САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Олимпиада школьников СПбГУ по математике

Примеры заданий отборочного этапа

2023/2024 учебный год

6-11 классы

Олимпиада школьников СПбГУ по математике
Примеры заданий отборочного этапа
2023/2024 учебный год

Задания для 10–11 классов

1. (10 баллов) *Хромая ладья бьёт ближайшие 15 клеток слева, справа, сверху и снизу (т.е. на бесконечной клетчатой плоскости она бы била* 4×15 *клеток, не считая той, на которой стоит). Какое наибольшее количество не бьющих друг друга хромых ладей можно поставить на доску* 193×193 *так, чтобы они не били друг друга?*

Ответ: 2329.

Решение. Обозначим через $[i,j]$ — i-ю по горизонтали и j-ю по вертикали клеточку; i, j от 1 до 193. Будем расставлять хромые ладьи «диагоналями»:

- на $[i,i]$, где i от 1 до 193;
- на $[i+16,i]$ и на $[i,i+16]$, где i от 1 до 177;
- на $[i+32,i]$ и на $[i,i+32]$, где i от 1 до 161;
- и т. д.
- на $[i+192,i]$ и на $[i,i+192]$, где $i=1$.

Легко заметить, что при такой расстановке хромые ладьи не бьют друг друга, т. к. расстояние между ними в любой горизонтали и в любой вертикали ровно 15 клеток. Вычислим количество расставленных хромых ладей:

$$193+2\cdot(177+161+\ldots+17+1)=193+2\cdot\frac{12\cdot(177+1)}{2}=193+12\cdot 178=2329.$$

Теперь покажем, что большее количество хромых ладей на заданном поле не расставить. Рассмотрим полосу поля размера 16×193 (16 строк во всю длину поля). В такой полосе нельзя расставить более 193 хромых ладей, т. к. иначе в какой-нибудь вертикали окажется более 1 хромой ладьи и они будут бить друг друга. Наше поле разбивается на 12 таких полос и остается полоска 1×193. В полоске можно расставить не более 13 хромых ладей (потому что на любой полосочке 1×16 — не более одной, а таких полосочек в полоске 12 штук и ещё 1 клеточка, на которую можно поставить одну хромую ладью). Таким образом, расставить более $193\times 12+12+1=2329$ хромых ладей, чтобы они не били друг друга, на поле 193×193 нельзя.

2. (20 баллов) *Положительные действительные числа* x, y *и* z *таковы, что*

$$x^4+1=62x^2,\quad y^4+1=674y^2,\quad z^4+1=623z^2.$$

Число n *таково, что*

$$x^2y^2z^2+1=(xy+1)(yz+1)(zx+1)-nxyz.$$

Найдите n*. Если необходимо, округлите ответ до ближайшего целого числа.*

Ответ: 59.

Решение. Раскроем скобки в правой части последнего выражения из условия и сгруппируем:

$$
\begin{gathered}
(xy+1)(yz+1)(zx+1)-nxyz= \\
=x^2y^2z^2+x^2yz+xy^2z+xyz^2+xy+yz+xz+1-nxyz= \\
=x^2y^2z^2+1+yz(x^2+1)+xz(y^2+1)+xy(z^2+1)-nxyz.
\end{gathered}
$$

Учитывая левую часть последнего выражения из условия, получаем:

$$nxyz=yz(x^2+1)+xz(y^2+1)+xy(z^2+1).$$

Отсюда

$$n=\frac{x^2+1}{x}+\frac{y^2+1}{y}+\frac{z^2+1}{z}.$$

Теперь обратимся к условиям на положительные x, y, z и заметим, что:

$$
\begin{gathered}
\frac{x^4+1}{x^2}=62 \Leftrightarrow \frac{x^4+1}{x^2}+2-2=62 \Leftrightarrow \frac{x^4+2x^2+1}{x^2}-2=62 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2-2=62 \Leftrightarrow \left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2=64 \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x}=8; \\
\frac{y^4+1}{y^2}=674 \Leftrightarrow \left(\frac{y^2+1}{y}\right)^2=676 \Leftrightarrow \frac{y^2+1}{y}=26; \\
\frac{z^4+1}{z^2}=623 \Leftrightarrow \left(\frac{z^2+1}{z}\right)^2=625 \Leftrightarrow \frac{z^2+1}{z}=25.
\end{gathered}
$$

Получаем, что $n=8+26+25=59$.

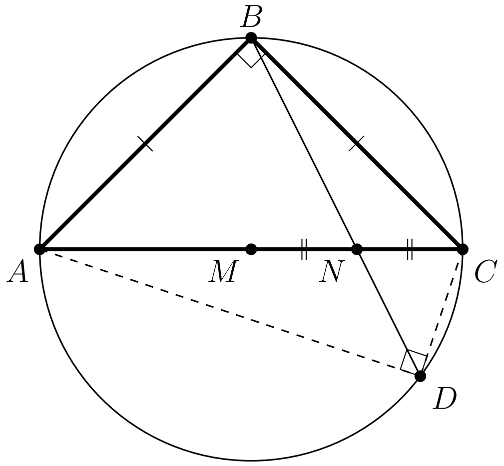
3. (20 баллов) *Внутри треугольника ABC со сторонами $AB=\sqrt{5}$, $BC=4/3$ и $AC=\pi$ отмечена точка M. Оказалось, что сумма расстояний от точки M до вершин треугольника $d=MA+MB+MC$ – натуральное число. Найдите произведение возможных значений d.*

Ответ: 120.

