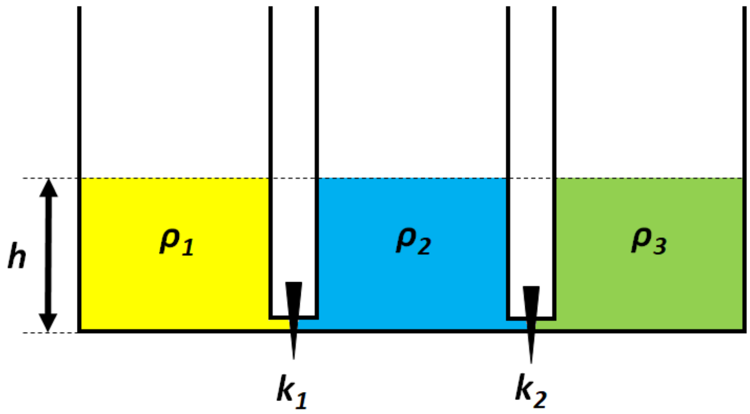
Задания заключительного этапа Олимпиады школьников СПбГУ по физике 2022-2023 гг.

Участникам заключительного этапа Олимпиады по физике предлагался вариант, состоявший из 5 задач. Каждая из задач составлялась в нескольких вариациях. Предлагаемый участнику вариант выбирался системой проведения Олимпиады случайным образом. При проверке работ проверялась корректность ход решения задачи и итогового ответа. Часть задач предлагались к решению участникам разных классов. Ниже в обозначениях задач указывается, участникам из каких классов они предназначались.

8 класс, задача 1, Вариант 1.

Три одинаковых сосуда соединены тонкими трубками, перекрытыми кранами $\mathbf{k_1}$ и $\mathbf{k_2}$. В сосуды налиты жидкости с плотностями $\boldsymbol{\rho_1>\rho_3>\rho_2}$. Начальная высота столбиков жидкости в сосудах одинакова и равна **h**. Сначала открывают кран $\mathbf{k_2}$, дожидаются, когда столбики жидкостей в сосудах придут в равновесие, после чего закрывают. Затем открывают кран $\mathbf{k_1}$, дожидаются равновесия, и закрывают. В результате в среднем сосуде образовался столбик из трех жидкостей, причем толщина нижнего слоя оказалась в **q = 10** раз меньше начальной высоты **h**, а среднего – в **p = 9** раз меньше **h**. Найдите отношение плотностей $\boldsymbol{\rho_1 : \rho_3}$ и $\boldsymbol{\rho_3 : \rho_2}$. Жидкости не смешиваются.



Решение.

Открываем кран **k2**. Поскольку по условию $\boldsymbol{\rho_3>\rho_2}$**,** жидкость из правого сосуда будет затекать в центральный. В равновесии в центральном сосуде будет два слоя жидкости: верхний слой — изначально находившаяся в сосуде жидкость 2 высотой **h**, нижний слой — жидкость 3 высотой h/p (по условию).

В правом сосуде останется столбик высотой $h(1-1/p)$.

Условие равновесия жидкости в центральном и правом сосудах имеет вид

$$\rho_2 gh + \rho_3 gh/p = \rho_3 gh(1-1/p)$$

Отсюда

$$\frac{\rho_3}{\rho_2} = \frac{p}{p-2} = \frac{9}{7}.$$

Закрываем кран **k2**, открываем кран **k1**. По условию жидкость из левого сосуда затекает в центральный, и в равновесии в нем получается три слоя жидкости. Верхний слой - жидкость 2 высотой h, средний слой - жидкость 3 высотой h/p, нижний слой - жидкость 1 высотой h/q (по условию).

В левом сосуде останется столбик высотой $h(1-1/q)$.

Условие равновесия жидкости в центральном и левом сосудах имеет вид

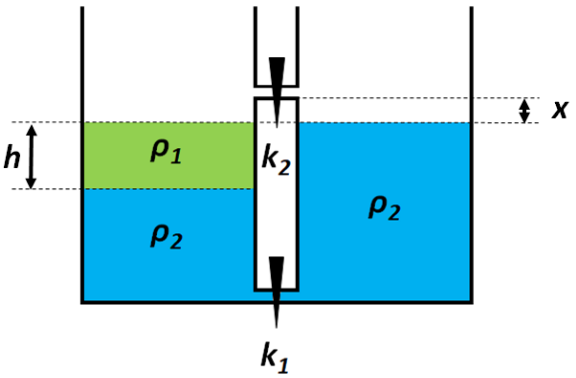
$$\rho_2 gh + \rho_3 gh/p + \rho_1 gh/q = \rho_1 gh(1-1/q)$$

Делим все на ρ_3, находим ρ_1/ρ_3:

$$\frac{\rho_1}{\rho_3} = \frac{q(p-1)}{p(q-2)} = \frac{10}{9}$$

Ответ: $\boldsymbol{\rho_1 : \rho_3 = 10:9}$ и $\boldsymbol{\rho_3 : \rho_2 = 9:7}$.

8 класс, задача 1, Вариант 2.



Экспериментальная установка, изображенная на рисунке, предназначена для измерения плотности масла. Она представляет собой два одинаковых сосуда, соединенных двумя тонкими трубочками: у самого дна и посередине. В каждой трубочке установлены краны (**k**$_1$ и **k**$_2$), изначально они закрыты. В левом сосуде находятся несмешивающиеся вода (плотность $\boldsymbol{\rho_2 = 1}$ **г/мл**) и масло с неизвестной плотностью $\boldsymbol{\rho_1}$, в правом только вода. Поверхности жидкостей в сосудах находятся на одном уровне, причем ниже верхней трубочки.

Студентам предлагалось определить плотность масла $\boldsymbol{\rho_1}$, выполнив следующие действия:

1) Измерить высоту столба масла $\boldsymbol{h}$ и расстояние $\boldsymbol{x}$ от поверхности жидкости в правом сосуде до верхней трубочки.
2) Открыть кран **k**$_1$ и дождаться равновесия.
3) Закрыть кран **k**$_1$, открыть **k**$_2$ и дождаться равновесия.
4) Закрыть **k**$_2$, вновь открыть **k**$_1$, дождаться равновесия.
5) Измерить расстояние $\boldsymbol{y}$ от верхней трубочки до поверхности жидкости в правом сосуде.
6) По результатам измерений $\boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ вычислить плотность масла.

Один студент поленился делать эксперимент, измерил только $\boldsymbol{h = 15}$ **см** и $\boldsymbol{x = 1}$ **см** и пошел домой. Накануне сдачи отчета он «подогнал» y так, чтобы плотность масла получилась $\boldsymbol{\rho_1 = 0,8}$ **г/мл**. Какое значение $\boldsymbol{y}$ он взял?

Решение.

Поскольку плотность масла меньше плотности воды, а изначально поверхности жидкости на одной высоте, после того, как открыли К1, немного воды перетечет в левый сосуд:

$$h\rho_1 + (a+b)\rho_2 = (h+a-b)\rho_2$$

$$b = h\left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) = 3 \text{ см} > x$$

Когда закроют К1 и откроют К2, столб масла высотой $b - x$ перетечет в правый сосуд. Давление жидкости в правом сосуде станет больше давления в левом. Поэтому, когда закроют К2 и откроют К1, вода потечет из правого в левый сосуд.

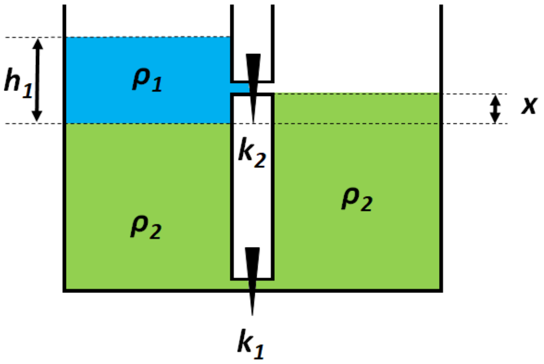
$$(h-b+x)\rho_1 + (a+b+c)\rho_2 = (h+a-b-c)\rho_2 + (b-x)\rho_1$$

Вот столько ее перетечет: $c = (b-x)\frac{\rho_1}{\rho_2}$

Высота столба жидкости в правом сосуде стала $h+a+b-x-c$, а изначально была $h+a$. Значит,

$$y = x + h + a - (h+a+b-x-c) = 2x + c - b = \ldots = x\left(2 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) + h\frac{\rho_1}{2\rho_2}\left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) = 2{,}4 \text{ см}$$

8 класс, задача 1, Вариант 3.



Два одинаковых сосуда соединены двумя тонкими трубочками: у самого дна и посередине. В каждой трубочке установлены краны, изначально они закрыты. В левом сосуде находятся несмешивающиеся жидкости плотностью $\rho_2 > \rho_1$, в правом только жидкость плотностью ρ_2. Поверхность жидкости плотностью ρ_2 в правом сосуде находится на уровне верхней трубочки, а в левом — на $x = 2$ см ниже. Высота столба жидкости ρ_1равна $h_1 = 16$ см.

С установкой производят следующие манипуляции. Открывают кран К2, ждут равновесия, закрывают К2. Открывают кран К1, ждут равновесия, закрывают К1. И, снова, открывают кран К2 и ждут равновесия. В результате оказалось, что высота столба жидкости ρ_1 в левом сосуде в $q = 1{,}25$ раза больше, чем в правом. Найти отношение плотностей ρ_1/ρ_2.

Решение.

Пусть h_2 — высота столба жидкости в правом сосуде.

Открыли К2. Часть жидкости ρ_1 перетечет в правый сосуд, так что поверхности жидкости в сосудах будут на одном уровне. Высота столба этой жидкости в левом сосуде будет $(h_1 + x)/2$, в правом $(h_1 - x)/2$.

Давление у дна в левом сосуде равно $p_1 = \ g\rho_2(h_2 - x) + g\rho_1(h_1 + x)/2$, в правом $p_2 = \ g\rho_2 h_2 + g\rho_1(h_1 - x)/2$. Поскольку $\rho_2 > \rho_1$, то $p_1 < p_2$.

Закрыли К2. Открыли К1. Жидкость будет перетекать из правого сосуда в левый, пока не установится равновесие:

$$\rho_2(h_2 - x + a) + \frac{\rho_1(h_1 + x)}{2} = \ \rho_2(h_2 - a) + \frac{\rho_1(h_1 - x)}{2}$$

Отсюда

$$a = \frac{x}{2}\left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)$$

В левом сосуде уровень жидкости ρ_1 выше верхней трубочки на $\frac{h_1 - x}{2} + a = \frac{1}{2}\left(h_1 - \ x\frac{\rho_1}{\rho_2}\right) > 0$, в правой $\frac{h_1 - x}{2} - a = \frac{h}{2} - \ \frac{x}{2}\left(2 - \ \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) > 0.$

Закрыли К1, Открыли К2. Часть жидкости ρ_1 перетечет в правый сосуд, так что уровни жидкости в сосудах сравняются. Понятно, что слева уровень понизится, а справа повысится на a.

Высота столба жидкости ρ_1 слева равна $\frac{h_1 + x}{2} - a = \frac{h_1}{2} + \frac{x\rho_1}{2\rho_2}$, а справа $\frac{h_1 - x}{2} + a = \frac{h_1}{2} - \frac{x\rho_1}{2\rho_2}$.

Известно, что

$$\frac{h_1}{2} + \frac{x\rho_1}{2\rho_2} = q\ \left(\frac{h_1}{2} - \frac{x\rho_1}{2\rho_2}\right)$$

Отсюда

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{h_1(q - 1)}{x(q + 1)} = \frac{8}{9}$$

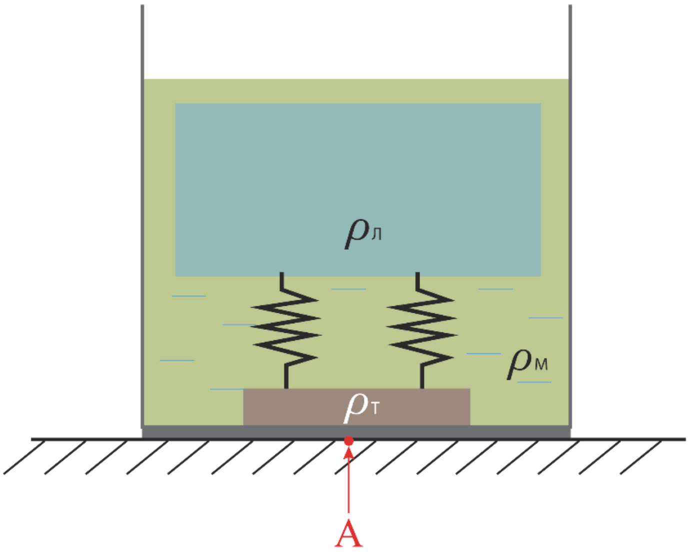
8 класс, задача 2, **Вариант 1.**

На дно пустого цилиндрического сосуда поместили конструкцию из легкого тела, скрепленного двумя невесомыми упругими пружинками с бруском водяного льда. Затем в сосуд наливают масло так, что оно полностью покрывает лед (см. рисунок) и может просачиваться между телом и дном сосуда. Плотности соотносятся между собой как $\rho_T < \rho_\text{М} < \rho_Л$.

В начальный момент времени система находится при температуре 0^o.

1) Найдите плотности ρ_T и ρ_M, если известны объемы тела $V_T = 0.0012$ м^3, льда $V_Л = 0.01$ м^3 и масла $V_\text{М} = 0.02$ м^3; плотность льда $\rho_Л = 900$ кг/м^3; отношение толщины слоя масла в начальном состоянии к толщине слоя масла после того, как лед полностью растаял $\frac{H}{H'} = 1.5$. Кроме того, известно, что в начальный момент времени тело давит на дно сосуда с силой $P = 5$ Н.
2) Найдите, как изменится давление сосуда на стол в точке А после того, как лед полностью растает.

Считать, что в конечном состоянии все жидкости в системе разделяются на несмешивающиеся однородные слои.



Решение:

1) Из соотношения плотностей мы видим, что лед тонет в масле и прижимает легкое тело ко дну сосуда. Упругие пружинки не дают ледяному бруску полностью опуститься на тело, а телу – всплыть. Введем неизвестный коэффициент жесткости пружинок k и изменение их длины Δx.

В начальный момент времени условие равновесия тела:

$$\rho_T V_T g + 2k\Delta x - \rho_M V_T g = N \quad (1)$$

где $N = P$ – сила реакции опоры, действующая на тело со стороны дна.

