2×2 и некоторое количество полосок из пяти клеток, то $n^2 = 2^2 + 5m$, откуда n дает остаток 2 или 3 от деления на 5. Предположим, что $n = 5k+3$ и доску удалось разрезать требуемым образом. Развернем ее так, чтобы квадрат примыкал к верхней стороне доски. Запишем в клетках верхней строки единицы, в клетках следующей за ней строки — двойки, и так далее. Заметим, что сумма чисел в пяти последовательных строках кратна 5, поскольку

$$ni + n\,(i+1) + n\,(i+2) + n\,(i+3) + n\,(i+4) = 5n\,(i+2) \vdots 5.$$

Поэтому остаток от деления на 5 суммы всех расставленных чисел равен

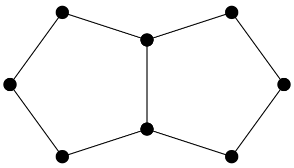
$$(n+2n+3n) \bmod 5 = 6\,(5k+3) \bmod 5 = 3.$$

С другой стороны, в каждой полоске сумма чисел кратна пяти, а в квадрате сумма чисел равна $1+1+2+2 = 6$. Значит, остаток от деления на 5 суммы всех расставленных чисел равен 1, и мы получаем противоречие.

Если $n = 5k+2$, то можно вырезать угловой квадрат 2×2, верхнюю полоску $2 \times 5k$ разрезать на горизонтальные полоски из пяти клеток, а прямоугольник $5k \times (5k+2)$ разрезать на вертикальные полоски из пяти клеток. $\square$

Вариант 2

1. *На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Саша выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа так, чтобы для всех этих чисел выполнялось свойство:*
если числа a и b не соединены отрезком, то сумма $a+b$ должна быть взаимно проста с n, а если соединены, то числа $a+b$ и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1.
При каком наименьшем n существует такая расстановка?



Ответ: $n = 35$.

Решение. Сделаем два замечания.

1) *n нечетно.* Действительно, пусть n четно. Среди восьми чисел всегда есть три числа одной четности, и по условию они должны быть попарно соединены. Но на картинке нет циклов длины 3.

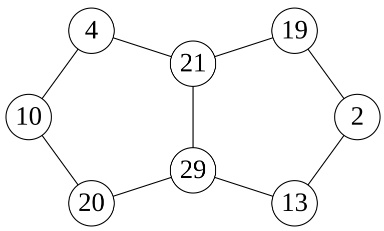
2) *Если q — простой делитель n, то среди четырех последовательно соединенных чисел существует пара соседних, сумма которых не кратна q.* Возьмем цепочку (a, b, c, d) последовательно соединенных чисел. По условию

$$a + d = (a + b) - (b + c) + (c + d) \vdots p.$$

Тогда числа a и d тоже соединены, то есть на картинке получился цикл длины 4, которого там нет.

Из 1) и 3) вытекает, что число n имеет по крайней мере два различных нечетных простых делителя. Пусть их ровно два (скажем, p и q). Покажем, что они отличны от 3. Допустим, например, что $p = 3$. Не более двух чисел делятся на 3 (если их три, то они образуют цикл). Остальные числа (их не менее 6) разобьем на две группы, дающие при делении на 3 остатки 1 и 2. Покажем, что одна из этих групп пуста. Если это не так, то каждое число из одной группы соединено с любым числом из другой. Но тогда в одной группе не более трех чисел, а в другой — не более двух, что невозможно. Сумма чисел из одной группы на 3 не делится. Поэтому существует трехзвенная цепочка, в которой сумма любой пары соединенных чисел не кратна 3 и, значит, делится на q. Но это противоречит 2).

Таким образом, если n имеет ровно два различных нечетных простых делителя, то $n \geqslant 5 \cdot 7 = 35$. Если же таких делителей больше двух, то $n \geqslant 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105 > 35$. Расстановка для $n = 35$ приведена на рисунке. $\square$



2. *При $x, y, z \geqslant 3$ найдите минимальное значение выражения*

$$A = \frac{(x^3 - 24)\sqrt[3]{x+24} + (y^3 - 24)\sqrt[3]{y+24} + (z^3 - 24)\sqrt[3]{z+24}}{xy + yz + zx}.$$

Ответ: 1.

Решение. При $x \geqslant 3$ справедливы неравенства $\sqrt[3]{x+24} \geqslant 3$ и $x^3 \geqslant 3x^2$, откуда

$$(x^3-24)\sqrt[3]{x+24} \geqslant 3\,(3x^2-24).$$

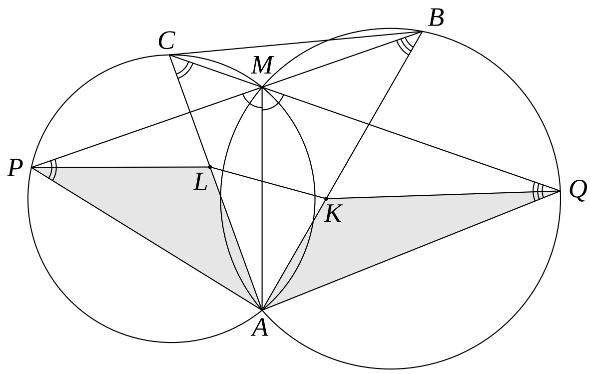
Аналогичным образом оцениваются два других слагаемых в числителе A. Поэтому

$$A \geqslant 3\cdot\frac{3x^2-24+3y^2-24+3z^2-24}{xy+yz+zx} = 9\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx}-\frac{24}{xy+yz+zx}\right) \geqslant 9\left(1-\frac{24}{27}\right)=1.$$

Равенство реализуется при $x=y=z=3$. $\square$

3. *На сторонах AB и AC остроугольного треугольника ABC отмечены соответственно такие точки K и L, что четырехугольник $BKLC$ является вписанным. Внутри этого четырехугольника выбрана точка M так, что прямая AM является биссектрисой угла BMC. Луч BM вторично пересекает описанную окружность треугольника AMC в точке P, а луч CM вторично пересекает описанную окружность треугольника AMB в точке Q. Найдите отношение площадей треугольников ALP и AKQ.*

Ответ: 1.



Решение. Пусть r_1 и r_2 — радиусы окружностей, описанных около треугольников AMB и AMC соответственно. Так как AM — биссектриса угла BMC, справедливы равенства

$$\angle AMB = \angle AMC \quad \text{и} \quad \angle AMP = \angle AMQ,$$

откуда $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{AQ}{AP}$. Кроме того, из вписанности $BKLC$ вытекает, что

$$\angle ALK = 180^\circ - \angle KLC = \angle ABC.$$

Значит, треугольники ALK и ABC подобны по двум углам. Поэтому

$$\frac{AL}{AK} = \frac{AB}{AC} = \frac{AQ}{AP} \Longrightarrow AL\cdot AP = AK\cdot AQ.$$

Из равенств $\angle ABM = \angle AQM$ и $\angle APM = \angle ACM$ вытекает, что $\angle BAP = \angle CAQ$, откуда

$$\angle LAP = \angle CAP = \angle BAP - \angle BAC = \angle CAQ - \angle BAC = \angle BAQ = \angle KAQ.$$

Таким образом,

$$S_{ALP} = \tfrac{1}{2}\cdot AL\cdot AP\cdot\sin\angle LAP = \tfrac{1}{2}\cdot AK\cdot AQ\cdot\sin\angle KAQ = S_{AKQ}. \quad \square$$

4. *Натуральное число x в системе счисления с основанием r $(r \leqslant 400)$ имеет вид $\overline{ppqq}$, причем $7q = 17p$. Оказалось, что r-ичная запись числа x^2 представляет собой семизначный палиндром с нулевой средней цифрой. (Палиндромом называется число, которое читается одинаково слева направо и справа налево). Найдите сумму r-ичных цифр числа x^2.*

Ответ: 400.

Решение. Договоримся писать $u \equiv v \pmod{w}$, если $(u - v) \,\vdots\, w$. Пусть $p = 7s$, $q = 17s$. Тогда $x = \overline{ppqq}_r = (pr^2 + q)(r + 1) = s\,(7r^2 + 17)(r + 1)$. Из условия на x^2 вытекает равенство

$$s^2(7r^2 + 17)^2(r^2 + 2r + 1) = a\big(1 + r^6\big) + b\big(r + r^5\big) + c\big(r^2 + r^4\big), \qquad (*)$$

где a, b, c — некоторые r-ичные цифры. Сделаем два наблюдения.

1) При любом натуральном n

$$r^n = (1 + r - 1)^n \equiv (-1)^n \big(1 - n(1 + r)\big) \pmod{(1 + r)^2}.$$

Правая часть $(*)$ кратна $(1 + r)^2$, откуда

$$0 \equiv a\,\big(2 - 6(1 + r)\big) - b\big(2 - 6(1 + r)\big) + c\big(2 - 6(1 + r)\big) = 2\,\big(1 - 3(1 + r)\big)(a - b + c) \pmod{(1 + r)^2}.$$

Поскольку $1 - 3(1 + r)$ взаимно просто с $(1 + r)^2$, на $(1 + r)^2$ делится $2\,(a - b + c)$. Но это число лежит в интервале $(-2r, 4r) \subset \big(-(1 + r)^2, (1 + r)^2\big)$, откуда $b = a + c$.

2) Приравняем остатки левой и правой частей $(*)$ от деления на $1 + r^2$:

$$200s^2r \equiv br\,(1 + r^4) \equiv 2br \pmod{(1 + r^2)}.$$

Поскольку r взаимно просто с $1 + r^2$, на $1 + r^2$ делится $2\,(100s^2 - b)$. Заметим, что $49s^2 \leqslant r - 1$, иначе число x^2 будет восьмизначным. Кроме того, $r \geqslant 17s + 1 \geqslant 18$. Поэтому

$$2\,(100s^2 - b) < 200s^2 \leqslant \frac{200}{49}\,(r - 1) < 5r < 1 + r^2, \quad 2\,(100s^2 - b) \geqslant -2b > -2r > -1 - r^2.$$

Таким образом, $b = 100s^2$.

Поскольку b — r-ичная цифра, из 2) вытекает, что $100s^2 < r \leqslant 400$, откуда $s^2 < 4$. Так как $s > 0$, мы получаем $s = 1$ и $b = 100$. В силу 1) сумма цифр x^2 равна $2\,(a + b + c) = 4b = 100$. $\square$

Замечание. Прямое вычисление показывает, что $\big(7, 7, 17, 17\big)^2_{120} = \big(49, 100, 51, 0, 51, 100, 49\big)_{120}$. Таким образом, описанная в условии ситуация реализуется.

5. *При каких n клетчатую доску $n \times n$ можно разбить по клеточкам на один квадрат 3×3 и некоторое количество полосок из семи клеток так, что квадрат будет примыкать к стороне доски?*

Ответ: при всех n, дающих остаток 3 от деления на 7.

Решение. Если доску $n \times n$ удалось разрезать на один квадрат 3×3 и некоторое количество полосок из семи клеток, то $n^2 = 3^2 + 7m$, откуда n дает остаток 3 или 4 от деления на 7. Предположим, что $n = 7k + 4$ и доску удалось разрезать требуемым образом. Развернем ее так, чтобы квадрат примыкал к верхней стороне доски. Запишем в клетках верхней строки единицы, в клетках следующей за ней строки — двойки, и так далее. Заметим, что сумма чисел в семи последовательных строках кратна 7, поскольку

$$ni + n\,(i + 1) + n\,(i + 2) + n\,(i + 3) + n\,(i + 4) + n\,(i + 5) + n\,(i + 6) = 7n\,(i + 3) \,\vdots\, 7.$$

Поэтому остаток от деления на 7 суммы всех расставленных чисел равен

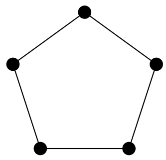
$$(n + 2n + 3n + 4n) \bmod 7 = 10\,(7k + 4) \bmod 7 = 5.$$

С другой стороны, в каждой полоске сумма чисел кратна семи, а в квадрате сумма чисел равна $3 + 6 + 9 = 18$. Значит, остаток от деления на 7 суммы всех расставленных чисел равен $18 \bmod 7 = 4$, и мы получаем противоречие.

Если $n = 7k + 3$, то можно вырезать угловой квадрат 3×3, верхнюю полоску $3 \times 7k$ разрезать на горизонтальные полоски из семи клеток, а прямоугольник $7k \times (7k + 3)$ разрезать на вертикальные полоски из семи клеток. $\square$

Вариант 3

1. *На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Таня выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа так, чтобы для всех этих чисел выполнялось свойство:*
если числа a и b не соединены отрезком, то сумма a^2+b^2 должна быть взаимно проста с n, а если соединены, то числа a^2+b^2 и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1. При каком наименьшем n существует такая расстановка?



Ответ: $n = 65$.

Решение. Сделаем вначале три замечания.

1) *n нечетно.* Действительно, пусть n четно. Среди пяти чисел всегда есть три числа одной четности, и по условию они должны быть попарно соединены. Но на картинке нет циклов длины 3.

2) *Если d — делитель n, то не более двух чисел кратны d.* Пусть нашлось три таких числа. Тогда они должны быть попарно соединены и, значит, образуют трехзвенный цикл.

3) *Если q — простой делитель n, то среди четырех последовательно соединенных чисел существует пара соседних, сумма квадратов которых не кратна q.* Пусть нашлась такая цепочка (a, b, c, d) последовательно соединенных чисел, что сумма квадратов любой пары соседних чисел кратна q. Тогда

$$a^2 + d^2 = \left(a^2 + b^2\right) - \left(b^2 + c^2\right) + \left(c^2 + d^2\right) \,\vdots\, q.$$

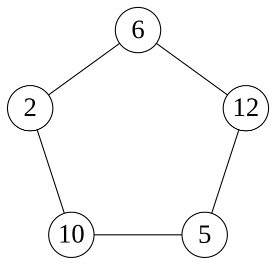
Значит, числа a и d соединены, то есть на картинке получился цикл длины 4, которого там нет.

Из 1) и 3) вытекает, что число n имеет по крайней мере два различных нечетных простых делителя. Пусть их ровно два (скажем, p и q). Покажем, что они отличны от 3, 7, 11. Допустим, например, что $p \in \{3, 7, 11\}$. Заметим, что для любого натурального a

$$a^2 \bmod 3 \in \{0, 1\}, \quad a^2 \bmod 7 \in \{0, 1, 2, 4\}, \quad a^2 \bmod 11 \in \{0, 1, 3, 4, 5, 9\}.$$

Поэтому $a^2 + b^2$ кратно p тогда и только тогда, когда на p делятся a^2 и b^2, а значит, a и b. В силу 2) этому условию может удовлетворять лишь одна пара. Из остальных четырех пар соединенных чисел можно составить трехзвенную цепочку, в которой сумма квадратов каждой пары соседних чисел кратна q. Но это противоречит 3).

