

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**Олимпиада школьников СПбГУ «Инженерные системы»
по комплексу предметов
(математика, информатика, физика и химия)**

**Примеры заданий заключительного этапа
2023/2024 учебный год**

8-11 классы

Олимпиада школьников СПбГУ по математике
Примеры заданий заключительного этапа
2023/2024 учебный год

8-9 классы

Задача 1

Вариант 1.

Сотрудник фирмы ездит на работу на автомобиле по кольцевой дороге 40 км. Обычно он двигается с некоторой постоянной скоростью, отличающейся от разрешенной не более, чем на 20 %, и приезжает на работу ровно в 9:00. (Разрешенная скорость на кольцевой дороге составляет 110 км/ч). Однажды в городе пошел снег, и всем автомобилистам пришлось снизить свою скорость на 40 км в час. Найдите, с какой обычной скоростью может ездить сотрудник, если в этот день он приехал на работу в 9 часов t минут и не опоздал к началу работы в 9:30 (t — натуральное число; скорость также считаем натуральным числом, как обычно и показывает спидометр).

Дайте аналитическое решение задачи, а также составьте компьютерную программу, которая находит обычную скорость сотрудника, выполняя непосредственную проверку всех допустимых условием задачи значений этой скорости.

Ответ: 100 или 120 км/ч.

Вариант 2.

Сотрудник фирмы ездит на работу на автомобиле по кольцевой дороге 40 км. Обычно он двигается с некоторой постоянной скоростью, отличающейся от разрешенной не более, чем на 30 %, и приезжает на работу ровно в 10:00. (Разрешенная скорость на кольцевой дороге составляет 110 км/ч). Однажды в городе пошел снег, и всем автомобилистам пришлось снизить свою скорость на 20 км в час. Найдите, с какой обычной скоростью может ездить сотрудник, если в этот день он приехал на работу в 10 часов t минут и не опоздал к началу работы в 10:30 (t — натуральное число; скорость также считаем натуральным числом, как обычно и показывает спидометр).

Дайте аналитическое решение задачи, а также составьте компьютерную программу, которая находит обычную скорость сотрудника, выполняя непосредственную проверку всех допустимых условием задачи значений этой скорости.

Ответ: Три возможных ответа: $t=4$ $V=120$; $t=6$ $V=100$; $t=10$ $V=80$.

Задача 2

Вариант 1.

Каждый черный рыцарь может провести поединок либо с белым рыцарем, либо с другим черным рыцарем, при этом поединки между белыми рыцарями невозможны. Пусть всего в группе 91 рыцарь, причем среди них заведомо найдутся рыцари обоих цветов.

- 1) При каком числе черных рыцарей сможет получиться наибольшее количество поединков между черными и белыми рыцарями?
- 2) При каком числе белых рыцарей количество их возможных поединков с черными рыцарями будет равно количеству возможных поединков черных рыцарей между собой?

Ответ: 1) 45 и 46; 2) 30.

Вариант 2.

Каждый черный рыцарь может провести поединок либо с белым рыцарем, либо с другим черным рыцарем, при этом поединки между белыми рыцарями невозможны. Пусть всего в группе 101 рыцарь, причем среди них заведомо найдутся рыцари обоих цветов.

- 1) При каком числе белых рыцарей сможет получиться наибольшее количество поединков между черными и белыми рыцарями?
- 2) При каком числе белых рыцарей количество их возможных поединков с черными рыцарями будет в три раза больше количества возможных поединков черных рыцарей между собой?

Ответ: 1) 50 и 51; 2) 60.

Задача 3

Вариант 1.

Аэропорт может принимать самолеты с интервалом не менее 5 минут — за это время обеспечиваются безопасные условия посадки для следующего самолета. Каждые 6 минут к аэропорту подлетает новый самолет и у диспетчера появляется информация:

- 1) Возможное время ожидания в минутах – это время, которое самолет может ждать, летая вокруг аэропорта. По истечении этого времени самолет должен уйти на запасной аэродром.
- 2) Необходимое время для полета к запасному аэродрому.

Информация появляется в виде таблицы:

Номер самолета	Время появления информации	Время ожидания	Время до запасного аэродрома
1	12:00	30 минут	50 минут
2	12:06	10 минут	20 минут
3	12:12	10 минут	20 минут
4	12:18	8 минут	20 минут
5	12:24	10 минут	30 минут

В 12:00 в аэропорту изменились погодные условия — ветер нанес на посадочную полосу снег. Аэродромные службы запросили 15 минут на очистку полосы. В 12:14 выяснилось, что потребуется еще 5 минут на проверку оборудования и выполнили свои обязательства. В 12:20 сел первый самолет. Какой?

