

# Олимпиада школьников СПбГУ 2022/2023 учебного года

## «Инженерные системы»

### Отборочный этап

#### 8-9 класс

##### Задача 1

Рассмотрим последовательность чисел

$$2022 + 1; 2 \cdot 2022 + 1; 3 \cdot 2022 + 1; \dots; 2022 \cdot 2022 + 1.$$

Докажите, что среди членов данной последовательности найдется хотя бы один точный квадрат натурального числа.

**Ответ:**  $x_{2020} = 2020 \cdot 2022 + 1 = 2021^2$ .

##### Задача 2

Известно, что плотность земной атмосферы убывает с высотой. Постройте модель атмосферы, состоящую из  $n$  плоских слоев равной толщины  $h$  таких, что плотность воздуха убывает с высотой по следующему закону: если в первом, самом нижнем слое, плотность равна  $\rho$ , то во втором слое плотность равна  $\rho/2^2$ , в третьем —  $\rho/3^2$ , ..., в самом верхнем слое —  $\rho/n^2$  (толщина всей атмосферы  $H = n \cdot h$ ). При моделировании необходимо найти такое количество слоев  $n$ , чтобы общая масса столба, который проходит через все слои и имеет площадь поперечного сечения  $1 \text{ м}^2$ , совпадала бы с известной массой  $m$  такого же столба в реальной атмосфере Земли с точностью 10 %.

В качестве ответа приведите таблицу, состоящую из трех столбцов:

- 1) номер слоя (первый – самый нижний);
- 2) масса слоя;
- 3) масса слоя плюс массы всех предыдущих слоев (для первого слоя здесь повторяется его масса).

Числовые данные:  $H = 100 \text{ км}$ ,  $\rho = 1,225 \text{ кг/м}^3$ ,  $m = 1,03 \cdot 10^4 \text{ кг}$ .

**Ответ:**  $n \approx 20$ .

##### Задача 3

Пусть в одной формульной единице некоторого бинарного электронейтрального соединения А содержится 28 нейтронов, при этом относительная молекулярная масса соединения равна 56 а.е.м. Известно, что количества электронов в атомах элементов,

входящих в состав А, относятся друг к другу как 3:4, а мольные доли элементов в соединении равны.

- 1) Определите формулу соединения А.
- 2) Приведите необходимые расчеты для установления формулы.
- 3) Назовите соединение А.
- 4) Рассчитайте, в каком массовом соотношении необходимо взять простые вещества, чтобы синтезировать соединение А массой 112 грамм, при условии, что исходные простые вещества прореагируют без остатка.

**Ответ:** 1)  $\text{MgS}$ ; 3) сульфид магния; 4) 0,75.

#### Задача 4

Заряженная частица пыли массой  $m = 10^{-8}$  г находится в однородном электростатическом поле между двумя горизонтальными пластинами. Нижняя пластина заряжена до потенциала +3 кВ, а верхняя до потенциала -3 кВ. Расстояние между пластинами  $d = 5$  см. Находясь первоначально на расстоянии  $d_0 = 1$  см от нижней пластины, частица достигает верхней пластины за время  $t = 0,1$  с. Найдите заряд частицы  $q$ . Какой должен быть у нее заряд  $q_0$ , чтобы частица оставалась между пластинами в равновесии?

Заряженная частица массой  $m = 10^{-8}$  г находится в однородном электростатическом поле между двумя горизонтальными пластинами. Нижняя пластина заряжена до потенциала +3 кВ, а верхняя до потенциала -3 кВ. Расстояние между пластинами  $d = 5$  см. Находясь первоначально на расстоянии  $d_0 = 1$  см от нижней пластины, частица достигает верхней пластины за время  $t = 0,1$  с. Найдите заряд частицы. Какой должен быть у нее заряд, чтобы частица оставалась в равновесии?

**Ответ:**  $q = 1,5 \cdot 10^{-15}$  Кл;  $q_0 = 0,8 \cdot 10^{-15}$  Кл.

#### Задача 5

Автомобильная дорога имеет максимальную пропускную способность 30 автомобилей в минуту. Максимальный поток автомобилей (который также составляет 30 авто в минуту) достигается в 17-00, и в этот момент происходит автомобильная авария. Пропускная способность сразу снижается до 5 автомобилей в минуту, а прибывающие автомобили начинают образовывать пробку. В 18-30 аварийные машины оттащили ближе к краю дороги, после чего пропускная способность сразу увеличилась до 15 машин в минуту. Еще через 30 минут дорогу полностью освободили и ее максимальная пропускная способность 30 авто в минуту полностью восстановилась.

А) определите, сколько машин стояло в пробке в 18-30 и длину пробки при условии, что 1 машина в среднем имеет длину 5 метров и между машинами по 1 метру (все машины стоят в двух полосах, параллельно друг другу)

Б) На сколько машин увеличилась пробка с 18-30 до 19-00

В) С 19-00 поток машин (30 авто в минуту) начинает уменьшаться: каждые 5 минут на 1 машину (т.е. в 19-05 поток равен 29 машин в минуту, в 19-10 – 28 и т.д.). Сколько пройдет времени (начиная с 17-00) до того момента когда пробка полностью исчезнет и проезд будет свободный.

