**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

# Олимпиада школьников СПбГУ по математике
# Примеры заданий отборочного этапа
# 2022/2023 учебный год

## 6-11 классы

## Олимпиада школьников СПбГУ по математике
## Примеры заданий отборочного этапа
## 2022/2023 учебный год

### Задания для 10–11 классов

**1.** (10 баллов) *Шахматные клубы Москвы, Санкт-Петербурга и Казани договорились провести турнир. Каждый москвич сыграл ровно с 9 петербружцами и с $n$ казанцами. Каждый петербуржец сыграл ровно с 6 москвичами и с 2 казанцами. Каждый казанец сыграл ровно с 8 москвичами и с 6 петербуржцами. Чему равно $n$?*

**Ответ:** 4.

**Решение.** Пусть команда Москвы состояла из $m$ участников, команда Санкт-Петербурга — из $p$ участников, команда Казани — из $k$ участников.

По условию, каждый москвич, т. е. каждый из $m$ человек, сыграл ровно 9 партий с петербуржцами; а каждый петербуржец — каждый из $p$ человек — сыграл ровно с 6 москвичами. Очевидно, партии, сыгранные москвичами с петербуржцами, — это те же партии, что сыграли петербуржцы с москвичами, т.е. $m \cdot 9 = p \cdot 6$.

Аналогично, $m \cdot n = k \cdot 8$ и $p \cdot 2 = k \cdot 6$. Имеем

$$\begin{cases} 9m = 6p, \\ nm = 8k, \\ 2p = 6k; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m = 2p, \\ nm = 8k, \\ p = 3k; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m = 2 \cdot 3k, \\ nm = 8k, \\ p = 3k; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2k, \\ nm = 8k, \\ p = 3k; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2k, \\ n \cdot 2k = 8k, \\ p = 3k. \end{cases}$$

Отсюда, $n = 4$.

**2.** (10 баллов) *В каждой клетке квадрата* $50 \times 50$ *записали число, равное количеству прямоугольников* $1 \times 16$ *(как вертикальных, так и горизонтальных), в которых эта клетка является крайней. В скольких клетках записаны числа, большие или равные 3?*

**Ответ:** 1600.

**Решение.** Будем обозначать клетки квадрата парами $(i,\, j)$, где $i = 1, \ldots, 50$, $j = 1, \ldots, 50$. Нумерацию начнем с нижнего левого угла квадрата.

Клетка $(i,\, j)$ является правой крайней для горизонтального прямоугольника, если $16 \leqslant i$ — неравенство (1), и левой крайней, если $i \leqslant 50 - 15 = 35$ — неравенство (2). Клетка $(i,\, j)$ является верхней крайней для вертикального прямоугольника, если $16 \leqslant j$ — неравенство (3), и нижней крайней, если $j \leqslant 50 - 15 = 35$ — неравенство (4). При этом нас интересует количество клеток квадрата, для которых выполняются не менее трех неравенств из (1)–(4).

Сначала найдем количество клеток, для которых верны все неравенства. Это клетки, для которых $16 \leqslant i \leqslant 35$ и $16 \leqslant j \leqslant 35$. Их $(35 - 15) \times (54 - 15) = 20 \times 20 = 400$.

Теперь вычислим количество клеток, для которых не верно неравенство (1), но верны (2)–(4). Т.е. $i < 16$ и $16 \leqslant j \leqslant 35$. Таких клеток $15 \times (35 - 15) = 15 \times 20 = 300$. Легко видеть, что из-за симметрии (квадрата) количество клеток, для которых верны другие наборы трех неравенств, будут такими же.

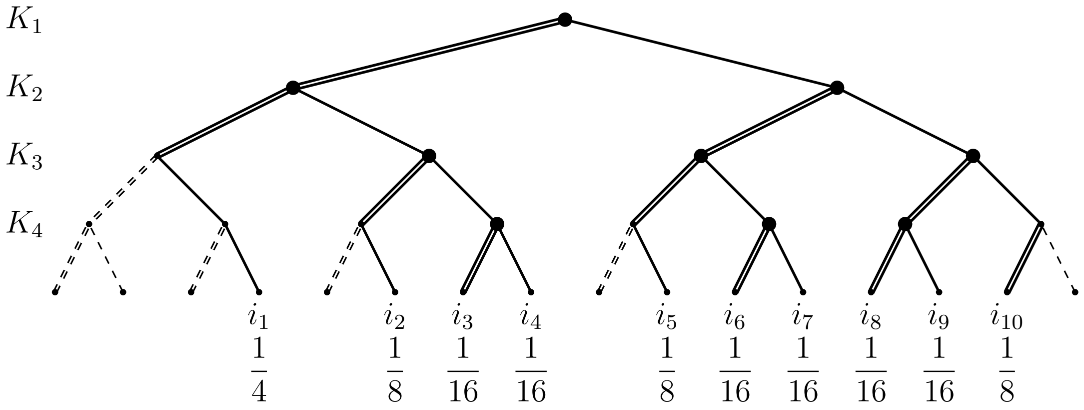
В сумме получаем $400 + 3 \cdot 300 = 1600$.

**3.** (20 баллов) *На факультете журналистики университета Сказочного Содружества имеется 5 целевых мест: 2 на дневном отделении и 3 на вечернем. На них направлены 4 курицы: три черных и белая. Место для каждой курицы резервируется сразу после подачи ею заявления, причем порядок подачи курицами заявлений строго случаен. При наличии свободных мест на обоих отделениях каждая курица с равной вероятностью выбирает любое из них. Найдите вероятность того, что на дневное отделение поступит хотя бы одна черная курица.*

**Ответ:** 0,922.

**Решение.** На факультете имеются суммарно 5 мест, на которые поступают 4 абитуриента. Поскольку все абитуриенты поступят на факультет, то исход определяется выбором тех, кто поступит на дневное отделение. Это могут быть либо два абитуриента (и их можно выбрать шестью способами), либо один абитуриент (его можно выбрать четырьмя способами); таким образом, всего имеется 10 исходов. Найдем вероятности этих исходов.