Решение. По неравенству треугольника $MA+MB>AB$, $MB+MC>BC$, $MA+MC>AC$, складывая эти неравенства находим, что d больше величины полупериметра треугольника. С другой стороны, справедливы неравенства $AB+BC>MA+MC$, $BC+AC>MB+MA$, $AC+AB>MC+MB$, складывая эти неравенства получаем, что d меньше периметра треугольника. В указанном диапазоне находятся натуральные числа 4, 5 и 6, следовательно, ответ равен 120.

4. (30 баллов) *Точка M — середина гипотенузы AC прямоугольного равнобедренного треугольника ABC, N — середина отрезка CM. Прямая BN пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке D. Найдите площадь треугольника ACD, если $AB=10$.*

Ответ: 30.



Решение. Поскольку треугольник ABC равнобедренный, то дуги AB и BC равны. Следовательно, равны опирающиеся на них углы ADB и BDC. Таким образом, DB — биссектриса угла ADC. Отсюда получаем, что

$$AD : DC = AN : NC = 3 : 1$$

(по условию NC — четверть отрезка AC). Отметим, что треугольник ADC — прямоугольный с гипотенузой AC. Обозначим DC через x. Тогда

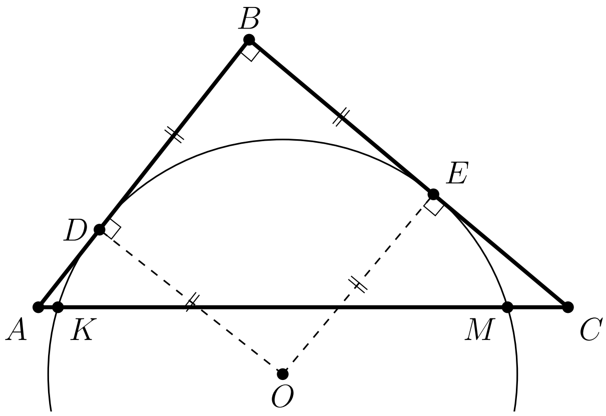
$$x^2 + (3x)^2 = 10^2 + 10^2.$$

Отсюда $x^2 = 20$ и площадь треугольника ADC равна

$$\frac{1}{2} \cdot AD \cdot DC = \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot x = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 20 = 30.$$

5. (30 баллов) *Окружность касается катетов прямоугольного треугольника и делит его гипотенузу на отрезки длины 1, 24 и 3 (при этом 24 — длина хорды окружности). Чему равна площадь треугольника?*

Ответ: 192.



Решение. Обозначим вершины тругольника, точки касания окружности и катетов и точки пересечения окружности и гипотенузы как указано на рисунке; $AK = 1$, $KM =$

$= 24$ и $MC = 3$. Пусть r — радиус окружности, а $AB = a$, $BC = b$.

Поскольку D и E — точки касания, то $OD \perp AB$ и $OE \perp BC$. По условию $\angle ABC =$ $= 90^\circ$, поэтому в четырехугольнике $DBEO$ угол DOE тоже прямой. То есть $DBEO$ — квадрат.

По свойству касательной к окружности и секущей, проведенных из одной точки, имеем:

$$EC^2 = CM \cdot CK \Leftrightarrow (b-r)^2 = 3 \cdot (3+24) \Leftrightarrow b - r = 9;$$
$$AD^2 = AK \cdot AM \Leftrightarrow (a-r)^2 = 1 \cdot (1+24) \Leftrightarrow a - r = 5.$$

Следовательно, $b - a = 4$ и теорему Пифагора для треугольника ABC — $a^2 + b^2 = 28^2$ — можно переписать в виде квадратного уравнения относительно a:

$$a^2 + (a+4)^2 = 28^2 \Leftrightarrow a^2 + 4a + 8 - \frac{28^2}{2} = 0.$$

Его положительным корнем является

$$a = \frac{-4 + \sqrt{16 - 32 + 2 \cdot 4^2 \cdot 7^2}}{2} = \frac{4\sqrt{1 - 2 + 2 \cdot 49} - 4}{2} = 2\sqrt{97} - 2.$$

Найдем площадь треугольника ABC:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \cdot (2\sqrt{97} - 2) \cdot (2\sqrt{97} + 2) = \frac{1}{2} \cdot (4 \cdot 97 - 2^2) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (97 - 1) = 2 \cdot 96 = 192.$$