Таким образом, если n имеет ровно два различных нечетных простых делителя, то $n \geqslant 5 \cdot 13 = 65$. Если же таких делителей больше двух, то $n \geqslant 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105 > 65$. Расстановка для $n = 65$ приведена на рисунке. $\square$



2. *При $x, y, z \geqslant 1$ найдите минимальное значение выражения*

$$A = \frac{\sqrt{3x^4 + y} + \sqrt{3y^4 + z} + \sqrt{3z^4 + x} - 3}{xy + yz + zx}.$$

Ответ: 1.

Решение. Заметим, что при $x, y \geqslant 1$

$$\sqrt{3x^4+y}-1=\sqrt{x^4+2x^4+y}-1 \geqslant \sqrt{x^4+2x^2+1}-1=x^2.$$

Аналогичным образом доказывается, что

$$\sqrt{3y^4+z}-1 \geqslant y^2, \quad \sqrt{3z^4+x}-1 \geqslant z^2.$$

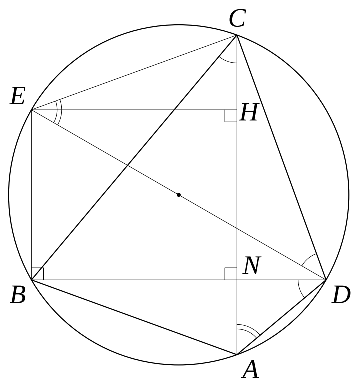
Поэтому

$$A \geqslant \frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx} \geqslant 1.$$

Равенство реализуется при $x=y=z=1$. $\square$

3. *Дан вписанный четырехугольник $ABCD$ с перпендикулярными диагоналями. На описанной вокруг него окружности отмечена точка E, диаметрально противоположная D, причем отрезки AB и DE не пересекаются. Найдите отношение площадей треугольника BCD и четырехугольника $ABED$.*

Ответ: 1.



Решение. Пусть N — точка пересечения AC и BD, H — основание перпендикуляра, опущенного из точки E на прямую AC. По условию DE — диаметр окружности. Тогда $\angle DBE = 90^\circ$, откуда $BE \parallel AC$. Кроме того, $\angle DCE = 90^\circ$ и

$$\angle CDE = 90^\circ - \angle DEC = 90^\circ - \angle DAC = \angle ADB,$$

откуда $CE = AB$. Значит, $ABEC$ — равнобедренная трапеция, и

$$CN = AC - AN = AC - CH = AH.$$

Осталось заметить, что

$$2 \cdot S_{ABED} = BD \cdot AN + BD \cdot BE = BD \cdot AH = BD \cdot CN = 2 \cdot S_{BCD}. \quad \square$$

4. *На доске написано число $x = 9999$ в системе счисления с четным основанием r. Вася выяснил, что r-ичная запись x^2 представляет собой восьмизначный палиндром, у которого сумма второй и третьей цифр равна 24. (Палиндромом называется число, которое читается одинаково слева направо и справа налево). При каких r такое возможно?*

Ответ: $r = 26$.

Решение. Договоримся писать $u \equiv v \pmod w$, если $(u-v) \,\vdots\, w$. По условию существуют такие r-ичные цифры a, b, c, d, что $b+c=24$ и

$$81\,(r+1)^2(r^2+1)^2 = a\,(r^7+1) + b\,(r^6+r) + c\,(r^5+r^2) + d\,(r^4+r^3). \qquad (*)$$

Сделаем некоторые наблюдения.

1) Так как $r^6 \equiv -1 \pmod{(r^2+1)}$, справедливы равенства

$$r^7+1 \equiv 1-r \pmod{(r^2+1)} \quad \text{и} \quad r^6+r \equiv r-1 \pmod{(r^2+1)}.$$

Кроме того, $r^4 \equiv 1 \pmod{(r^2+1)}$, откуда

$$r^5+r^2 \equiv r-1 \pmod{(r^2+1)} \quad \text{и} \quad r^4+r^3 \equiv 1-r \pmod{(r^2+1)}.$$

Тогда в силу $(*)$

$$0 \equiv (a-b-c+d)(1-r) \pmod{(r^2+1)}.$$

Заметим, что $r^2+1+(1-r)(r+1)=2$, а числа $1-r$ и r^2+1 нечетны. Поэтому они взаимно просты, откуда $a-b-c+d \,\vdots\, (r^2+1)$. Но

$$\bigl|(a+d)-(b+c)\bigr| \leqslant 2(r-1) < 2r < r^2+1.$$

Значит, $a+d=b+c=24$.

2) Так как $r^n \equiv 1 \pmod{(r-1)}$ при любом натуральном n, из $(*)$ и 1) вытекает, что

$$81\cdot 16 \equiv 2\,(a+b+c+d) = 96 = 16\cdot 6 \pmod{(r-1)}.$$

Поскольку $r-1$ нечетно, на $r-1$ делится число $81-6=75=3\cdot 5^2$. По условию $r>9$, то есть для r возможны только значения 16, 26, 76. В случае $r=16$ с учетом 1)

$$a = 81 \mod 16 = 1 \quad \text{и} \quad d = 24-a = 23 > r,$$

что невозможно. Если $r=76$, то $a = 81 \mod 76 = 5$, откуда и старшая цифра x^2 равна 5. Но это невозможно, поскольку $9999_{76}^2 < 10^2\cdot 76^6 < 2\cdot 76^7$. Значит, $r=26$. $\square$

Замечание. Если $r=26$, то в силу 1)

$$a = 81 \mod 26 = 3, \quad d = 24-a = 21 = L_{26}, \quad b = \left(81\cdot 2 + \left[\tfrac{81}{26}\right]\right) \mod 26 = 9, \quad c = 24-b = 15 = F_{26}.$$

Равенство $9999_{26}^2 = 39FLLF93_{26}$ проверяется прямым вычислением.

5. *Дана квадратная таблица* 2021×2021. *Каждая ее клетка окрашена в один из* n *цветов. Известно, что для любых четырех клеток одного цвета, расположенных в одном столбце, справа от верхней из них и слева от нижней из них нет клеток того же цвета. При каком наименьшем* n *такое возможно?*

Ответ: 506.

Решение. Рассмотрим какой-то конкретный цвет (скажем, синий). В каждом столбце три нижние синие клетки отметим крестиком, остальные — ноликом (если синих клеток в столбце меньше четырех, то крестиком помечаем все клетки). Заметим, что в любой строке есть не более одной синей клетки с ноликом (в противном случае для самой левой из них нарушается условие задачи). Значит, всего имеется не больше 2021 синих клеток с ноликом. Кроме того, число синих клеток с крестиком не больше, чем $3\cdot 2021$. Таким образом, общее количество синих клеток не превосходит $2021 + 3 \cdot 2021 = 4 \cdot 2021$. Эти рассуждения справедливы для любого цвета. Поэтому общее число цветов не меньше, чем

$$\frac{2021^2}{4 \cdot 2021} = \frac{2021}{4} = 505,25.$$

Значит, $n \geqslant 506$.

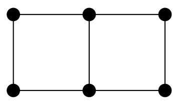
Покажем, что $n = 506$ реализуется. Последовательно занумеруем снизу вверх все диагонали, идущие с северо-запада на юго-восток, числами от 1 до 4041. Первые четыре диагонали покрасим в первый цвет, следующие четыре — во второй, и так далее по циклу (то есть за 506-м цветом снова будет следовать первый). Проверим, что эта раскраска удовлетворяет условию задачи. Заметим, что ни один цвет не используется более двух раз, поскольку $506 \cdot 4 \cdot 2 = 4048 > 4041$. Пусть k-й цвет встретился два раза. В первом блоке самая верхняя клетка этого цвета окажется в строке с номером $4k$. Во втором блоке самая нижняя клетка этого цвета находится в строке с номером

$$4\,(506 + k - 1) + 1 - 2020 = 4k + 1.$$

Значит, клетки одного цвета из разных блоков не могут оказаться в одной строке. $\square$

Вариант 4

1. *На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Таня выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа так, чтобы для всех этих чисел выполнялось свойство:*
если числа a и b не соединены отрезком, то сумма a^2+b^2 должна быть взаимно проста с n, а если соединены, то числа a^2+b^2 и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1. При каком наименьшем n существует такая расстановка?



Ответ: $n = 65$.

Решение. Сделаем вначале три замечания.

1) *n нечетно.* Действительно, пусть n четно. Среди шести чисел всегда есть три числа одной четности, и по условию они должны быть попарно соединены. Но на картинке нет циклов длины 3.

2) *Если d — делитель n, то не более двух чисел кратны d.* Пусть нашлось три таких числа. Тогда они должны быть попарно соединены и, значит, образуют трехзвенный цикл.

3) *Если q — простой делитель n, а в цепочке (a,b,c,d) последовательно соединенных чисел сумма квадратов любой пары соседних чисел кратна q, то (a,b,c,d) образует цикл.* Действительно,

$$a^2+d^2 = \left(a^2+b^2\right) - \left(b^2+c^2\right) + \left(c^2+d^2\right) \;\vdots\; q.$$

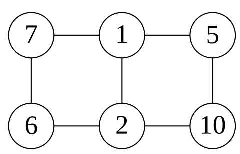
то есть числа a и d тоже соединены.

Из 1) и 3) вытекает, что число n имеет по крайней мере два различных нечетных простых делителя. Пусть их ровно два (скажем, p и q). Покажем, что они отличны от 3, 7, 11. Допустим, например, что $p \in \{3,7,11\}$. Заметим, что для любого натурального a

$$a^2 \bmod 3 \in \{0,1\}, \quad a^2 \bmod 7 \in \{0,1,2,4\}, \quad a^2 \bmod 11 \in \{0,1,3,4,5,9\}.$$

Поэтому a^2+b^2 кратно p тогда и только тогда, когда на p делятся a^2 и b^2, а значит, a и b. В силу 2) этому условию может удовлетворять лишь одна пара. Из остальных шести пар соединенных чисел можно составить трехзвенную нециклическую цепочку (например, проходящую по левой и верхней или по правой и нижней сторонам большого прямоугольника). В этой цепочке сумма квадратов каждой пары соседних чисел кратна q, что противоречит 3).

Таким образом, если n имеет ровно два различных нечетных простых делителя, то $n \geqslant 5\cdot 13 = 65$. Если же таких делителей больше двух, то $n \geqslant 3\cdot 5\cdot 7 = 105 > 65$. Расстановка для $n = 65$ приведена на рисунке. □



2. *При $x, y, z \in (0,1]$ найдите максимальное значение выражения*

$$A = \frac{\sqrt{8x^4+y} + \sqrt{8y^4+z} + \sqrt{8z^4+x} - 3}{x+y+z}.$$

Ответ: 2.

Решение. Заметим, что при $x, y \in (0, 1]$

$$\sqrt{8x^4+y}-1=\sqrt{4x^4+4x^4+y}-1 \leqslant \sqrt{4x^2+4x+1}-1=2x.$$

Аналогичным образом доказывается, что

$$\sqrt{3y^4+z}-1 \leqslant 2y, \quad \sqrt{3z^4+x}-1 \leqslant 2z.$$

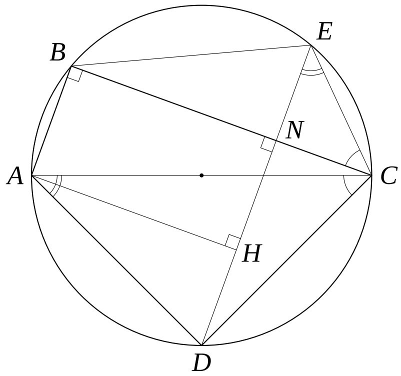
Поэтому

$$A \leqslant \frac{2x+2y+2z}{x+y+z}=2.$$

Равенство реализуется при $x=y=z=1$. $\square$

3. *Диагональ AC вписанного четырехугольника $ABCD$ является диаметром описанной вокруг него окружности ω. Из точки D провели прямую, перпендикулярную отрезку BC, она вторично пересекла окружность ω в точке E. Найдите отношение площадей треугольника BCD и четырехугольника $ABEC$.*

Ответ: 1.



Решение. Пусть N — точка пересечения BC и DE, H — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую DE. По условию AC — диаметр окружности. Тогда $\angle ABC = 90°$, откуда $AB \parallel DE$. Кроме того, $\angle ADC = 90°$ и

$$\angle ACD = 90° - \angle DAC = 90° - \angle DEC = 90° - \angle NEC = \angle ECB,$$

откуда $AD = BE$. Значит, $DABE$ — равнобедренная трапеция, и

$$DN = DE - EN = DE - DH = EH.$$

Осталось заметить, что

$$2 \cdot S_{ABEC} = BC \cdot EN + BC \cdot AB = BC \cdot EH = BC \cdot DN = 2 \cdot S_{BCD}. \quad \square$$

4. *На доске написано число 5555 в системе счисления с четным основанием r ($r \geqslant 18$). Петя выяснил, что r-ичная запись x^2 представляет собой восьмизначный палиндром, у которого разность четвертой и третьей цифр равна 2. (Палиндромом называется число, которое читается одинаково слева направо и справа налево). При каких r такое возможно?*

Ответ: $r = 24$.

Решение. Договоримся писать $u \equiv v \pmod{w}$, если $(u-v) \mathrel{\vdots} w$. По условию существуют такие r-ичные цифры a, b, c, d, что $d - c = 2$ и

$$25\,(r+1)^2(r^2+1)^2 = a\,(r^7+1) + b\,(r^6+r) + c\,(r^5+r^2) + d\,(r^4+r^3). \qquad (*)$$

Сделаем некоторые наблюдения.

1) Так как $r^6 \equiv -1 \pmod{(r^2+1)}$, справедливы равенства

$$r^7+1 \equiv 1-r \pmod{(r^2+1)} \quad \text{и} \quad r^6+r \equiv r-1 \pmod{(r^2+1)}.$$

Кроме того, $r^4 \equiv 1 \pmod{(r^2+1)}$, откуда

$$r^5+r^2 \equiv r-1 \pmod{(r^2+1)} \quad \text{и} \quad r^4+r^3 \equiv 1-r \pmod{(r^2+1)}.$$

Тогда в силу $(*)$

$$0 \equiv (a-b-c+d)(1-r) \pmod{(r^2+1)}.$$

Заметим, что $r^2+1+(1-r)(r+1) = 2$, а числа $1-r$ и r^2+1 нечетны. Значит, они взаимно просты, откуда $a-b-c+d \mathrel{\vdots} (r^2+1)$. Но

$$|a-b-c+d| \leqslant 2(r-1) < 2r < r^2+1.$$

Значит, $b-a = d-c = 2$.