Зафиксируем порядок, в котором курицы подают заявления. Пусть это $K_1K_2K_3K_4$. Следовательно, сначала выбор места будет осуществлять курица $K_1$, потом курица $K_2$ и т.д. Поскольку в условии нет ограничений на предпочтения абитуриентов, то выбор дневного и вечернего отделения равновероятен и равен $\frac{1}{2}$, если это технически возможно (не все варианты доступны для куриц, делающих выбор последними — из-за ограничений на количество мест как на дневном, так и на вечернем отделениях).




На рисунке двойными линиями, ведущими от узла влево, обозначен выбор дневного отделения, одинарными, ведущими от узла вправо, — вечернего. Сплошные линии — это технически осуществимые случаи, штриховые — невозможные варианты. То, какая именно курица делает выбор на конкретном уровне, отмечено в столбце слева. Если для осуществления какого-либо варианта фактический выбор делают $n$ куриц, то вероятность такого варианта составляет $\frac{1}{2^n}$. Заметим, что для осуществления, например, варианта $i_1$ нужен выбор только первых двух куриц — третьей и четвертой ничего не остается, как выбрать вечернее отделение. Вероятности каждого из возможных вариантов приведены на рисунке внизу под названиями вариантов.

Курицы подают заявления в случайном порядке, поэтому когда в решении идет речь, например, об одной курице из четырех, то, во-первых, это может быть как первая среди подавших заявление, так и вторая, третья или четвертая; а во-вторых, если нас интересует не произвольная из куриц, а какая-то конкретная, необходимо понимать, сколькими способами можно выбрать нужную нам курицу из имеющихся. Ответ будет получаться как произведение соответствующих вероятностей.

Событие «на дневное отделение поступит хотя бы одна черная курица» противоположно событию «на дневное отделение не поступит ни одна из черных куриц». На дневном отделении должна быть хотя бы одна курица (т. к. на вечернем отделении мест 3, а куриц по условию 4), а поскольку у нас только одна белая, то именно она на дневное отделение и поступит. Вероятность выбора ровно одной (белой) курицы четырех имеющихся равна $\frac{1}{4}$.

Теперь найдем вероятность того, что «на дневное отделение поступит ровно одна курица». На рисунке это события $i_4$, $i_7$, $i_9$ и $i_{10}$ — когда дневное отделение выбирает курица $K_1$, $K_2$, $K_3$ и $K_4$ соответственно. Вероятность их осуществления равна $\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+$ $+\frac{1}{8}=\frac{5}{16}$.

Отсюда получаем ответ: $1-\frac{5}{16}\cdot\frac{1}{4}=\frac{59}{64}\approx 0,922$.

**4.** (20 баллов) *Для скольких натуральных чисел $n$, не превосходящих 600, тройки чисел*

$$\left[\frac{n}{2}\right], \left[\frac{n}{3}\right], \left[\frac{n}{5}\right] \quad \text{и} \quad \left[\frac{n+1}{2}\right], \left[\frac{n+1}{3}\right], \left[\frac{n+1}{5}\right]$$

*различны? Как всегда, через $[x]$ обозначена целая часть числа $x$, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее $x$.*

**Ответ:** 440.

**Решение.**

**5.** (20 баллов) *На базаре в Египте турист торгуется с продавцом за сувенир стоимостью 10 000 египетских фунтов. Турист сначала снижает цену на $x$ процентов* $(0 < x < 100)$, *потом продавец повышает цену на $x$ процентов и т. д. Число $x$ в ходе торга не меняется, и продавец повышает цену хотя бы один раз. Торг идет до тех пор, пока один из участников не получит нецелое значение цены сувенира. Найдите наибольшее возможное количество изменений цены сувенира в ходе такого торга (включая последнее нецелое значение цены).*

**Ответ:** 5.

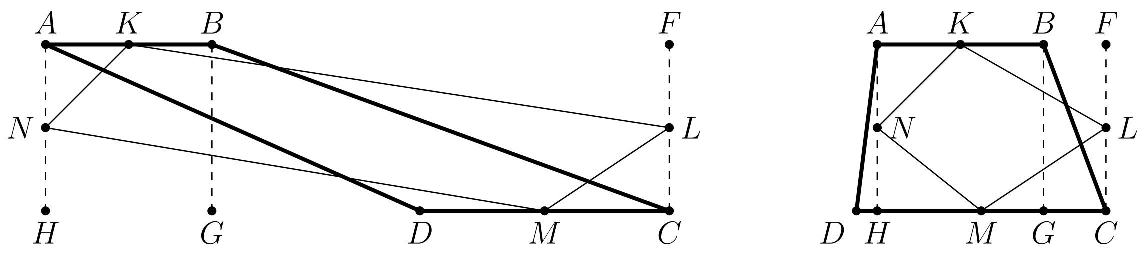
**Решение.** Конечная стоимость сувенира может быть найдена по одной из двух формул (в зависимости от того, чье было последнее слово): $10000 \cdot \left(1 - \frac{x}{100}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right)^n$ или $10000 \cdot \left(1 - \frac{x}{100}\right)^{n+1} \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right)^n$.

После несложных преобразований из этих формул получаем $\frac{(100-x)^n(100+x)^n}{100^{2n-2}}$ и $\frac{(100-x)^{n+1}(100+x)^n}{100^{2n-2}}$.

Выражение вида $(100-x)^a(100+x)^b$ делится на $100^t$ при $a > 0, b > 0, x > 0$ и $t > 0$ хотя бы один раз при $x = 10i, i = 1, \ldots, 9$ (четное число, кратное 5).