6. (40 баллов) *На доске написаны числа 1, 2, 3, …, 2023. Раз в минуту к доске подбегает Жора. Он выбирает некоторое натуральное число k, но не обязательно написанное на доске. После этого каждое число на доске, не меньшее k, уменьшает на k. После нескольких операций на доске осталось ровно одно ненулевое число. Может ли оно быть больше 1?*

Первое решение. Покажем, что после каждой нетривиальной операции (то есть такой операции, во время которой уменьшалось хотя бы одно число) на доске будут выписаны все последовательные числа от 0 до некоторого M (возможно, с повторениями). Это означает, что если какое-то число x не выписано, то при этом также не может быть выписано и никакое число, большее x. Очевидно, перед самой первой операцией это утверждение верно. Пусть после некоторой операции утверждение также является верным, и сейчас Жора планирует проделать операцию с числом k. Если $k > M$, то в списке чисел на доске ничего не изменится. Если $k \leqslant M$, то числа от 0 до $k-1$ не изменятся, а числа от k до M превратятся в числа от 0 до $M - k$. Таким образом, после следующей операции на доске будут выписаны числа от 0 до $\max\{k-1, M-k\}$. Тогда если после операции на доске есть ровно одно ненулевое число, то это именно 1.

Второе решение. Посмотрим на два числа, которые изначально были последовательными x и $x - 1$. Докажем, что если большее из них не станет 0, то они всегда будут последовательными. Из этого будет следовать решение задачи, если применить его к тому числу, которое в итоге осталось на доске, и числу, которое изначально было на единицу меньше него. Итак, пусть после очередного хода x и $x-1$ остаются последовательными числами y и $y-1$. Если следующая операция будет производиться с $k > x$, то оба числа не изменятся. Если с $k = x$, то x станет 0, а мы предположили, что это не так. Если же с $k \leqslant x-1$, то числа превратятся в последовательные числа $y-k$ и $y-1-k$.

7. (40 баллов) *В пространстве отмечены 100 точек. Некоторые пары отмеченных точек соединены отрезками. Если какие-то два отрезка пересекаются, то у них есть общий конец. Известно, что как ни покрась точки в красный и синий цвета, количество отрезков с разноцветными концами будет не более 500. Докажите, что отрезков проведено не более 1000.*

Решение. Возьмем раскраску с максимальным количеством отрезков с разноцветными концами. Рассмотрим какую-либо одну точку, пусть она будет красной, и все точки, соединенные с ней отрезком. Пусть красных точек среди них k, а синих — s. Это означает, что выбранная красная точка инцидентна k одноцветным и s разноцветным отрезкам.

Теперь поменяем цвет выбранной точки на синий. Количество разноцветных отрезков, инцидентных выбранной точке, уменьшилось на s и увеличилось на k; количество разноцветных отрезков всего — не увеличилось, так как было максимальным. Следовательно, $k \leqslant s$. То есть количество одноцветных отрезков, чьим концом была выбранная точка, не больше, чем количество разноцветных отрезков с концом в выбранной точке. Поскольку точка выбиралась произвольно, то такое соотношение одноцветных и разноцветных отрезков верно для любой другой из ста точек. По условию, разноцветных отрезков не более 500, значит, одноцветных тоже не более 500. Поэтому и суммарно отрезков будет не более $500 + 500 = 1000$.

8. (40 баллов) *Пусть k-значное число $A = \overline{123...(k-1)k}$ записано в системе счисления с основанием $n < 10$, а k-значное число $B = \overline{(k-1)(k-2)...10}$ записано в десятичной системе счисления. Найти все пары чисел A и B такие, что $A = B$.*

Ответ: $(12)_8 = (10)_{10}$.

Решение. Прежде всего заметим, что $k > 1$, поскольку ни в какой системе счисления 0 не записывается как 1 (кроме того, $k < n$, исходя из смысла чисел k и n). Распишем заданные числа:

$$A = 1 \cdot n^{k-1} + 2 \cdot n^{k-2} + 3 \cdot n^{k-3} + \ldots + (k-1) \cdot n^1 + k \cdot n^0,$$

$$B = (k-1) \cdot 10^{k-1} + (k-2) \cdot 10^{k-2} + \ldots + 2 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0.$$

По условию $n < 10$ и, соответственно, $n^{k-1} < 10^{k-1}$. Поэтому если для каких-то значений n и k окажется, что

$$A - n^{k-1} < B - 10^{k-1}, \qquad (*)$$

то равенство $A = B$ в этом случае будет невозможным. Преобразуем:

$$A - n^{k-1} = 2n^{k-2} + 3n^{k-3} + \ldots + (k-1)n + k <$$

$$< k(n^{k-2} + n^{k-3} + \ldots + n + 1) = k\,\frac{n^{k-1} - 1}{n - 1} \leqslant n^{k-1} - 1,$$