2) Так как $r^n \equiv 1 \pmod{(r-1)}$ при любом натуральном n, из $(*)$ и 1) вытекает, что

$$25 \cdot 16 \equiv 2\,(a+b+c+d) = 4\,(b+c) \pmod{(r-1)}.$$

Поскольку $r-1$ нечетно, на $r-1$ делится число $100-(b+c)$.

3) При любом натуральном n

$$r^n = (r+1-1)^n \equiv (-1)^n\,\bigl(1-n(r+1)\bigr) \pmod{(r+1)^2}.$$

Правая часть $(*)$ кратна $(r+1)^2$, откуда

$$0 \equiv (7a-5b+3c-d)(r+1) \pmod{(r+1)^2}.$$

Значит, на $r+1$ делится число

$$7a-5b+3c-d = 7(b-2)-5b+3c-(c+2) = 2\,(b+c)-16.$$

Тогда $b+c-8 \mathrel{\vdots} (r+1)$ ввиду нечетности $r+1$. Поэтому $b+c=8$ или $b+c=8+r+1$. Во втором случае

$$0 \equiv 92-(r+1) \equiv 90 \pmod{(r-1)}.$$

Так как r четно и $r-1 \geqslant 17$, мы получаем $r=46$. Тогда $a=25$ и $b=27$, что невозможно, так как $b = 50 \mod 46 = 4$. Значит, $b+c=8$. В силу 2) $92 \mathrel{\vdots} (r-1)$, откуда $r=24$. $\square$

Замечание. Если $b+c=8$ и $r=24$, то

$$a = 25 \mod 24 = 1, \quad b = a+2 = 3, \quad c = 8-b = 5, \quad d = c+2 = 7.$$

Равенство $5555_{24}^2 = 13577531_{24}$ проверяется прямым вычислением.

5. *Дана квадратная таблица* 2023×2023. *Каждая ее клетка окрашена в один из* n *цветов. Известно, что для любых шести клеток одного цвета, расположенных в одной строке, сверху от*

самой левой из них и снизу от самой правой из них нет клеток того же цвета. При каком наименьшем n такое возможно?

Ответ: 338.

Решение. Рассмотрим какой-то конкретный цвет (скажем, синий). В каждой строке пять левых синих клеток отметим крестиком, остальные — ноликом (если синих клеток в строке меньше шести, то крестиком помечаем все клетки). Заметим, что в любом столбце есть не более одной синей клетки с ноликом (в противном случае для самой верхней из них нарушается условие задачи). Значит, всего имеется не больше 2023 синих клеток с ноликом. Кроме того, число синих клеток с крестиком не больше, чем $5 \cdot 2023$. Таким образом, общее количество синих клеток не превосходит $2023 + 5 \cdot 2023 = 6 \cdot 2023$. Эти рассуждения справедливы для любого цвета. Поэтому общее число цветов не меньше, чем

$$\frac{2023^2}{6 \cdot 2023} = \frac{2023}{6} = 337\tfrac{1}{6}\,.$$

Значит, $n \geqslant 338$.

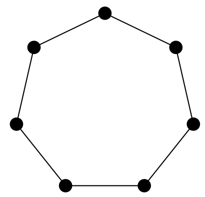
Покажем, что $n = 338$ реализуется. Последовательно занумеруем сверху вниз все диагонали, идущие с юго-запада на северо-восток, числами от 1 до 4045. Первые шесть диагоналей покрасим в первый цвет, следующие шесть — во второй, и так далее по циклу (то есть за 338-м цветом снова будет следовать первый). Проверим, что эта раскраска удовлетворяет условию задачи. Заметим, что ни один цвет не используется более двух раз, поскольку $338 \cdot 6 \cdot 2 = 4056 > 4045$. Пусть k-й цвет встретился два раза. В первом блоке самая правая клетка этого цвета окажется в столбце с номером $6k$. Во втором блоке самая левая клетка этого цвета находится в столбце с номером

$$6\,(338 + k - 1) + 1 - 2022 = 6k + 1.$$

Значит, клетки одного цвета из разных блоков не могут оказаться в одном столбце. $\square$

Вариант 5

1. *На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Настя выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа так, чтобы для всех этих чисел выполнялось свойство:*
если числа a и b не соединены отрезком, то разность $a-b$ должна быть взаимно проста с n, а если соединены, то числа $a-b$ и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1.
При каком наименьшем n существует такая расстановка?



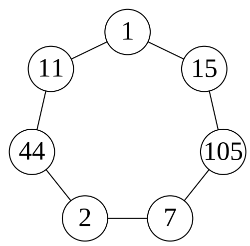
Ответ: $n = 5 \cdot 7 \cdot 11 = 385$.

Решение. Сделаем два замечания.

1) *n не делится на 2 и 3.* Среди семи чисел всегда есть три числа одной четности. Если n четно, то они должны быть попарно соединены. Кроме того, среди семи чисел найдутся три числа, дающие одинаковые остатки при делении на 3. Если n кратно 3, то эти числа тоже образуют трехзвенный цикл. Но таких циклов на картинке нет.

2) *Если p — простой делитель n, то среди трех последовательно соединенных чисел существует пара соседних, разность которых не кратна p.* Пусть (a, b, c) — цепочка последовательно соединенных чисел, в которой $a-b$ и $b-c$ кратны p. Тогда $a - c = (a-b) + (b-c) \,\vdots\, p$. Значит, (a, b, c) образует трехзвенный цикл, что невозможно.

Покажем, что число n имеет не менее трех различных простых делителей. Пусть p — простой делитель n. Имеется не более трех различных пар (a, b), для которых $a - b \,\vdots\, p$. Если бы таких пар было 4, то какие-то две из них пересекались бы, что противоречит 2). Но всего отрезками соединено 7 пар чисел, поэтому n имеет не менее трех различных простых делителей. В силу 1) минимально возможные значения для них — 5, 7, 11, то есть $n \geqslant 5 \cdot 7 \cdot 11 = 385$. Расстановка для $n = 385$ приведена на рисунке. $\square$



2. *При $x, y \in (0, 1]$ найдите максимальное значение выражения*

$$A = \frac{(x^2 - y)\sqrt{y + x^3 - xy} + (y^2 - x)\sqrt{x + y^3 - xy} + 1}{(x-y)^2 + 1}.$$

Ответ: 1.

Решение. Заметим, что

$$y + x^3 - xy - x^2 = \big(y - x^2\big)(1 - x).$$

Если $y \geqslant x^2$, то

$$\sqrt{y + x^3 - xy} \geqslant x \quad \text{и} \quad (x^2 - y)\left(\sqrt{y + x^3 - xy} - x\right) \leqslant 0,$$

а при $y < x^2$

$$\sqrt{y + x^3 - xy} \leqslant x \quad \text{и} \quad (x^2 - y)\left(\sqrt{y + x^3 - xy} - x\right) \leqslant 0.$$

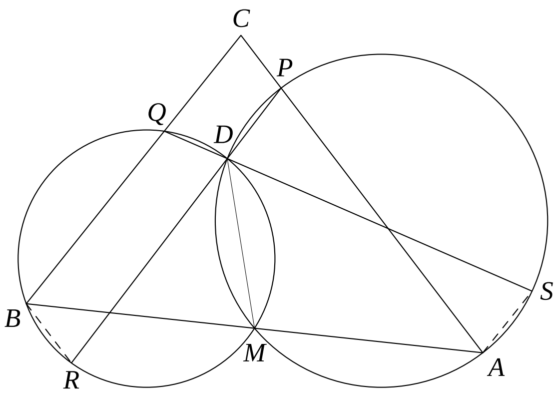
В обоих случаях справедливо неравенство $(x^2 - y)\sqrt{y + x^3 - xy} \leqslant x^3 - xy$. Оценивая аналогичным образом второе слагаемое в числителе A, мы получим

$$A \leqslant \frac{x^3 + y^3 - 2xy + 1}{(x - y)^2 + 1} \leqslant \frac{x^2 + y^2 - 2xy + 1}{(x - y)^2 + 1} = 1.$$

Равенство реализуется при $x = y = 1$. $\square$

3. *На стороне AB остроугольного треугольника ABC отмечена точка M. Внутри треугольника выбрана точка D. Окружности ω_A и ω_B описаны вокруг треугольников AMD и BMD соответственно. Сторона AC вторично пересекает окружность ω_A в точке P, а сторона BC вторично пересекает окружность ω_B в точке Q. Луч PD вторично пересекает окружность ω_B в точке R, а луч QD вторично пересекает окружность ω_A в точке S. Найдите отношение площадей треугольников ACR и BCS.*

   Ответ: 1.



Решение. Заметим, что

$$\angle PAM = 180^\circ - \angle PDM = \angle RDM = \angle RBM,$$

откуда $BR \parallel AC$. Значит, расстояния от точек B и R до прямой AC одинаковы. Тогда треугольники ABC и ACR имеют общее основание AC и одинаковые высоты, опущенные на AC. Поэтому площади этих треугольников равны. Кроме того,

$$\angle QBM = 180^\circ - \angle QDM = \angle MDS = 180^\circ - \angle MAS,$$

откуда $AS \parallel BC$. Значит, расстояния от точек A и S до прямой BC одинаковы. Тогда треугольники ABC и BCS имеют общее основание BC и одинаковые высоты, опущенные на BC. Поэтому площади этих треугольников тоже равны. В результате получаем $S_{ACR} = S_{ABC} = S_{BCS}$. $\square$

4. *В системе счисления с основанием r ($r \leqslant 100$) натуральное число x является двузначным с одинаковыми цифрами. Оказалось, что r-ичная запись числа x^2 четырехзначная, причем крайние цифры одинаковы, а средние равны нулю. При каких r такое возможно?*

   Ответ: $r = 2$ или $r = 23$.

   Решение. Запишем условие в виде $a^2(1+r)^2 = b\,(1+r^3)$, где a, b — r-ичные цифры. Сокращая на $1 + r$, мы получим

$$a^2(1 + r) = b\,(1 - r + r^2) = b\left((1 + r)(r - 2) + 3\right). \qquad (*)$$

Заметим, что НОД $\big(1+r, (1+r)(r-2)+3\big)$ равен 1 или 3. В первом случае $b \,\vdots\, (r+1)$, что невозможно, так как $0 < b \leqslant r-1$. Значит, $(1+r) \,\vdots\, 3$ и $b \,\vdots\, \dfrac{1+r}{3}$. Тогда $b = \dfrac{k\,(1+r)}{3}$, где k равно 1 или 2. Положим $1+r = 3s$. В силу $(*)$

$$3a^2 s = ks\big(3s\,(3s-3)+3\big) \Longleftrightarrow a^2 = k\big(3s\,(s-1)+1\big).$$

Так как $s\,(s-1)$ четно, при $k=2$ мы получим $a^2 \mod 4 = 2$, что невозможно. Значит, $k=1$ и

$$4a^2 = 3\,(4s^2-4s)+4 = 3\,(2s-1)^2+1 \Longleftrightarrow (2a-1)(2a+1) = 3\,(2s-1)^2.$$

Числа $2a-1$ и $2a+1$ взаимно просты, поскольку они нечетны и различаются на 2. Кроме того, одно из этих чисел кратно 3. Значит, $\dfrac{2a-1}{3}$ и $2a+1$ или $\dfrac{2a+1}{3}$ и $2a-1$ — точные квадраты. Рассмотрим два случая.

1) $2a-1 = 3m^2$. Тогда число $3m^2+2$ будет точным квадратом. Но это невозможно, так как $(3m^2+2) \mod 3 = 2$, а остаток от деления на 3 квадрата натурального числа может быть равен только 0 или 1.

2) $2a+1 = 3m^2$. Так как число $2a+1$ нечетно и не превосходит 199, для него возможны значения $3, 27, 75, 147$. В первом случае

$$m=1,\;\; a=1,\;\; 2a-1=1,\;\; 2s-1 = m\sqrt{2a-1} = 1,\;\; s=1,\;\; r=3s-1=2,\;\; b=1,$$

что удовлетворяет условию, поскольку $11_2^2 = 1001_2$. Во втором случае

$$m=3,\;\; a=13,\;\; 2a-1=25,\;\; 2s-1 = m\sqrt{2a-1} = 15,\;\; s=8,\;\; r=3s-1=23,\;\; b=8,$$

что удовлетворяет условию, так как $DD_{23}^2 = 8008_{23}$. Таким образом, $r=2$ и $r=23$ нам подходят. Два последних значения не годятся, поскольку $2a-1$ будет равно 73 или 145, а эти числа не являются точными квадратами. $\square$

5. *У параллелепипеда $a \times b \times c$ грани разбиты на единичные клетки. Имеется также большое количество трехклеточных полосок, которые можно перегибать по границам клеток. При каких a, b и c три грани параллелепипеда, имеющие общую вершину, можно полностью обклеить полосками без наложений и зазоров так, чтобы клетки граней и полосок совпадали?*

Ответ: из чисел a, b, c не менее двух делятся на 3.

Решение. Пусть у параллелепипеда хотя бы два измерения делятся на 3. Тогда у любой грани параллелепипеда есть сторона, кратная 3. Значит, мы можем полностью обклеить грань полосками, накладывая их параллельно этой стороне и не задевая других граней. Поэтому такая ситуация удовлетворяет условию задачи.

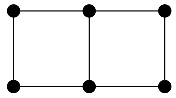
Пусть теперь на 3 делится менее двух измерений параллелепипеда. Покажем, что обклеить параллелепипед требуемым образом не удастся. Рассмотрим два случая.

1) *Ровно одно измерение параллелепипеда кратно 3.* Пусть, например, a делится на 3, а b и c — нет. Общее число клеток на трех выделенных гранях равно $ab+bc+ca$, и оно не кратно 3 (крайние слагаемые делятся на 3, среднее — нет). Поэтому полностью обклеить эти грани трехклеточными полосками невозможно.

2) *Ни одно из чисел a, b, c не делится на 3.* Пронумеруем строки и столбцы на трех выделенных гранях, начиная от ребер, общих с другими выделенными гранями. Покрасим в черный цвет строки и столбцы с номерами $2, 5, 8, \ldots$, а остальные клетки — в белый цвет. Тогда на каждой грани белыми будут угловой квадратик 1×1, а также некоторое количество прямоугольников 2×1 и квадратов 2×2. Значит, число белых клеток на каждой грани нечетно. Поэтому нечетным будет и общее количество белых клеток. С другой стороны, любая трехклеточная полоска покрывает четное число белых клеток. Тогда общее количество белых клеток должно быть четным. Полученное противоречие доказывает, что случай 2) также невозможен. $\square$

Вариант 6

1. *На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Настя выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа так, чтобы для всех этих чисел выполнялось свойство:*
если числа a и b не соединены отрезком, то разность $a-b$ должна быть взаимно проста с n, а если соединены, то числа $a-b$ и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1.
При каком наименьшем n существует такая расстановка?



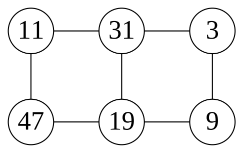
Ответ: $n = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$.