Условие равновесия бруска льда:

$$\rho_Л V_Л g - 2k\Delta x - \rho_M V_Л g = 0 \quad (2)$$

После того, как лед полностью растает, вода опускается на дно (т.к. $\rho_\text{М} < \rho_Л$ и, следовательно, $\rho_\text{М} < \rho_\text{В} = 1000$ кг/м^3), а тело всплывает и плавает на поверхности масла.

$$\rho_T V_T g - \rho_M V_T{}' g = 0 \quad (3)$$

Где $V_T{}'$ – объем масла, вытесненный телом.

$$V_T{}' = \frac{\rho_T}{\rho_M} V_T \quad (4)$$

Теперь воспользуемся условием $\frac{H}{H'} = \alpha$. Обозначим площадь основания сосуда за S, тогда в начальный момент времени справедливо условие:

$$SH = V_{\text{М}} + V_T + V_{\text{Л}} \quad (5)$$

А после таяния льда:

$$SH' = V_{\text{М}} + V_T{}' = V_{\text{М}} + \frac{\rho_T}{\rho_M} V_T \quad (6)$$

Разделим (5) на (6):

$$\alpha = \frac{V_{\text{М}} + V_T + V_{\text{Л}}}{V_{\text{М}} + \frac{\rho_T}{\rho_M} V_T}$$

Теперь выразим плотность тела:

$$\rho_T = \frac{V_{\text{М}}(1-\alpha) + V_T + V_{\text{Л}}}{\alpha V_T} \rho_M \quad (*)$$

Сложим уравнения (1) и (2):

$$(\rho_T - \rho_M) V_T g + (\rho_{\text{Л}} - \rho_M) V_{\text{Л}} g = P$$

Подставим ρ_T, обозначив для краткости $\rho_T = \beta \rho_M$ (выражение $(*)$):

$$(\beta \rho_M - \rho_M) V_T g + (\rho_{\text{Л}} - \rho_M) V_{\text{Л}} g = P$$
$$\big((\beta - 1) V_T - V_{\text{Л}}\big) g \rho_M = P - \rho_{\text{Л}} V_{\text{Л}} g$$

Выразим ρ_M:

$$\rho_M = \frac{P - \rho_{\text{Л}} V_{\text{Л}} g}{\big((\beta - 1) V_T - V_{\text{Л}}\big) g} \quad (**)$$

Подставим численные значения:

$$\beta = \frac{V_{\text{М}}(1-\alpha) + V_T + V_{\text{Л}}}{\alpha V_T} \approx 0.667$$
$$\rho_M = \frac{P - \rho_{\text{Л}} V_{\text{Л}} g}{\big((\beta - 1) V_T - V_{\text{Л}}\big) g} \approx 817 \text{ кг/м}^3$$
$$\rho_T = 545 \text{ кг/м}^3$$

2) Давление в точке А равно весу сосуда Mg ($M = m_{\text{с}} + m_{\text{Л}} + m_{\text{Т}} + m_M$), деленному на площадь дна сосуда. Масса сосуда, масла, тела и воды/льда не меняется, поэтому и давление не меняется.

8 класс, задача 2, Вариант 2

В сосуд, заполненный маслом, опустили конструкцию из тела, скрепленного невесомой упругой пружинкой с бруском водяного льда объема $V_{\text{Л}} = 5\,000 \text{ см}^3$. Масло полностью покрывает лед (см. рисунок) и может просачиваться между телом и дном сосуда.

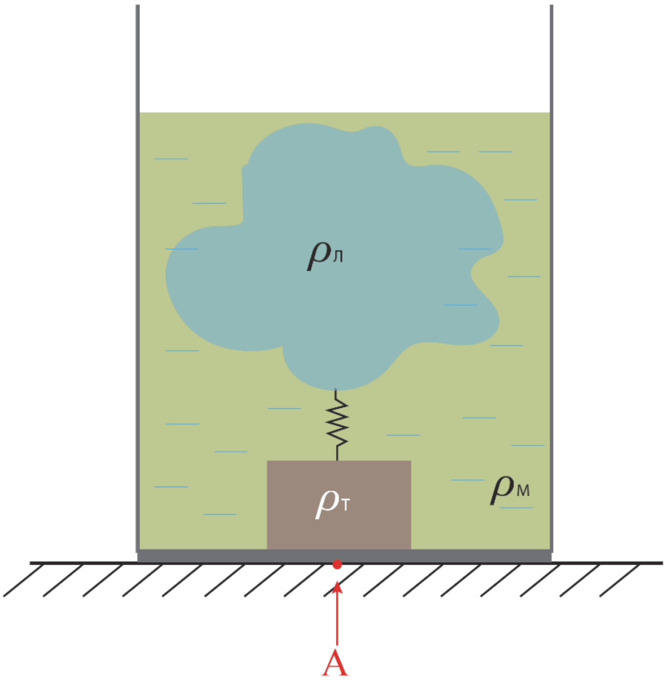
В начальный момент времени система находится при температуре 0^o. Плотность льда $\rho_{\text{Л}} = 900 \text{ кг/м}^3$, плотность воды $\rho_{\text{В}} = 1000 \text{ кг/м}^3$, плотность масла $\rho_M = 920 \text{ кг/м}^3$.

1) Найдите, какой объем тела будет погружен в воду после того, как весь лед растает. Известно, что $\rho_M < \rho_T < \rho_B$, и что сила реакции опоры, действующая на тело в

начальный момент времени, $N = 0.5$ Н, а тело не выступает над поверхностью жидкости.

2) Найдите, как изменится давление сосуда на стол в точке А после того, как лед полностью растает.

Считать, что в конечном состоянии все жидкости в системе разделяются на несмешивающиеся однородные слои.



Решение:

1) Из соотношения плотностей мы видим, что тело тонет в масле и тянет за пружинку лед, не давая ему всплыть. Введем неизвестный коэффициент жесткости пружины k и изменение ее длины Δx.

В начальный момент времени условие равновесия тела:

$$\rho_T V_T g - k\Delta x - \rho_M V_T g = N \quad (1)$$

Условие равновесия бруска льда:

$$\rho_Л V_Л g + k\Delta x - \rho_M V_Л g = 0 \quad (2)$$

После того, как лед полностью растает, вода опускается на дно ($\rho_{\text{М}} < \rho_{\text{В}} = 1000\ \text{кг/м}^3$), а тело всплывает в воде ($\rho_M < \rho_T < \rho_B$) и плавает на границе раздела воды и масла:

$$\rho_T V_T g - \rho_M V_T{}' g - \rho_{\text{В}} V_T{}'' g = 0 \quad (3)$$

Где $V_T{}'$ – объем масла, вытесненный телом, а $V_T{}''$ - объем воды, вытесненный телом. Справедливо соотношение

$$V_T{}' + V_T{}'' = V_T \quad (4)$$

$$=> \rho_T V_T - \rho_B V_T{}'' - \rho_M (V_T - V_T{}'') = 0$$

Выразим объем тела, погруженный в воду:

$$V_T{}'' = \frac{(\rho_T - \rho_M) V_T}{(\rho_B - \rho_M)} \quad (*)$$

Сложим уравнения (1) и (2):

$$(\rho_T-\rho_M)V_Tg+(\rho_Л-\rho_M)V_Лg=N\ \ (**)$$

Уравнения (*) и (**) содержат три неизвестные величины ρ_T, V_T и V_T'', но можно заметить, что из второго уравнения можно полностью выразить числитель правой части в (*), и таким образом решить его:

$$V_T''=\frac{N+(\rho_M-\rho_Л)V_Лg}{(\rho_B-\rho_M)g}$$

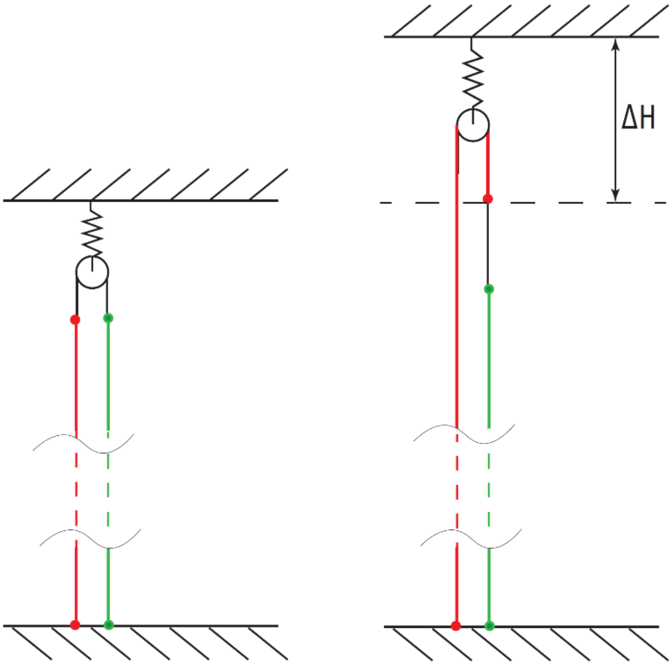
Подставим числа:

$$V_T''=0.00188\ \text{м}^3$$

2) Давление в точке А равно весу сосуда Mg ($M=m_с+m_Л+m_Т+m_M$), деленному на площадь дна сосуда. Масса сосуда, масла, тела и воды/льда не меняется, поэтому и давление не меняется.

8 класс, задача 3

Система состоит из массивного блока, подвешенного на пружине жесткостью k_1, и двух невесомых упругих жгутов с жесткостями k_2 и k_3 ($k_2 < k_3$), связанных невесомой нерастяжимой нитью. Связка нить-жгуты перекинута через блок и может скользить по нему без трения. Концы пружины и жгутов прочно прикреплены к двум параллельным горизонтальным плоскостям (см. Рисунок). В начальный момент времени жгуты не растянуты. Плоскости развели, увеличив расстояние между ними на ΔH. Найдите, на сколько удлинилась пружина и жгуты по сравнению с начальным состоянием. Геометрическими размерами блока можно пренебречь.



Решение:

Обозначим изменения длин как Δx_1 (пружина) и Δx_2 и Δx_3 (жгуты).

По условию блок массивный, введем его массу M. Тогда в начальный момент времени на него действуют силы:

$$k_1 \Delta x_0 - Mg = 0 \quad (1)$$

Где Δx_0 – удлинение пружины в начальный момент времени.

После того, как плоскости развели, условие равновесия блока принимает вид:

$$k_1(\Delta x_0 + \Delta x_1) - Mg - 2k_2 \Delta x_2 = 0 \quad (2)$$

Объединив (1) и (2), получаем:

$$k_1 \Delta x_1 - 2k_2 \Delta x_2 = 0 \quad (3)$$

Воспользуемся условием отсутствия трения и равенством силы натяжения по всей длине (жгуты+нить):

$$k_2 \Delta x_2 = k_3 \Delta x_3 \quad (4)$$

Теперь рассмотрим, как изменилось расстояние между плоскостями и воспользуемся условием, что изменение равно ΔH:

$$\Delta H = \Delta x_1 + \frac{\Delta x_2 + \Delta x_3}{2} \quad (5)$$

Решая систему из трех уравнений (3)-(5), найдем искомые удлинения:

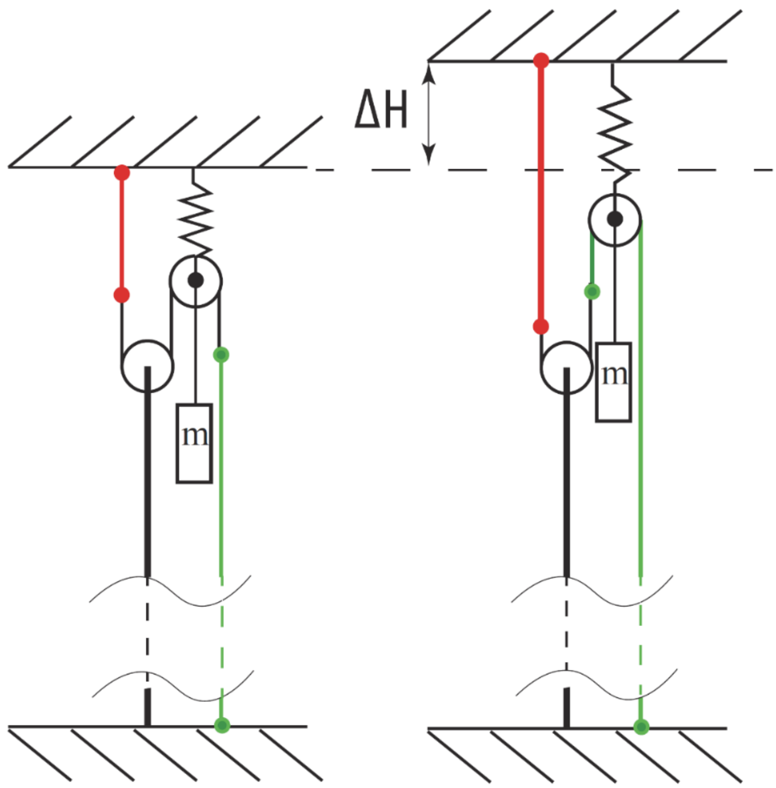
$$\Delta x_1 = \frac{4\Delta H}{\left(4 + \frac{k_1}{k_3} + \frac{k_1}{k_2}\right)}$$

$$\Delta x_2 = \frac{2\Delta H}{\left(4\frac{k_2}{k_1} + \frac{k_2}{k_3} + 1\right)}$$

$$\Delta x_3 = \frac{2\Delta H}{\left(4\frac{k_3}{k_1} + \frac{k_3}{k_2} + 1\right)}$$

9 класс, задача 1, Вариант 1.

Система состоит из двух невесомых блоков: нижний закреплен на нерастяжимом стержне, а верхний – на пружине жесткостью k_1, к нему на невесомой нерастяжимой нити подвешен груз массой m. Через блоки перекинуты два невесомых упругих жгута с жесткостями k_2 и k_3 $(k_2 > k_3)$, связанные невесомой нерастяжимой нитью. Связка нить-жгуты может скользить по блокам без трения. Концы пружины и жгутов прочно прикреплены к двум параллельным горизонтальным плоскостям (см. Рисунок). В начальный момент времени жгуты не растянуты. Плоскости развели, увеличив расстояние между ними на ΔH. Найдите, на сколько удлинилась пружина и жгуты по сравнению с начальным состоянием. Геометрическими размерами блоков можно пренебречь.



Решение:

Обозначим изменения длины как Δx_1 (пружина) и Δx_2 и Δx_3 (жгуты). Запишем условие равновесия верхнего блока в начальный момент времени:

$$k_1 \Delta x_0 - mg = 0 \quad (1)$$

Где Δx_0 – удлинение пружины в начальный момент времени.