где мы воспользовались формулой для суммы арифметической прогрессии и тем, что $k \leqslant n - 1$. Далее поступаем аналогично:

$$B - 10^{k-1} = (k-2)10^{k-1} + (k-2)10^{k-2} + \ldots + 2 \cdot 10^2 + 10.$$

Пусть $k > 2$, тогда

$$\begin{aligned} B - 10^{k-1} &\geqslant 10^{k-1} + 10^{k-2} + \ldots + 10^2 + 10 = \\ &= 10(10^{k-2} + 10^{k-3} + \ldots + 10^1 + 1) = 10\,\frac{10^{k-1} - 1}{10 - 1} = \\ &= \frac{10}{9}\,(10^{k-1} - 1) > 10^{k-1} - 1. \end{aligned}$$

Это означает, что при $k > 2$ неравенство (*) выполняется. Запишем равенство $A = B$ для случая $k = 2$:

$$A = 1 \cdot n^1 + 2 \cdot n^0 = 1 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0 = B \Rightarrow n + 2 = 10 \Rightarrow n = 8.$$

Таким образом, равенство $A = B$ возможно только в одном случае, когда $A = (12)_8$, а $B = (10)_{10}$.

Олимпиада школьников СПбГУ по математике
Примеры заданий отборочного этапа
2023/2024 учебный год

Задания для 8–9 классов

1. (10 баллов) *Саша на день рождения пригласил 50 друзей и приготовил для них два вида лимонада: «Байкал» и «Тархун». В ходе дня рождения хоть какой-то лимонад пили 40 друзей Саши, причём 27 друзей не пили «Тархун». Сколько друзей Саши пили только «Байкал»?*

а) 17
б) 27
в) 40
г) 50
д) другой ответ

Ответ: а)

Решение. Все друзья Саши делятся на 4 непересекающихся множества: которые пили только «Тархун»; которые пили только «Байкал»; которые пили и «Тархун», и «Байкал»; которые ничего не пили. Те 27 друзей, кто не пил «Тархун» — это те, кто вообще ничего не пил (их $50 - 40 = 10$), и те, кто пил только «Байкал». Отсюда получаем, что пивших только «Байкал»: $27 - 10 = 17$.

2. (10 баллов) *У Жоры имеется 6 карточек, на которых написаны цифры от 1 до 6 (на каждой карточке ровно одна цифра, каждая цифра написана ровно на одной карточке), лежащие в стопке в некотором порядке. Жора выкладывает из карточек два трёхзначных числа: он берёт карточки из стопки сверху вниз и кладёт их в каждом числе слева направо. В результате у него образовались два числа: 426 и 135. Жоре эти числа не понравилось, он собрал карточки обратно в стопку в изначальном порядке и повторил свой алгоритм. На этот раз у него вышли числа 416 и 352. В каком порядке карточки лежали в стопке?*

a) 4 1 3 5 2 6;
b) 5 6 3 1 4 2;
c) 1 2 3 4 5 6;
d) 4 1 6 3 5 2;
e) другой ответ.

Ответ: а)

Решение. То, что карточки берутся сверху вниз и выкладываются слева направо означает, что карточка с более левой цифрой в числе в стопке должна была находиться выше, чем карточка с более правой цифрой. Для чисел первой попытки имеем: «4» выше «2», которая выше «6»; «1» выше «3», которая выше «5». Будем обозначать это как $4 \to 2 \to 6$ и $1 \to 3 \to 5$. Карточки одного числа могут идти в стопке как подряд, так и чередуясь с карточками другого числа. Поэтому, если бы была только одна попытка составления чисел, то вариантов расположения карточек в стопке могло бы быть много.

Однако, вторая попытка составления чисел накладывает другие ограничения на взаимное расположение карточек в стопке: $4 \to 1 \to 6$ и $3 \to 5 \to 2$.

На основании полученных ограничений проанализируем расположение карточек в стопке. Верхней карточкой может быть только «4», т. к. не может быть никакая другая, поскольку, например, выше «1» должна быть «4», выше «2» — «4» или «5», и т. д. Нижней карточкой может быть только «6», т. к. ниже и «5», и «2» (последних цифр составленных чисел) должны быть другие карточки. Теперь обратим внимание на вторые числа в каждой попытке: 135 и 352. Они дают следующее ограничение на расположение карточек: $1 \to 3 \to 5 \to 2$. Таким образом, у нас есть единственный вариант расположения карточек в стопке, а именно ответ а).

3. (20 баллов) *Найдите наименьшее натуральное число n, для которого существует дробь со знаменателем n, лежащая между числами $\frac{791}{79}$ и $\frac{1016}{101}$.*

Ответ: 17.

Решение. Заметим, что $\frac{791}{79}$ — это $10\,\frac{1}{79}$, а $\frac{1016}{101}$ — это $10\,\frac{6}{101}$. Таким образом, задача сводится к поиску наименьшего натурального n, для которого существует дробь $\frac{p}{n} = 10\,\frac{q}{n}$ такая, что

$$\frac{1}{79} < \frac{q}{n} < \frac{6}{101}.$$

Здесь q — натуральное число, $q < n$.