Решение. Сделаем два замечания.

1) *n нечетно.* Действительно, пусть n четно. Среди шести чисел всегда есть три числа одной четности, и по условию они должны быть попарно соединены. Но на картинке нет циклов длины 3.

2) *Если p — простой делитель n, то среди трех последовательно соединенных чисел существует пара соседних, разность которых не кратна p.* Пусть (a, b, c) — цепочка последовательно соединенных чисел, в которой $a-b$ и $b-c$ кратны p. Тогда $a - c = (a-b) + (b-c) \vdots p$. Значит, (a, b, c) образует трехзвенный цикл, что невозможно.

Покажем, что число n имеет не менее трех различных простых делителей. Пусть p — простой делитель n. Имеется не более трех различных пар (a, b), для которых $a - b \vdots p$. Если бы таких пар было 4, то какие-то две из них пересекались бы, что противоречит 2). Но всего отрезками соединено 7 пар чисел, поэтому n имеет не менее трех различных простых делителей. В силу 1) минимально возможные значения для них — 3, 5, 7, то есть $n \geqslant 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$. Расстановка для $n = 105$ приведена на рисунке. $\square$



2. *При $x, y \in [1, 3]$ найдите минимальное значение выражения*

$$A = \frac{\left(3xy + x^2\right)\sqrt{3xy + x - 3y} + \left(3xy + y^2\right)\sqrt{3xy + y - 3x}}{x^2 y + y^2 x}.$$

Ответ: 4.

Решение. Заметим, что

$$3xy + x - 3y - x^2 = (3y - x)(x - 1) \geqslant 0,$$

поскольку $x \geqslant 1$ и $x \leqslant 3 \leqslant 3y$. Тогда

$$\left(3xy + x^2\right)\sqrt{3xy + x - 3y} \geqslant 3x^2 y + x^3 \quad \text{и, аналогично,} \quad \left(3xy + y^2\right)\sqrt{3xy + y - 3x} \geqslant 3y^2 x + y^3.$$

Кроме того, по неравенству Коши

$$x^2 y + y^2 x = xy\,(x + y) \leqslant \tfrac{1}{4}\,(x + y)^3.$$

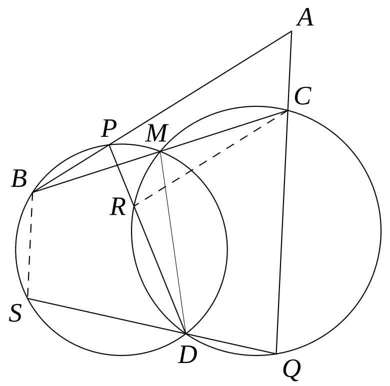
Поэтому

$$A \geqslant \frac{3xy\,(x + y) + x^3 + y^3}{\frac{1}{4}\,(x + y)^3} = 4 \cdot \frac{(x + y)^3}{(x + y)^3} = 4.$$

Равенство реализуется при $x = y = 1$. $\square$

3. *На стороне BC треугольника ABC с тупым углом C отмечена точка M. Точка D выбрана так, что треугольник BCD остроугольный, а точки A и D лежат по разные стороны от прямой BC. Окружности ω_B и ω_C описаны вокруг треугольников BMD и CMD соответственно. Сторона AB вторично пересекает окружность ω_B в точке P, а луч AC вторично пересекает окружность ω_C в точке Q. Отрезок PD вторично пересекает окружность ω_C в точке R, а луч QD вторично пересекает окружность ω_B в точке S. Найдите отношение площадей треугольников ABR и ACS.*

Ответ: 1.



Решение. Заметим, что

$$\angle SBM = 180^\circ - \angle SDM = \angle MDQ = 180^\circ - \angle MCQ,$$

откуда $SB \parallel AC$. Значит, расстояния от точек B и S до прямой AC одинаковы. Тогда треугольники ABC и ASC имеют общее основание AC и равные высоты, опущенные на AC. Поэтому площади этих треугольников равны. Кроме того,

$$\angle PBM = \angle PDM = \angle RDM = \angle RCM,$$

откуда $BP \parallel RC$. Значит, расстояния от точек R и C до прямой AB одинаковы. Тогда треугольники ABC и ABR имеют общее основание AB и равные высоты, опущенные на AB. Поэтому площади этих треугольников тоже равны. В результате получаем $S_{ASC} = S_{ABC} = S_{ABR}$. $\square$

4. *Запись натурального числа x в системе счисления с основанием 23 состоит из $2m$ одинаковых цифр. Оказалось, что в 23-ичной записи числа x^2 крайние цифры одинаковы, а остальные $4m-2$ цифры равны нулю. Найдите все такие числа x. Ответ дайте в 23-ичной системе счисления. (Цифры от 10 до 22 обозначаются латинскими буквами от A до M.)*

Ответ: $x = DD_{23}$.

Решение. Договоримся писать $u \equiv v \pmod{w}$, если $(u - v) \vdots w$. Пусть $n = 2m$. По условию при некоторых 23-ичных цифрах a и b справедливо равенство

$$a^2\left(1 + 23 + 23^2 + \ldots + 23^{n-1}\right)^2 = b\left(1 + 23^{2n-1}\right) \tag{1}$$

или, в другом виде,

$$a^2\left(23^n - 1\right)^2 = 22^2 \cdot b\left(1 + 23^{2n-1}\right). \tag{2}$$

Так как $23^k \equiv (-1)^k \pmod{24}$, а n четно, левая часть (1) кратна 24^2. Значит, на 24^2 делится и правая часть (1). Заметим, что

$$1 + 23^{2n-1} \equiv 1 + (24-1)^{2n-1} \equiv (2n-1) \cdot 24 \pmod{24^2}.$$

Поэтому $b\,(2n-1) \,\vdots\, 24$, откуда $b \,\vdots\, 8$. Тогда $b=8$ или $b=16$. Но

$$1+23^{2n-1} \equiv 1+7^{2n-1} = 1+7\cdot 49^{n-1} \equiv 8 \pmod{16}.$$

Таким образом, число $23^{2n-1}+1$ делится на 8 и не делится на 16, а потому оно не является точным квадратом. Значит, случай $b=16$ невозможен. Подставляя $b=8$ в (2), мы получим

$$a^2\left(1-2\cdot 23^n+23^{2n}\right) = 22^2\cdot 8\cdot\left(1+23^{2n-1}\right) \Longleftrightarrow 23^{2n-1}(23a^2-22^2\cdot 8) = 2a^2\cdot 23^n - a^2 + 22^2\cdot 8.$$

Поскольку правая часть положительна, верно неравенство $23a^2-22^2\cdot 8 \geqslant 1$, откуда

$$23^{2n-1} \leqslant 2a^2\cdot 23^n - a^2 + 22^2\cdot 8 < 2\cdot 22^2\cdot 23^n + 22^2\cdot 8 < 3\cdot 22^2\cdot 23^n \quad \text{и} \quad 23^{n-1} < 3\cdot 22^2.$$

Из четных n этому условию удовлетворяет только $n=2$. Подставим его в (1):

$$24^2\cdot a^2 = 8\left(1+23^3\right) \Longleftrightarrow a^2 = 169 \Longleftrightarrow a = 13 = D_{23}.$$

Осталось заметить, что $DD_{23}^2 = 8008_{23}$. $\square$

5. *У параллелепипеда $a\times b\times c$ грани разбиты на единичные клетки. Имеется также большое количество пятиклеточных полосок, которые можно перегибать по границам клеток. При каких a, b и c три грани параллелепипеда, имеющие общую вершину, можно полностью обклеить полосками без наложений и зазоров так, чтобы клетки граней и полосок совпадали?*

Ответ: из чисел a, b, c не менее двух делятся на 5.

Решение. Пусть у параллелепипеда хотя бы два измерения делятся на 5. Тогда у любой грани параллелепипеда есть сторона, кратная 5. Значит, мы можем полностью обклеить грань полосками, накладывая их параллельно этой стороне и не задевая других граней. Поэтому такая ситуация удовлетворяет условию задачи.

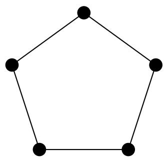
Пусть теперь на 5 делится менее двух измерений параллелепипеда. Покажем, что обклеить параллелепипед требуемым образом не удастся. Рассмотрим два случая.

1) *Ровно одно измерение параллелепипеда кратно 5.* Пусть, например, a делится на 5, а b и c — нет. Общее число клеток на трех выделенных гранях равно $ab+bc+ca$, и оно не кратно 5 (крайние слагаемые делятся на 5, среднее — нет). Поэтому полностью обклеить эти грани пятиклеточными полосками невозможно.

2) *Ни одно из чисел a, b, c не делится на 5.* Пронумеруем строки и столбцы на трех выделенных гранях, начиная от ребер, общих с другими выделенными гранями. Покрасим в черный цвет строки и столбцы с номерами $2, 3, 4,\ 7, 8, 9,\ 12, 13, 14\ldots$, а остальные клетки — в белый цвет. Тогда на каждой грани белыми будут угловой квадратик 1×1, а также некоторое количество прямоугольников 2×1 и квадратов 2×2. Значит, число белых клеток на каждой грани нечетно. Поэтому нечетным будет и общее количество белых клеток. С другой стороны, любая пятиклеточная полоска покрывает четное число белых клеток. Тогда общее количество белых клеток должно быть четным. Полученное противоречие доказывает, что случай 2) также невозможен. $\square$

Вариант 7

1. *На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Костя выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа так, чтобы для всех этих чисел выполнялось свойство:*
если числа a и b не соединены отрезком, то сумма $a+b$ должна быть взаимно проста с n, а если соединены, то числа $a+b$ и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1.
При каком наименьшем n существует такая расстановка?



Ответ: $n = 15$.

Решение. Сделаем два замечания.

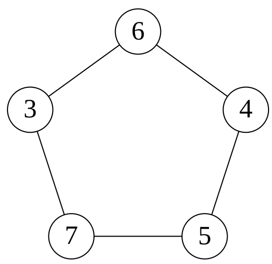
1) *n нечетно.* Действительно, пусть n четно. Среди пяти чисел всегда есть три числа одной четности, и по условию они должны быть попарно соединены. Но на картинке нет циклов длины 3.

2) *n имеет не менее двух различных простых делителей.* Пусть n — степень простого числа p. Возьмем цепочку (a, b, c, d) последовательно соединенных чисел. По условию

$$a + d = (a + b) - (b + c) + (c + d) \;\vdots\; p.$$

Тогда числа a и d тоже соединены, то есть на картинке получился цикл длины 4, которого там нет.

Таким образом, число n имеет по крайней мере два различных нечетных простых делителя, откуда $n \geqslant 15$. Расстановка для $n = 15$ приведена на рисунке. $\square$



2. *При $x, y, z \in (0, 1]$ найдите минимальное значение выражения*

$$A = \frac{(x+2y)\sqrt{x+y-xy} + (y+2z)\sqrt{y+z-yz} + (z+2x)\sqrt{z+x-zx}}{xy+yz+zx}.$$

Ответ: 3.

Решение. Заметим, что при $x, y \in (0, 1]$

$$\sqrt{x+y-xy} = \sqrt{x+y(1-x)} \geqslant \sqrt{x} \geqslant x.$$

Тогда $(x+2y)\sqrt{x+y-xy} \geqslant x^2 + 2xy$ и, аналогично,

$$(y+2z)\sqrt{y+z-yz} \geqslant y^2 + 2yz, \quad (z+2x)\sqrt{z+x-zx} \geqslant z^2 + 2zx.$$

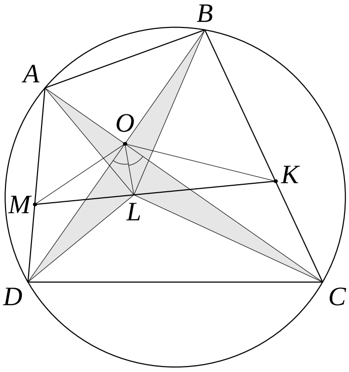
Поэтому

$$A \geqslant \frac{x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx}{xy+yz+zx} = \frac{(x+y+z)^2}{xy+yz+zx} \geqslant 3.$$

Равенство реализуется при $x = y = z = 1$. $\square$

3. *На сторонах BC и AD вписанного четырехугольника $ABCD$ отмечены точки K и M соответственно, причем $BK : KC = AM : MD$. На отрезке KM выбрана такая точка L, что $KL : LM = BC : AD$. Найдите отношение площадей треугольников ACL и BDL, если известно, что $AC = p$ и $BD = q$.*

   Ответ: $\frac{p}{q}$.



Решение. Обозначим через O точку пересечения AC и BD. В силу вписанности $ABCD$ треугольники AOD и BOC подобны по двум углам, откуда $\frac{OC}{OD} = \frac{BC}{AD}$. Кроме того, по условию

$$\frac{KC}{BK} = \frac{MD}{AM} \iff \frac{KC}{BC} = \frac{MD}{AD} \implies \frac{KC}{MD} = \frac{BC}{AD} = \frac{OC}{OD}.$$

Наконец, $\angle KCO = \angle MDO$ как вписанные углы, опирающиеся на дугу AB. Значит, треугольники KCO и MDO подобны с коэффициентом $\frac{BC}{AD}$. Отсюда $\angle KOC = \angle MOD$ и по условию

$$\frac{OK}{OM} = \frac{BC}{AD} = \frac{KL}{LM}.$$

Поэтому OL — биссектриса треугольника MOK. Тогда

$$\angle COL = \angle KOL - \angle KOC = \angle MOL - \angle MOD = \angle DOL.$$

Значит, точка L равноудалена от прямых AC и BD, то есть одинаковы высоты треугольников ACL и BDL, опущенные из точки L. Таким образом, отношение площадей этих треугольников равно $\frac{AC}{BD} = \frac{p}{q}$. $\square$

4. *Натуральное число x в системе счисления с основанием r $(r > 3)$ имеет вид $\overline{ppqq}$, причем $q = 2p$. Оказалось, что r-ичная запись числа x^2 представляет собой семизначный палиндром с тремя одинаковыми средними цифрами. (Палиндромом называется число, которое читается одинаково слева направо и справа налево). При каких r такое возможно?*

   Ответ: $r = 3n^2$, где n — натуральное число, $n > 1$.

   Решение. Договоримся писать $u \equiv v \pmod w$, если $(u - v) \vdots w$. Заметим, что

$$x = \overline{ppqq}_r = (pr^2 + q)(r + 1) = p\,(r^2 + 2)(r + 1).$$

Из условия на x^2 вытекает равенство

$$p^2(r^2+2)^2(r^2+2r+1) = a\left(1+r^6\right) + b\left(r+r^5\right) + c\left(r^2+r^3+r^4\right), \qquad (*)$$

где a, b, c — некоторые r-ичные цифры. Сделаем несколько наблюдений.