**6.** (30 баллов) *Основания $AB$ и $CD$ трапеции $ABCD$ равны 15 и 19 соответственно. $AH$ и $BG$ — высоты на прямую $DC$, $CF$ — высота на прямую $AB$. Точки $K$, $L$, $M$, $N$ — середины отрезков $AB$, $CF$, $CD$ и $AH$ соответственно. Найдите отношение площади трапеции $ABCD$ к площади четырехугольника $KLMN$, если $DG = 17$.*

**Ответ:** 2 или $\frac{2}{3}$.




**Решение.** Обозначим трапецию $ABCD$ вершинами по часовой стрелке, а основания будем считать расположенными горизонтально. Поскольку в условии не обозначено, где именно на прямой $DC$ лежит точка $G$, то в решении необходимо рассмотреть все случаи. Возможны два варианта: точка $G$ лежит слева от точки $D$ (см. рисунок слева) и точка $G$ лежит справа от точки $D$ (см. рисунок справа). Во втором случае, т. к.

$$DG = 17 < 19 = DC,$$

точка $G$ лежит на отрезке $DC$.

Пусть $h$ — высота трапеции. По условию, точки $N$ и $L$ — середины высот трапеции. Заметим, что площадь четырехугольника $KLMN$ складывается из площадей треугольников $KNL$ и $MNL$, имеющих одно основание и высоты, равные половине высоты трапеции, т. е.

$$S_{KLMN} = S_{KNL} + S_{MNL} = 2 \cdot S_{KNL} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot NL \cdot \frac{h}{2} = NL \cdot \frac{h}{2}.$$

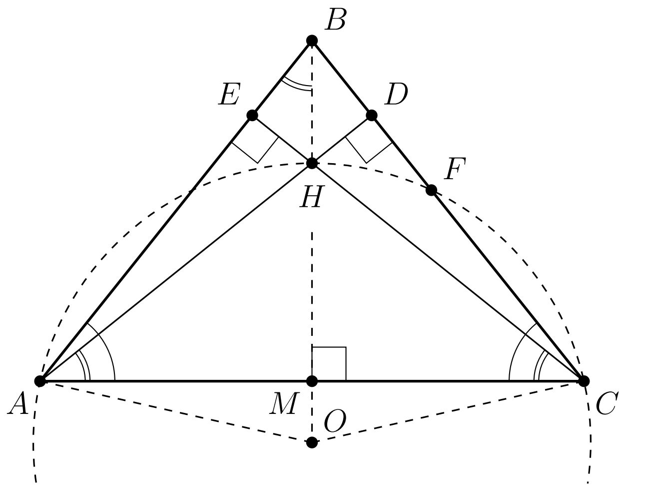
Получаем, что искомое отношение площадей равно

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{KLMN}} = \frac{\frac{AB+DC}{2} \cdot h}{NL \cdot \frac{h}{2}} = \frac{AB + CD}{NL}.$$

$NL$ — это расстояние между прямыми $AH$ и $CF$. В случае, когда точка $G$ лежит слева от точки $D$, т. е. не попадает на основание $CD$, величина $NL = AB + BG + DC = 15+$

$+17+19=51$. Во втором случае $NL = HG+GC = AB+(DC-DG) = 15+(19-17) = 17$. Следовательно, получаем два ответа: $\frac{AB+CD}{NL} = \frac{34}{51} = \frac{2}{3}$ и $\frac{AB+CD}{NL} = \frac{34}{17} = 2$.

**7.** (30 баллов) *В остроугольном равнобедренном треугольнике $ABC$ ($AB = BC$) проведены высоты $AD$ и $CE$, которые пересекаются в точке $H$. Описанная окружность треугольника $ACH$ пересекает отрезок $BC$ в точке $F$. Докажите, что $\angle ABH = \angle BFH$.*




**Решение.** Заметим, что высота из вершины $B$ также будет проходить через $H$, т. к. высоты треугольника пересекаются в одной точке. Пусть $M$ — основание высоты из вершины $B$.

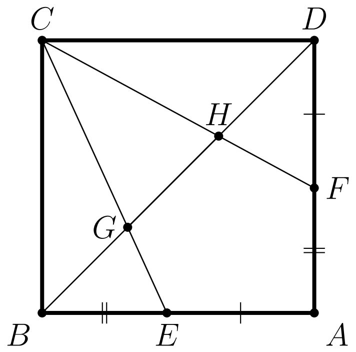
Прямоугольные треугольники $ADC$ и $ABM$ подобны по двум углам, т. к. угол $BAM$ в треугольнике $ABM$ равен углу $BCA$ в треугольнике $ADC$ как углы при основании равнобедренного треугольника $ABC$.

Угол $BFH$ является смежным с углом $HFC$, т. е. равен $180° - \angle HFC$. А т. к. $AHFC$ — вписанный четырехугольник, то $\angle HAC = 180° - \angle HFC$. Следовательно, $\angle BFH = \angle HAC$. А, как мы помним, $\angle HAC = \angle ABH$ из подобия треугольников $ABC$ и $ABM$.

**8.** (30 баллов) *На сторонах $AB$ и $AD$ квадрата $ABCD$ отмечены точки $E$ и $F$ так, что* $BE : EA = AF : FD = 2022 : 2023$. *Отрезки $EC$ и $FC$ пересекают диагональ квадрата $BD$ в точках $G$ и $H$ соответственно. Найдите $GH : BD$.*

**Ответ:** $GH : BD = 12271519 : 36814556$.

**Первое решение.** Решим задачу в общем виде: $BE : EA = AF : FD = 2022 : 2023 = m : n$. Пусть $BE = AF = mx$, $EA = FD = nx$, тогда $BC = CD = (m+n)x$, $BD = (m+n)x\sqrt{2}$, $EC^2 = (m^2 + (m+n)^2)x^2$, $FC^2 = (n^2 + (m+n)^2)x^2$. Заметим, что $BD$ — биссектриса в треугольниках $BEC$ и $DFC$, используя известные свойства биссектрисы находим, что $EG = \dfrac{m}{2m+n}EC$, $GC = \dfrac{m+n}{2m+n}EC$, $FH = \dfrac{n}{2n+m}FC$, $HC = \dfrac{m+n}{2n+m}FC$.