После того, как плоскости развели, условие равновесия верхнего блока принимает вид:

$$k_1(\Delta x_0 + \Delta x_1) - mg - 2k_3 \Delta x_3 = 0 \quad (2)$$

Объединив (1) и (2), получаем:

$$k_1 \Delta x_1 - 2k_3 \Delta x_3 = 0 \quad (3)$$

Воспользуемся условием отсутствия трения между жгутом и блоком:

$$k_2 \Delta x_2 = k_3 \Delta x_3 \quad (4)$$

Теперь рассмотрим, как изменилось расстояние между плоскостями и воспользуемся условием, что изменение равно ΔH. По условию задачи размерами блоков можно пренебречь. Тогда расстояние между полом и потолком складывается из длины стержня L_0, расстояния между блоками и длины пружины y:

$$H = x_0 + \Delta x_0 + L_0 + y \ (5)$$

После раздвижения:

$$H + \Delta H = x_0 + \Delta x_0 + \Delta x_1 + L_0 + y + \Delta y \ (6)$$

Вычитая (5) из (6), получаем:

$$\Delta H = \Delta x_1 + \Delta y \ (7)$$

С другой стороны, длина системы нить+жгуты изначально:

$$L_x = L + 3y + x_0 + \Delta x_0 \ (8)$$

После раздвижения, с учетом растяжений жгутов Δx_2 и Δx_3 имеем:

$$L_x + \Delta x_2 + \Delta x_3 = L + 3y + 3\Delta y + x_0 + \Delta x_0 + \Delta x_1 \ (9)$$

Вычитая (8) из (9), получаем:

$$\Delta x_2 + \Delta x_3 = 3\Delta y + \Delta x_1 => \frac{\Delta x_2 + \Delta x_3 - \Delta x_1}{3} = \Delta y (10)$$

И для изменения расстояния имеем соотношение:

$$\Delta H = \Delta x_1 + \frac{\Delta x_2 + \Delta x_3 - \Delta x_1}{3} \quad (11)$$

Итого имеем систему из трех уравнений:

$$\begin{cases} k_1 \Delta x_1 - 2k_3 \Delta x_3 = 0 \\ k_2 \Delta x_2 = k_3 \Delta x_3 \\ \Delta H = \Delta x_1 + \dfrac{\Delta x_2 + \Delta x_3 - \Delta x_1}{3} \end{cases}$$

Решая систему, найдем искомые удлинения:

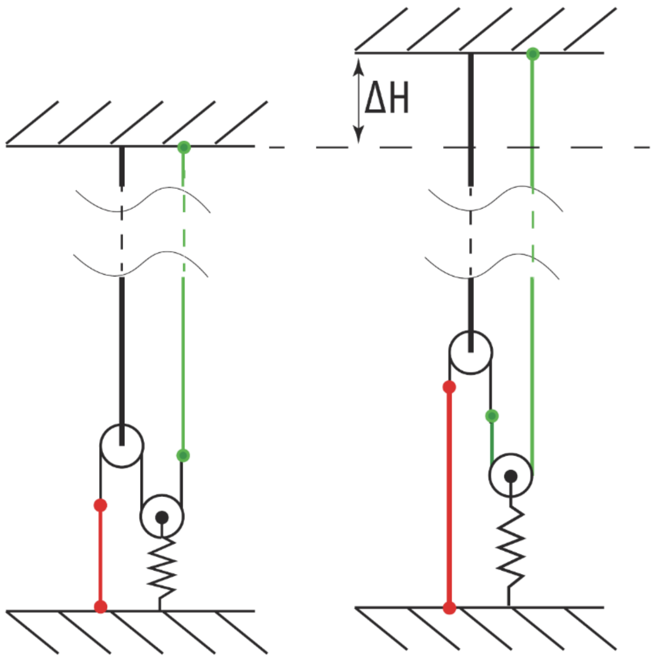
$$\Delta x_1 = \frac{6\Delta H}{\left(4 + \frac{k_1}{k_3} + \frac{k_1}{k_2}\right)}$$

$$\Delta x_2 = \frac{3\Delta H}{\left(4\frac{k_2}{k_1} + \frac{k_2}{k_3} + 1\right)}$$

$$\Delta x_3 = \frac{3\Delta H}{\left(4\frac{k_3}{k_1} + \frac{k_3}{k_2} + 1\right)}$$

9 класс, задача 1, Вариант 2.

Система состоит из двух массивных блоков: верхний закреплен на легком нерастяжимом стержне, а нижний – на невесомой пружине жесткостью k_1. Через блоки перекинуты два невесомых упругих жгута с жесткостями k_2 и k_3 ($k_2 > k_3$), связанные невесомой нерастяжимой нитью. Связка нить-жгуты может скользить по блокам без трения. Концы пружины и жгутов прочно прикреплены к двум параллельным горизонтальным плоскостям (см. Рисунок). В начальный момент времени жгуты не растянуты. Плоскости развели, увеличив расстояние между ними на ΔH. Найдите, на сколько удлинилась пружина и жгуты по сравнению с начальным состоянием. Геометрическими размерами блоков можно пренебречь.



Решение:

Обозначим изменения длины как Δx_1 (пружина) и Δx_2 и Δx_3 (жгуты).

По условию блоки массивные, введем их массу M. Тогда в начальный момент времени на нижний блок действуют силы:

$$k_1 \Delta x_0 - Mg = 0 \quad (1)$$

Где Δx_0 – деформация пружины в начальный момент времени.

После того, как плоскости развели, условие равновесия нижнего блока принимает вид:

$$k_1(-\Delta x_0 + \Delta x_1) + Mg - 2k_3 \Delta x_3 = 0 \quad (2)$$

Объединив (1) и (2), получаем:

$$k_1 \Delta x_1 - 2k_3 \Delta x_3 = 0 \quad (3)$$

Воспользуемся условием отсутствия трения между жгутом и блоком:

$$k_2 \Delta x_2 = k_3 \Delta x_3 \quad (4)$$

Теперь рассмотрим, как изменилось расстояние между плоскостями и воспользуемся условием, что изменение равно ΔH. По условию задачи размерами блоков можно пренебречь. Тогда расстояние между полом и потолком складывается из длины стержня L_0, расстояния между блоками и длины пружины y:

$$H = x_0 - \Delta x_0 + L_0 + y \ (5)$$

После раздвижения:

$$H + \Delta H = x_0 - \Delta x_0 + \Delta x_1 + L_0 + y + \Delta y \ (6)$$

Вычитая (5) из (6), получаем:

$$\Delta H = \Delta x_1 + \Delta y \ (7)$$

С другой стороны, длина системы нить+жгуты изначально:

$$L_x = L + 3y + x_0 - \Delta x_0 \ (8)$$

После раздвижения, с учетом растяжений жгутов Δx_2 и Δx_3 имеем:

$$L_x + \Delta x_2 + \Delta x_3 = L + 3y + 3\Delta y + x_0 - \Delta x_0 + \Delta x_1 \ (9)$$

Вычитая (8) из (9), получаем:

$$\Delta x_2 + \Delta x_3 = 3\Delta y + \Delta x_1 => \frac{\Delta x_2 + \Delta x_3 - \Delta x_1}{3} = \Delta y (10)$$

И для изменения расстояния имеем соотношение:

$$\Delta H = \Delta x_1 + \frac{\Delta x_2 + \Delta x_3 - \Delta x_1}{3} \quad (11)$$

Итого имеем систему из трех уравнений:

$$\begin{cases} k_1 \Delta x_1 - 2k_3 \Delta x_3 = 0 \\ k_2 \Delta x_2 = k_3 \Delta x_3 \\ \Delta H = \Delta x_1 + \dfrac{\Delta x_2 + \Delta x_3 - \Delta x_1}{3} \end{cases}$$

Решая которую, получаем:

$$\Delta x_1 = \frac{6\Delta H}{\left(4 + \frac{k_1}{k_3} + \frac{k_1}{k_2}\right)}$$

$$\Delta x_2 = \frac{3\Delta H}{\left(4\frac{k_2}{k_1} + \frac{k_2}{k_3} + 1\right)}$$

$$\Delta x_3 = \frac{3\Delta H}{\left(4\frac{k_3}{k_1} + \frac{k_3}{k_2} + 1\right)}$$

8 класс, задача 4, 9 класс, задача 2, Вариант 1

Имеется два теплоизолированных сосуда, в каждом из которых содержится насыщенный водяной пар массой 0,1 кг и вода массой 0.8 г. Температура пара в первом сосуде 94 °С, во втором – 100 °С. Каждый из сосудов нагревают до тех пор, пока вода в нем не испарится полностью. Определите, на сколько количество теплоты, сообщенное в первый сосуд, отличалось от сообщенного во второй. Считайте, что удельная теплота парообразования не зависит от температуры, а давление насыщенного водяного пара возрастает на 2,4 кПа при повышении температуры на 1 К. Удельная теплоемкость водяного пара 1,38 кДж/кг·К. Давление насыщенного пара при 100 °С равно 101,3 кПа.

Решение:

Для насыщенного пара при начальных условиях:

$$p_1V = \frac{M}{\mu}RT_1,$$

где p_1 – давление насыщенного пара при T_1, V – объем сосуда, M – масса пара в сосуде, R – универсальная газовая постоянная, μ – молярная масса.

Давление насыщенного пара в первом сосуде найдем из данных в условии задачи температур и давления насыщенного водяного пара при 100 °С:

$$p_1 = p_{100} - \alpha * (100 - 94) = 101.3 - 2.4 * 6 = 86.9 \text{ кПа}$$

Тогда выражение для объема, занимаемого водяным паром:

$$V = \frac{MRT_1}{p_1\mu}$$

Поскольку масса капли много меньше массы пара, то занимаемый ей объем также много меньше общего объема сосуда. Поэтому можно считать, что после испарения капли объем, занимаемый паром, не изменяется.

После нагрева:

$$T_2 = T_1 + \Delta T$$

$$p_2 = \alpha\Delta T + p_1$$

$$p_2V = \frac{M+m}{\mu}RT_2$$

Здесь m – масса капли воды.

$$(\alpha\Delta T + p_1)V = \frac{M+m}{\mu}R(T_1 + \Delta T)$$

$$\Delta T = \frac{mT_1p_1}{\alpha MT_1 - p_1M - mp_1}$$

Количество теплоты, необходимое для нагрева и испарения капли воды, складывается из:

1. количества теплоты, необходимого для нагрева капли на ΔT;
2. количества теплоты, необходимого для нагрева массы водяного пара на ΔT (пренебрегаем теплотой, ушедшей на нагрев пара от испаренной капли);
3. количества теплоты, необходимого для испарения капли воды.

Выражение для суммарного количества теплоты выглядит следующим образом:

$$Q = qm + cm\Delta T + c_{\text{пар}} M \Delta T$$

Тогда разница будет равна:

$$Q_2 - Q_1 = \left(cm + c_{\text{пар}} M\right)(\Delta T_2 - \Delta T_1) \approx 8.4 \text{ Дж}$$

8 класс, задача 4, 9 класс, задача 2, Вариант 2

Имеется два теплоизолированных сосуда, в каждом из которых содержится насыщенный водяной пар массой 0,1 кг и вода массой 0.5 г. Температура пара в первом сосуде 96 °С, во втором – 100 °С. Каждый из сосудов нагревают до тех пор, пока вода в нем не испарится полностью. Определите, на сколько количество теплоты, сообщенное в первый сосуд, отличалось от сообщенного во второй. Считайте, что удельная теплота парообразования не зависит от температуры, а давление насыщенного водяного пара возрастает на 2,4 кПа при повышении температуры на 1 К. Удельная теплоемкость водяного пара 1,38 кДж/кг·К. Давление насыщенного пара при 100 °С равно 101,3 кПа.

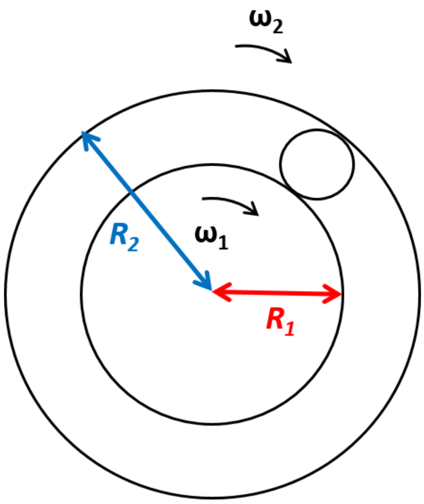
8 класс, задача 4, 9 класс, задача 2, Вариант 3

Имеется два теплоизолированных сосуда, в каждом из которых содержится насыщенный водяной пар массой 0,1 кг и вода массой 0.7 г. Температура пара в первом сосуде 98 °С, во втором – 100 °С. Каждый из сосудов нагревают до тех пор, пока вода в нем не испарится полностью. Определите, на сколько количество теплоты, сообщенное в первый сосуд, отличалось от сообщенного во второй. Считайте, что удельная теплота парообразования не зависит от температуры, а давление насыщенного водяного пара возрастает на 2,4 кПа при повышении температуры на 1 К. Удельная теплоемкость водяного пара 1,38 кДж/кг·К. Давление насыщенного пара при 100 °С равно 101,3 кПа.

8 класс, задача 5, 9 класс, задача 3, 10 класс, задача 1, Вариант 1

Система из трех колец закреплена так, как показано на рисунке. Внутреннее кольцо радиусом $\boldsymbol{R_1}$ вращается вокруг своей оси с частотой $\boldsymbol{\omega_1}$, внешнее кольцо радиусом $\boldsymbol{R_2}$ – с частотой $\boldsymbol{\omega_2}>\boldsymbol{\omega_1}$ в том же направлении. Между кольцами $\boldsymbol{R_1}$ и $\boldsymbol{R_2}$ зажато малое кольцо радиусом $\boldsymbol{r}$ так, что при вращении колец оно движется без проскальзывания. Определите:

1) Время, за которое ось малого кольца совершит полный оборот вокруг оси колец $\boldsymbol{R_1}$ и $\boldsymbol{R_2}$;
2) Частоту обращения малого кольца вокруг своей оси в системе отсчета, в которой внутреннее кольцо неподвижно.