1) При любом натуральном n

$$r^n = (1+r-1)^n \equiv (-1)^n \big(1 - n\,(1+r)\big) \pmod{(1+r)^2}.$$

Правая часть $(*)$ кратна $(1+r)^2$, откуда

$$0 \equiv a\big(2 - 6\,(1+r)\big) - b\big(2-6\,(1+r)\big) + c\big(1 - 3\,(1+r)\big) = \big(1-3\,(1+r)\big)(2a-2b+c) \pmod{(1+r)^2}.$$

Поскольку $1-3\,(1+r)$ взаимно просто с $(1+r)^2$, на $(1+r)^2$ делится $2a-2b+c$. Но это число лежит в интервале $(-2r, 3r) \subset \big(-(1+r)^2, (1+r)^2\big)$, откуда $2a = 2b - c$.

2) Приравняем остатки левой и правой частей $(*)$ от деления на $1+r^2$. В силу 1)

$$2p^2r \equiv br(1+r^4) + cr^3 \equiv (2b-c)r = 2ar \pmod{(1+r^2)}.$$

Поскольку r взаимно просто с $1+r^2$, на $1+r^2$ делится $2\,(p^2-a)$. Но

$$2\,(p^2-a) < 2p^2 < q^2 < r^2 < 1+r^2, \quad 2\,(p^2-a) > -2a > -2r > -1-r^2.$$

Таким образом, $a = p^2$.

3) Приравняем остатки левой и правой частей $(*)$ от деления на r:

$$4p^2 \equiv a \pmod r \iff 4a \equiv a \pmod r \iff 3a \,\vdots\, r \iff 3a = r \text{ или } 3a = 2r,$$

поскольку $3a < 3r$. Тогда в силу 2) $r = 3p^2$ или $r = \frac{3p^2}{2}$. Во втором случае

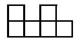
$$x^2 > p^2\big(r^6 + 2r^5\big) = r^6\left(p^2 + \frac{2p^2}{r}\right) = r^6\left(p^2 + \frac{4}{3}\right) > r^6\big(p^2+1\big).$$

Поэтому старшая цифра x^2 больше p^2, а младшая в силу $(*)$ равна p^2. Значит, x^2 не является палиндромом и $r = \frac{3p^2}{2}$ нам не подходит.

Пусть теперь $r = 3p^2$. Покажем, что x^2 будет палиндромом требуемого вида при любом $p > 1$. Раскроем скобки в левой части $(*)$:

$$\begin{aligned} x^2 = p^2\,(r^4+4r^2+4)(r^2+2r+1) &= 4p^2 + 8p^2r + 8p^2r^2 + 8p^2r^3 + 5p^2r^4 + 2p^2r^5 + p^2r^6 = \\ &= p^2 + (2p^2+1)\,r + (2p^2+2)\,r^2 + (2p^2+2)\,r^3 + (2p^2+2)\,r^4 + (2p^2+1)\,r^5 + p^2r^6 \end{aligned}$$

(в последней строке слагаемые перегруппированы с учетом равенства $3p^2 = r$). Коэффициенты при степенях r являются r-ичными цифрами x^2, поскольку все они не превосходят $2p^2+2 = r+2-p^2 < r$. Эти цифры, очевидно, удовлетворяют условию задачи. $\square$

5. *Доска $m \times n$ $(m, n > 5)$ разрезана на фигурки из шести единичных квадратиков вида*  *(фигурки можно поворачивать и переворачивать). При каких m и n такое возможно?*

Ответ: при всех m и n, среди которых имеется и кратное 3, и кратное 4.

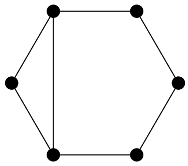
Решение. Предположим, что доску $m \times n$ можно разрезать требуемым образом. Поскольку в каждой фигурке шесть клеток, общее количество клеток на доске кратно 6. Тогда среди m и n имеется четное число (пусть для определенности это m). Кроме того, одно из этих чисел кратно 3. Покажем, что m или n делится также на 4. Пусть это не так. Проведем горизонтальные и вертикальные линии с шагом в две клетки, начиная с верхнего и левого краев доски соответственно. Они разобьют доску на квадраты 2×2 и, возможно, некоторое количество прямоугольников 2×1

(которые появятся только при нечетном n). Раскрасим эти квадраты и прямоугольники в шахматном порядке в белый и черный цвета. Пусть в полоске $2 \times n$, отсекаемой двумя соседними линиями, имеется p белых и q черных клеток. Тогда $p \neq q$, поскольку n не делится на 4. В соседней полоске $2 \times n$ будет, наоборот, q белых и p черных клеток. Значит, суммарное количество белых и черных клеток в объединении этих двух полосок одинаковое. Но общее число полосок $2 \times n$ нечетно, так как m не делится на 4. Поэтому на всей доске белых и черных клеток поровну быть не может. С другой стороны, в каждой шестиклеточной фигурке черных и белых клеток будет поровну, а тогда это должно быть верно и для всей доски. Полученное противоречие доказывает, что среди m и n есть число, кратное 4.

Если $n \vdots 3$ и $m \vdots 4$, то разрежем доску на прямоугольники 4×3, а каждый из них разобьем на две фигурки. Пусть один из размеров кратен 12 (скажем, m). Произвольное число $n > 5$ можно представить в виде $3i + 4j$ с некоторыми неотрицательными целыми i и j. Действительно, при $n \vdots 3$ это очевидно, а в противном случае на 3 делится $n - 4$ или $n - 8$. Поэтому доску можно разбить на i прямоугольников $m \times 3$ и j прямоугольников $m \times 4$, каждый из которых затем разрезается на прямоугольники со сторонами 3 и 4. $\square$

Вариант 8

1. *На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Костя выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа так, чтобы для всех этих чисел выполнялось свойство:*
если числа a и b не соединены отрезком, то сумма $a+b$ должна быть взаимно проста с n, а если соединены, то числа $a+b$ и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1.
При каком наименьшем n существует такая расстановка?



Ответ: $n = 15$.

Решение. Сделаем два замечания.

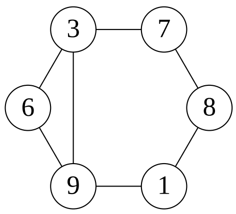
1) *n нечетно.* Действительно, пусть n четно. Если четных и нечетных чисел по три, то каждая из этих троек образует цикл. Пусть имеется четыре числа a, b, c, d одной четности. Тогда все они попарно соединены, и мы снова получаем два трехзвенных цикла — например, (a, b, c) и (a, d, c). Но на картинке такой цикл всего один.

2) *n имеет не менее двух различных простых делителей.* Пусть n — степень простого числа p. Возьмем цепочку (a, b, c, d) последовательно соединенных чисел. По условию

$$a + d = (a + b) - (b + c) + (c + d) \;\vdots\; p.$$

Тогда числа a и d тоже соединены, то есть на картинке получился цикл длины 4, которого там нет.

Таким образом, число n имеет по крайней мере два различных нечетных простых делителя, откуда $n \geqslant 15$. Расстановка для $n = 15$ приведена на рисунке. $\square$



2. *При $x, y, z > 0$ найдите максимальное значение выражения*

$$A = \frac{(x-y)\sqrt{x^2+y^2} + (y-z)\sqrt{y^2+z^2} + (z-x)\sqrt{z^2+x^2} + \sqrt{2}}{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 + 2}.$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Решение. Если $x \geqslant y$, то

$$\sqrt{x^2+y^2} \leqslant \sqrt{2x^2} = x\sqrt{2} \quad \text{и} \quad (x-y)\sqrt{x^2+y^2} \leqslant \sqrt{2}\,(x^2 - xy),$$

а при $x < y$

$$\sqrt{x^2+y^2} > \sqrt{2x^2} = x\sqrt{2} \quad \text{и} \quad (x-y)\sqrt{x^2+y^2} < \sqrt{2}\,(x^2 - xy).$$

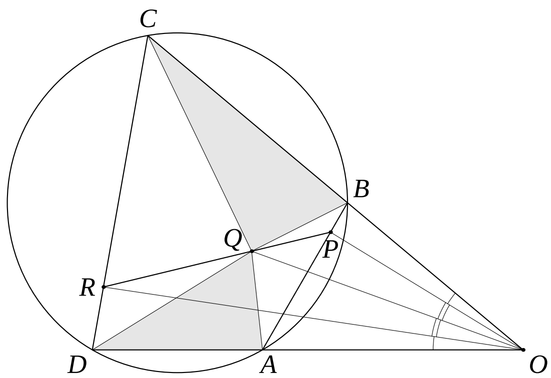
В обоих случаях справедливо неравенство $(x-y)\sqrt{x^2+y^2} \leqslant \sqrt{2}\,(x^2 - xy)$. Оценивая аналогичным образом два других слагаемых в числителе A, мы получим

$$A \leqslant \sqrt{2} \cdot \frac{x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx+1}{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2+2}{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Равенство реализуется при $x = y = z = 1$. $\square$

3. *На сторонах AB и CD вписанного четырехугольника $ABCD$, не являющегося трапецией, отмечены точки P и R соответственно, причем $AP : PB = CR : RD$. На отрезке PR выбрана такая точка Q, что $PQ : QR = AB : CD$. Найдите отношение площадей треугольников AQD и BQC, если известно, что $AD = x$ и $BC = y$.*

   Ответ: $\frac{x}{y}$.



Решение. Обозначим через O точку пересечения прямых DA и CB. Будем для определенности считать, что она лежит на лучах DA и CB. В силу вписанности $ABCD$ треугольники AOB и COD подобны по двум углам, откуда $\frac{OB}{OD} = \frac{AB}{CD}$. Кроме того, по условию

$$\frac{PB}{AP} = \frac{RD}{CR} \Longleftrightarrow \frac{PB}{AB} = \frac{RD}{CD} \Longrightarrow \frac{PB}{RD} = \frac{AB}{CD} = \frac{OB}{OD}.$$

Наконец, $\angle ODR = 180^\circ - \angle CBP = \angle PBO$. Значит, треугольники OBP и ODR подобны с коэффициентом $\frac{AB}{CD}$. Отсюда $\angle BOP = \angle DOR$ и по условию

$$\frac{OP}{OR} = \frac{AB}{CD} = \frac{PQ}{QR}.$$

Поэтому OQ — биссектриса треугольника POR. Тогда

$$\angle DOQ = \angle DOR + \angle QOR = \angle POQ + \angle BOP = \angle BOQ.$$

Значит, точка Q равноудалена от прямых AD и BC, то есть одинаковы высоты треугольников AQD и BQC, опущенные из точки Q. Таким образом, отношение площадей этих треугольников равно $\frac{AD}{BC} = \frac{x}{y}$. $\square$

4. *Запись натурального числа x в системе счисления с основанием r ($r \leqslant 70$) получается n-кратным повторением некоторой пары цифр, где n — натуральное число. Оказалось, что r-ичная запись x^2 состоит из $4n$ единиц. Найдите все пары (r, x), при которых такое возможно.*

   Ответ: $(7, 26_7)$.

   Решение. Пусть $x = \overline{ab\ldots ab}_r$. Положим $y = \overline{ab}_r$ и запишем условие в виде

$$y^2\bigl(1 + r^2 + \ldots + r^{2(n-1)}\bigr)^2 = 1 + r + \ldots + r^{4n-1} \Longleftrightarrow y^2 \cdot \frac{(r^{2n}-1)^2}{(r^2-1)^2} = \frac{r^{4n}-1}{r-1} \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow y^2(r^{2n}-1) = (r+1)(r^2-1)(r^{2n}+1).$$

Отсюда вытекает, что $y^2 \mod r = 1$, а также равенство

$$r^{2n}\bigl(y^2 - (r+1)(r^2-1)\bigr) = y^2 + (r+1)(r^2-1).$$

Тогда $y^2-(r+1)(r^2-1)>0$ и

$$\big(y^2-(r+1)(r^2-1)\big) \mod r = (y^2+1) \mod r = 2 \mod r \neq 1.$$

Поэтому $y^2-(r+1)(r^2-1)\geqslant 2$ и

$$2r^{2n}\leqslant (r+1)(r^2-1)+y^2\leqslant (r+1)(r^2-1)+(r^2-1)^2=(r^2-1)(r^2+r)<2r^4,$$

что возможно лишь при $n=1$. Таким образом,

$$(ar+b)^2=(r+1)(r^2+1).$$

Заметим, что числа $r+1$ и r^2+1 не могут быть взаимно простыми, иначе r^2+1 окажется точным квадратом. Тогда из равенства $r^2+1=(r+1)(r-1)+2$ вытекает, что их наибольший общий делитель равен 2. Поэтому r нечетно и

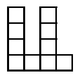
$$\left(\frac{ar+b}{2}\right)^2=\frac{r+1}{2}\cdot\frac{r^2+1}{2}.$$

Дроби в правой части взаимно просты и потому должны быть точными квадратами. В частности, $r=2k^2-1$, и условию $r\leqslant 70$ удовлетворяют только $r\in\{7,17,31,49\}$. Последние три варианта не подходят, поскольку числа $\frac{17^2+1}{2}=145$, $\frac{31^2+1}{2}=481$ и $\frac{49^2+1}{2}=1201$ не являются точными квадратами. Пусть $r=7$. Тогда

$$y=ar+b=\sqrt{(r+1)(r^2+1)}=\sqrt{8\cdot 50}=20=26_7,$$

откуда $a=2$ и $b=6$. Это нам подходит, поскольку

$$26_7^2=(30_7-1)^2=1200_7-60_7+1=1111_7. \quad \square$$

5. *Доска $m\times n$ ($m,n>15$) разрезана на фигурки из десяти единичных квадратиков вида*  *(фигурки можно поворачивать и переворачивать). При каких m и n такое возможно?*

Ответ: при всех m и n, среди которых имеется и кратное 4, и кратное 5.

Решение. Предположим, что доску $m\times n$ можно разрезать требуемым образом. Поскольку в каждой фигурке десять клеток, общее количество клеток на доске кратно 10. Тогда среди m и n имеется четное число (пусть для определенности это m). Кроме того, одно из этих чисел кратно 5. Покажем, что m или n делится также на 4. Пусть это не так. Проведем горизонтальные и вертикальные линии с шагом в две клетки, начиная с верхнего и левого краев доски соответственно. Они разобьют доску на квадраты 2×2 и, возможно, некоторое количество прямоугольников 2×1 (которые появятся только при нечетном n). Раскрасим эти квадраты и прямоугольники в шахматном порядке в белый и черный цвета. Пусть в полоске $2\times n$, отсекаемой двумя соседними линиями, имеется p белых и q черных клеток. Тогда $p\neq q$, поскольку n не делится на 4. В соседней полоске $2\times n$ будет, наоборот, q белых и p черных клеток. Значит, суммарное количество белых и черных клеток в объединении этих двух полосок одинаковое. Но общее число полосок $2\times n$ нечетно, так как m не делится на 4. Поэтому на всей доске белых и черных клеток поровну быть не может. С другой стороны, в каждой десятиклеточной фигурке черных и белых клеток будет поровну, а тогда это должно быть верно и для всей доски. Полученное противоречие доказывает, что среди m и n есть число, кратное 4.