По формуле длины биссектрисы находим

$$BG^2 = BE \cdot BC - EG \cdot GC = m(m+n)x^2 - \frac{m(m+n)}{(2m+n)^2}(m^2 + (m+n)^2)x^2 =$$

$$= \frac{m(m+n)x^2}{(2m+n)^2}\left((2m+n)^2 - m^2 - (m+n)^2\right) = \frac{2m^2(m+n)^2x^2}{(2m+n)^2},$$

то есть, $BG = \dfrac{\sqrt{2}m(m+n)x}{2m+n}$. Аналогично находим, что $DH = \dfrac{\sqrt{2}n(m+n)x}{2n+m}$. Теперь все готово для того, чтобы посчитать ответ:

$$\frac{GH}{BD} = \frac{BD - BG - DH}{BD} = 1 - \frac{m}{2m+n} - \frac{n}{2n+m} = \frac{m^2+mn+n^2}{(2m+n)(2n+m)}.$$

Поставляем значения $m = 2022, n = 2023$ и находим $GH : BD = 12271519 : 36814556$.

**Второе решение.** Треугольники $EBG$ и $GCD$ подобны (по двум углам), следовательно, $\dfrac{BG}{GD} = \dfrac{BE}{CD} = \dfrac{2022}{4045}$ и $\dfrac{BG}{BD} = \dfrac{2022}{6067}$. Аналогично, треугольник $HFD$ подобен треугольнику $HBC$, следовательно, $\dfrac{HD}{BH} = \dfrac{FD}{BC} = \dfrac{2023}{4045}$ и $\dfrac{HD}{BD} = \dfrac{2023}{6068}$. Тогда искомое отношение

$$\frac{GH}{BD} = 1 - \frac{BG}{BD} - \frac{HD}{BD} = \frac{12259387}{36778160}.$$

**9.** (40 баллов) *Какое наибольшее количество чисел можно выбрать среди натуральных чисел от 1 до 3000 так, чтобы разность любых двух из них была отлична от 1, 4 и 5?*

**Ответ:** 1000.

**Решение.** Приведем пример. Можно выбрать все числа, кратные 3. Тогда разность любых двух чисел будет также кратна 3, а числа 1, 4 и 5 не кратны 3.

Оценка строится из того соображения, что среди 6 последовательных чисел не может быть выбрано 3 числа. Докажем это утверждение. Возьмем какое-либо выбранное число и пять чисел, следующих за ним. Тогда точно не выбраны второе, пятое и шестое. Остаются третье и четвертое числа, но они не могут быть выбраны оба сразу. Среди пяти и менее последовательных чисел выбрать 3 числа тем более невозможно.

**10.** (40 баллов) *На доске написаны 1000 различных натуральных чисел. Оказалось, что для каждого написанного числа a на доске найдется еще хотя бы одно число b такое,* *что $|a-b|$ — простое число. Докажите, что можно подчеркнуть не более 500 чисел так, чтобы для каждого неподчеркнутого числа $a$ нашлось подчеркнутое число $b$, для которого $|a-b|$ — простое число.*

**Первое решение.** Рассмотрим граф, в котором вершины — числа, ребро проводится, если модуль разности этих чисел — простое число. Будем красить каждую компоненту связности этого графа в два цвета: сначала покрасим любую вершину в красный. Затем покрасим всех её соседей в синий. Затем всех соседей синих, которые ещё не покрашены, в красный. Затем соседей красных в синий. И так далее. Легко видеть, что у каждой красной вершины будет хотя бы один синий сосед, а у каждой синей — хотя бы один красный. В каждой компоненте связности выберем цвет, вершин которого не более половины, и подчеркнем вершины этого цвета. Каждая неподчеркнутая вершина будет соединена хотя бы с одной подчеркнутой.

**Второе решение.** В том же графе выберем наибольшее независимое множество вершин $M$ (т. е. такое множество вершин, что никакие две вершины в нем не соединены ребром). Любая вершина $M$ соединена ребром с вершинй не из $M$, так как по условию степень каждой вершины не менее 1. Любая вершина не из $M$ соединена ребром хотя бы с одной вершиной из $M$, иначе можно было бы добавить ее к $M$ и получить независимое множество еще большего размера. Значит, мы можем подчеркнуть или все вершины $M$, или все вершины не из $M$. Выбирая то из множеств, размер которого не превосходит половины от общего размера, получаем требуемое.

**11.** (40 баллов) *Найдите все пары рациональных чисел $(a, b)$, для которых $\sqrt{a}+\sqrt{b} = \sqrt{2+\sqrt{3}}$.*

**Ответ:** $(0,5; 1,5)$ и $(1,5; 0,5)$.

**Решение.** Возводя равенство в квадрат, получим $a+b+2\sqrt{ab} = 2+\sqrt{3}$. Перенесем $a+b$ в правую часть и снова возведем в квадрат. Получим $4ab = (2-a-b)^2+2(2-a-b)\sqrt{3}+3$. В этом выражении все слагаемые, кроме $2(2-a-b)\sqrt{3}$, рациональны, а значит и это слагаемое должно быть рационально. Что возможно только при $2-a-b=0$. Тогда имеем $a+b=2$, $2\sqrt{ab}=\sqrt{3}$. Такую систему уже несложно решить: $b=2-a$, $ab=a(2-a)=\frac{3}{4}$. Решая квадратное уравнение, находим обе пары решений.

**12.** (40 баллов) *Решите уравнение*

$$2024\left(\frac{1}{n!}-\frac{1}{m!}\right)=\frac{m}{n!}-\frac{1}{m!}$$

*в натуральных числах.*

**Ответ:** $m=n=1$ или $n=2022, m=2023$.

**Решение.** Перепишем уравнение в виде $2024(m!-n!) = m\cdot m!-n!$, $(2024-m)m! = 2023n!$. Далее рассмотрим несколько ситуаций.

Если $m=n$, то $2024-m=2023$, то есть $m=n=1$.

Если $m < n$, то можно записать $n = m+t$, где $t-$ натуральное число. После сокращения, уравнение принимает вид $2024-m = 2023(m+1)\dots(m+t)$. Левая часть не превосходит 2023, когда правая часть не меньше, чем $2023 \cdot 2$, следовательно, решений нет.