Решение:

Согласно условию радиус малого кольца, будет равен:

$$r=\frac{R_2-R_1}{2}$$

Его центр расположен на расстоянии от оси кольца $\boldsymbol{R_1}$:

$$R_x=\frac{R_2+R_1}{2}$$

Перейдем в систему отсчета, в котором внутреннее кольцо $\boldsymbol{R_1}$ покоится. Внешнее кольцо $\boldsymbol{R_2}$ в этой системе будет вращаться вокруг внутреннего с частотой $\omega'=\omega_2-\omega_1$. В этой системе точка малого кольца, касающаяся кольца $\boldsymbol{R_2}$ будет двигаться с линейной скоростью

$$v'=(\omega_2-\omega_1)R_2$$

Следовательно, центр малого кольца будет двигаться со скоростью, в два раза меньше:

$$v_0{}'=\frac{(\omega_2-\omega_1)R_2}{2}$$

Следовательно, частота обращения малого кольца вокруг своей оси в этой системе отсчета будет:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi r} v_0' = \frac{(\omega_2 - \omega_1)R_2}{2(R_2 - R_1)}$$

Возвращаясь в исходную систему отсчета, находим линейную скорость центра малого кольца ***r***:

$$v_0 = \frac{(\omega_2 - \omega_1)R_2}{2} + \frac{\omega_1(R_2 + R_1)}{2} = \frac{\omega_2 R_2 + \omega_1 R_1}{2}$$

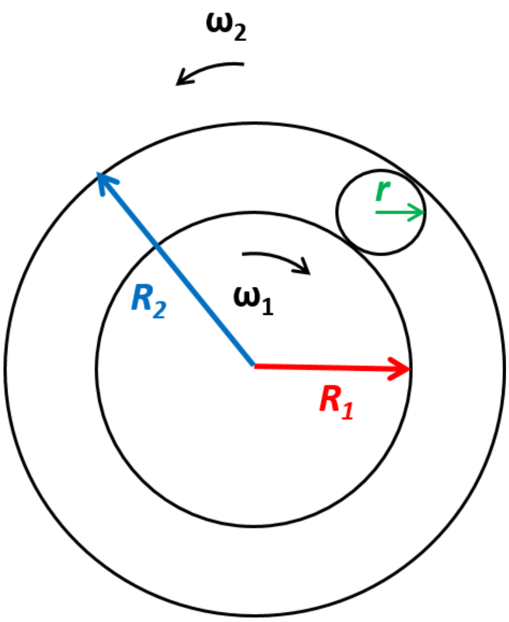
Тогда время, за которое малое кольцо ***r*** совершит полный оборот вокруг внутреннего кольца:

$$t_1 = \frac{2\pi(R_1 + R_2)}{2} * \left(\frac{2}{\omega_2 R_2 + \omega_1 R_1}\right) = \frac{2\pi(R_1 + R_2)}{\omega_2 R_2 + \omega_1 R_1}$$

8 класс, задача 5, 9 класс, задача 3, 10 класс, задача 1, Вариант 2

Система из трех колец закреплена так, как показано на рисунке. Внутреннее кольцо радиусом R_1 вращается вокруг своей оси с частотой ω_1, внешнее кольцо радиусом R_2 – с частотой $\omega_2<\omega_1$ в противоположном направлении. Между кольцами R_1 и R_2 зажато малое кольцо ***r*** так, что при вращении колец оно движется без проскальзывания. Определите:

1) Время, за которое ось малого кольца совершит полный оборот вокруг оси колец R_1 и R_2;
2) Частоту обращения малого кольца вокруг своей оси в системе отсчета, в которой внутреннее кольцо неподвижно.



Решение:

Согласно условию радиус малого кольца, будет равен:

$$r = \frac{R_2 - R_1}{2}$$

Его центр расположен на расстоянии от оси кольца ***R₁***:

$$R_x = \frac{R_2 + R_1}{2}$$

Перейдем в систему отсчета, в котором внутреннее кольцо $\boldsymbol{R_1}$ покоится. Внешнее кольцо $\boldsymbol{R_2}$ в этой системе будет вращаться вокруг внутреннего с частотой $\omega' = \omega_2 + \omega_1$. В этой системе точка малого кольца, касающаяся кольца $\boldsymbol{R_2}$ будет двигаться с линейной скоростью

$$v' = (\omega_2 + \omega_1)R_2$$

Следовательно, центр малого кольца будет двигаться со скоростью, в два раза меньше:

$$v_0{}' = \frac{(\omega_2 + \omega_1)R_2}{2}$$

Следовательно, частота обращения малого кольца вокруг своей оси в этой системе отсчета будет:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi r} v_0' = \frac{(\omega_2 + \omega_1)R_2}{2(R_2 - R_1)}$$

Возвращаясь в неподвижную систему отсчета, находим линейную скорость центра малого кольца ***r***:

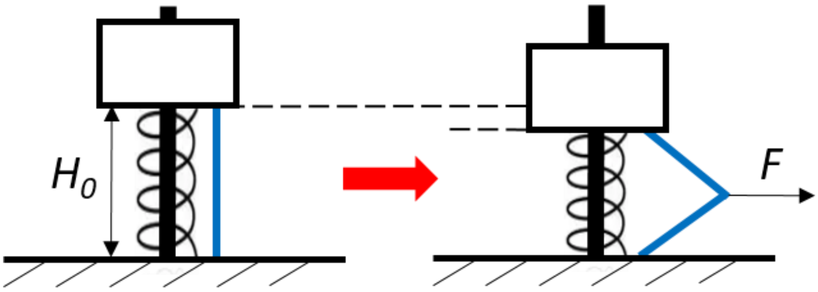
$$v_0 = \frac{(\omega_2 + \omega_1)R_2}{2} - \frac{\omega_1(R_2 + R_1)}{2} = \frac{\omega_2 R_2 - \omega_1 R_1}{2}$$

Тогда время, за которое малое кольцо ***r*** совершит полный оборот вокруг внутреннего кольца:

$$t_1 = \frac{2\pi(R_1 + R_2)}{2} * \left(\frac{2}{\omega_2 R_2 - \omega_1 R_1}\right) = \frac{2\pi(R_1 + R_2)}{\omega_2 R_2 - \omega_1 R_1}$$

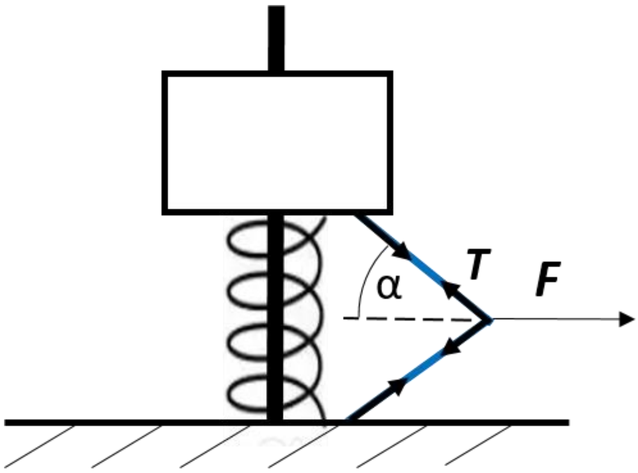
9 класс, задача 4, 10 класс, задача 2

На рисунке изображена конструкция, состоящая из жесткой штанги, на которую насажены цилиндрическая массивная шайба и невесомая пружина жесткостью $\boldsymbol{k_1}$. Шайба способна двигаться по штанге без трения. Пружина одним концом присоединена к шайбе, другим – к полу. Шайба соединена с полом еще и эластичным невесомым жгутом жесткостью $\boldsymbol{k_2}$. Жгут изначально не растянут. Расстояние от пола до шайбы $\boldsymbol{H_0}$. Жгут оттягивают за середину в горизонтальном направлении с некоторой силой $\boldsymbol{F}$ так, как показано на рисунке, в результате чего шайба опустилась. Определите величину этой силы, если известно, что длина жгута в результате натяжения увеличилась в **β** раз.



Решение

В результате натяжения жгута его длина увеличиться, а пружина сожмется. Обозначим силы натяжения на рисунке. Также угол между горизонталью и жгутом обозначим как **α**.



Сила натяжения связана с растяжением жгута. Обозначим это растяжение как Δl:

$$T = k_2 \Delta l \ (1)$$

По условию нам дано, что длина жгута увеличилась в **β** раз. С учетом того, что первоначальная длина была дана по условию, имеем:

$$\beta = \frac{H_0 + \Delta l}{H_0} => \Delta l = H_0(\beta - 1) \ (2)$$

$$T = k_2 H_0(\beta - 1) \ (3)$$

Жгут тянет шайбу вниз, вертикальная проекция этой силы скомпенсирована дополнительным сжатием пружины:

$$k_1\Delta H = T\sin\alpha = k_2 H_0(\beta - 1)\sin\alpha \ \ (4)$$

Здесь ***ΔH*** – изменение высоты пружины после натяжения жгута. Синус угла **α** запишем по определению из прямоугольного треугольника, гипотенузой которого является половина жгута, а противолежащим катетом – половина длины пружины:

$$\sin\alpha = \frac{H_0 - \Delta H}{H_0 + \Delta l}\cdot\frac{2}{2} = \frac{H_0 - \Delta H}{H_0 + \Delta l} = \frac{H_0 - \Delta H}{H_0 + H_0(\beta - 1)} = \frac{H_0 - \Delta H}{H_0\beta} \ \ (5)$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{H_0 - \Delta H}{H_0\beta}\right)^2} \ \ (6)$$

Подставим (5) в (4) и найдем ***ΔH***:

$$k_1\Delta H = T\sin\alpha = k_2 H_0(\beta - 1)\frac{H_0 - \Delta H}{H_0\beta}$$

$$k_1\Delta H = k_2\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)(H_0 - \Delta H)$$

$$k_1\Delta H + \Delta H k_2\left(1 - \frac{1}{\beta}\right) = H_0 k_2\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)$$

$$\Delta H = \frac{H_0 k_2(\beta - 1)}{\big(\beta k_1 + k_2(\beta - 1)\big)} \ \ (7)$$

Сила натяжения жгута одинаковая по всей его длине. Силы, действующие на жгут в точке приложения силы ***F*** в проекции на горизонтальную плоскость:

$$F = 2T\cos\alpha$$

Подставляем все ранее найденные величины и получаем ответ:

$$F = 2k_2H_0(\beta - 1)\sqrt{1 - \left(\frac{H_0 - \Delta H}{H_0\beta}\right)^2} = 2k_2H_0(\beta - 1)\sqrt{1 - \frac{1}{\beta^2}\left(1 - \frac{\Delta H}{H_0}\right)^2} \ \ =>$$

$$F = 2k_2H_0(\beta - 1)\sqrt{1 - \frac{1}{\beta^2}\left(1 - \frac{k_2(\beta - 1)}{\beta k_1 + k_2(\beta - 1)}\right)^2}$$

Ответ:

$$F = 2k_2H_0\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)\sqrt{\beta^2 - \left(\frac{1}{1 + \frac{k_2}{k_1}\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)}\right)^2}$$

9 класс, задача 5, 10 класс, задача 3, вариант 1

Электроприбор включен в цепь с двумя резисторами и источником постоянного напряжения (см. рисунок). Известно, что каждый из элементов цепи выходит из строя при определенных значениях напряжения, падающих на этом элементе – резистор R_1 при U_0, резистор R_2 при $3U_0$, электроприбор при $5U_0$. Сопротивление первого резистора R_1 составляет R. Сопротивление второго R_2 – 5R, прибора – 2R. Определите, при каком минимальном напряжении источника U_x электроприбор перестанет работать.

Решение:

Электроприбор перестанет работать в случае, если: оба сопротивления перегорят или перегорит сам прибор.

Обозначим за U_x напряжение источника. Запишем уравнения для цепи в начальный момент времени (рисунок 1):

$$\begin{cases} U_1 = I_1 R_1 \\ I_1 + I_2 = I_{\text{общ}} = I_{\text{пр}} = \dfrac{U_x}{R_{\text{общ}}} \\ U_x = U_{\text{пр}} + U_1 \\ U_1 = U_2 \\ U_2 = I_2 R_2 \end{cases}$$

$$U_1 = U_x - U_{\text{пр}} = U_x - I_{\text{пр}} R_{\text{пр}} = U_x - I_{\text{общ}} R_{\text{пр}}$$

$$I_{\text{общ}} = \frac{U_x}{R_{\text{общ}}} = \frac{U_x}{R_{\text{пр}} + \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$$

$$U_1 = U_x - R_{\text{пр}} \frac{U_x}{R_{\text{пр}} + \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} = U_x \left[1 - \frac{R_{\text{пр}}(R_1 + R_2)}{R_{\text{пр}} R_1 + R_{\text{пр}} R_2 + R_1 R_2}\right]$$

Напряжение на резисторе R_1 :

$$U_1 = U_x \left[1 - \frac{R_{\text{пр}}(R_1 + R_2)}{R_{\text{пр}} R_1 + R_{\text{пр}} R_2 + R_1 R_2}\right] = U_x \left[\frac{R_1 R_2}{R_{\text{пр}} R_1 + R_{\text{пр}} R_2 + R_1 R_2}\right] = U_x \left[\frac{1}{\dfrac{R_{\text{пр}}}{R_1} + \dfrac{R_{\text{пр}}}{R_2} + 1}\right]$$

Используя соотношения:

$$U_x = U_{\text{пр}} + U_1$$
$$U_{\text{пр}} = U_x - U_1$$

Получим напряжение на самом приборе:

$$U_{\text{пр}} = U_x\left(1 - \frac{1}{\frac{R_{\text{пр}}}{R_1} + \frac{R_{\text{пр}}}{R_2} + 1}\right) = U_x\left(\frac{\frac{R_{\text{пр}}}{R_1} + \frac{R_{\text{пр}}}{R_2}}{\frac{R_{\text{пр}}}{R_1} + \frac{R_{\text{пр}}}{R_2} + 1}\right)$$

Сопротивление первого резистора R_1 составляет R. Сопротивление второго R_2 – 5R, прибора – 2R. Подставим значения сопротивлений в формулы для напряжения на каждом элементе цепи получим:

$$U_{\text{пр}} = U_x\left(1 - \frac{1}{\frac{R_{\text{пр}}}{R_1} + \frac{R_{\text{пр}}}{R_2} + 1}\right) = U_x\left(\frac{2 + \frac{2}{5}}{2 + \frac{2}{5} + 1}\right) = \frac{12}{17}U_x$$

$$U_1 = U_2 = \frac{5}{17}U_x$$

Зная максимально возможные значения напряжения для каждого элемента цепи – резистор R_1 при U_0, резистор R_2 при $3U_0$, электроприбор при $5U_0$ – найдем значения напряжения на источнике, при котором перегорит каждый элемент цепи:

$$R_1 \colon U_0 = \frac{5}{17}U_x => U_x = 3.4U_0$$

$$R_2 \colon 3U_0 = \frac{5}{17}U_x => U_x = 10.2U_0$$

$$\text{прибор:}\, 5U_0 = \frac{12}{17}U_x => U_x = 7\frac{1}{12}U_0$$

Таким образом при значении напряжения на источнике $U_x = 3{,}4\ U_0$ перегорит резистор R_1. В этот момент схема примет следующий вид:

В этом случае справедливы следующие соотношения:

$$I_{\text{общ}} = I_{\text{пр}} = I_2$$

$$U_x = U_{\text{пр}} + U_2$$

$$U_2 = U_x - U_{\text{пр}} = U_x - I_{\text{пр}}R_{\text{пр}} = U_x - I_{\text{общ}}R_{\text{пр}}$$

$$I_{\text{общ}} = \frac{U_x}{R_{\text{общ}}} = \frac{U_x}{R_{\text{пр}} + R_2}$$

$$U_2 = U_x - \frac{U_x R_{\text{пр}}}{R_{\text{пр}} + R_2} = U_x\left[1 - \frac{R_{\text{пр}}}{R_{\text{пр}} + R_2}\right]$$

Напряжение на оставшемся резисторе R_2:

$$U_2 = U_x \left[1 - \frac{R_{\text{пр}}}{R_{\text{пр}} + R_2}\right] = U_x \left[\frac{R_2}{R_{\text{пр}} + R_2}\right]$$

Напряжение на приборе:

$$U_{\text{пр}} = I_{\text{пр}} R_{\text{пр}} = I_{\text{общ}} R_{\text{пр}} = U_x \frac{R_{\text{пр}}}{R_{\text{пр}} + R_2}$$

Используя соотношения для сопротивлений, получим:

$U_2 = \frac{5}{7} U_x$ - напряжение на резисторе R_2.