Если $n \,\vdots\, 5$ и $m \,\vdots\, 4$, то разрежем доску на прямоугольники 4×5, а каждый из них разобьем на две фигурки. Пусть один из размеров кратен 20 (скажем, m). Произвольное число $n>15$ можно представить в виде $5i+4j$ с некоторыми неотрицательными целыми i и j. Действительно, числа n, $n-5$, $n-10$, $n-15$ дают разные остатки от деления на 4, поэтому хотя бы одно из них кратно 4. Значит, доску можно разбить на i прямоугольников $m\times 5$ и j прямоугольников $m\times 4$, каждый из которых затем разрезается на прямоугольники со сторонами 5 и 4. $\square$

Олимпиада школьников СПбГУ по математике

Заключительный этап. 2021/2022 учебный год

Задания для 8-9 классов

(Правильное и полное решение каждой задачи оценивается в 20 баллов)

9 класс. Первый вариант

1. Петя и Вася одновременно выехали на самокатах навстречу друг другу. Ровно посредине между ними расположен мост. Дорога от Пети до моста асфальтированная, а от Васи до моста — грунтовая. Известно, что по грунтовой дороге они едут с одинаковыми скоростями, а по асфальту Петя движется в 3 раза быстрее, чем по грунтовке. Петя за час добрался до моста и, не останавливаясь, продолжил движение. Через какое время после выезда он встретит Васю?

Ответ: через 2 часа.

Решение. Пусть расстояние до моста от стартовых позиций равно x. Петя добрался до моста за час. Вася ехал в три раза медленнее, поэтому за час он проехал путь $x/3$. В этот момент расстояние между Петей и Васей стало $2x/3$, а далее они движутся с одинаковыми скоростями. Поэтому до встречи каждый из них проедет расстояние $x/3$. Это столько же, сколько проехал Вася за первый час. Значит, им потребуется еще один час.

2. Дан квадратный трехчлен $2x^2 - x - 36$. Найдите все целые x, при которых значения этого трехчлена равны квадрату простого числа.

Ответ: $x = 5$ или $x = 13$.

Решение. Найдем все пары (x, p), удовлетворяющие уравнению $2x^2 - x - 36 = p^2$, где x — целое, а p — простое. Разложим трехчлен на множители:

$$p^2 = 2x^2 - x - 36 = (2x - 9)(x + 4).$$

Если обе скобки в правой части кратны p, то на p будет делиться и $2(x+4)-(2x-9) = 17$, то есть в этом случае $p = 17$. Тогда либо $2x - 9 = x + 4 = 17$, либо $2x - 9 = x + 4 = -17$. В первом случае получаем $x = 13$, а второй невозможен. Если же одна из скобок не кратна p, то либо $x + 4 = \pm 1$ и $2x - 9 = \pm p^2$, либо $2x - 9 = \pm 1$ и $x + 4 = \pm p^2$. Первый случай невозможен, а во втором подходит $x = 5$.

3. Положительные числа a, b и c удовлетворяют условию $abc(a + b + c) = ab + bc + ca$. Докажите неравенство $5(a + b + c) \geqslant 7 + 8abc$.

Решение. Поскольку

$$abc = \frac{ab + bc + ca}{a + b + c} \leqslant \frac{(a + b + c)^2}{3(a + b + c)} = \frac{a + b + c}{3},$$

нам достаточно доказать неравенство $5(a + b + c) \geqslant 7 + \frac{8}{3}(a + b + c)$, которое эквивалентно $a + b + c \geqslant 3$. Но это верно, поскольку $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant \frac{9}{a+b+c}$.

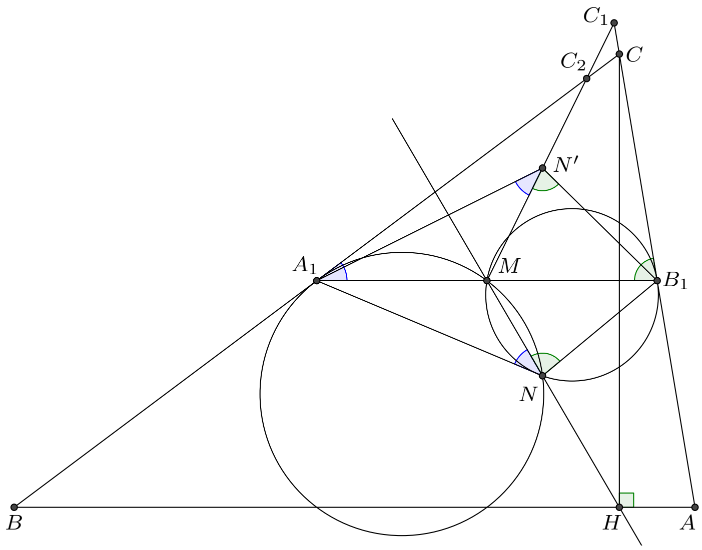
4. У Маши есть 1000 бусинок 50 различных цветов, по 20 бусинок каждого цвета. При каком наименьшем n для любого способа собрать из всех бусинок ожерелье можно выбрать n последовательных бусинок, среди которых есть бусинки 25 разных цветов?

Ответ: $n = 462$.

Первое решение. Назовем *куском ожерелья* длины m набор из m последовательных бусинок. Если в ожерелье расположить бусинки по 20 одноцветных подряд, то в куске длины 461 не может оказаться более 24 разных цветов. Поэтому $n \geqslant 462$. Рассмотрим кусок ожерелья длины 462. Предположим, что в нем не встретилось 25 бусинок разных цветов. Занумеруем бусинки ожерелья против часовой стрелки так, чтобы первыми были бусинки выбранного куска. Пусть m — номер первой бусинки такого цвета, который не присутствует в куске (скажем, желтого). Покажем, что кусок ожерелья от $m - 461$ до m содержит 25 цветов. Действительно, желтый цвет в нем есть. В оставшийся части куска желтый цвет не может встретиться по построению. Но там присутствуют бусинки не менее чем 24 цветов, поскольку $461 > 23 \cdot 20$.

Второе решение. Назовем *куском ожерелья* 462 последовательные бусинки. Покажем, что в каком-то куске будет 25 разных цветов. Предположим противное. Тогда в любом куске не более 24 разных цветов. Рассмотрим всевозможные пары, состоящие из куска ожерелья и некоторого встречающегося в нем цвета. В каждом куске не более 24 разных цветов, а общее число кусков ожерелья равно 1000. Поэтому число пар не превосходит $24 \cdot 1000 = 24\,000$. Рассмотрим теперь какой-то конкретный цвет (скажем, синий). Всего синих бусинок 20, между самыми дальними синими бусинками A и B всегда располагается не менее 18 бусинок (ровно 18 только когда все синие бусинки идут подряд). Значит, имеется не менее 19 кусков, содержащих B и не содержащих A. Сама бусинка A попадает в 462 куска. Таким образом, синие бусинки содержатся по крайней мере в 481 куске. Эти рассуждения справедливы для любого цвета. Поэтому общее число пар не меньше, чем $481 \cdot 50 = 24\,050 > 24\,000$, что невозможно.

5. Точки A_1 и B_1 — середины сторон BC и AC остроугольного треугольника ABC, точка M — середина отрезка A_1B_1. Точка H — основание высоты, опущенной из вершины C на сторону AB. Через точку M проведены окружности, касающиеся сторон BC и AC соответственно в точках A_1 и B_1. Обозначим вторую точку пересечения окружностей через N. Докажите, что точки H, M и N лежат на одной прямой.



Решение. Пусть N' — точка, симметричная точке N относительно прямой A_1B_1, прямая MN' пересекает прямые AC и BC в точках C_1 и C_2 соответственно. Поскольку угол между касательной и секущей равен вписанному углу, опирающемуся на секущую,

$$\angle C_2A_1M = \angle A_1NM = \angle A_1N'M.$$

Следовательно, треугольники $MN'A_1$ и MA_1C_2 подобны. Значит, $\frac{MA_1}{MN'} = \frac{MC_2}{MA_1}$, откуда

$$MC_2 = \frac{MA_1^2}{MN'} = \frac{MB_1^2}{MN'}.$$

Аналогично

$$\angle C_1B_1M = \angle B_1NM = \angle B_1N'M.$$

Следовательно, треугольники $MN'B_1$ и MB_1C_1 подобны, откуда $MC_1 = \frac{MB_1^2}{MN'}$. Поэтому точки C_1 и C_2 совпадают, то есть прямая MN' проходит через точку C. Относительно прямой A_1B_1 симметричны прямые MN' и MN, а также точки C и H. Поэтому H лежит на прямой MN.

6. У натурального числа n нет ни одного делителя d, удовлетворяющего неравенству $n^2 \leqslant d^4 \leqslant n^3$. Докажите, что n имеет простой делитель, четвертая степень которого больше, чем n^3.

Решение. Если k является делителем n, то n/k также является делителем n. Тогда n не имеет делителей k, для которых $n^2 \leqslant \left(\frac{n}{k}\right)^4 \leqslant n^3$, что эквивалентно $n \leqslant k^4 \leqslant n^2$. Следовательно, у числа n нет делителей k, для которых $n \leqslant k^4 \leqslant n^3$. Пусть d — наибольший делитель числа n, для которого $d^4 < n$, а p — любой простой делитель числа n/d. Тогда dp является делителем n. Из максимальности d вытекает, что $d^4p^4 > n^3$. Следовательно, $p^4 = d^4p^4/d^4 > n^3/n = n^2$. Поскольку p — делитель n, верно неравенство $p^4 > n^3$.

9 класс. Второй вариант

1. Коля поехал на электросамокате в магазин в соседнюю деревню со скоростью 10 км/ч. Проехав ровно треть всего пути, он понял, что при движении с прежней скоростью успеет точно к закрытию магазина, и увеличил скорость вдвое. Но когда он проехал ровно 2/3 всего пути, самокат сломался, и оставшуюся часть пути Коля прошел пешком. С какой скоростью он шел, если успел точно к закрытию магазина?

Ответ: $6\frac{2}{3}$ км/ч.

Решение. Пусть расстояние до деревни равно $3x$ км. Если бы Коля все время ехал со скоростью 10 км/ч, то он потратил бы на дорогу $3x/10$ часов. Это и есть время от его выезда до закрытия магазина. Первую треть пути Коля проехал за $x/10$ часов. Увеличив скорость вдвое, Коля вторую треть пути проехал за $x/20$ часов. Таким образом, на две трети пути он потратил $x/10 + x/20 = 3x/20$ часов. Стало быть, до закрытия магазина осталось $3x/10 - 3x/20 = 3x/20$ часов, и за это время он сумел пройти x км. Значит, он шел со скоростью $x : \frac{3x}{20} = \frac{20}{3}$ км/ч.

2. Найдите все целые a, для которых квадратный трехчлен $x^2 + ax + 2a$ имеет два различных целых корня.

Ответ: $a = -1$ и $a = 9$.

Первое решение. Пусть u и v — корни трехчлена, причем $u < v$. Тогда по теореме Виета $uv = 2a$ и $u + v = -a$. Следовательно, $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = -\frac{1}{2}$. Если v положительно, то u отрицательно и $\frac{1}{u} < -\frac{1}{2}$. Отсюда $u = -1$, а значит, $v = 2$ и $a = -1$. Пусть оба корня отрицательны. Тогда $|u| > |v|$. Кроме того, $a > 0$ и

$$|u| \cdot |v| = 2a, \quad |u| + |v| = a \Rightarrow \frac{1}{|u|} + \frac{1}{|v|} = \frac{1}{2}.$$

Последнее равенство возможно только при $|v| \geqslant 3$. Но если $|v| \geqslant 4$, то $|u| > 4$ и $\frac{1}{|u|} + \frac{1}{|v|} < \frac{1}{2}$. Таким образом, $v = -3$, откуда $u = -6$ и $a = 9$.

Второе решение. Поскольку квадратный трехчлен имеет два целых корня, его дискриминант, равный $a(a-8)$, должен быть квадратом натурального числа. Если a нечетно, то множители a и $a - 8$ взаимно просты. Тогда $a = \pm b^2$ и $a - 8 = \pm c^2$ для некоторых натуральных b и c, откуда $c^2 - b^2 = \pm 8$. Но на 8 могут различаться только квадраты чисел 1 и 3. Поэтому $a = 9$ или $a = -1$. Если a четно, то $a = 2k$, и $k(k-4)$ — квадрат некоторого натурального числа n. Тогда

$$n^2 = k(k-4) = (k-2)^2 - 4 \Rightarrow (k-2)^2 - n^2 = 4.$$

Но квадраты двух натуральных чисел не могут различаются на 4.

3. Положительные числа a, b и c удовлетворяют условию $abc(a+b+c) = 3$. Докажите неравенство $(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8$.

Первое решение. Заметим, что

$$(a+b)(b+c) = b(a+b+c) + ac = \frac{3}{ac} + ac \geqslant \frac{2}{ac} + 2,$$

поскольку $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$ при $x > 0$. Следовательно,

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant \Big(\frac{2}{ac} + 2\Big)(c+a) \geqslant 2\sqrt{2 \cdot \frac{2}{ac}} \cdot 2\sqrt{ca} = 8.$$

Второе решение. Заметим, что

$$(a+b)(b+c)(c+a) = (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc = 3\Big(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\Big) - abc.$$

По неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим

$$1 = \frac{1}{3}(a+b+c)\cdot abc \geqslant (abc)^{4/3} \Rightarrow abc \leqslant 1.$$

Таким образом, нам достаточно проверить, что $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqslant 3$. Но это снова следует из неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим:

$$\frac{1}{3}\Big(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\Big) \geqslant \sqrt[3]{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}} = \frac{1}{\sqrt[3]{abc}} \geqslant 1.$$

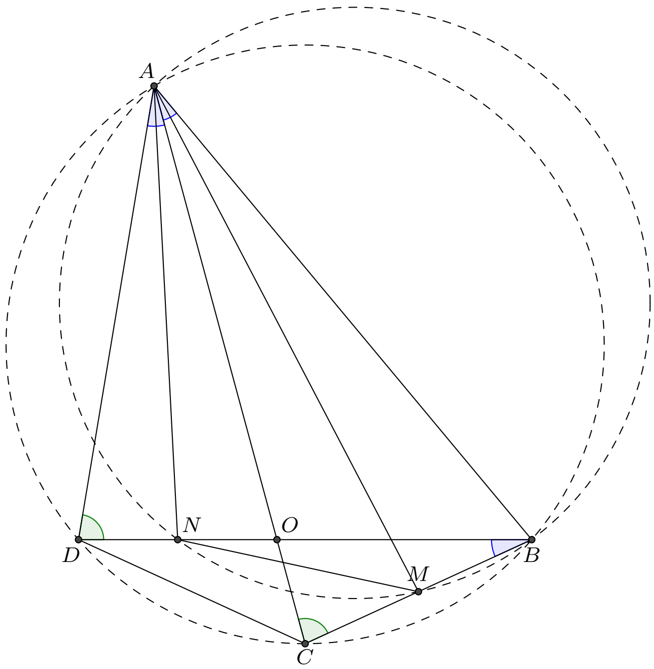
4. Какое наименьшее количество фишек можно расставить в клетках таблицы 99×99 так, чтобы в каждом квадрате 4×4 было не менее восьми фишек?