Диспетчер старается посадить как можно больше самолетов, т. к. уход на запасной аэродром — это финансовые потери, прямо пропорциональные времени полета до запасного аэродрома.

Помогите диспетчеру составить график посадки самолетов. Составьте компьютерную программу, которая проводит расчет каждую минуту. Результат выведите в виде таблицы следующего формата:

Время работы программы	Очередь на посадку	Номер самолета, который ушел на запасной аэродром
12:00	x, ...	
12:01	x, y, ...	
12:02	x, y, z, ...	
12:03	x, z, ...	y
...		

Если самолет отправляется на запасной аэродром, то он выбывает из очереди на посадку и далее не рассматривается.

Внимание!

- 1) Программу необходимо написать на языке Pascal, C, C++ или любом другом, но не используя встроенную функцию автоматической сортировки.
- 2) Программа должна содержать комментарии, облегчающие понимание логики действия программного кода.

Ответ: Первым садится самолет №3. Очередь на посадку: 4, 1, 5. Самолет №2 уходит на запасной аэродром.

Вариант 2.

Аэропорт может принимать самолеты с интервалом не менее 5 минут — за это время обеспечиваются безопасные условия посадки для следующего самолета. Каждые 7 минут к аэропорту подлетает новый самолет и у диспетчера появляется информация:

- 1) Возможное время ожидания в минутах — это время, которое самолет может ждать, летая вокруг аэропорта. По истечении этого времени самолет должен уйти на запасной аэродром.
- 2) Необходимое время для полета к запасному аэродрому.

Информация появляется в виде таблицы:

Номер самолета	Время появления информации	Время ожидания	Время до запасного аэродрома
1	12:00	30 минут	30 минут
2	12:07	15 минут	20 минут
3	12:14	15 минут	20 минут
4	12:21	7 минут	30 минут
5	12:28	6 минут	20 минут

В 12:00 в аэропорту изменились погодные условия — ветер нанес на посадочную полосу снег. Аэродромные службы запросили 15 минут на очистку полосы. В 12:14 выяснилось, что потребуется еще 5 минут на проверку оборудования и выполнили свои обязательства. В 12:20 сел первый самолет. Какой?

Диспетчер старается посадить как можно больше самолетов, т. к. уход на запасной аэродром — это финансовые потери, прямо пропорциональные времени полета до запасного аэродрома.

Помогите диспетчеру составить график посадки самолетов. Составьте компьютерную программу, которая проводит расчет каждую минуту. Результат выведите в виде таблицы следующего формата:

Время работы программы	Очередь на посадку	Номер самолета, который ушел на запасной аэродром
12:00	х, ...	
12:01	х, у, ...	
12:02	х, у, z, ...	
12:03	х, z, ...	у
...		

Если самолет отправляется на запасной аэродром, то он выбывает из очереди на посадку и далее не рассматривается.

Внимание!

- 1) Программу необходимо написать на языке Pascal, C, C++ или любом другом, но не используя встроенную функцию автоматической сортировки.
- 2) Программа должна содержать комментарии, облегчающие понимание логики действия программного кода.

Ответ: первым на посадку зайдет самолет №2. Следом за ним №4 и №1. На запасной аэродром уйдут самолеты №3 и №5.

Задача 4

Вариант 1.

В свободном пространстве, далеко от всех небесных объектов, две частицы, одна с массой $m_1 = 6 \cdot 10^{-12}$ кг и зарядом $Q_1 = 2,43 \cdot 10^{-13}$ Кл, а другая с массой $m_2 = 1,2 \cdot 10^{-11}$ кг и зарядом $Q_2 = 2,43 \cdot 10^{-13}$ Кл, движутся с постоянной скоростью так, что расстояние $d = 1,5$ см между ними также остается постоянным. Как это возможно? Определите скорость частиц.

Ответ: Описанное движение возможно, если в этой системе отсчета две частицы выполняют равномерное круговое движение вокруг своего центра масс.

Линейная скорость первой частицы : 6.34 см/с.

Для второй частицы: 3.17 см/с.

Вариант 2.