Приведя дроби, записанные в этом условии, к общему знаменателю, получим следующее ограничение:

$$101 \cdot n < 79 \cdot 101 \cdot q < 6 \cdot 79 \cdot n$$

или, что то же самое,

$$\frac{101}{6} \cdot q < n < 79 \cdot q.$$

При разных значениях q это будут разные промежутки. Например, при $q = 1$, это будет промежуток $\left(\frac{101}{6}, 79\right)$, при $q = 2$ — промежуток $\left(\frac{202}{6}, 158\right)$ и т. д. Нам нужно найти наименьшее n, поэтому попробуем найти его в «наименьшем» промежутке, т. е. при $q = 1$. Преобразуем: $\frac{101}{6} = 16\,\frac{5}{6}$. Видим, что наименьшее натуральное число, лежащее между $16\,\frac{5}{6}$ и 79 — это 17.

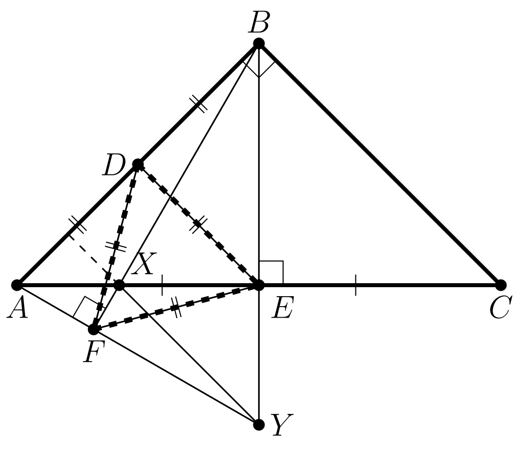
4. (20 баллов) *На доске было записано четырехзначное число. Хулиган Петя на перемене стер у числа две соседние цифры, так что на доске осталось число 34. Отличник Вася пытается восстановить число, зная, что оно при делении на 3 дает остаток 2, а при делении на 5 — остаток 4. Сколько подходящих чисел найдет Вася, если ему неизвестно, является ли нестертая Петей часть числа началом его записи или концом?*

Ответ: 37.

Решение. Утверждение «при делении на 5 дает остаток 4» означает, что последней цифрой может быть 4 или 9, значит, 34 может быть концом записи искомого числа. Рассмотрим сначала именно этот случай. Вторую (слева) цифру мы можем выбрать 10 способами, оставшуюся цифру уже нужно выбирать из условия «при делении на 3 дает остаток 2». Ноль не может быть первой цифрой числа, оставшиеся 9 цифр разбиваются в группы по три, дающие одинаковый остаток при делении на 3. В этом случае мы получаем 30 вариантов интересующего нас числа.

Теперь рассмотрим случай, когда 34 — это начало четырехзначного числа. Последнюю цифру мы можем выбрать 2 способами. Предпоследнюю цифру выбираем из условия делимости на 3 с нужным остатком. Если последняя цифра — это 4, то предпоследней может быть 0, 3, 6 или 9, а если последняя цифра — это 9, то предпоследней может быть 1, 4 или 7 . Получаем еще 4+3 варианта.

5. (30 баллов) *Дан прямоугольный равнобедренный треугольник ABC (угол B равен 90 градусов). Точки D и E — середины сторон AB и AC. Точка F, лежащая в той же полуплоскости относительно прямой DE, что и точка A, такова, что треугольник DEF — равносторонний. Прямые AC и BF пересекаются в точке X, прямые AF и BE — в точке Y. Докажите, что XY и AB перпендикулярны.*



Решение. X — ортоцентр треугольника ABY. Покажем это.

а) Поскольку DE средняя линия, параллельная катету равнобедренного прямоугольного треугольника, а треугольник DEF равносторонний, то

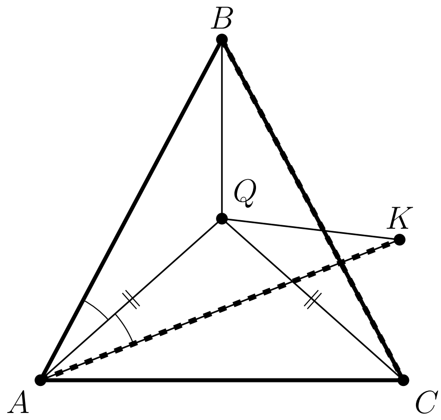
$$DE = AD = DB = DF = FE.$$

Отсюда, треугольник AFB — прямоугольный. Т. е. проходящая через X прямая BF перпендикулярна проходящей через Y прямой AF.

б) Проходящая через Y прямая BE перпендикулярна проходящей через X прямой AC как медиана прямого угла в равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC. Т. е.

BF и AE — высоты в треугольнике ABY, следовательно, YX тоже будет высотой и будет перпендикулярна AB.