Ответ: 4801.

Решение. Добавим к таблице строку и столбец с номером 100. Поставим во все их клетки по фишке. Расширенную таблицу разобьем на 625 квадратов 4×4. В каждом квадрате может быть не более восьми пустых клеток, поэтому во всей таблице их не более 5000. Значит, общее количество фишек должно быть не меньше $99^2 - 5000 = 4801$.

Поставим теперь в расширенной таблице фишки в клетках, произведение координат которых делится на четыре. При этом в каждом из 625 квадратов 4×4 окажется ровно по 8 фишек. Кроме того, добавленные строка и столбец будут целиком заполнены фишками. Поэтому в исходной таблице будет расставлено $625\cdot 8 - 199 = 4801$ фишек.

5. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Диагональ AC — биссектриса угла $\angle BAD$, точка M — середина стороны BC, а точка N — середина отрезка DO. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является вписанным тогда и только тогда, когда четырехугольник $ABMN$ является вписанным.



Первое решение. Пусть четырехугольник $ABCD$ — вписанный. Тогда $\angle ADO = \angle ACB$. По условию $\angle OAD = \angle CAB$. Поэтому треугольники AOD и ABC подобны, откуда $\frac{AD}{DO} = \frac{AC}{CB}$. Тогда

$$\frac{AD}{DN} = \frac{2AD}{DO} = \frac{2AC}{CB} = \frac{AC}{CM},$$

и треугольники ADN и ACM подобны. Следовательно, $\angle DAN = \angle CAM$ и, значит,

$$\angle MAN = \angle CAD = \angle CBD = \angle MBN.$$

Таким образом, четырехугольник $ABMN$ — вписанный.

Пусть четырехугольник $ABMN$ — вписанный. Докажем, что четырехугольник $ABCD$ тоже вписанный. Предположим противное. Пусть D' — точка пересечения луча BD с описанной окружностью треугольника ABC, а N' — середина отрезка BD'. Тогда четырехугольник $ABCD'$ — вписанный, и по доказанному ранее четырехугольник $ABMN'$ также вписанный. Заметим, что точки N и N' лежат и на описанной окружности треугольника ABM, и на прямой BD. Следовательно, они совпадают. Таким образом, четырехугольник $ABCD$ — вписанный.

Второе решение. Обоснуем другим способом, что из вписанности четырехугольника $ABMN$ следует вписанность четырехугольника $ABCD$.

Докажем вначале, что любой треугольник RST однозначно определяется стороной RS, противолежащим ей углом τ и углом φ между стороной RS и проведенной к ней медианой. Действительно, RS и τ однозначно определяют и радиус описанной окружности $\triangle RST$, и ее центр (точностью до симметрии относительно прямой RS). В зависимости от того, является угол τ тупым или острым, определяется, с какой стороны от прямой RS лежит вершина T. С другой стороны, T лежит на пересечении окружности с лучом, проведенным из середины отрезка RS под углом φ к RS. Таких лучей два, но они дают равные треугольники.

Из доказанного следует, что если в двух треугольниках равны углы при вершинах, а также углы между противолежащими им сторонами и опущенными к этим сторонам медианами, то такие треугольники подобны.

Применим это замечание к треугольникам ADO и ACB. Углы DAO и CAB равны по условию, а углы ANO и AMB — в силу вписанности четырехугольника $ABMN$. Значит, треугольники ADO и ACB подобны, откуда $\angle ADO = \angle ACB$. Таким образом, четырехугольник $ABCD$ — вписанный.

6. Докажите, что у каждого из чисел $n! + 1$, $n! + 2$, $\ldots$, $n! + n$ можно выбрать простой делитель, на который не делится ни одно из остальных.

Решение. Если $1 \leqslant k \leqslant n$, то наибольший общий делитель чисел $n!$ и $n! + k$ равен k. Положим для краткости $m_k = (n! + k)/k = n!/k + 1$. Если числа m_k и $n!$ взаимно просты, то возьмем любой простой делитель p_k числа m_k. Тогда $p_k > n$ и на p_k не делятся никакие числа от $n! + 1$ до $n! + n$, кроме $n! + k$. Поэтому выбранное p_k подходит. Если же числа m_k и $n!$ имеют общий делитель, то у $n!$ есть какой-то простой делитель p, являющийся и делителем числа $m_k = n!/k + 1$. Но $n!/k$ не кратно p, поэтому $p = k > n/2$. Тогда возьмем $p_k = k$. На него не делятся никакие числа от $n! + 1$ до $n! + n$, кроме $n! + k$, поэтому оно также подходит.

1. Мальчик Толя любит плавать. Когда он приезжает на дачу к одной бабушке, он купается в Волхове и вниз по течению проплывает от одного пляжа до другого за 18 минут. Обратно он плывет ровно 1 час. Когда он приехал на дачу к другой бабушке, он проплыл по реке Луге ровно такое же расстояние по течению за 20 минут. Сколько ему потребуется времени, чтобы возвратиться назад?

Ответ: 45 минут.

Решение. Пусть расстояние между пляжами равно x км. Тогда в Волхове по течению Толя плывет со скоростью $x/18$ км/мин, а против течения — со скоростью $x/60$ км/мин. Поэтому собственная скорость Толи равна $\frac{1}{2}(x/60 + x/18) = 13x/360$ км/мин. В Луге по течению Толя плывет со скоростью $x/20$ км/мин. Значит, скорость течения в Луге равна $x/20 - 13x/360 = 5x/360$ км/мин. Следовательно, скорость Толи против течения в Луге равна $13x/360 - 5x/360 = x/45$ км/мин. Поэтому x км против течения Луги Толя проплывет за 45 минут.

2. Даны целые числа a и b. Докажите, что квадратный трехчлен $x^2 + 3ax + 3(2 - b^2)$ не имеет целых корней.

Решение. Если у трехчлена есть целый корень u, то по теореме Виета второй корень v равен $-3a - u$ и, в частности, тоже является целым. Произведение $uv = 3(2 - b^2)$ кратно трем, поэтому один из корней трехчлена (скажем, u) делится на 3. Но тогда и $v = -3a - u$ делится на 3. Значит, uv кратно 9, откуда $2 - b^2$ делится на 3. Но это невозможно, поскольку квадраты целых чисел дают при делении на 3 лишь остатки 0 и 1.

3. Сумма квадратов положительных чисел a, b и c равна трем. Докажите неравенство $a + b + c \geqslant a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$.

Решение. Заметим, что

$$2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - (a^4 + b^4 + c^4) = 3(a^2 + b^2 + c^2) - (a^4 + b^4 + c^4).$$

Поэтому нам нужно доказать неравенство

$$a^4 - 3a^2 + 2a + b^4 - 3b^2 + 2b + c^4 - 3c^2 + 2c \geqslant 0.$$

Заметим, что при любом $x \geqslant 0$

$$x^4 - 3x^2 + 2x = x(x + 2)(x - 1)^2 \geqslant 0.$$

Суммируя эти неравенства для $x = a$, $x = b$ и $x = c$, мы получим требуемое.

4. Клетки таблицы 20×20 покрашены в n цветов, причем есть клетки каждого цвета. В каждой строке и в каждом столбце таблицы задействовано не более шести разных цветов. При каком наибольшем n такое возможно?

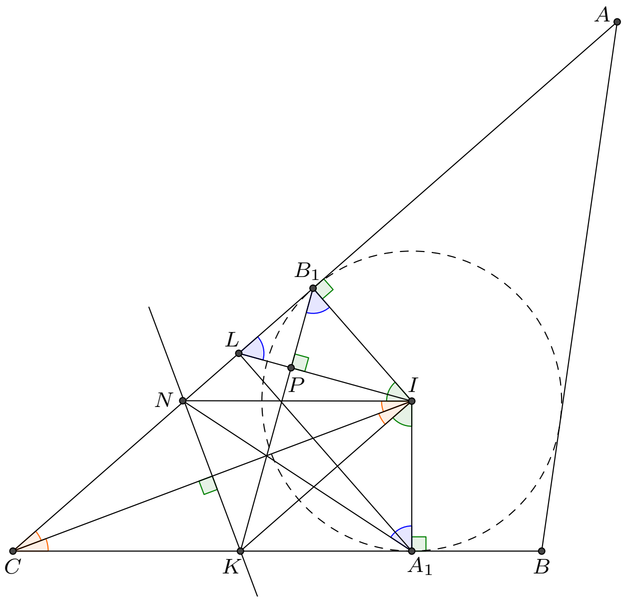
Ответ: 101.

Решение. Предположим, что есть раскраска в 102 цвета. Тогда найдутся две строки, в которых вместе задействовано не менее 12 цветов (в противном случае общее число цветов не превосходит $11 + 5 \cdot 18 = 101$). Пусть для определенности это первая и вторая строки. По условию в каждой строке присутствует не более шести разных цветов. Поэтому и в первой, и во второй строке задействовано ровно по шесть цветов, причем все эти цвета различны. Назовем используемые в первых двух строках цвета *темными*, а остальные — *светлыми*. Рассмотрим теперь столбцы таблицы. В каждом из них присутствует не более четырех светлых цветов, поскольку две верхние клетки окрашены в разные темные цвета. Тогда всего в таблице использовано не более $4 \cdot 20 = 80$ светлых цветов и 12 темных. Таким образом, общее количество цветов не превосходит $80 + 12 = 92 < 102$, что невозможно.

Раскраска в 101 цвет приведена ниже. Пустые клетки красим в 100-й цвет.

0	1	2	3	4															
	5	6	7	8	9														
		10	11	12	13	14													
			15	16	17	18	19												
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
															75	76	77	78	79
80																81	82	83	84
85	86																87	88	89
90	91	92																93	94
95	96	97	98																99

5. Вписанная в треугольник ABC окружность имеет центр I и касается сторон BC и AC в точках A_1 и B_1 соответственно. Серединный перпендикуляр к отрезку CI пересекает сторону BC в точке K. Через точку I проведена прямая, перпендикулярная KB_1, она пересекает сторону AC в точке L. Докажите, что прямые AC и A_1L перпендикулярны.



Первое решение. Обозначим через N точку пересечения серединного перпендикуляра к отрезку CI со стороной AC, а через P — точку пересечения прямых IL и KB_1. Поскольку CI — биссектриса угла $\angle ACB$, по построению точки K и N, а также точки A_1 и B_1 симметричны относительно прямой CI. Поэтому треугольники KIB_1 и NIA_1 симметричны относительно прямой CI и, в частности, равны. Тогда

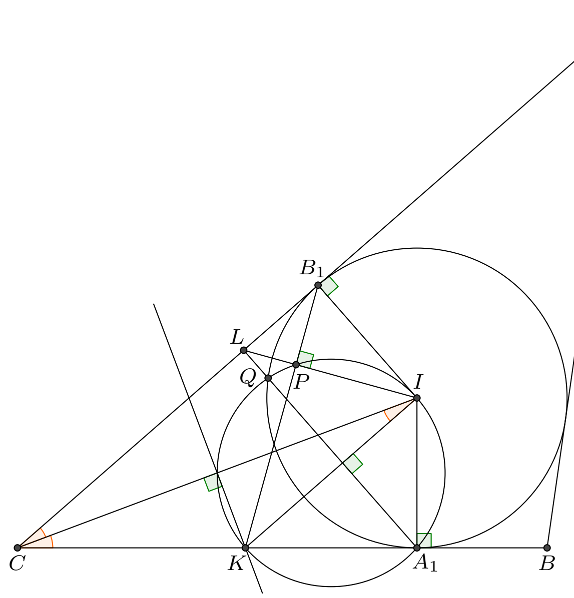
$$\angle B_1IK = \angle A_1IN \quad \text{и} \quad \angle IB_1K = \angle IA_1N.$$

Заметим, что

$$\angle B_1LI = 90^\circ - \angle LB_1P = \angle IB_1K = \angle IA_1N.$$

Значит, четырехугольник A_1ILN — вписанный, откуда $\angle A_1LN = \angle A_1IN$. Поскольку $\angle ACI = \angle KCI = \angle KIC$, прямые AC и KI параллельны. Следовательно, $\angle B_1IK = \angle IB_1C = 90^\circ$. Таким образом,

$$\angle A_1LN = \angle A_1IN = \angle KIB_1 = 90^\circ.$$



Второе решение. Поскольку $\angle ACI = \angle KCI = \angle KIC$, прямые AC и KI параллельны. Поэтому достаточно доказать, что прямая A_1L перпендикулярна KI.

Обозначим через P точку пересечения прямых IL и KB_1. Отметим, что прямоугольные треугольники B_1PL и IB_1L подобны и, значит, $\frac{LP}{LB_1} = \frac{LB_1}{LI}$. По построению $\angle KPI = \angle KA_1I = 90°$, поэтому точки A_1, I, K и P лежат на окружности ω, построенной на отрезке KI как на диаметре. Пусть эта окружность вторично пересекает вписанную окружность треугольника ABC в точке Q. Тогда прямые QA_1 и KI перпендикулярны, поскольку точки Q и A_1 симметричны относительно диаметра KI. Таким образом, осталось проверить, что точка A_1 лежит на прямой LQ. Пусть прямая LQ вторично пересекает окружность ω в некоторой точке A_2 и вторично пересекает вписанную окружность треугольника ABC в некоторой точке A_3. Из свойства угла между касательной и секущей следует подобие треугольников LB_1Q и LA_3B_1, откуда $\frac{LB_1}{LQ} = \frac{LA_3}{LB_1}$. Следовательно,

$$\frac{LP}{LQ} = \frac{LP}{LB_1} \cdot \frac{LB_1}{LQ} = \frac{LB_1}{LI} \cdot \frac{LA_3}{LB_1} = \frac{LA_3}{LI}.$$

С другой стороны, из вписанности четырехугольника $IPQA_2$ следует подобие треугольников LPQ и LA_2I, откуда $\frac{LP}{LQ} = \frac{LA_2}{LI}$. Поэтому точки A_2 и A_3 совпадают между собой и с точкой A_1. Стало быть, точки A_1, L и Q лежат на одной прямой.