Если $m > n$, то $m = n + k$, где $k$ — натуральное число. В этом случае уравнение принимает вид $(2024 - (n + k))(n + 1)(n + 2)\dots(n + k) = 2023$. Заметим, что $2023 = 7 \cdot 17^2$, значит, в левой части последнего уравнения не более четырех сомножителей. Однако, если $k = 3$ (четыре сомножителя) или $k = 2$ (три сомножителя), то в левой части имеется произведение трех или двух последовательных натуральных чисел, чего не может быть. Следовательно, $k = 1$ и уравнение $(2024 - n - 1)(n + 1) = 2023$ имеет единственное натуральное решение $n = 2022$.

**Олимпиада школьников СПбГУ по математике**
**Примеры заданий отборочного этапа**
**2022/2023 учебный год**

**Задания для 8–9 классов**

**1.** (10 баллов) *В стране имеются 4 южных города и 5 северных. Транспортное сообщение связывает каждый южный город с каждым северным городом в обоих направлениях; между другими парами городов транспортного сообщения нет. Путешественник стартует из определенного южного города, собирается объехать все южные города по одному разу и вернуться в точку старта. Сколько существует различных вариантов маршрутов такого путешествия?*

*а)* $4! \times 5!$*;*
*б)* $3! \times 5^4$*;*
*в)* $4^4 \times 4!$*;*
*г)* $3^4 \times 5!$*;*
*д) другой ответ.*

**Ответ:** б).

**Решение.** Так как между южными городами нет прямого транспортного сообщения, то при переезде из одного южного города в другой южный город пересадку придется делать в каком-либо северном городе. Количество способов объехать оставшиеся южные города равно $(4-1)!$; количество способов выбрать северный город для одной пересадки — 5. Чтобы вернуться в исходный южный город, нужно сделать 4 пересадки в северных городах. Отсюда получаем ответ.

**2.** (10 баллов) *По кругу выложены $n$ шариков, белых и красных. Среди любых пяти шариков, лежащих подряд, ровно два — белые. При каком $n$ такое возможно?*

*а) 2021;*
*б) 2022;*
*в) 2023;*
*г) 2024;*
*д) ни один из указанных ответов не является верным.*

**Ответ:** д).

**Решение.** Начнем нумерацию шариков в круге с какого-либо белого шарика. Среди первых пяти шариков, по условию, ровно два белых — первый и $i$-й, где $i$ — это одно из чисел от 2 до 5 включительно. Теперь рассмотрим пятерку шариков, начиная со второго: на местах во второго по пятое белым является только $i$-й шарик; следовательно, чтобы в этой пятерке было ровно два белых, на шестом месте тоже должен стоять белый. Аналогичными рассуждениями получаем, что белые шарики должны стоять на местах с номерами $5k+1$, $k=0,1,\ldots$ и на местах с номерами $5k+i$, $k=0,1,\ldots$. Следовательно, круг с такими условиями на расположение шариков должен состоять из делящегося на 5 количества шариков.

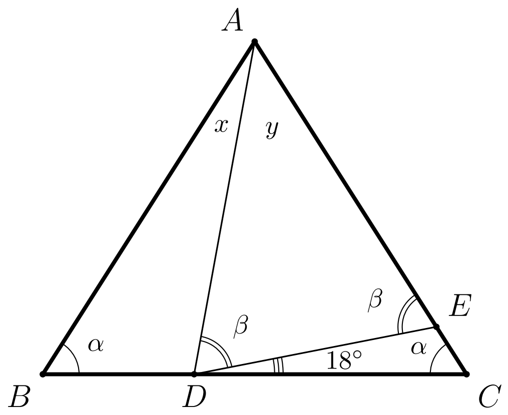
**3.** (20 баллов) *На факультет журналистики университета Сказочного Содружества поступают 4 курицы. На факультете имеются 2 места на дневном отделении и 3 места на вечернем. Считая, что все 4 курицы поступят на факультет, определите количество исходов, в которых на вечернее отделение поступят ровно две курицы.*

**Ответ:** 6.

**Решение.** На факультете имеются суммарно 5 мест, на которые поступают 4 абитуриента. Так как на вечернее отделение поступит ровно две курицы, то другие две поступят на дневное отделение. Количество способов выбрать из 4 абитуриентов двух — тех, которые поступят на дневное отделение, — равно $C_4^2=6$.

**4.** (30 баллов) *На сторонах $BC$ и $AC$ равнобедренного треугольника $ABC$ ($AB=AC$) нашлись точки $D$ и $E$ соответственно такие, что $AE=AD$, $\angle EDC=18^\circ$. Найдите величину угла $\angle BAD$.*

**Ответ:** $36^\circ$.



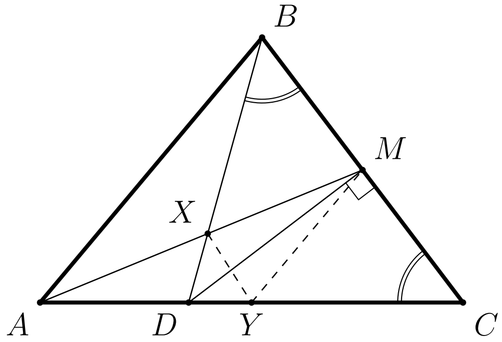

**Решение.** Обозначим углы, как указано на рисунке. Угол $ADC$ является внешним для треугольника $ADB$; отсюда, $\beta+18^\circ=\alpha+x$. Углы $ABC$ и $ACB$ — углы при основании равнобедренного треугольника $ABC$; отсюда $\alpha=\frac{180^\circ-(x+y)}{2}$. Углы $ADC$ и $AED$ — углы при основании равнобедренного треугольника $ADE$; отсюда $\beta=\frac{180^\circ-y}{2}$. Подставим эти выражения в соотношение для угла $ADC$:

$$\frac{180^\circ-y}{2}+18^\circ=\frac{180^\circ-(x+y)}{2}+x.$$

Упрощая выражение, получаем, что $18^\circ=\frac{x}{2}$, то есть $x=36^\circ$.