6. (30 баллов) *В равнобедренном треугольнике ABC угол при основании AC равен $64°$. Внутри угла BAC, но вне треугольника ABC отмечена точка K такая, что $AK = BC$. Внутри треугольника ABC отмечена точка Q такая, что $AQ = QC$ и AQ — биссектриса угла BAK. Найдите величину угла $\angle AKQ$.*



Ответ: $26°$.

Решение. Рассмотрим треугольники ABQ и AQK. Сторона AQ у них общая, $\angle BAQ = \angle QAK$, т. к. AQ — биссектриса угла BAK. Также из построения точки K и равнобедренности треугольника ABC с основанием AC верно равенство сторон $AK = BC = BA$. Следовательно, данные треугольники равны и, соответственно, равны углы $\angle AKQ = \angle ABQ$.

Теперь заметим, что так как $AQ = QC$, то точка Q лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AC, который является основанием равнобедренного треугольника ABC. Поэтому точка Q лежит и на биссектрисе угла ABC. Отсюда получаем, что

$$\angle ABQ = \frac{1}{2}\angle ABC = \frac{1}{2}(180° - 2\cdot 64°) = 26° = \angle AKQ.$$

7. (40 баллов) *На доске были записаны два примера на сложение чисел, но хулиган Вася стер в каждом примере одно из слагаемых, а также получившийся результат:*

$$\begin{array}{cccc} 99 & + \ \dots & = & \dots \\ 203 & + \ \dots & = & \dots \end{array}$$

Отличник Петя помнит, что стертое слагаемое было одинаковым для обоих примеров, а результатами являлись квадраты различных натуральных чисел. Найдите все возможные варианты значений стертого слагаемого, которые сможет предложить Петя?

Ответ: Петя найдет два возможных слагаемых (22 и 526).

Решение. Пусть x — стертое слагаемое, а n^2 и m^2 — правые части равенств. Составим разность: $104 = (m-n)(m+n)$. Заметим, что $m+n$ и $m-n$ имеют одинаковую четность, а значит, являются четными числами. Поскольку $104 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 13$, то имеем два варианта:

$$\begin{cases} m + n = 26, \\ m - n = 4, \end{cases} \quad \begin{cases} m + n = 52, \\ m - n = 2, \end{cases}$$

Решая системы, находим $m = 15,\ n = 11,\ x = 22$ и $m = 27,\ n = 25,\ x = 526$.

8. (40 баллов) *Петя и Вася играют на доске* 10×10*, исходно покрашенной в белый цвет. Они по очереди перекрашивают по одной клетке доски: Петя — в красный цвет, Вася — в синий цвет. Начинает Петя; игра заканчивается, когда все клетки доски будут покрашены. Может ли Петя красить клетки так, чтобы вне зависимости от ходов Васи в конце нашлись две соседние клетки доски, покрашенные в синий цвет? Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону.*

Ответ: Да, может.

Решение. Доска 10×10 состоит из 100 клеток, поэтому каждый мальчик сделает по 50 ходов и последний ход будет за Васей. Чтобы нашлись две соседние клетки синего цвета, Пете нужно добиться, чтобы последним ходом Вася закрашивал клеточку рядом с синей. Чтобы такая клеточка нашлась, Пете нужно её «зафиксировать» и никогда в нее не ходить. Например, он может выбрать клеточку рядом с первой закрашенной Васей (такая точно есть, т. к. после первого хода каждого из игроков закрашены всего 2 клеточки, то есть у каждой из них закрашено не более одной соседней, а при этом у любой клетки поля имеется не менее двух соседних).

Олимпиада школьников СПбГУ по математике
Примеры заданий отборочного этапа
2023/2024 учебный год

Задания для 6–7 классов

1. (15 баллов) *Федя и Вася выучили по 24 новых английских слова, изучая слова ежедневно. Федя половину слов учил по 2 слова в день, половину слов — по 6 слов в день. Вася половину времени учил по 2 слова в день, половину времени — по 6 слов в день. Сколько дней на изучение 24 слов потратил тот мальчик, который учил слова дольше?*

Ответ: 8.

Решение. Вычислим, сколько дней потратил на изучение слов каждый из мальчиков. Федя половину слов, т. е. 12, учил по 2 слова в день, т. е. потратил на это $12/2 = 6$ дней; а на изучение второй половины потратил $12/6 = 2$ дня. Т.е. всего $6 + 2 = 8$ дней. Обозначим через d — половину дней, в течение которых изучал слова Вася. Тогда $2d + 6d = 24$. Отсюда, $d = 3$, а, значит, всего на изучение слов Вася потратил $2 \cdot 3 = 6$ дней.