6. Даны два таких простых числа p и q, что $p < q < 2p$. Докажите, что существуют такие два последовательных натуральных числа, что наибольший простой делитель одного из них равен p, а наибольший простой делитель другого равен q.

Решение. Рассмотрим числа ap при всех целых a, удовлетворяющих неравенству $-\frac{1}{2}(q-1) \leqslant a \leqslant \frac{1}{2}(q-1)$. Все они дают различные остатки от деления на q. Поскольку этих остатков ровно q, один из них равен 1. Следовательно, найдется такое a, что $ap = bq+1$ при некотором целом b. Значит, числа $|ap|$ и $|bq|$ различаются на 1. Кроме того,

$$|ap| \leqslant \tfrac{1}{2}(q-1) \cdot p < \tfrac{1}{2}pq < p^2, \quad |bq| \leqslant |ap| + 1 \leqslant p^2 < q^2.$$

Тогда p — наибольший делитель числа $|ap|$, а q — наибольший делитель числа $|bq|$.

Олимпиада школьников СПбГУ по математике

Заключительный этап. 2021/2022 учебный год

Задания для 6-7 классов

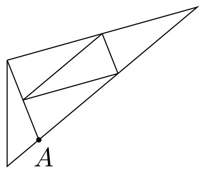
(Правильное и полное решение каждой задачи оценивается в 20 баллов)

6-7 классы. Первый вариант

1. Некоторый треугольник разрезали на пять маленьких треугольников так, как показано на рис. 1. Могли ли при этом все пять маленьких треугольников оказаться равными?

Ответ: да, могли.

Решение. Предполагая, что все пять треугольников равны, попытаемся найти, какими свойствами должен обладать искомый треугольник. Сумма углов треугольника равна $180°$, значит, сумма любых двух его углов меньше $180°$. Заметим, что в вершине A сходятся *два* угла соседних треугольников, которые в сумме дают $180°$. Значит, это два одинаковых угла, и потому оба они прямые. Тогда подходящую картинку легко нарисовать «по клеточкам».



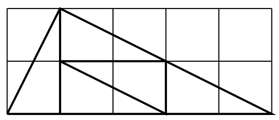


Рис. 1

2. На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Костя выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа, не превосходящие n, так, чтобы для всех поставленных им чисел выполнялось свойство: *если числа a и b соединены отрезком, то разность $a-b$ должна быть взаимно проста с n, а если не соединены, то числа $a-b$ и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1.* Например, для картинки на рис. 2 Костя взял $n = 45$ и подобрал подходящую расстановку — она показана на рис. 3.

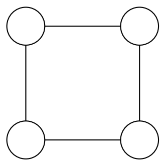


Рис. 2

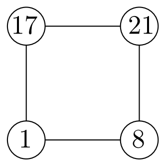


Рис. 3

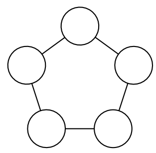


Рис. 4

а) При каком наименьшем n существует требуемая расстановка чисел на рис. 2?

б) Можно ли расставить числа в кружочках на рис. 4 при $n = 25$?

в) Можно ли расставить числа в кружочках на рис. 4 при $n = 39$?

г) При каком наименьшем n существует расстановка чисел в кружочках на рис. 4?

Решение.

а) Ответ: при $n = 4$.

Поскольку требуется расставить четыре различных числа, n не может быть меньше 4. А при $n = 4$ расстановка существует — см. рис. 5.

б) Ответ: нет.

Так $25 = 5^2$, то для чисел a и b, не соединенных ребром, разность $a - b$ делится на 5. Но если разности $a - c$ и $c - b$ делятся на 5 (см. рис. 6), то и $a - b$ делится на 5, что недопустимо в требуемой расстановке.

в) Ответ: нет.

Так $39 = 3 \cdot 13$, то для чисел a и b, не соединенных ребром, разность $a - b$ делится на 3 или на 13. Пусть разность $a - d$ делится на 3 (см. рис. 7), тогда разность $b - d$ не может делиться на 3, значит, она должна делиться на 13. Тогда $b - e$ аналогично не делится на 13, но делится на 3; $e - c$ делится на 13, но не на 3; и наконец, $c - a$ делится на 3. Таким

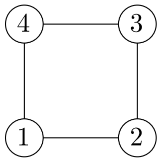


рис. 5

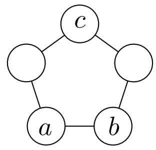


рис. 6

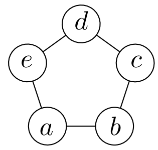


рис. 7

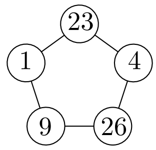


рис. 8

образом, $c - a$ и $a - d$ делятся на 3, значит, $c - d$ тоже делится на 3, что недопустимо в требуемой расстановке.

Случай, когда разность $a - d$ делится на 13, разбирается аналогично.

г) Ответ: при $n = 105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$.

Из решений предыдущих пунктов следует, что число n должно иметь как минимум три различных простых делителя. Кроме того, нетрудно видеть, что число n не может быть четным (поскольку в цикле $abcde$ нечетное число ребер, в нём имеются два соседних числа одинаковой четности). Наименьшее число, удовлетворяющее этим ограничениям, — это число $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$. для него нетрудно подобрать требуемую расстановку — см. рис. 8.

3. На доске написано 2021 минусов. Петя и Вася играют в такую игру. Ход состоит в том, что можно один минус заменить на плюс, либо стереть один плюс и один минус, либо два минуса заменить на три плюса. Ходят по очереди, первым ходит Петя, проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

Ответ: выиграет Петя.

Решение. Первым ходом Петя должен заменить два минуса на три плюса. В результате этого количество минусов на доске станет делиться на 3. После любого Васиного хода число минусов изменится на 1 или 2, и Петя сможет походить таким образом, чтобы количество минусов опять стало делиться на 3 — для этого ему достаточно заменить 1 или 2 минуса на плюсы.

Действуя таким образом, Петя добьется того, что после некоторого его хода число минусов станет равно 0 и Вася не сможет сделать ход.

4. а) Имеется большая компания людей — больше 100 человек, в которой некоторые люди дружат. Верно ли, что каждую такую компанию можно разбить на две группы «дружественным способом», т. е. так, чтобы у каждого человека друзей в своей группе было больше либо равно, чем друзей в противоположной группе?

б) Докажите, что каждую компанию, в которую входит 2022 человека, можно разбить на 15 групп «недружественным способом», т. е. так, чтобы у каждого человека количество друзей в своей группе составляло не более $1/15$ от общего числа его друзей.

Ответ: нет.

Решение. Например, если в компании нечетное количество человек и все со всеми дружат, то в группе, которая содержит меньше народу, это условие выполнено не будет.

б) Нарисуем граф дружбы: люди — вершины, отношения дружбы — рёбра. Вершины из одной группы будем красить в одинаковый цвет. Возьмем разбиение на группы с максимальным количеством разноцветных ребер (т. е. ребер, концы которых разного цвета). Это разбиение подходит. Действительно, если у кого-то (скажем, из красной компании) в красной компании оказалось больше $1/15$ от общего числа своих друзей, то это значит, что в какой-то из остальных компаний (для определенности в синей) у этого человека окажется меньше $1/15$ от числа его друзей. Мы утверждаем, что при перемещении этого человека из красной компании в синюю количество разноцветных ребер увеличится. Действительно, пусть у «красного» человека A в красной группе m друзей, а в синей — n. При перемещении A в синюю группу m одноцветных ребер станут в «красно-синими», а n

«красно-синих» ребер — одноцветными. Так как $m > n$, число разноцветных ребер увеличится. Но это невозможно, поскольку мы выбрали разбиение на группы с максимальным количеством разноцветных ребер.

1. Некоторый треугольник разрезали на пять маленьких треугольников так, как показано на рис. 1. Могли ли при этом все пять маленьких треугольников оказаться равными?

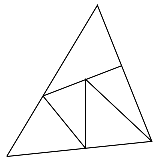
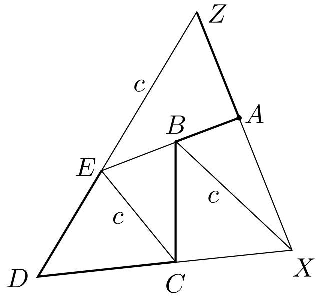


Рис. 1

Ответ: нет не могли.

Решение. Предположим, что все пять треугольников равны. Сумма углов треугольника равна 180°, значит, сумма любых двух его углов меньше 180°. Заметим, что в вершине A сходятся *два* угла соседних треугольников, которые в сумме дают 180°. Значит, это два одинаковых угла, и потому оба они прямые.

Будем обозначать через c гипотенузы маленьких треугольников. Заметим, что $BX = EZ = c$, поскольку углы EAZ и BAX прямые. Кроме того, c — самая большая сторона любого из маленьких треугольников. Применяя этот факт к треугольникам BCX и EAZ, мы получим, что $BC < c$ и $BE < AE < c$. Значит, в треугольнике CBE стороны BC и BE являются катетами, откуда $CE = c$. Тогда все углы ломаной $EDCBAZ$ прямые, и значит, ее первое звено параллельно последнему, чего не может быть, так как эти звенья лежат на соседних сторонах большого треугольника.



2. На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Костя выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа, не превосходящие n, так, чтобы для всех поставленных им чисел выполнялось свойство: *если числа a и b соединены отрезком, то разность $a-b$ должна быть взаимно проста с n, а если не соединены, то числа $a-b$ и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1.* Например, для картинки на рис. 2 Костя взял $n = 75$ и подобрал подходящую расстановку — она показана на рис. 3.

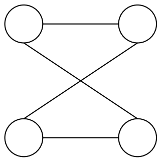


Рис. 2

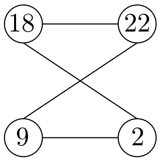


Рис. 3

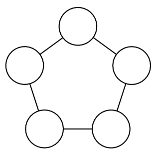


Рис. 4

а) При каком наименьшем n существует требуемая расстановка чисел на рис. 2?

б) Можно ли расставить числа в кружочках на рис. 4 при $n = 49$?

в) Можно ли расставить числа в кружочках на рис. 4 при $n = 33$?

г) При каком наименьшем n существует расстановка чисел в кружочках на рис. 4?

Решение.

а) Ответ: при $n = 4$.

Поскольку требуется расставить четыре различных числа, n не может быть меньше 4. А при $n = 4$ расстановка существует — см. рис. 5.

б) Ответ: нет.

Так $49 = 7^2$, то для чисел a и b, не соединенных ребром, разность $a - b$ делится на 7. Но если разности $a - c$ и $c - b$ делятся на 7 (см. рис. 6), то и $a - b$ делится на 7, что недопустимо в требуемой расстановке.

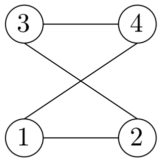


рис. 5

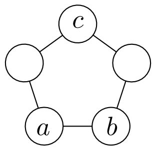


рис. 6

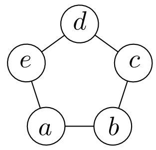


рис. 7

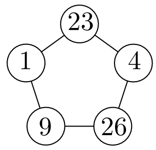


рис. 8

в) Ответ: нет.

Так $33 = 3 \cdot 11$, то для чисел a и b, не соединенных ребром, разность $a - b$ делится на 3 или на 11. Пусть разность $a - d$ делится на 3 (см. рис. 7), тогда разность $b - d$ не может делиться на 3, значит, она должна делиться на 11. Тогда $b - e$ аналогично не делится на 11, но делится на 3; $e - c$ делится на 11, но не на 3; и наконец, $c - a$ делится на 3. Таким образом, $c - a$ и $a - d$ делятся на 3, значит, $c - d$ тоже делится на 3, что недопустимо в требуемой расстановке.

Случай, когда разность $a - d$ делится на 11, разбирается аналогично.

г) Ответ: при $n = 105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$.

Из решений предыдущих пунктов следует, что число n должно иметь как минимум три различных простых делителя. Кроме того, нетрудно видеть, что число n не может быть четным (поскольку в цикле $abcde$ нечетное число ребер, в нём имеются два соседних числа одинаковой четности). Наименьшее число, удовлетворяющее этим ограничениям, — это число $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$. Для него нетрудно подобрать требуемую расстановку — см. рис. 8.

3. На доске написано 865 плюсов. Петя и Вася играют в такую игру. Ход состоит в том, что можно один плюс заменить на минус, либо стереть один плюс и два минуса, либо два плюса заменить на два минуса. Ходят по очереди, первым ходит Петя, проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

Ответ: выиграет Петя.

Решение. Первым ходом Петя должен заменить один плюс на минус. В результате этого количество плюсов на доске станет делиться на 3. После любого Васиного хода число плюсов изменится на 1 или 2, и Петя сможет походить таким образом, чтобы количество плюсов опять стало делиться на 3 — для этого ему достаточно заменить один или два плюса на минусы.

Действуя таким образом, Петя добьется того, что после некоторого его хода число плюсов станет равно 0 и Вася не сможет сделать ход.

4. а) Имеется большая компания людей — больше 100 человек, в которой некоторые люди дружат. Верно ли, что каждую такую компанию можно разбить на три группы «дружественным способом», т. е. так, чтобы у каждого человека друзей в своей группе было больше либо равно $1/3$ от количества всех его друзей?

б) Докажите, что каждую компанию, в которую входит 2022 человека, можно разбить на 11 групп «недружественным способом», т. е. так, чтобы у каждого человека количество друзей в своей группе составляло не более $1/11$ от общего числа его друзей.

Ответ: нет.

Решение. Например, если в компании количество человек не делится на 3 и все со всеми дружат, то в одной из групп окажется меньше $1/3$ от общего числа людей и в этой группе условие выполнено не будет.

б) Нарисуем граф дружбы: люди — вершины, отношения дружбы — рёбра. Вершины из одной группы будем красить в одинаковый цвет. Возьмем разбиение на группы с максимальным количеством разноцветных ребер (т. е. ребер, концы которых разного цвета). Это разбиение подходит. Действительно, если у кого-то (скажем, из красной компании) в красной компании оказалось больше $1/11$ от общего числа своих друзей, то это значит, что в какой-то из остальных компаний (для определенности в синей) у этого человека окажется меньше $1/11$ от числа его друзей. Мы утверждаем, что при перемещении этого человека из красной компании в синюю количество разноцветных ребер увеличится. Действительно, пусть у «красного» человека A в красной группе m друзей, а в синей — n. При перемещении A в синюю группу m одноцветных ребер станут в «красно-синими», а n «красно-синих» ребер — одноцветными. Так как $m > n$, число разноцветных ребер увеличится. Но это невозможно, поскольку мы выбрали разбиение на группы с максимальным количеством разноцветных ребер.