В свободное пространство выпускаются две пылинки на расстоянии $d_1 = 6$ см друг от друга с нулевой начальной скоростью, одна массой $m_1 = 1,7 \cdot 10^{-11}$ кг и имеющая электрический заряд $Q_1 = 1 \cdot 10^{-9}$ Кл, другая массой $m_2 = 1,3 \cdot 10^{-11}$ кг и имеющая электрический заряд $Q_2 = -5 \cdot 10^{-9}$ Кл.

- 1) Где встретятся две пылинки?
- 2) Определить скорость, с которой пылинки сближаются друг с другом, когда они находятся на расстоянии $d_2 = 1$ см.

Ответ: две пылинки встречаются в своем центре масс.

Скорость сближения двух объектов: 1009 м/с.

Задача 5

Вариант 1.

Смесь металла и его оксида общей массой 6,74 грамма без остатка растворили в концентрированном растворе гидроксида натрия. При этом выделился водород объемом 1,034 литра (н.у.). Известно, что этот объем водорода без остатка может полностью восстановить металл из оксида в смеси.

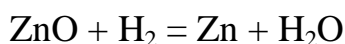
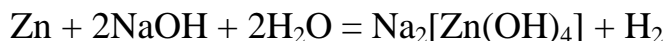
1. Определите металл и формулу его оксида.
2. Рассчитайте массовые доли металла и оксида в смеси.
3. Запишите уравнения всех реакций, описывающих процессы в задаче.

Ответ: 1. Соединения в смеси: цинк и оксид цинка ZnO. Масса цинка: 3г.

2. На основании полученного выше и массы смеси 6,74 грамма по условию получаем массовые доли компонентов смеси:

$$\omega(\text{Zn}) = 44,5\%, \omega(\text{ZnO}) = 55,5\%.$$

3. Уравнения трех реакций:



Вариант 2.

Смесь металла и его оксида общей массой 11,23 грамма без остатка растворили в концентрированном растворе гидроксида натрия. При этом выделился водород объемом 1,723 литра (н.у.). Известно, что этот объем водорода без остатка может полностью восстановить металл из оксида в смеси.

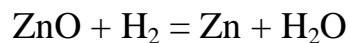
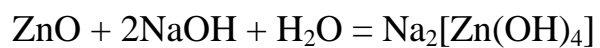
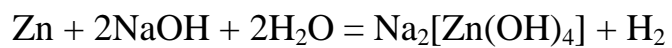
1. Определите металл и формулу его оксида.
2. Рассчитайте массовые доли металла и оксида в смеси.
3. Запишите уравнения всех реакций, описывающих процессы в задаче.

Ответ: 1. Соединения в смеси – цинк и оксид цинка ZnO. Масса цинка: 5г.

2. На основании полученного выше и массы смеси 11,23 грамма по условию получаем массовые доли компонентов смеси:

$$\omega(\text{Zn}) = 44,5\%, \omega(\text{ZnO}) = 55,5\%.$$

3. Уравнения трех реакций:



Олимпиада школьников СПбГУ по математике
Примеры заданий заключительного этапа
2023/2024 учебный год

10-11 классы

Задача 1

а) Найдите хотя бы одну пару натуральных чисел x и y для которых выполняются следующие условия: $2023^2 \leq x \leq y \leq 2024^2$ и сумма квадратов этих чисел $x^2 + y^2$ делится на $2023^2 + 1$.

б) Предложите алгоритм (или напишите программу), который позволяет находить все возможные пары таких чисел, но не осуществляет простой полный перебор всех чисел из диапазона $[2023^2; 2024^2]$.

Ответ: решение должны быть натуральными решениями уравнений вида:

$$n^2 + m^2 = k(2023^2 + 1), k = 1, 2, 3, \dots, 7.$$

Для $k = 1$: (1;2023), (497;1961), (779;1867), (1213;1619).

Для $k = 2$: (406;2832), (1088;2646), (1464;2458), (2022; 2024).

Для $k = 4$: (2;4046), (1558;3734), (994;3922), (2426;3238).

Для $k = 5$: (309;4513), (807;4451), (967;4419), (2025;4045), (2955;3425).

Задача 2

Вариант 1.

Катер перевозит пассажиров между двумя пристанями на озере, находящимися на расстоянии 12 км друг от друга. Пусть скорость катера без пассажиров равна 10 км/ч, а если он везет N пассажиров, то его скорость составляет 98 % от скорости катера с $N - 1$ пассажиром на борту. В течение дня катер сделал пять рейсов туда и пять обратно, перевозя при этом 21, 6, 9, 15, 24, 12, 18, 27 и 3 пассажира, а последний обратный рейс совершил без пассажиров. Найдите среднюю скорость катера за все время движения между пристанями, включая в это время также и время, которое требуется для посадки и высадки пассажиров. Принять, что на посадку одного пассажира уходит одна минута, а на его высадку — полминуты.