2. (15 баллов) *Найдите последнюю цифру числа* $2023 \cdot 2023 \cdot 2023 \cdot \ldots \cdot 2023$*, где число 2023 умножается на себя* 2024 *раза.*

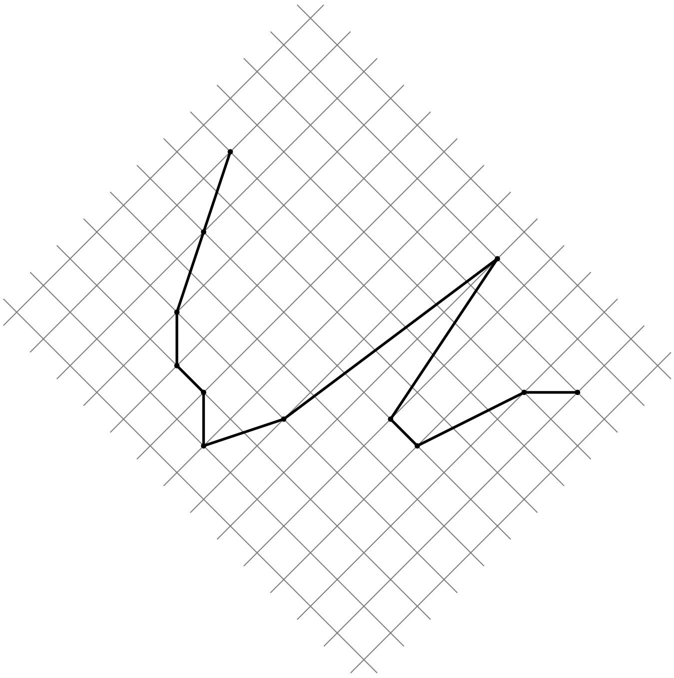
Ответ: 1.

Решение. Последняя цифра числа $(2020 + 3)^n$ определяется последней цифрой числа 3^n. Последняя цифра степени тройки циклична: $3 - 9 - 7 - 1 - 3 \ldots$. Поскольку $2024 = 4 \cdot 506$, то последняя цифра равна 1.

3. (35 баллов) *Юннат Вася наблюдает за птицами и каждую неделю подсчитывает количество разных видов птиц, прилетавших на школьный двор. Результаты подсчетов Вася отмечает слева направо на графике на клетчатом листе (одна клеточка — одна неделя наблюдений/один вид птиц). Через некоторое время после окончания наблюдений Вася стал готовить презентацию своего исследования и обнаружил, что на графике зависимости количества разных видов птиц от недели наблюдения не были указаны оси координат и график выглядит как на рисунке. Вася помнит, что в третью неделю наблюдений количество разных видов птиц было ровно в 2 раза больше, чем во вторую неделю наблюдений. Определите номер недели наблюдения, во время которой на школьный двор прилетало наибольшее количество разных видов птиц.*

Ответ: 7.

Решение. Поскольку измерения на графике отмечались слева направо, то начало координат может быть а) либо в левом углу рисунка (и тогда ось Ox — «номер недели наблюдения» — будет идти в нижний угол рисунка, а ось Oy — «количество разных



видов птиц» — будет идти в верхний угол рисунка), б) либо в правом углу рисунка (и тогда ось Ox — «номер недели наблюдения» — будет идти в верхний угол рисунка, а ось Oy — «количество разных видов птиц» — будет идти в нижний угол рисунка).

Проверим, на основании той информации, что помнит Вася, возможны ли эти варианты. Случай а) невозможен, т. к. значения измерений на протяжении первых четырех недель наблюдения уменьшаются.

Случай б) возможен, т. к. значение в точке, соответствующей третьей неделе наблюдения, больше значения в точке, соответствующей второй неделе наблюдения. Разница в значениях составляет 3 единицы. Пусть x — количество видов птиц во вторую неделю наблюдений, а y — количество видов птиц в третью неделю наблюдений. Тогда по условию $y = 2x$, а по графику $y - x = 3$. Отсюда получаем, что $x = 3$. Этот вариант возможен, т. к. минимальное измеренное количество видов птиц, которое отмечалось в пятую неделю наблюдений, в таком случае будет равно 1, т. е. не будет отрицательным. При этом максимальное количество разных видов птиц было в 7-ю неделю наблюдений.

4. (35 баллов) *На доске было записано трехзначное число. Хулиган Петя на перемене стер у числа две цифры, так что на доске от этого числа осталась только цифра 3. Отличник Вася пытается восстановить исходное число, зная, что оно при делении на 3 дает остаток 2, а при делении на 5 — остаток 4. Сколько подходящих чисел найдет Вася, если ему неизвестно, из какого разряда осталась нестертая Петей цифра?*

Ответ: 12.

Решение. Если число дает остаток 4 при делении на 5, то последней цифрой такого числа может быть только 4 или 9. Значит, оставшаяся цифра 3 не могла находиться в разряде единиц. Теперь обсудим остаток 2 при делении на 3. Число и его сумма цифр имеют одинаковые остатки при делении на 3, значит, сумма цифр исходного числа тоже дает остаток 2 при делении на 3.

Если последняя цифра искомого числа — это 4, то в дополнение к 4 и 3 мы можем взять цифры 1, еще одну 4 или 7. Всего получаем, что подходящих чисел такого вида 6 штук. (Два варианта для выбора разряда для 3 и три варианта оставшейся цифры.)