**Ответ**

А) За 1 час и 30 минут наберется 2250 машин

Б) За 30 минут пробка увеличилась на 450 машин.

В) 2 часа и 42 минуты (с 21-42 проезд по дороге будет свободен).

## 10-11 класс

### Задача 1

Пусть дано следующее выражение:

$$A_n = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}.$$

Определите, сколько дробей может быть в этой сумме для того, чтобы выполнялось неравенство  $2022 < A_n < 2023$ .

- А) Составьте компьютерную программу, которая позволяет вычислять значение  $A$  для конечного количества дробей и дает ответ на поставленный вопрос.  
Б) Решите задачу аналитически.

**Ответ:** от  $2023^2$  до  $2024^2 - 2$  дробей включительно.

### Задача 2

Предположим, что земная атмосфера представляет собой сферический слой толщины  $H$ , который прилегает к Земле — шару радиуса  $R$ . Известно, что плотность атмосферы убывает с высотой. Постройте модель атмосферы, состоящую из  $n$  сферических слоев равной толщины  $h$  таких, что плотность воздуха убывает с высотой по следующему закону: если в первом, самом нижнем слое, плотность равна  $\rho$ , то во втором слое плотность равна  $\rho/2^3$ , в третьем —  $\rho/3^3$ , ..., в самом верхнем слое —  $\rho/n^3$ . При моделировании необходимо найти такое количество слоев  $n$  (при этом  $nh = H$ ), чтобы общая масса всех слоев совпадала с известной полной массы атмосферы  $M$  с точностью 10 %.

В качестве ответа приведите таблицу, состоящую из трех столбцов:

- 1) номер слоя (первый — самый нижний);
- 2) масса слоя;
- 3) масса слоя плюс массы всех предыдущих слоев (для первого слоя здесь повторяется его масса).

Числовые данные:  $H = 100$  км,  $R = 6370$  км,  $\rho = 1,225$  кг/м<sup>3</sup>,  $M = 5,2 \cdot 10^{18}$  кг.

**Ответ:**  $n \approx 15$ .

### Задача 3

Известно, что в одной формульной единице бинарного электронейтрального соединения  $A$  содержится 36 нейтронов, а относительная молекулярная масса соединения равна 72 а.е.м. Известно, что количества электронов в атомах элементов, входящих в состав  $A$ ,

относятся друг к другу как 4:5. Также известно, что мольные доли элементов в соединении равны.

1. Определите формулу соединения А
2. Приведите необходимые расчеты для установления формулы
3. Назовите соединение А.
4. Рассчитайте в каком массовом соотношении необходимо взять простые вещества, чтобы синтезировать соединение А массой 144 грамма, при условии, что исходные простые вещества прореагируют без остатка.

**Ответ:**

1-2.  $\text{CaS}$ .

3. Сульфид кальция.

4. 5:4

#### **Задача 4**

Электрон с кинетической энергией  $W = 10^{-16}$  Дж влетает в пространство между двумя горизонтальными квадратными металлическими пластинами (в точке равностоящей от каждой из пластин) параллельно одной стороне пластин. Расстояние между пластинами  $d = 0.4$  м, а сторона каждой пластины  $b = 0.5$  м. Нижняя пластина заземлена, а верхняя пластина имеет заряд  $q = 2$  нКл. Найти скорость электрона в момент выхода за пределы пластин. На каком расстоянии от нижней пластины он будет находится в этот момент? Заряд электрона  $e = 1.6 \times 10^{-19}$  Кл, а его масса  $m = 9.1 \times 10^{-31}$  кг.

**Ответ:**  $V = 15.8 \times 10^6$  м/с;  $h = 29.0$  см.

#### **Задача 5**

Автомобильная дорога имеет максимальную пропускную способность 30 автомобилей в минуту. Максимальный поток автомобилей (который также составляет 30 авто в минуту) достигается в 17-00, и в этот момент происходит автомобильная авария. Пропускная способность сразу снижается до 5 автомобилей в минуту, а прибывающие автомобили начинают образовывать пробку. В 18-30 аварийные машины оттащили ближе к краю дороги, после чего пропускная способность сразу увеличилась до 15 машин в минуту. Еще через 30 минут дорогу полностью освободили и ее максимальная пропускная способность 30 авто в минуту полностью восстановилась.

А) определите, сколько машин стояло в пробке в 18-30 и длину пробки при условии, что 1 машина в среднем имеет длину 5 метров и между машинами по 1 метру (все машины стоят в двух полосах, параллельно друг другу)

Б) На сколько машин увеличилась пробка с 18-30 до 19-00

В) С 19-00 поток машин (30 авто в минуту) начинает уменьшаться: каждые 5 минут на 1 машину (т.е. в 19-05 поток равен 29 машин в минуту, в 19-10 – 28 и т.д.). Сколько пройдет времени (начиная с 17-00) до того момента когда пробка полностью исчезнет и проезд будет свободный.

**Ответ**

А) За 1 час и 30 минут наберется 2250 машин

Б) За 30 минут пробка увеличилась на 450 машин.

В) 2 часа и 42 минуты (с 21-42 проезд по дороге будет свободен).