Ответ: 6,19 км/ч.

Вариант 2.

Катер перевозит пассажиров между двумя пристанями на озере, находящимися на расстоянии 10 км друг от друга. Пусть скорость катера без пассажиров равна 8 км/ч, а если он везет N пассажиров, то его скорость составляет 99 % от скорости катера с $N - 1$ пассажиром на борту. В течение дня катер сделал четыре рейса туда и четыре обратно, перевозя при этом 10, 5, 25, 15, 30, 35 и 20 пассажиров, а последний обратный рейс совершил без пассажиров. Найдите среднюю скорость катера за все время движения между пристанями, включая в это время также и время, которое требуется для посадки и высадки пассажиров. Принять, что на посадку одного пассажира уходит одна минута, а на его высадку — полминуты.

Ответ: 5,16 км/ч.

Задача 3

Вариант 1.

Дана катушка с $N = 200$ витками и площадью витка $A = 0,02 \text{ м}^2$, которая размещена рядом с мощным магнитом на энергетической установке. Катушка имеет сопротивление $R = 10 \text{ Ом}$, индуктивность $L = 0,1 \text{ Гн}$ и вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 50 \text{ рад/с}$ в магнитном поле с индукцией $B = 0,5 \text{ Тл}$.

- 1) Вычислите полное сопротивление Z катушки, учитывая как ее сопротивление, так и индуктивность.
- 2) Определите ток I , текущий через катушку как функцию времени.
- 3) Напишите программный код на Python (или на любом другом языке, например, Pascal, C или C++) для построения графиков как индуцированной ЭДС, так и тока в зависимости от времени.

Ответ: Индуцированная ЭДС: $\varepsilon(t) = -N \cdot B \cdot A \cdot \omega \cdot \sin(\omega t)$.

Замечание: программная реализация должна учитывать условия задачи.

Вариант 2.

Катушка с $N = 150$ витками и площадью витка $A = 0,01 \text{ м}^2$ помещена в переменное магнитное поле, создаваемое соленоидом. Катушка имеет сопротивление $R = 8 \text{ Ом}$ и индуктивность $L = 0,15 \text{ Гн}$. Индукция магнитного поля изменяется со временем по закону $B(t) = B_0 \cdot \sin(\omega t)$, где $B_0 = 0,4 \text{ Тл}$ и $\omega = 30 \text{ рад/с}$.

- 1) Выразите индуцированную ЭДС $\varepsilon(t)$ в катушке в зависимости от времени, учитывая изменение магнитного поля.
- 2) Определите полное сопротивление $Z(t)$ катушки как функцию времени.
- 3) Напишите программный код на Python (или на любом другом языке, например Pascal, C или C++) для построения графиков как индуцированной ЭДС, так и тока в зависимости от времени.

Ответ: Полное сопротивление ($Z(t)$) катушки в цепи RL: $Z(t) = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$.

Замечание: программная реализация должна учитывать условия задачи.

Задача 4

Вариант 1

Цивилизация в соседней галактике собирается отправить межпланетную экспедицию, используя для поддержания работы оборудования на своих кораблях энергию, выделяющуюся в химических реакциях. Из недр своей планеты они научились добывать карбонил железа $\text{Fe}(\text{CO})_5$ и решили использовать его в качестве источника энергии. Инженерам нужно выбрать между двумя вариантами:

1. брать на борт карбонил железа и использовать энергию реакций окисления карбонила до углекислоты и высшего оксида металла В;
2. брать на борт только газообразный продукт D реакции разложения карбонила железа и использовать только энергию его окисления.

Оцените, какой из этих вариантов предпочтительнее и во сколько раз, если рассматривать их с точки зрения удельной энергии на массу реагентов, которые расходуются в ходе реакций. Используйте значения энтальпий образования:

$$\Delta H_{f\text{CO}_2}^0 = -393 \text{ кДж/моль}, \quad \Delta H_{f\text{Fe}(\text{CO})_5}^0 = -766 \text{ кДж/моль},$$

$$\Delta H_{f\text{B}}^0 = -824 \text{ кДж/моль}, \quad \Delta H_{f\text{D}}^0 = -110 \text{ кДж/моль},$$

$$\Delta H_{f\text{CO}_2}^0 = -393 \text{ кДж/моль}.$$

Ответ: использовать угарный газ выгоднее (второй вариант).

