Справочный материал

а) Интегрирование:

Пусть функция $f(x)$ определена и ограничена на отрезке $x \in [a, b]$. Отрезок разбит на N $(N \gg 1)$ малых отрезков шириной Δx. Тогда при $\Delta x \to 0$

$$\sum_{k=1}^{N} f(x_k)\Delta x = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

где функция $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$:

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x).$$

Пример: $f(x) = x^2$, $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$

$f(x) = \sin(x)$, $F(x) = -\cos(x) + C$

б) примеры решения дифференциальных уравнений:

Дифференциальное уравнение вида

$$\frac{df}{dx} = -kf$$

имеет решение

$$f(x) = Ae^{-kx}.$$

Дифференциальное уравнение вида

$$\frac{d^2f}{dx^2} = -k^2 f$$

Имеет решение

$$f(x) = Acos(kx) + Bsin(kx).$$

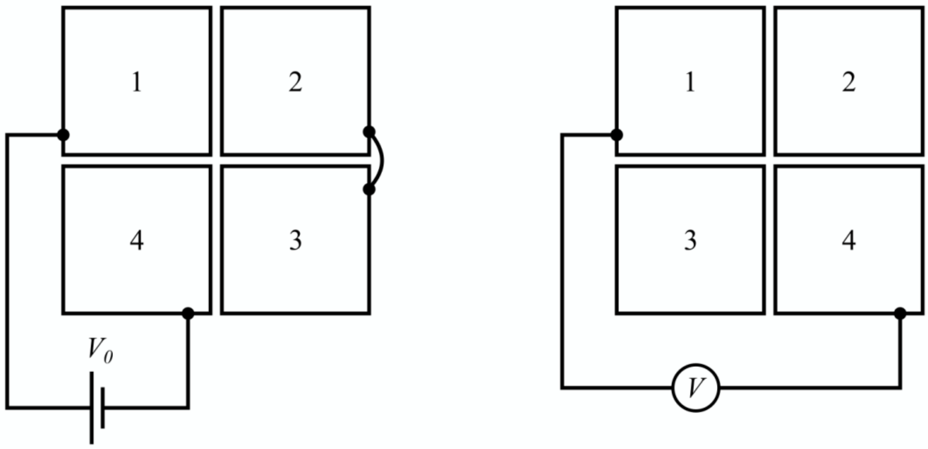
в) угловое ускорение:

Угловое ускорение $\vec{\beta}$ связано с моментом приложенных сил соотношением: $I\vec{\beta} = \vec{M}$, где I – момент инерции тела относительно оси вращения, $\vec{M}$ – суммарный момент внешних сил относительно этой же оси.

Пример: для круглого колеса, вращающегося вокруг своей оси $I = \frac{mR^2}{2}$.

Задача 1

На столе находились четыре незаряженных металлических куба. Их выложили в фигуру, показанную на рисунке слева, соединили кубы №2 и №3 проводящей перемычкой и подключили источник напряжения $\boldsymbol{V_0}$ между кубами №1 и №4. После этого схему начали менять. Сначала отсоединили источник напряжения, потом убрали перемычку между кубами №2 и №3, затем кубы №3 и №4 поменяли местами и, наконец, к кубам №1 и №4 подключили вольтметр. Итоговое состояние системы показано на рисунке справа. Какое напряжение покажет вольтметр? Считайте, что зазор между кубами всегда один и тот же, и что он много меньше стороны куба.



Задача 2

Для изготовки термометра в тонкий стеклянный капилляр высотой $\boldsymbol{H}$ и сечением $\boldsymbol{S}$ налили ртуть общей массой $\boldsymbol{M_0}$, предварительно откачав из него весь воздух, герметично закрыли и нанесли линейную шкалу на основе данных о термическом расширении ртути. Определите, какую температуру покажет градусник, если внести его в среду с температурой $\boldsymbol{T_c}$? Зависимость плотности ртути от температуры дается формулой:

$$\rho_{ж}(T) = \frac{\rho_0}{1 + \beta(T - T_0)}$$

где T_0 – температура замерзания ртути. Зависимость плотности насыщенных паров ртути от температуры, а также все величины и коэффициенты, перечисленные выше, считайте известными. Столбик ртути не достигает конца капилляра. Влиянием поверхностного натяжения пренебречь.

Задача 3

Мокрое колесо радиусом R, вращающееся с частотой ω_0, держат навесу. В некоторый момент колесо поставили на поверхность, и оно начало двигаться вдоль нее. Спустя время $\boldsymbol{t}$ колесо продолжало движение, вращаясь так, что с каждой точки его поверхности срывались капли с начальной скоростью, равной скорости этой точки. Определите, чему равна максимальная высота, которой достигли капли, оторвавшиеся от поверхности колеса в момент времени $\boldsymbol{t}$. Коэффициент трения скольжения колеса о поверхность – μ. Трением качения пренебрегите.

Задача 4

Высокий теплоизолированный герметичный цилиндрический сосуд с площадью основания $\boldsymbol{S}$, закрытый сверху невесомым поршнем, способным двигаться без трения, находится в поле тяжести планеты с атмосферой, состоящей из аргона (молярная масса $\boldsymbol{M_{Ar}}$). Температура атмосферы и ускорение свободного падения с высотой меняются незначительно. Внутри сосуда находится $\boldsymbol{\nu}$ моль аргона при той же температуре, что и снаружи.

1) Определите, на какой высоте находится поршень.
2) Газ в сосуде начинают медленно остужать. Определите, до какой температуры остудили газ, если поршень опустился до высоты $\boldsymbol{H}$.

Атмосферное давление на поверхности планеты, ускорение свободного падения и температуру атмосферы считайте известными.

Задача 5

Невесомая и нерастяжимая тонкая нить плотно виток к витку намотана на цилиндр радиуса $\boldsymbol{R}$ в $\boldsymbol{N}$ оборотов как показано на рисунке. К нижнему её концу привязан груз массой $\boldsymbol{m}$. С какой силой надо тянуть свободный конец нити вверх, чтобы поднять груз, если коэффициент трения между нитью и поверхностью цилиндра составляет $\boldsymbol{\mu}$? Цилиндр закреплён горизонтально и не вращается.