$U_{\text{пр}} = \frac{2}{7} U_x$ - напряжение на электроприборе.

В момент, когда сгорел резистор R_1, на источнике было выставлено напряжение $3.4U_0$. Следовательно, напряжение на сопротивлении R_2 в этот момент будет

$$U_2' = \frac{5}{7} * 3.4U_0 = 2\frac{3}{7} U_0 < 3U_0$$

$$U_{\text{пр}}' = \frac{2}{7} * 3.4U_0 = \frac{34}{35} U_0 < 5U_0$$

Следовательно, оставшиеся элементы не перегорают сразу вслед за сопротивлением R_1, и напряжение можно повышать дальше.

Найдем значения напряжения на источнике, при котором перегорит каждый элемент цепи в этом случае:

При $U_x = 4{,}2\ U_0$ – сопротивление R_2; $U_x = 17{,}5\ U_0$ – электроприбор.

Таким образом, сначала при напряжении $U_x = 3{,}4\ U_0$ сгорит резистор R1, но ток продолжит течь по цепи. Далее, при напряжении на источнике $U_x = 4{,}2\ U_0$ перегорит и второй резистор, что уже приведет к полному обрыву цепи.

Ответ: $U_x = 4{,}2\ U_0$

9 класс, задача 5, 10 класс, задача 3, Вариант 2.

Электроприбор включен в цепь с двумя резисторами и источником постоянного напряжения (см. рисунок). Известно, что каждый из элементов цепи выходит из строя при определенных значениях напряжения, падающих на этом элементе – резистор R_1 при U_0, резистор R_2 при $1.2U_0$, электроприбор при $3U_0$. Сопротивление первого резистора R_1 составляет R. Сопротивление второго R_2 – 0.3R, прибора – 0.2R. Определите, при каком минимальном напряжении источника U_x электроприбор перестанет работать.

Решение:

Электроприбор перестанет работать в случае, если: оба сопротивления перегорят или перегорит сам прибор.

Обозначим за U_x напряжение источника. Запишем уравнения для цепи в начальный момент времени (рисунок 1):

$$\begin{cases} U_1 = I_1 R_1 \\ I_1 + I_2 = I_{\text{общ}} = I_{\text{пр}} = \dfrac{U_x}{R_{\text{общ}}} \\ U_x = U_{\text{пр}} + U_1 \\ U_1 = U_2 \\ U_2 = I_2 R_2 \end{cases}$$

$$U_1 = U_x - U_{\text{пр}} = U_x - I_{\text{пр}} R_{\text{пр}} = U_x - I_{\text{общ}} R_{\text{пр}}$$

$$I_{\text{общ}} = \frac{U_x}{R_{\text{общ}}} = \frac{U_x}{R_{\text{пр}} + \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$$

$$U_1 = U_x - R_{\text{пр}} \frac{U_x}{R_{\text{пр}} + \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} = U_x \left[1 - \frac{R_{\text{пр}}(R_1 + R_2)}{R_{\text{пр}} R_1 + R_{\text{пр}} R_2 + R_1 R_2}\right]$$

Напряжение на резисторе R_1:

$$U_1 = U_x \left[1 - \frac{R_{\text{пр}}(R_1 + R_2)}{R_{\text{пр}} R_1 + R_{\text{пр}} R_2 + R_1 R_2}\right] = U_x \left[\frac{R_1 R_2}{R_{\text{пр}} R_1 + R_{\text{пр}} R_2 + R_1 R_2}\right] = U_x \left[\frac{1}{\dfrac{R_{\text{пр}}}{R_1} + \dfrac{R_{\text{пр}}}{R_2} + 1}\right]$$

Используя соотношения:

$$U_x = U_{\text{пр}} + U_1$$

$$U_{\text{пр}} = U_x - U_1$$

Получим напряжение на самом приборе:

$$U_{\text{пр}} = U_x \left(1 - \frac{1}{\dfrac{R_{\text{пр}}}{R_1} + \dfrac{R_{\text{пр}}}{R_2} + 1}\right) = U_x \left(\frac{\dfrac{R_{\text{пр}}}{R_1} + \dfrac{R_{\text{пр}}}{R_2}}{\dfrac{R_{\text{пр}}}{R_1} + \dfrac{R_{\text{пр}}}{R_2} + 1}\right)$$

Сопротивление первого резистора R_1 составляет R. Сопротивление второго R_2 – 0.3R, прибора – 0.2R. Подставим значения сопротивлений в формулы для напряжения на каждом элементе цепи получим:

$$U_{пр} = U_x \left(\frac{\frac{1}{5} + \frac{2}{3}}{\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1} \right) = \frac{13}{28} U_x$$

$$U_1 = U_2 = \frac{15}{28} U_x$$

Зная максимально возможные значения напряжения для каждого элемента цепи – резистор R_1 при U_0, резистор R_2 при $1.2U_0$, электроприбор при $3U_0$ – найдем значения напряжения на источнике, при котором перегорит каждый элемент цепи:

$$R_1: U_0 = \frac{15}{28} U_x => U_x = 1\frac{13}{15} U_0$$

$$R_2: 1.2U_0 = \frac{15}{28} U_x => U_x = 2\frac{6}{25} U_0$$

$$\text{прибор}: 3U_0 = \frac{13}{28} U_x => U_x = 6\frac{6}{13} U_0$$

Таким образом при значении напряжения на источнике $U_x = 1\frac{13}{15} U_0$ перегорит резистор R_1.

В этот момент схема примет следующий вид:

В этом случае справедливы следующие соотношения:

$$I_{общ} = I_{пр} = I_2$$

$$U_x = U_{пр} + U_2$$

$$U_2 = U_x - U_{пр} = U_x - I_{пр} R_{пр} = U_x - I_{общ} R_{пр}$$

$$I_{общ} = \frac{U_x}{R_{общ}} = \frac{U_x}{R_{пр} + R_2}$$

$$U_2 = U_x - \frac{U_x R_{пр}}{R_{пр} + R_2} = U_x \left[1 - \frac{R_{пр}}{R_{пр} + R_2} \right]$$

Напряжение на оставшемся резисторе R_2:

$$U_2 = U_x \left[1 - \frac{R_{пр}}{R_{пр} + R_2} \right] = U_x \left[\frac{R_2}{R_{пр} + R_2} \right]$$

Напряжение на приборе:

$$U_{пр} = I_{пр} R_{пр} = I_{общ} R_{пр} = U_x \frac{R_{пр}}{R_{пр} + R_2}$$

Сопротивление второго R_2 – 0.3R, прибора – 0.2R. Используя соотношения для сопротивлений, получим:

$U_2 = \frac{3}{5} U_x$ - напряжение на резисторе R_2.

$U_{\text{пр}} = \frac{2}{5} U_x$ - напряжение на электроприборе.

В момент, когда сгорел резистор R_1, на источнике было выставлено напряжение $1\frac{13}{15}U_0$. Следовательно, напряжение на сопротивлении R_2 в этот момент будет

$$U_2' = \frac{1}{5} * \frac{28}{5} U_0 = 1\frac{3}{25} U_0 < 1.2U_0$$

$$U_{\text{пр}}' = \frac{2}{5} * \frac{28}{15} U_0 = \frac{56}{75} U_0 < 3U_0$$

Следовательно, оставшиеся элементы не перегорают сразу вслед за сопротивлением R_1, и напряжение можно повышать дальше.

Найдем значения напряжения на источнике, при котором перегорит каждый элемент цепи в этом случае:

При $U_x = 2U_0$ – сопротивление R_2; $U_x = 7{,}5\ U_0$ – электроприбор.

Таким образом, сначала при напряжении $1\frac{13}{15}U_0$ сгорит резистор R_1, но ток продолжит течь по цепи. Далее, при напряжении на источнике $U_x = 2U_0$ перегорит и второй резистор, что уже приведет к полному обрыву цепи.

Ответ: $U_x = 2U_0$

10 класс, задача 4, 11 класс, задача 1

Для изготовки термометра в тонкий стеклянный капилляр высотой *H* и сечением *S* налили ртуть общей массой $\boldsymbol{M_0}$, предварительно откачав из него весь воздух, герметично закрыли и нанесли линейную шкалу на основе данных о термическом расширении ртути. Определите, какую температуру покажет градусник, если внести его в среду с температурой $\boldsymbol{T_c}$? Зависимость плотности ртути от температуры дается формулой:

$$\rho_ж(T) = \frac{\rho_0}{1+\beta(T-T_0)}$$

где T_0 – температура замерзания ртути. Зависимость плотности насыщенных паров ртути от температуры, а также все величины и коэффициенты, перечисленные выше, считайте известными. Столбик ртути не достигает конца капилляра. Влиянием поверхностного натяжения пренебречь.

Решение:

В градусник наливают $\boldsymbol{M_0}$ ртути под вакуумом. Часть ртути испаряется. Ртуть в градуснике находится как в жидком, так и в газообразном состоянии. Общее число частиц жидкости в сосуде не меняется:

$$N = N_ж + N_п$$

Обозначим m_0 массу одной частицы. Масса всего вещества в сосуде:

$$M = m_0(N_ж + N_п) = M_ж + M_п$$

Обозначим за h высоту столба ртути. Тогда масса пара:

$$M_п = \rho_п S(H-h)$$

Получаем:

$$M = S\big(\rho_ж h + \rho_п(H-h)\big) => \frac{M}{S} = \rho_ж h + \rho_п(H-h)$$

Градусник проградуировали, полагая термическое расширение ртути, пренебрегая испарением:

$$\rho_ж(T) = \frac{\rho_0}{1+\beta(T-T_0)}$$

$$M_0 = \rho_ж(T)Sh = \frac{\rho_0}{1+\beta(T-T_0)}Sh => 1+\beta(T-T_0) = \frac{\rho_0 Sh}{M}$$

Получаем выражение для шкалы:

$$\beta\Delta T = \frac{\rho_0 S}{M}\Delta h => \Delta T = \frac{\rho_0 S}{\beta M}\Delta h$$

Градусник внесли в среду с температурой $\boldsymbol{T_c}$:

$$\frac{M_0}{S}=\frac{\rho_0}{1+\beta(T_c-T_0)}h+\rho_п(T_c)(H-h)$$

Выражаем высоту столбика ртути при этой температуре:

$$\frac{M_0}{S}-\rho_п(T_c)H=h\left(\frac{\rho_0}{1+\beta(T_c-T_0)}-\rho_п(T_c)\right)$$

$$h=\frac{\frac{M_0}{S}-\rho_п(T_c)H}{\frac{\rho_0}{1+\beta(T_c-T_0)}-\rho_п(T_c)}$$

При этом на градуснике отметка в $\boldsymbol{T_c}$ будет стоять на высоте:

$$h'=\frac{M_0\big(1+\beta(T_c-T_0)\big)}{\rho_0 S}>h$$

Отличие в показаниях составит:

$$\Delta T=\frac{h'-h}{\Delta h}=\left(\frac{M_0\big(1+\beta(T_c-T_0)\big)}{\rho_0 S}-\frac{\frac{M_0}{S}-\rho_п(T_c)H}{\frac{\rho_0}{1+\beta(T_c-T_0)}-\rho_п(T_c)}\right)\frac{\rho_0 S}{\beta M_0}$$

$$\left(1+\beta(T_c-T_0)-\frac{1-\frac{S\rho_п(T_c)H}{M_0}}{\frac{1}{1+\beta(T_c-T_0)}-\frac{\rho_п(T_c)}{\rho_0}}\right)\frac{1}{\beta}$$

И искомая температура будет:

$$T_x=T_c-\Delta T=T_c-\left(1+\beta(T_c-T_0)-\frac{1-\frac{S\rho_п(T_c)H}{M_0}}{\frac{1}{1+\beta(T_c-T_0)}-\frac{\rho_п(T_c)}{\rho_0}}\right)\frac{1}{\beta}$$

$$T_x=T_0+\frac{1}{\beta}\left(\frac{1-\frac{S\rho_п(T_c)H}{M_0}}{\left(\frac{1}{1+\beta(T_c-T_0)}-\frac{\rho_п(T_c)}{\rho_0}\right)}-1\right)$$

10 класс, задача 5, 11 класс, задача 2, вариант 1

На столе находились четыре незаряженных металлических куба. Их выложили в фигуру, показанную на рисунке слева, соединили кубы №3 и №4 проводящей перемычкой и подключили источник напряжения V_0 между кубами №1 и №4. После этого схему изменили. Сначала отсоединили источник напряжения, потом убрали перемычку между кубами №3 и №4, затем кубы №3 и №4 сдвинули и, наконец, к кубам №1 и №4 подключили вольтметр. Итоговое состояние системы показано на рисунке справа. Какое напряжение покажет вольтметр? Считайте, что зазор между кубами всегда один и тот же, и что он много меньше стороны куба.

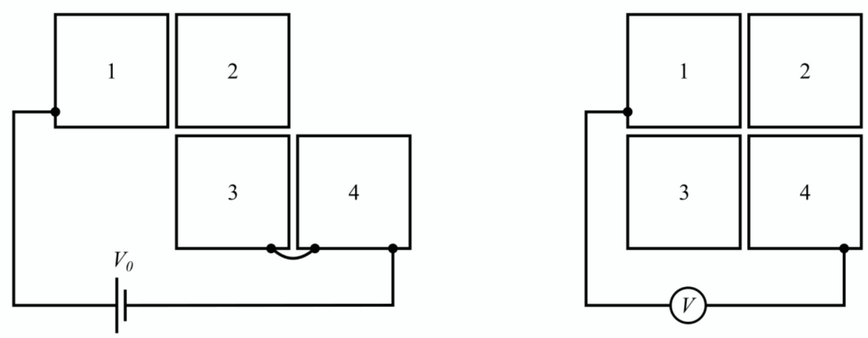


Рис.1 Исходная конфигурация системы (слева) и изменённая (справа).