**5.** (30 баллов) *Точка $M$ — середина стороны $BC$ треугольника $ABC$. На отрезке $AC$ нашлась такая точка $D$, что $DM$ и $BC$ перпендикулярны. Отрезки $AM$ и $BD$ пе-*

*ресекаются в точке $X$. Оказалось, что $AC = 2BX$. Докажите, что $X$ — середина отрезка $AM$.*



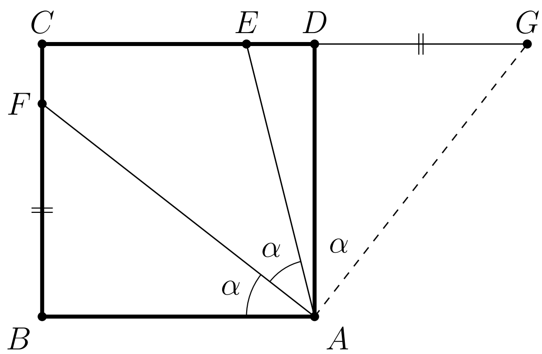

**Решение.** Поскольку $DM \perp BC$ и $BM = MC$, то $DM$ — высота и медиана в треугольнике $DBC$. Следовательно, треугольник $DBC$ равнобедренный и $DB = DC$.

На отрезке $DC$ отметим точку $Y$ так, чтобы $DX = DY$. Треугольник $DXY$ получится равнобедренным с основанием $XY$. Также, по построению, $BX = CY$. Отсюда получаем, что $XY \| BC$.

Поскольку $AC = 2BX = 2CY$ и точка $Y$ лежит на $AC$, то она — середина AC. Поэтому $XY$ — средняя линия треугольника $AMC$, тем самым, $AX = XM$.

**6.** (30 баллов) *Маша отмечает на стороне $CD$ квадрата $ABCD$ точку $E$ и находит длину отрезка $AE$. Миша проводит биссектрису угла $BAE$, отмечает точку $F$ пересечения этой биссектрисы и стороны $BC$ квадрата и находит сумму длин отрезков $BF$ и $ED$. Может ли Маша выбрать точку $E$ так, чтобы найденная ею длина отрезка оказалась больше, чем результат у Миши?*

**Ответ:** Не может, их результаты всегда равны.




**Решение.** На продолжении стороны $CD$ квадрата за точку $D$ отложим отрезок $DG$, равный отрезку $BF$. Сравним длины отрезков $AE$ (результат Маши) и $EG$ (результат Миши). Треугольники $ABF$ и $ADG$ равны по двум катетам. Обозначим

$$\angle BAF = \angle FAE = \angle DAG = \alpha.$$

Выразим углы треугольника $AEG$:

$$\angle EAG = \angle EAD + \angle DAG = 90^\circ - 2\alpha + \alpha = 90^\circ - \alpha,$$

$$\angle EGA = 90^\circ - \angle DAG = 90^\circ - \alpha,$$

следовательно, треугольник $AEG$ — равнобедренный и $AE = EG = BF + ED$.

**7.** (40 баллов) *На доске написаны числа $1^2$, $2^2$, $3^2$, ..., $1000^2$. Двое игроков по очереди стирают по одному из чисел на доске до тех пор, пока на доске не останется всего два числа. Если разность этих двух чисел делится на 13, то выигрывает второй игрок, иначе — выигрывает первый. Как должен действовать второй игрок, чтобы выиграть вне зависимости от действий соперника?*

**Ответ:** Второй игрок должен стирать число, основание которого в сумме со стертым первым игроком дает 1001.

**Решение.** Пусть на доске остались числа $x^2$ и $y^2$. Тогда $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$. Чтобы эта величина делилась на 13, необходимо, чтобы либо $x+y$, либо $x-y$ делилось на 13. Заметим, что $1+1000 = 1001 = 13 \cdot 77$. Следовательно, $n + (1001 - n)$, где $n = 1, \ldots, 500$, также будет делиться на 13. Таким образом, все выписанные на доске числа можно разбить на пары, разность элементов в которых делится на 13. Поэтому если второй игрок будет стирать «парное» число тому, которое стер первый игрок, на доске в итоге останутся два числа, составляющие одну «пару» и их разность будет делиться на 13.

**8.** (40 баллов) *В начале каждого урока физкультуры 30 школьников разбиваются на 3 команды по 10 человек в каждой. Докажите, что найдутся два школьника, которые были в одной команде три урока подряд.*

**Первое решение.** Возьмем всех школьников из какой-либо команды с первого урока и посмотрим, как они распределятся по трем командам на втором уроке. Так как распределяются 10 человек по трем командам, то по принципу Дирихле найдется команда, в которую попадут как минимум 4 человека.

Теперь возьмем этих четверых и посмотрим на их распределение по командам на третьем уроке. Поскольку команд по-прежнему три, то по принципу Дирихле найдется такая команду, в которой будет как минимум двое человек из рассматриваемых четырех. Легко заметить, что эти двое были в одной команде и на первом уроке, и на втором, и оказались в одной команде на третьем.

**Второе решение.** На каждом уроке физкультуры каждый школьник попадает в одну из трех команд; будем обозначать команды цифрами 1, 2 и 3. Поэтому участие в командах на трех уроках подряд для каждого школьника можно описать тройкой чисел $x - y - z$, где каждое из $x$, $y$ и $z$ принимается значений 1, 2 или 3. Таких различных троек существует $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$. Но школьников по условию задачи 30, следовательно, по принципу Дирихле найдутся два школьника, участие которых в командах описывается одинаковыми тройками. Это те школьники, которые были в одной команде в течение трех уроков подряд.