Вариант 2

Цивилизация в соседней галактике собирается отправить межпланетную экспедицию, используя для поддержания работы оборудования на своих

кораблях энергию, выделяющуюся в химических реакциях. Инженерам нужно выбрать между двумя вариантами:

1. использовать кислород и карбид А, массовая доля углерода в котором $\omega_C = 0.375$;
2. использовать только газообразный продукт В, получающийся в реакции карбида А с водой, и кислород, а твердый продукт D, получающийся в той же реакции карбида с водой, оставить на планете.

Известно, что вещество D способно образовывать среднюю соль E с углекислотой — цивилизации было известно, что энтальпия образования средних солей меньше, чем кислых, поэтому они решили использовать реакцию с получением средней соли. Считаем, что имеется возможность полностью использовать энергию любой реакции и использовать продукты реакции в качестве исходных для проведения новых реакций.

Оцените, какой из этих вариантов эффективнее и во сколько раз, если рассматривать их с точки зрения удельной энергии на массу реагентов, которые расходуются в ходе реакций. Используйте значения энтальпий образования:

$$\Delta H_{fA}^o = -58.9 \text{ кДж/моль}, \quad \Delta H_{fH_2O}^o = -286 \text{ кДж/моль},$$

$$\Delta H_{fD}^o = -985 \text{ кДж/моль}, \quad \Delta H_{fE}^o = -1207 \text{ кДж/моль},$$

$$\Delta H_{fB}^o = 227 \text{ кДж/моль}, \quad \Delta H_{fCO_2}^o = -393 \text{ кДж/моль}.$$

Ответ: более эффективно брать на борт ацетилен и кислород (вариант 2).

Задача 5

Вариант 1.

Для определения вида кинетического уравнения реакции взаимодействия веществ А и В было проведено три эксперимента, в которых варьировали концентрации веществ и измеряли скорость реакции.

В первом эксперименте при концентрации веществ А и В равным 0,2 моль/л и 0,1 моль/л соответственно, скорость реакции составила 2,524 моль/(л · с). Во втором эксперименте концентрацию вещества А увеличили в полтора раза, а концентрацию вещества В оставили прежней; скорость реакции при этом тоже возросла тоже в полтора раза. В третьем эксперименте концентрацию А увеличили в два раза относительно первого эксперимента, а концентрацию В — в три раза. Скорость реакции при этом составила 18,864 моль/(л · с).

1. Запишите кинетическое уравнение для описанной реакции;
2. Чему равен общий порядок реакции?
3. Рассчитайте, чему равна скорость этой реакции, если концентрации **А** и **В** будут составлять 0,25 и 0,5 моль/л соответственно.

Ответ: 1. кинетическое уравнение в конечном виде: $v = 200 * C_A^1 * C_B^{1,2}$

2. Общий порядок – сумма частных порядков реакции по веществам (степени при концентрациях веществ в уравнении). В данном случае он равен 2,2.

3. Скорость равна 21,76 моль/(л*с).

Вариант 2.

Для определения вида кинетического уравнения реакции взаимодействия веществ **А** и **В** было проведено три эксперимента, в которых варьировали концентрации веществ и измеряли скорость реакции.

В первом эксперименте при одинаковых концентрациях веществ **А** и **В** равных 0,1 моль/л скорость реакции составила $1,23 \cdot 10^{-3}$ моль/(л·с). Во втором эксперименте концентрацию вещества **В** увеличили в два раза, а концентрацию вещества **А** оставили прежней; скорость при этом возросла в два раза. В третьем эксперименте концентрацию **А** увеличили в три раза относительно первого эксперимента, а концентрация **В** была, как в первом эксперименте. Скорость реакции при этом относительно первого эксперимента возросла в 4 раза.

1. Запишите кинетическое уравнение для описанной реакции.
2. Чему равен общий порядок реакции?
3. Рассчитайте, чему равна скорость рассматриваемой реакции, если концентрации **А** и **В** будут составлять 0,25 и 0,5 моль/л соответственно.

Ответ: 1. Кинетическое уравнение $v = 0,224 * C_A^{1,26} * C_B^1$

2. Общий порядок – сумма частных порядков реакции по веществам (степени при концентрациях веществ в уравнении). В данном случае он равен 2,26.

3. Скорость будет равна 0,0195 моль/(л*с).