Решение

Два расположенных рядом металлических куба образуют плоский конденсатор. Так как зазор между кубами много меньше их линейных размеров, краевыми эффектами можно пренебречь. Можно составить схему замещения всей системы:

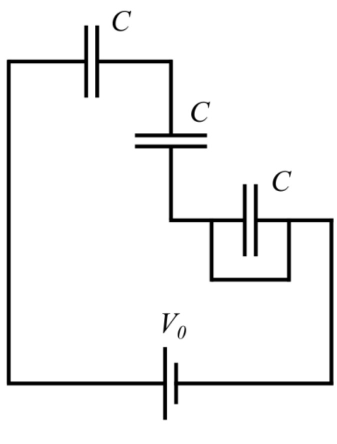


Рис.2 Схема замещения исходной системы

Обозначим за q заряд, до которого заряжается конденсатор C из двух кубов, если к ним приложить напряжение V_0. При последовательном соединении конденсаторов, как на рис.2, ёмкость уменьшается: $C_\Sigma = \frac{1}{2}C$ (последняя ёмкость зашунтирована перемычкой, и её можно исключить из схемы). Т.к. напряжение на системе равно V_0, то суммарная ёмкость заряжается до $\frac{1}{2}q$. При последовательном соединении изменение заряда на конденсаторах одинаково, поэтому каждая из емкостей тоже заряжена до $\frac{1}{2}q$. Каждый из заряженных конденсаторов электронейтрален, на одной из обкладок скапливается заряд $+\frac{1}{2}q$, а на другой $-\frac{1}{2}q$. На рис.3 подписаны заряды, которые скопились на поверхностях соответствующих граней.

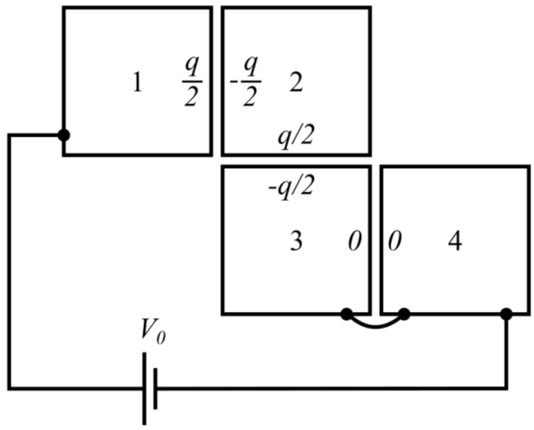


Рис.3 Исходная система с подписанными зарядами граней кубов.

Заметим, что у куба №1 оказывается суммарный заряд $+\frac{1}{2}q$, а у куба №3 заряд $-\frac{1}{2}q$. Кубы №2 и №4 электронейтральны. Когда был отключён источник напряжения и была убрана перемычка, все кубы оказались изолированными, и их заряды в дальнейшем не должны меняться.

После перемещения кубов образовалась цепочка из четырёх конденсаторов (рис.4), и заряды граней q_{ik} определённым образом изменились.

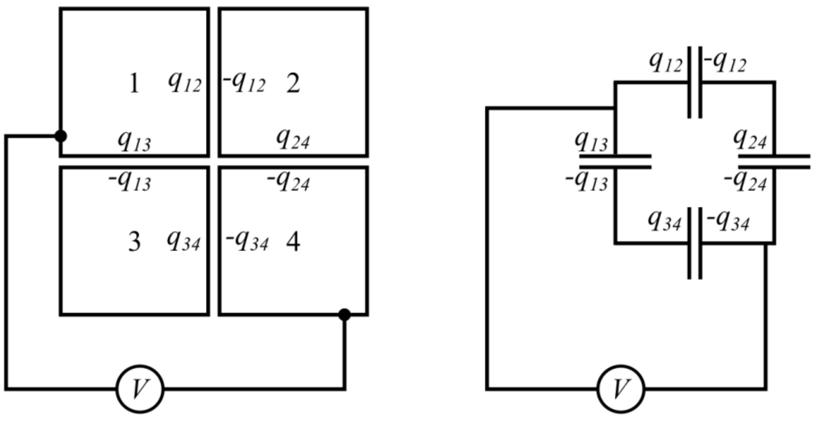


Рис.4 Система после изменения с подписанными зарядами граней кубов (слева) и схема замещения (справа).

Сохранение суммарного заряда кубов можно теперь записать в виде уравнений:

$$q_{12} + q_{13} = \frac{1}{2}q$$

$$-q_{12} + q_{24} = 0$$

$$-q_{13} + q_{34} = -\frac{1}{2}q$$

$$-q_{24} - q_{34} = 0$$

При этом последнее уравнение получается из трёх предыдущих, если их сложить. Поэтому, на самом деле, пока что записаны 3 независимых уравнения на 4 неизвестных. Необходимо записать ещё одно уравнение, чтобы найти неизвестные.

Достаточно рассмотреть схему на рис.3 как параллельное соединение двух цепочек, каждая из которых состоят из двух последовательно соединённых конденсаторов. Напряжение при параллельном соединение одинаково, а при последовательном - складывается, поэтому:

$$V_{12} + V_{24} = V_{13} + V_{34}$$

Где $V_{ik} = \varphi_i - \varphi_k$ - разность потенциалов между *i*-м и *k*-м кубом, $V_{ik} = -V_{ki}$.

Так как ёмкости всех конденсаторов равны между собой, то можно перейти к аналогичному уравнению на величины зарядов:

$$q_{12} + q_{24} = q_{13} + q_{34}$$

Теперь решим эту систему. Перенесём q_{24} в последнем уравнении в правую часть и выразим остальные величины через q_{12}, используя другие уравнения. Получим уравнение на q_{12}:

$$q_{12} = q_{13} + q_{34} - q_{24} = \left(\frac{1}{2}q - q_{12}\right) - q_{12} - q_{12}$$

Откуда

$$q_{12} = \frac{1}{8}q$$

Из уравнений 1-3 далее находятся и другие значения:

$$q_{24} = \frac{1}{8}q$$

$$q_{13} = \frac{3}{8}q$$

$$q_{34} = -\frac{1}{8}q$$

Теперь, зная заряды конденсаторов, образующихся между гранями кубов, можно найти разность потенциалов между кубами №1 и №4:

$$V = V_{12} + V_{24} = \frac{q_{12}}{C} + \frac{q_{24}}{C} = \frac{1}{4}\frac{q}{C} = \frac{1}{4}V_0$$

Ответ: $V = \frac{1}{4}V_0$

10 класс, задача 5, 11 класс, задача 2, вариант 2

На столе находились четыре незаряженных металлических куба. Их выложили в фигуру, показанную на рис. 1 слева, соединили кубы №3 и №4 проводящей перемычкой и подключили источник напряжения V_0 между кубами №1 и №4. После этого схему изменили. Сначала отсоединили источник напряжения, потом убрали перемычку между кубами №3 и №4, затем кубы сдвинули и, наконец, к кубам №1 и №4 подключили вольтметр. Итоговое состояние системы показано на рис. 1 справа. Какое напряжение покажет вольтметр? Считайте, что зазор между кубами всегда один и тот же, и что он много меньше стороны куба.

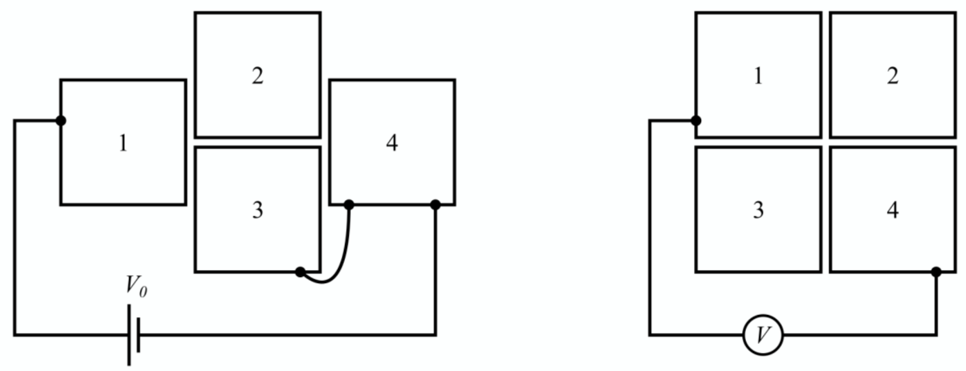


Рис.1 Исходная конфигурация системы (слева) и изменённая (справа).

Ответ: $V = \frac{1}{2}V_0$

10 класс, задача 5, 11 класс, задача 2, вариант 3

На столе находились четыре незаряженных металлических куба. Их выложили в фигуру, показанную на рис. 1 слева, соединили кубы №2 и №3 проводящей перемычкой и подключили источник напряжения V_0 между кубами №1 и №4. После этого схему начали менять. Сначала отсоединили источник напряжения, потом убрали перемычку между кубами №2 и №3, затем кубы №3 и №4 поменяли местами и, наконец, к кубам №1 и №4 подключили вольтметр. Итоговое состояние системы показано на рис. 1 справа. Какое напряжение покажет вольтметр? Считайте, что зазор между кубами всегда один и тот же, и что он много меньше стороны куба.

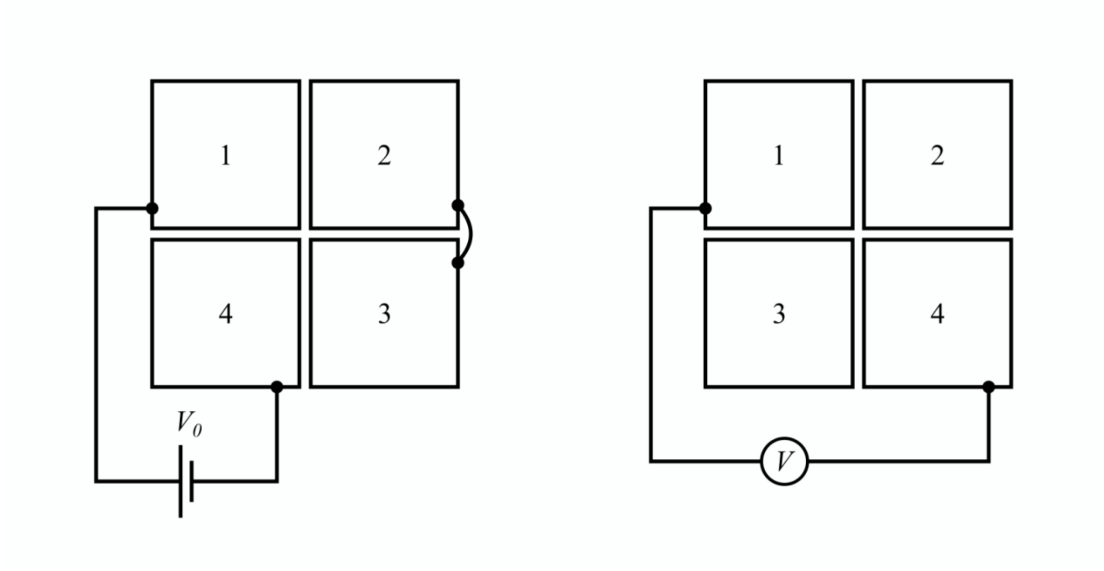


Рис.1 Исходная конфигурация системы (слева) и изменённая (справа).

Ответ: $V = \frac{3}{2} V_0$

11 класс, задача 3, Вариант 1

Мокрое колесо радиусом R, вращающееся с частотой ω_0, держат навесу. В некоторый момент колесо поставили на поверхность, и оно начало двигаться вдоль нее. Спустя время $\boldsymbol{t}$ колесо продолжало движение, вращаясь так, что с каждой точки его поверхности срывались капли с начальной скоростью, равной скорости этой точки. Определите, чему равна максимальная высота, которой достигли капли, оторвавшиеся от поверхности колеса в момент времени $\boldsymbol{t}$. Коэффициент трения скольжения колеса о поверхность – μ. Трением качения пренебрегите.

Примечание: Угловое ускорение $\vec{\beta}$ связано с моментом приложенных сил соотношением: $I\vec{\beta} = \vec{M}$, где I – момент инерции тела относительно оси вращения, $\vec{M}$ – суммарный момент внешних сил относительно этой же оси. Для круглого колеса, вращающегося вокруг своей оси $I = \frac{mR^2}{2}$.

Решение

Когда колесо поставили на горизонтальную поверхность, оно начинает двигаться с ускорением, при этом проскальзывая. Для поступательного движения ускорение положительное, для вращения- отрицательное. Когда будет выполняться соотношение $\omega R = v_{\text{п}}$, колесо начнет двигаться без проскальзывания и, соответственно, равномерно без ускорения.

1. Поступательное движение:

$$x(t) = x_0 + \frac{at^2}{2}$$

Ускорение колеса:

$$ma = \mu mg$$

$$a = \mu g$$

Отсюда:

$$x(t) = x_0 + \frac{\mu g t^2}{2}$$

Тогда скорость движения при наличии проскальзывания:

$$v_{\text{п}}(t) = \mu g t$$

2. Вращательное движение:

$$\omega(t) = \omega_0 + \beta t$$

Пользуемся примечанием из условия, расписывая момент силы:

$$I\beta = M, I = \frac{mR^2}{2}, M = -\mu m g R$$

Отсюда:

$$\beta = -\frac{2\mu g}{R}$$

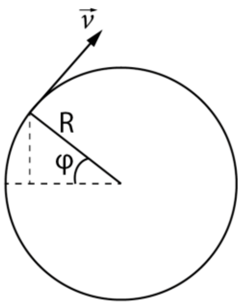
$$\omega(t) = \omega_0 - \frac{2\mu g}{R} t$$

3. Определяем момент времени $\tilde{t}$, когда движене с проскальзыванием переходит в движение без проскальзывания ($\omega R = v$):

$$\omega_0 R - \frac{2\mu g}{R} \tilde{t} R = \mu g \tilde{t}$$

$$\tilde{t} = \frac{\omega_0 R}{3\mu g}$$

4. Полет капель. Перейдем в систему отсчета, связанную с центром колеса.