**9.** (40 баллов) *Про действительные числа $a$, $b$ и $c$ известно, что $ab+bc+ca=3$. Какие значения может принимать выражение $\frac{a(b^2+3)}{a+b}+\frac{b(c^2+3)}{b+c}+\frac{c(a^2+3)}{c+a}$?*

**Ответ:** 6.

**Решение.** Рассмотрим первое слагаемое искомого выражения. Воспользуемся условием, что $ab+bc+ca=3$. Тогда

$$b^2+3=b^2+ab+bc+ca=(b+a)(b+c).$$

Следовательно,

$$\frac{a(b^2+3)}{a+b}=\frac{a(b+a)(b+c)}{a+b}=a(b+c).$$

Аналогично для второго и третьего слагаемого получаем

$$\frac{b(c^2+3)}{b+c}=b(c+a), \quad \frac{c(a^2+3)}{c+a}=c(a+b).$$

Таким образом,

$$\frac{a(b^2+3)}{a+b}+\frac{b(c^2+3)}{b+c}+\frac{c(a^2+3)}{c+a}=a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)=$$
$$=ab+ac+bc+ba+ca+cb=2(ab+bc+ca)=2\times 3=6.$$

**Олимпиада школьников СПбГУ по математике**
**Примеры заданий отборочного этапа**
**2022/2023 учебный год**

**Задания для 6–7 классов**

**1.** (15 баллов) *Если срубить все деревья на одном гектаре леса, то можно изготовить 100 кубометров досок. Считая, что все деревья в лесу одинаковые, расположены равномерно, и что из каждого дерева можно получить $0,4\,м^3$ досок, определите площадь в квадратных метрах, на которой произрастает одно дерево. В ответе запишите целую часть полученного числа. (Целой частью числа называется наибольшее целое, не превосходящее данного числа.)*

**Ответ:** 40.

**Решение.** Найдем, сколько деревьев растет на одном гектаре леса: $\frac{100\,\text{м}^3}{0{,}4\,\text{м}^3} = 250$. Вспомним, что 1 га — это $100\text{ м} \times 100\text{ м} = 10\,000\,\text{м}^2$. Таким образом, одно дерево произрастает на $\frac{10\,000\,\text{м}^2}{250} = 40\,\text{м}^2$.

**2.** (15 баллов) *Ведьма Гингема заколдовала настенные часы так, что минутная стрелка движется в правильном направлении пять минут, потом три минуты в противоположном направлении, потом снова пять минут в правильном и так далее. Сколько минут покажет стрелка через 2022 минуты после того, как она указывала ровно на 12 часов перед началом пятиминутного промежутка правильного хода?*

**Ответ:** 28.

**Решение.** За 8 минут волшебного времени стрелка сместится на 2 минуты в направлении по часовой стрелке. Значит, за 2022 минуты она сделает 252 полных восьмиминутных цикла и еще 6 минут. Так как $252 \cdot 2 = 60 \cdot 8 + 24$, то стрелка пройдет 8 полных кругов, еще 24 минуты и потом 5 минут в правильном направлении и одну минуту в противоположном. Итого, $24 + 5 - 1 = 28$.

**3.** (35 баллов) *В стране имеются 4 южных города и 5 северных. Транспортное сообщение связывает каждый южный город с каждым северным городом в обоих направлениях; между другими парами городов транспортного сообщения нет. Билет в одну сторону из любого города $A$ в любой город $B$ стоит $N$ рублей. Билет по тарифу «туда и обратно» по маршруту $A \to B \to A$, стоит $1,6N$ рублей. Путешественник стартует из южного города, собирается объехать все южные города и вернуться в точку старта. Определите минимально возможную сумму, которую путешественник должен будет потратить на билеты.*

**Ответ:** $4 \times 1,6N$ рублей.

**Решение.** Поскольку южные города не соединены транспортным сообщением друг с другом, то для того, чтобы проехать их все и вернуться обратно, потребуется $2 \times 4$

переездов. Любые два переезда стоят в сумме не менее $1,6N$ рублей, поэтому общие затраты составят как минимум $4 \times 1,6N$ рублей.

Приведем пример маршрута, для которого эта сумма реализуется. Пусть путешественник стартует из города $Y_1$, другие южные города посещает в порядке $Y_2$, $Y_3$ и $Y_4$, а все пересадки совершает в северном городе $S_1$. Тогда итоговый маршрут путешествия будет следующим: $Y_1 \to S_1 \to Y_2 \to S_1 \to Y_3 \to S_1 \to Y_4 \to S_1 \to Y_1$. А проезд по этому маршруту можно осуществить по билетам:

$$Y_1 \to S_1 \to Y_1 \text{ — это первый и последний переезд маршрута;}$$

$$S_1 \to Y_2 \to S_1 \text{ — второй и третий переезды;}$$

$$S_1 \to Y_3 \to S_1 \text{ — четвертый и пятый переезды;}$$

$$S_1 \to Y_4 \to S_1 \text{ — шестой и седьмой переезды.}$$

**4.** (35 баллов) *Фокусник Дэвид Копперфильд сообщил школьникам Мише и Маше по секрету одно и то же натуральное число. Маша некоторое количество раз умножила это число на 3, а Миша столько же раз прибавил к этому числу 2500. После того как ребята сравнили результаты своих вычислений оказалось, что у них снова одинаковые числа. Найдите три различных числа, которые Мише и Маше мог сообщить Копперфильд.*

**Ответ:** 1250, 625, 125.

**Решение.** Обозначим $x$ — число Копперфильда, а $k$ — сколько раз Маша умножила число на 3. Тогда имеет место равенство $x + 2500k = x \cdot 3^k$. Откуда $x = \dfrac{2500k}{3^k - 1}$. Подстановкой находим, что подходят $k = 1, 2, 4$, соответствующие значения $x_1 = 1250$, $x_2 = 625$, $x_3 = 125$.

**5.** (50 баллов) *Вася задумал натуральное число, не большее 100. Федя задает Васе вопросы вида «Чему равно неполное частное от деления задуманного числа на $m$?», где $m$ — натуральное число, не меньшее 2, и выбирает его сам Федя. За какое наименьшее количество таких вопросов Федя сможет гарантированно определить задуманное Васей число?*

**Ответ:** 2.

**Решение.** Пусть Вася задумал число $V$. Тогда $V = k \cdot m + d$, где $d$ может принимать значения от 0 до $m - 1$ включительно, и ответом Васи на вопрос Феди будет число $k$. Поскольку по условию $m > 1$, то вариантов для остатка $d$ не меньше двух (исключение — случай, когда Вася задумал число 100 и Федя спрашивает о неполном частном от деления на 100). Следовательно, за один вопрос однозначно определить задуманное число мы можем не всегда.

Покажем, как это сделать за 2 вопроса. Первый вопрос Феди должен быть таким: «Чему равно частное от деления задуманного числа на 2?». Пусть Вася ответил: «Это частное равно $k$». Тогда Вася либо загадал либо число $2k$, либо $2k + 1$. Тогда второй вопрос

Феди должен быть «Чему равно частное от деления задуманного числа на $2k + 1$?». В случае, если Вася задумал число $2k$, ответом будет 0, а если задумал число $2k + 1$ — ответом будет 1.

**6.** (50 баллов) *В чемпионате по футболу участвуют 16 команд. По правилам чемпионата в каждом туре все участники разбиваются на пары, и в каждой паре матч проводится до выигрыша одной из команд. Команда-победительница проходит в следующий тур, а проигравшая команда выбывает из чемпионата. Известно, что более сильная команда всегда выигрывает у более слабой; но если в матче участвуют одинаковые по силе команды, то невозможно заранее предсказать, какая из них победит. Предполагается, что в течение чемпионата сила любой команды остается постоянной. Известно, что значения сил 16-ти участвующих в чемпионате команд — это 15 различных чисел. При любых ли таких значениях сил удастся разбивать в турах участников на пары так, чтобы в любом матче можно было гарантированно предсказать победителя? Если не при любых, то опишите все случаи, когда это сделать невозможно, и поясните почему.*

**Ответ:** Не всегда. Невозможно, если команды с одинаковой силой — самые сильные среди участников.

**Решение.** Заметим, что если в каком-либо туре участвуют только команды разной силы, то можно предсказать победителя в каждом матче этого и всех последующих туров. Это происходит потому что при любом разбиении на пары матчи будут проходить между разными по силе командами, т. е. будет заранее известно, какая из них выиграет. Поскольку у нас силы команд принимают ровно 15 значений, то, по принципу Дирихле, найдутся ровно 2 команды с одинаковой силой — пусть это команды $i$ и $j$. Для удобства будем считать, что значения сил команд $(s_k)$ — это натуральные числа от 1 до 15.

Докажем, что:

а) если $s_i = s_j \leqslant 14$, то мы можем разбивать участников на пары в турах так, чтобы иметь возможность предсказать победителей всех матчей;

б) если $s_i = s_j = 15$, этого сделать нельзя.

а). В первом туре составим одну пару следующим образом: команда $i$ и команда с силой 15; остальных участников разобьем на пары любым образом. Легко заметить, что при таком разбиении на пары во всех матчах этого тура встречаются разные по силе команды, поэтому предсказать победителя можно во всех матчах этого тура. Также очевидно, что команда $i$ проиграет матч первого тура и, следовательно, не пройдет в следующий тур. Поэтому во втором и последующих турах чемпионата будут участвовать команды разной силы и предсказать победителей матчей можно будет при любом разбиении на пары.

б). Поскольку команды $i$ и $j$ — самые сильные, то они будут выигрывать во всех матчах с другими командами. А поскольку количество команд-участников с каждым туром становится в 2 раза меньше, то в конце концов их останется две. Таким образом, команды $i$ и $j$ встретятся, самое позднее, в последнем туре чемпионата, т. е. найдется хотя бы один матч, предсказать победителя которого невозможно.

**7.** (50 баллов) *На доске были записаны два примера на умножение двух натуральных чисел, причем в одном из примеров числа были одинаковыми. Хулиган Петя стер и исходные числа, и почти все цифры чисел–результатов умножения, оставив только по три последние цифры:* $\ldots 689$ *и* $\ldots 759$ *Может ли теперь отличник Миша определить, какие из этих трех цифр принадлежат числу, которое получалось в результате умножения одинаковых чисел?*

**Ответ:** Может — это 689.

**Первое решение.** *Утверждение: хотя бы одна из двух последних цифр точного квадрата натурального числа обязательно четная.* Тогда второе число отпадает. Пример для первого числа: $133 \cdot 133 = 17689$.

Доказательство *утверждения:* для четных чисел утверждение верно, рассмотрим квадраты нечетных чисел. Обозначим предпоследнюю цифру исходного числа за $n$, последнюю — за $m$, где $m \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$, все остальные разряды числа — за $k$. Тогда

$$(\overline{knm})^2 = (100k + 10n + m)^2 = \left[\begin{array}{l} (100k + 10n + 1)^2 = 100 \cdot (\ldots) + 10 \cdot 2n + 1, \\ (100k + 10n + 3)^2 = 100 \cdot (\ldots) + 10 \cdot 6n + 9, \\ (100k + 10n + 5)^2 = 100 \cdot (\ldots) + 10 \cdot 2 + 5, \\ (100k + 10n + 7)^2 = 100 \cdot (\ldots) + 10 \cdot (4n + 4) + 9, \\ (100k + 10n + 9)^2 = 100 \cdot (\ldots) + 10 \cdot (8n + 8) + 1. \end{array}\right.$$

Во всех случаях предпоследняя цифра квадрата четная.

**Второе решение.** Будем основываться на следующем *утверждении: точный квадрат натурального числа либо делится на 4, либо при делении на 8 дает остаток 1.* Действительно, если исходное число четное, то его квадрат делится на 4, а если исходное число нечетное, то его можно представить в виде $8q + r$, где $r \in \{1, 3, 5, 7\}$. Тогда $(8q + r)^2 = 8 \cdot (\ldots) + 1$. Имея перед глазами последние три цифры числа, можно проверить выполнение признака делимости на 4 или найти остаток от деления числа на 8.