Капли вылетают по касательной со скоростью $\omega(t)R = \omega_0 R - 2\mu g t$, под некоторым углом φ. Начальная высота капли:

$$y_0(\varphi) = R + Rsin(\varphi)$$

Высота и скорость капли, вылетевшей в момент времени t, по мере полета на протяжении времени t':

$$y(\varphi, t', t) = R + Rsin(\varphi) + (\omega_0 R - 2\mu g t)\cos(\varphi)\, t' - \frac{g t'^2}{2}$$

$$v_y(\varphi, t', t) = (\omega_0 R - 2\mu g t) cos(\varphi) - g t'$$

Находим время подъема капли из условия, когда вертикальная составляющая скорости становится равна нули:

$$\widetilde{t'} = \frac{(\omega_0 R - 2\mu g t) cos(\varphi)}{g}$$

Тогда максимальная высота в зависимости от угла φ и момента времени вылета t:

$$y_{max}(\varphi, t) = R + Rsin(\varphi) + \frac{(\omega_0 R - 2\mu g t)^2 \cos(\varphi)^2}{2g}$$

5. Находим угол, под которым вылетает капля, достигающая наибольшей высоты среди всех капель, вылетающих в момент времени t:

$$\frac{\partial y_{max}(\varphi, t)}{\partial \varphi} = 0$$

Получаем:

$$\sin(\varphi) = \frac{gR}{(\omega_0 R - 2\mu g t)^2}$$

$$\cos(\varphi)^2 = 1 - \frac{(gR)^2}{(\omega_0 R - 2\mu g t)^4}$$

6. Максимальная высота подъема капель в произвольный момент времени $t < \tilde{t}$:

$$y_{max}(t) = R + \frac{gR^2}{2(\omega_0 R - 2\mu g t)^2} + \frac{(\omega_0 R - 2\mu g t)^2}{2g}$$

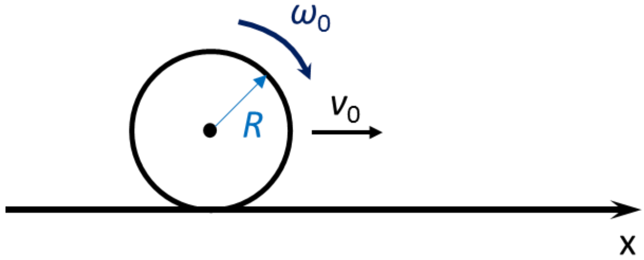
Если $t > \tilde{t}$, то вместо $\tilde{t}$ ставим ранее полученное выражение для него:

$$y_{max} = R + \frac{9g}{2{\omega_0}^2} + \frac{(\omega_0 R)^2}{18g}$$

11 класс, задача 2, Вариант 2

Мокрое колесо радиусом R, вращающееся с частотой ω_0, держат навесу. В некоторый момент колесо поставили на поверхность, сообщив ему начальную скорость $v_0 < \omega_0 R$ в горизонтальном направлении так, как показано на рисунке. Спустя время $\boldsymbol{t}$ колесо продолжало движение, вращаясь так, что с каждой точки его поверхности срывались капли с начальной скоростью, равной скорости этой точки. Определите, чему равна максимальная высота, которой достигли капли, оторвавшиеся от поверхности колеса в момент времени $\boldsymbol{t}$. Коэффициент трения скольжения колеса о поверхность – μ. Трением качения пренебрегите.

Примечание: Угловое ускорение $\vec{\beta}$ связано с моментом приложенных сил соотношением: $I\vec{\beta} = \vec{M}$, где I – момент инерции тела относительно оси вращения, $\vec{M}$ – суммарный момент внешних сил относительно этой же оси. Для круглого колеса, вращающегося вокруг своей оси $I = \frac{mR^2}{2}$.



Решение

Когда колесо поставили на горизонтальную поверхность, оно начинает двигаться с ускорением, проскальзывая. поскольку $\omega R > v_0$. Для поступательного движения ускорение положительное, для вращения- отрицательное. Когда будет выполняться соотношение $\omega R = v$, колесо начнет двигаться без проскальзывания и, соответственно, равномерно без ускорения.

1. Поступательное движение:

$$x(t) = x_0 + \frac{at^2}{2}$$

Ускорение колеса:

$$ma = \mu mg$$

$$a = \mu g$$

Сила трения будет препятствовать вращению, поэтому будет сонаправлена начальной скорости. Отсюда:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{\mu g t^2}{2}$$

Тогда скорость движения при наличии проскальзывания:

$$v(t) = v_0 + \mu g t$$

2. Вращательное движение:

$$\omega(t) = \omega_0 + \beta t$$

Пользуемся примечанием из условия, расписывая момент силы:

$$I\beta = M, I = \frac{mR^2}{2}, M = -\mu mgR$$

Отсюда:

$$\beta = -\frac{2\mu g}{R}$$

$$\omega(t) = \omega_0 - \frac{2\mu g}{R} t$$

3. Определяем момент времени $\tilde{t}$, когда движене с проскальзыванием переходит в движение без проскальзывания ($\omega R = v$):

$$\omega_0 R - \frac{2\mu g}{R} \tilde{t} R = v_0 + \mu g \tilde{t}$$

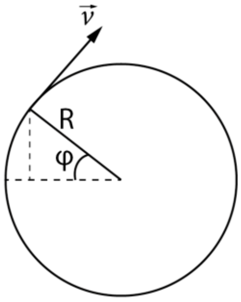
$$\tilde{t} = \frac{\omega_0 R - v_0}{3\mu g}$$

В этот момент времени:

$$v(\tilde{t}) = v_0 + \frac{\omega_0 R - v_0}{3} = \frac{2}{3} v_0 + \omega_0 R$$

Колесо продолжит двигаться дальше равномерно с такой скоростью.

4. Полет капель. Перейдем в систему отсчета, связанную с центром колеса.



Капли вылетают по касательной со скоростью $\omega R = \omega_0 R - 2\mu g t$, под некоторым углом φ. Начальная высота капли:

$$y_0(\varphi) = R + Rsin(\varphi)$$

Высота и скорость капли, вылетевшей в момент времени t, по мере полета на протяжении времени t':

$$y(\varphi, t', t) = R + Rsin(\varphi) + (\omega_0 R - 2\mu g t)\cos(\varphi)\, t' - \frac{g t'^2}{2}$$

$$v_y(\varphi, t', t) = (\omega_0 R - 2\mu g t) cos(\varphi) - g t'$$

Находим время подъема капли:

$$\widetilde{t'} = \frac{(\omega_0 R - 2\mu g t) cos(\varphi)}{g}$$

Тогда максимальная высота в зависимости от угла φ и момента времени вылета t:

$$y_{max}(\varphi, t) = R + Rsin(\varphi) + \frac{(\omega_0 R - 2\mu g t)^2 \cos(\varphi)^2}{2g}$$

5. Находим угол, под которым вылетает капля, достигающая наибольшей высоты среди всех капель, вылетающих в момент времени t:

$$\frac{\partial y_{max}(\varphi, t)}{\partial \varphi} = 0$$

Получаем:

$$\sin(\varphi) = \frac{gR}{(\omega_0 R - 2\mu g t)^2}$$

$$\cos(\varphi)^2 = 1 - \frac{(gR)^2}{(\omega_0 R - 2\mu g t)^4}$$

6. Максимальная высота подъема капель в произвольный момент времени $t < \tilde{t}$:

$$y_{max}(t) = R + \frac{gR^2}{2(\omega_0 R - 2\mu g t)^2} + \frac{(\omega_0 R - 2\mu g t)^2}{2g}$$

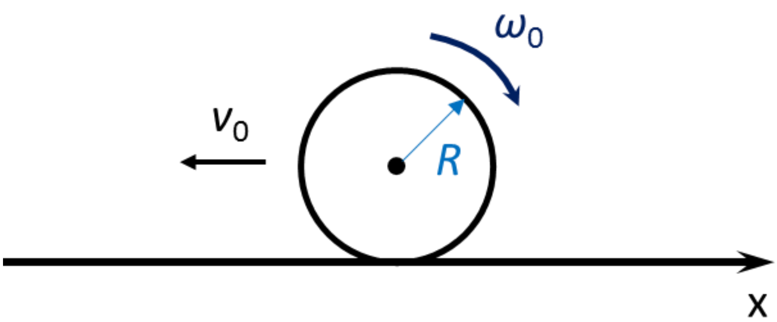
Если $t > \tilde{t}$:

$$y_{max} = R + \frac{gR^2}{2\left(\frac{\omega_0 R}{3} + \frac{2v_0}{3}\right)^2} + \frac{\left(\frac{\omega_0 R}{3} + \frac{2v_0}{3}\right)^2}{2g}$$

11 класс, задача 2, Вариант 3

Мокрое колесо радиусом R, вращающееся с частотой ω_0, держат навесу. В некоторый момент времени ***t₀***=0 колесо поставили на поверхность, сообщив ему начальную скорость $v_0 < \frac{\omega_0 R}{2}$ в горизонтальном направлении так, как показано на рисунке. Спустя время ***t*** колесо продолжало движение, вращаясь так, что с каждой точки его поверхности срывались капли с начальной скоростью, равной скорости этой точки. Определите, чему равна максимальная высота, которой достигли капли, оторвавшиеся от поверхности колеса в момент времени ***t***. Коэффициент трения скольжения колеса о поверхность – μ. Трением качения пренебрегите.

Примечание: Угловое ускорение $\vec{\beta}$ связано с моментом приложенных сил соотношением: $I\vec{\beta} = \vec{M}$, где I – момент инерции тела относительно оси вращения, $\vec{M}$ – момент внешних сил. Для круглого колеса, вращающегося вокруг своей оси $I = \frac{mR^2}{2}$.



Решение

Когда колесо поставили на горизонтальную поверхность, оно начинает проскальзывать, двигаясь с ускорением, поскольку $\omega R > -v_0$. Для поступательного движения ускорение положительное, для вращения- отрицательное. Когда будет выполняться соотношение $\omega R = v$, колесо начнет двигаться без проскальзывания и, соответственно, равномерно без ускорения.

1. Поступательное движение:

$$x(t) = x_0 + \frac{at^2}{2}$$

Ускорение колеса:

$$ma = \mu mg$$

$$a = \mu g$$

Трение будет препятствовать вращению колеса, ускорение будет направлено в сторону, противоположную направлению начальной скорости. Отсюда:

$$x(t) = x_0 - v_0 t + \frac{\mu g t^2}{2}$$

Тогда скорость движения при наличии проскальзывания:

$$v(t) = -v_0 + \mu g t$$

2. Вращательное движение:

$$\omega(t) = \omega_0 + \beta t$$

Пользуемся примечанием из условия, расписывая момент силы:

$$I\beta = M, I = \frac{mR^2}{2}, M = -\mu mgR$$

Отсюда:

$$\beta = -\frac{2\mu g}{R}$$

$$\omega(t) = \omega_0 - \frac{2\mu g}{R} t$$

3. Определяем момент времени $\tilde{t}$, когда движене с проскальзыванием переходит в движение без проскальзывания ($\omega R = v$):

$$\omega_0 R - \frac{2\mu g}{R} \tilde{t} R = -v_0 + \mu g \tilde{t}$$

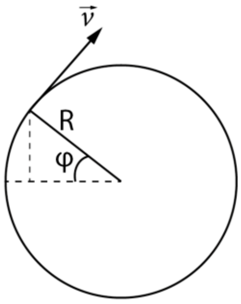
$$\tilde{t} = \frac{\omega_0 R + v_0}{3\mu g}$$

Скорость колеса в этот момент времени:

$$v(\tilde{t}) = -v_0 + \frac{\omega_0 R + v_0}{3} = \frac{\omega_0 R}{3} - \frac{2}{3} v_0$$

По условию сказано, что $v_0 < \frac{\omega_0 R}{2}$, следовательно колесо не поменяет направление движения.

4. Полет капель. Перейдем в систему отсчета, связанную с центром колеса.



Капли вылетают по касательной со скоростью $\omega R = \omega_0 R - 2\mu g t$, под некоторым углом φ. Начальная высота капли:

$$y_0(\varphi) = R + Rsin(\varphi)$$

Высота и скорость капли, вылетевшей в момент времени t, по мере полета на протяжении времени t':

$$y(\varphi, t', t) = R + Rsin(\varphi) + (\omega_0 R - 2\mu g t)\cos(\varphi)\, t' - \frac{g t'^2}{2}$$

$$v_y(\varphi, t', t) = (\omega_0 R - 2\mu g t) cos(\varphi) - g t'$$

Находим время подъема капли:

$$\widetilde{t'} = \frac{(\omega_0 R - 2\mu g t) cos(\varphi)}{g}$$

Тогда максимальная высота в зависимости от угла φ и момента времени вылета t:

$$y_{max}(\varphi, t) = R + Rsin(\varphi) + \frac{(\omega_0 R - 2\mu g t)^2 \cos(\varphi)^2}{2g}$$

5. Находим угол, под которым вылетает капля, достигающая наибольшей высоты среди всех капель, вылетающих в момент времени t:

$$\frac{\partial y_{max}(\varphi, t)}{\partial \varphi} = 0$$

Получаем:

$$\sin(\varphi) = \frac{gR}{(\omega_0 R - 2\mu g t)^2}$$

$$\cos(\varphi)^2 = 1 - \frac{(gR)^2}{(\omega_0 R - 2\mu g t)^4}$$

6. Максимальная высота подъема капель в произвольный момент времени $t < \tilde{t}$:

$$y_{max}(t) = R + \frac{gR^2}{2(\omega_0 R - 2\mu g t)^2} + \frac{(\omega_0 R - 2\mu g t)^2}{2g}$$

Если $t > \tilde{t}$:

$$y_{max} = R + \frac{gR^2}{2\left(\frac{\omega_0 R}{3} - \frac{2v_0}{3}\right)^2} + \frac{\left(\frac{\omega_0 R}{3} - \frac{2v_0}{3}\right)^2}{2g}$$

11 класс, задача 4, Вариант 1:

Высокий теплоизолированный герметичный цилиндрический сосуд с площадью основания ***S***, закрытый сверху невесомым поршнем, способным двигаться без трения, находится в поле тяжести планеты с атмосферой, состоящей из аргона (молярная масса $\boldsymbol{M_{Ar}}$). Температура атмосферы и ускорение свободного падения с высотой меняются незначительно. Внутри сосуда находится $\boldsymbol{\nu}$ моль аргона при той же температуре, что и снаружи.

1) Определите, на какой высоте находится поршень.
2) Газ в сосуде начинают медленно остужать. Определите, до какой температуры остудили газ, если поршень опустился до высоты ***H.***

Атмосферное давление на поверхности планеты, ускорение свободного падения и температуру атмосферы считайте известными.

Решение:

Вопрос 1): Зависимость концентрации атомов от высоты дается распределением Больцмана (или барометрической формулой):

$$n(y) = n_0 \exp\left(-\frac{Mgy}{RT}\right)$$

По условию нам дано, что в сосуде находится известное количество аргона, т. е. известно, сколько всего частиц находится в сосуде. Соотнесем это число с распределением концентраций атомов по высоте. Так, выделим некоторый слой газа внутри сосуда толщиной dy. Число частиц в этом слое будет:

$$dN(y) = n_0 \exp\left(-\frac{Mgy}{RT}\right) Sdy$$

Отсюда, взяв интеграл вплоть до высоты, на которой находится поршень, получаем выражение:

$$N = Sn_0 \cdot \frac{RT}{Mg}\left(1 - \exp\left(-\frac{MgH_0}{RT}\right)\right)$$

Откуда выражаем высоту H_0:

$$\frac{\nu Mg}{Sn_0kT} = 1 - \exp\left(-\frac{MgH_0}{RT}\right) => \exp\left(-\frac{MgH_0}{RT}\right) = 1 - \frac{\nu Mg}{Sn_0kT} => -\frac{MgH_0}{RT} = \ln\left(1 - \frac{\nu Mg}{Sn_0kT}\right) =>$$

$$H_0 = -\frac{RT}{Mg} \ln\left(1 - \frac{\nu Mg}{Sn_0kT}\right)$$

По условию нам дано, что давление аргона у поверхности равно P_0. Поскольку поршень находится в покое, то давления на него снаружи и изнутри равны. А так как внутри и снаружи сосуда находится один и тот же газ при той же температуре, а толщина поршня незначительная, то давление аргона у основания сосуда внутри него равно тому же P_0. Отсюда получаем окончательное выражение для высоты, на которой находится поршень:

$$H_0 = -\frac{RT}{Mg}\ln\left(1 - \frac{\nu Mg}{SP_0}\right)$$

Вопрос 2) Далее, газ в сосуде начинает остывать, в то время как снаружи температура не меняется. Давление внутри сосуда будет уменьшаться, поршень будет опускаться. Будет выполняться равенство давлений на поршень снаружи (выражение слева) и изнутри (выражение справа):

$$P_0 \exp\left(-\frac{MgH}{RT}\right) = P_1 \exp\left(-\frac{MgH}{RT_1}\right)$$

Давление внутри сосуда у его основания P_1 теперь будет отличаться от P_0. Чтобы его определить, вновь запишем выражение для полного числа частиц в сосуде, которое остается постоянным:

$$N = Sn_1 \cdot \frac{RT_1}{Mg}\left(1 - \exp\left(-\frac{MgH}{RT_1}\right)\right) => \nu = Sn_1 \cdot \frac{kT_1}{Mg}\left(1 - \exp\left(-\frac{MgH}{RT_1}\right)\right) =>$$

$$n_1 = \frac{\nu Mg}{SkT_1} \cdot \frac{1}{1 - \exp\left(-\frac{MgH}{RT_1}\right)}$$

$$P_1 = n_1 kT_1$$

H – конечное положение поршня. Необходимо найти $T_1(H)$.

Имеем:

$$P_0 \exp\left(-\frac{MgH}{RT_0}\right) = n_1 kT_1 \exp\left(-\frac{Mgy}{RT_1}\right) => P_0 \exp\left(-\frac{MgH}{RT_0}\right) = \frac{\nu MgkT_1}{SkT_1} \cdot \frac{\exp\left(-\frac{MgH}{RT_1}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{MgH}{RT_1}\right)}$$

$$\exp\left(-\frac{MgH}{RT_0}\right) = \frac{\nu Mg}{SP_0} \cdot \frac{\exp\left(-\frac{MgH}{RT_1}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{MgH}{RT_1}\right)} => 1 - \exp\left(-\frac{Mgy}{RT_1}\right)$$

$$= \frac{\nu Mg}{SP_0} \cdot \exp\left(-\frac{MgH}{RT_1}\right)\exp\left(\frac{MgH}{RT_0}\right)$$

$$\exp\left(\frac{MgH}{RT_1}\right) - 1 = \frac{\nu Mg}{SP_0} \cdot \exp\left(\frac{MgH}{RT_0}\right) => \frac{MgH}{RT_1} = \ln\left(\frac{\nu Mg}{SP_0} \cdot exp\left(\frac{MgH}{RT_0}\right) + 1\right)$$

Получаем ответ:

$$T_1(H) = \frac{MgH}{R \cdot \ln\left(\frac{\nu Mg}{SP_0} \cdot exp\left(\frac{MgH}{RT_0}\right) + 1\right)}$$

Если бы не было зависимости от высоты, т.е. когда $Mgy \ll RT_0$:

$$T_1(y) = \frac{Mgy}{R \cdot \ln\left(\frac{\nu Mg}{SP_0} \cdot exp\left(\frac{Mgy}{RT_0}\right) + 1\right)} \approx \frac{Mgy}{R \cdot \ln\left(\frac{\nu Mg}{SP_0} + 1\right)} \approx \frac{Mgy}{R \cdot \frac{\nu Mg}{SP_0}} = \frac{ySP_0}{R\nu} = \frac{P_0 V}{\nu R}$$

11 класс, задача 4, Вариант 2

В пробирке, закрытой пробкой массы ***m***, находится ***ν*** моль аргона при температуре ***T*** (молярная масса ***M_{Ar}***). Пробирка закреплена в центрифуге радиуса ***R***, вращающейся с круговой частотой **ω_0**, дном к ее центру. Определите силу трения покоя, действующую на пробку. Площадь поперечного сечения пробирки ***S***, высота ***H***, расстояние от дна пробирки до центра центрифуги ***R***, причем ***R>>H.*** Внутри центрифуги вакуум. Силой тяжести пренебречь.

Решение

Решение удобно проводить в неинерциальной системе отсчета, связанной с центрифугой. В этой системе отсчета при вращении центрифуги на пробку будут действовать центробежная сила, сила трения и сила давления газа внутри пробирки. Чтобы пробка начала вылетать, должно выполниться следующее соотношение:

$$m\omega_0^2 R + p_{Ar} S = F,$$

Давление аргона на пробку:

$$p_{Ar} = n_0 kT,$$

n_0 – концентрация атомов вблизи пробки. Распределение атомов внутри пробирки будет подчиняться распределению Больцмана:

$$n(r) = n_0 \exp\left(-\frac{m_0 g_{eff} r}{kT}\right),$$

где $m_0 g_{eff} r$ – потенциальная энергия атома, находящегося в пробирке на расстоянии r от пробки.

Атом, находясь в пробирке, будет находится в потенциальном поле центробежной силы. Поскольку высота пробирки много меньше радиуса центрифуги, вариацией центробежной силы с координатой внутри пробирки можно пренебречь. Тогда потенциальная энергия атома в этом поле, отсчитываемая от пробки, будет определяться как:

$$U = \int_0^r m_0 \omega_0^2 R dr = m_0 \omega_0^2 r R$$

Где $m_0 = M_{Ar}/N_A$ – масса атома аргона (N_A – постоянная Авогадро).

Само распределение тогда:

$$n(r) = n_0 \exp\left(-\frac{m_0 \omega_0^2 r R}{kT}\right)$$

По условию дано количество вещества аргона в пробирке, т. е. общее количество атомов N. Его можно записать как:

$$N = S\int_0^H n(r)dr = S\int_0^H n_0 \exp\left(-\frac{m_0\omega_0^2 rR}{kT}\right)dr = Sn_0\frac{kT}{m_0\omega_0^2 R}\left(1-\exp\left(-\frac{m_0\omega_0^2 HR}{kT}\right)\right)$$

Откуда можно выразить концентрацию частиц у пробки n_0:

$$n_0 = \frac{Nm_0\omega_0^2 R}{SkT\left(1-\exp\left(-\frac{m_0\omega_0^2 HR}{kT}\right)\right)}$$

Тогда давление газа на пробку будет равно:

$$p_{Ar} = n_0 kT = \frac{\nu M_{Ar}\omega_0^2 R}{S\left(1-\exp\left(-\frac{m_0\omega_0^2 HR}{kT}\right)\right)}$$

И искомая сила трения:

$$F = m\omega_0^2 R + p_{Ar}S = m\omega_0^2 R + \frac{\nu M_{Ar}\omega_0^2 R}{\left(1-\exp\left(-\frac{m_0\omega_0^2 HR}{kT}\right)\right)}$$

$$= \omega_0^2 R\left(m + \frac{\nu M_{Ar}}{\left(1-\exp\left(-\frac{m_0\omega_0^2 HR}{kT}\right)\right)}\right)$$

11 класс, задача 5, Вариант 1:

Невесомая и нерастяжимая тонкая нить плотно виток к витку намотана на цилиндр радиуса **R** в **N** оборотов как показано на рисунке. К нижнему её концу привязан груз массой **m**. С какой силой надо тянуть свободный конец нити вверх, чтобы поднять груз, если коэффициент трения между нитью и поверхностью цилиндра составляет **μ**? Цилиндр закреплён горизонтально и не вращается.

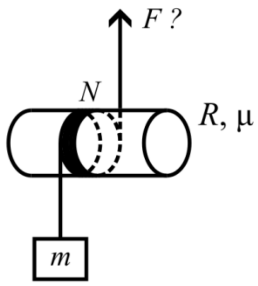


Рисунок 1. Иллюстрация нити, намотанной на цилиндр.

Решение:

Пусть ***T*** - натяжение нити. Когда она намотана на цилиндр и натянута, она прижимается к его поверхности с некоторой силой, зависящей от натяжения. Обозначим линейную плотность этой силы за $\boldsymbol{f(T)}$. Из-за этой силы, чтобы поднять груз, надо преодолеть не только силу тяжести, но и силу трения.

Допустим, что нить тянут с нужной силой, и груз поднимается с постоянной скоростью. Рассмотрим распределение сил в один из моментов времени.

Для небольшого участка нити ***dl*** сила трения составит $\boldsymbol{\mu f(T) dl}$. На такую величину увеличится натяжение нити на ***dl*** ближе к точке приложения силы. При этом величину ***dl*** можно выбрать сколь угодно малой, чтобы можно было считать, что $\boldsymbol{f(T)}$ постоянна на этом участке. Тогда можно записать уравнение:

$$\boldsymbol{T(l+dl) \ = \ T(l) + \mu f(T) dl}$$

Или

$$\boldsymbol{\frac{T(l+dl) \ - \ T(l)}{dl} = \mu f(T)}$$

Устремляя ***dl*** к нулю, можно перейти к дифференциальному уравнению

$$\boldsymbol{\frac{\partial T}{\partial l} = \mu f(T)}$$

Чтобы его решить, необходимо найти зависимость $\boldsymbol{f(T)}$

Рассмотрим, с какой силой небольшой участок нити ***dl*** прижимается к цилиндру, если считать, что на его масштабе сила натяжения не меняется. Для этого сделаем следующее построение (рисунок 2).

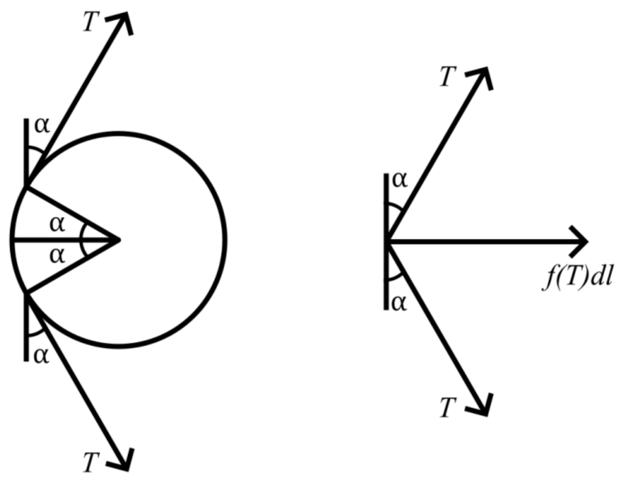


Рисунок 2. Иллюстрация возникновения силы, прижимающей нить к цилиндру

Сила $\boldsymbol{f(T)dl}$ - это результат векторного сложения сил натяжения нити, действующий на разные концы участка ***dl***. Из построения, используя угол $\boldsymbol{\alpha}$, её можно найти:

$$\boldsymbol{f(T)dl = 2T\sin(\alpha)}$$

Если учесть изменение натяжения нити, то сила будет:

$$\boldsymbol{f(T)dl = (2T + \mu f(T)dl)\sin(\alpha)}$$

Однако ввиду малости углов величина добавки будет второго порядка малости, которой можно пренебречь.

Так как ***dl*** можно выбирать сколь угодно малым, то и $\boldsymbol{\alpha}$ будет малой величиной, поэтому можно использовать свойство синуса для малого угла:

$$\boldsymbol{\sin(\alpha) \approx \alpha}$$

Также $\boldsymbol{\alpha}$ можно выразить через длину дуги ***dl***, используя соотношение

$$\boldsymbol{dl} = 2\boldsymbol{\alpha R}$$

Подставляя эти соотношения и сокращая $\boldsymbol{dl}$, получаем

$$\boldsymbol{f(T)} = \frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{R}}$$

Теперь можно записать дифференциальное уравнение в виде

$$\frac{\boldsymbol{\partial T}}{\boldsymbol{\partial l}} = \frac{\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{R}}\,\boldsymbol{T}$$

Его решение

$$T(l) = T_0 \exp\left(\frac{\mu}{R} l\right)$$

Где координату l вдоль нити можно отсчитывать от точки, где нить впервые касается цилиндра. В этой точке

$$T(0) = mg$$

Откуда

$$T_0 = mg$$

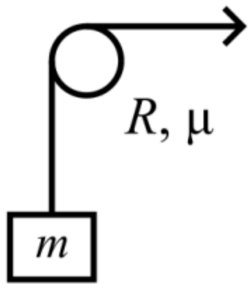
Длина N витков нити составляет $2\pi RN$, откуда можно найти натяжение нити в конечной точке, которое равно силе, с которой необходимо тянуть:

$$F = T(2\pi RN) = mg\exp(2\pi\mu N)$$

Ответ: $F = mg\exp(2\pi\mu N)$

11 класс, задача 5, Вариант 2:

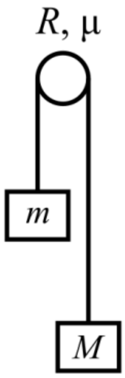
Строитель поднимает груз массой **m** за лёгкую нерастяжимую верёвку через неподвижный (не может вращаться вокруг своей оси) блок радиуса **R** (рисунок 1). Угол между частями верёвки составляет 90 градусов, а коэффициент трения нити о поверхность блока — **μ**. С какой минимальной силой строителю надо тянуть за верёвку, чтобы груз начал подниматься?



Ответ: $F = mg\exp(\pi\mu/2)$

11 класс, задача 5, Вариант 3:

Два груза с массами **m** и **M** закреплены на концах лёгкой нерастяжимой верёвки, которая перекинута через бревно с круглым сечением с радиусам **R** (рисунок 1). При каком максимальном соотношении масс грузов **M/m** они останутся неподвижными, если коэффициент трения между верёвкой и бревном составляет **μ**? Бревно закреплено горизонтально и не вращается.



Ответ: $M/m = \exp(\pi\mu)$