Если последняя цифра числа — это 9, то в дополнение к 3 и 9 мы можем взять цифры 2, 5, 8. Здесь у нас тоже есть 6 вариантов.

5. (50 баллов) *Юный хамелеон тренируется в смене окрасок: по понедельникам он меняет цвет 1 раз, по вторникам — 7 раз, по средам — 2 раза, по четвергам — 6 раз, по пятницам — 3 раза, по субботам — 5 раз, по воскресеньям — 4 раза. Какое максимальное суммарное количество раз юный хамелеон может поменять окраску в период с 25 числа одного месяца по 10 число включительно следующего месяца?*

Ответ: 71.

Решение. Поскольку любой месяц может начинаться с любого дня недели, то можно отметить следующее:
а) Максимальное суммарное количество изменений цвета у хамелеона будет тогда, когда подсчет ведется с 25-го числа месяца, содержащего 31 день, т. е. в течение

$$31 - (25 - 1) + 10 = 17 \text{ дней.}$$

б) Таким образом, изменение цвета происходит в течение двух полных недель и еще трех дней. Очевидно, полная неделя всегда дает одно и то же количество изменений цвета, независимо от того, в какой именно день она началась (все семь дней недели будут задействованы). Поэтому, нам нужно найти наибольшее возможное количество изменений цвета за какие-нибудь последовательные три дня. Последовательность значений изменений цвета, по условию задачи, такая: $1-7-2-6-3-5-4$. Подпоследовательности из трех последовательных элементов: $1-7-2$, $7-2-6$, $2-6-3$, $6-3-5$, $3-5-4$, $5-4-1$, $4-1-7$ (их семь, т. к. суммирование ведется в течение нескольких последовательных недель, поэтому возможны тройки дней «суббота–воскресенье–понедельник» и «воскресенье–понедельник–вторник»). Легко видеть, что подпоследовательность с максимальной суммой элементов — это $7-2-6$, когда сумма элементов равна 15. Таким образом, итоговая максимальная сумма числа изменений цвета юного хамелеонаь равна

$$2 \cdot (1+7+2+6+3+5+4) + 15 = 71.$$

6. (50 баллов) *Прямоугольник 10×15 клеточек изначально покрашен в белый цвет. Каждая клеточка прямоугольника имеет свой номер (от 1 до 150). К клеточкам могут применяться правила раскрашивания:*
правило А) если номер клеточки дает остаток 1 при делении на 3, то клеточка раскрашивается в красный цвет;

правило Б) если номер клеточки дает остаток 2 при делении на 3, то клеточка раскрашивается в желтый цвет;
правило В) если номер клеточки дает остаток 2 при делении на 4, то клеточка раскрашивается в зеленый цвет;
правило Г) если номер клеточки дает остаток 3 при делении на 4, то клеточка раскрашивается в фиолетовый цвет.
Какое максимальное суммарное количество белых и красных клеточек может получиться, если применить все имеющиеся правила раскраски хотя бы по одному разу??

Ответ: 74.

Решение. Для удобства использования запишем правила в едином виде, как остатки при делении на НОК(3, 4)=12:

правило А (красный) — если номер клеточки дает остатки 1, 4, 7 и 10 при делении на 12;

правило Б (желтый) — если номер клеточки дает остатки 2, 5, 8 и 11 при делении на 12;

правило В (зеленый) — если номер клеточки дает остатки 2, 6 и 10 при делении на 12;

правило Г (фиолетовый) — если номер клеточки дает остатки 3, 7 и 11 при делении на 12.

Заметим следующее: а) повторное применение правил не дает новых цветных клеточек, поэтому количество белых будет неизменным при любом порядке применения всех правил (если уж клеточка была покрашена, то она и останется цветной, хотя, возможно, и окажется перекрашенной в другой цвет). Останутся непокрашенными (т. е. белыми) клеточки, чьи номера дают остаток 0 или 9 при делении на 12. В промежутке от 1 до 150 таких клеточек будет всего $2 \cdot 12 = 24$;

б) правила А и Б всегда красят разные клеточки;

в) правила В и Г всегда красят разные клеточки;

г) поскольку правила В и Г перекрашивают красные клеточки в другой цвет, то правило А должно применяться после этих правил, если мы хотим получить больше красных клеточек (но А может применяться как до правила Б, так и после него — см. п. б)). Таким образом, для получения максимального количества красных клеточек нам подходит, например, такая последовательность применения правил раскраски: В-Г-Б-А (В-Г-А-Б дала бы такой же результат, см. п. а)). Таким образом, у нас нет необходимости вычислять, сколько клеточек будут закрашены в желтый/зеленый/фиолетовый цвета. Достаточно просто вычислить количество красных (из-за отсутствия перекрашивания они красными и останутся).

Нетрудно подсчитать количество чисел, подпадающих под правило А, среди чисел от 1 до 150: $4 \cdot 12 + 2 = 50$ (поскольку $150 = 12 \cdot 12 + 6$ — т. е. это 12 полных «циклов» и половинка). Отсюда получаем ответ: максимальное количество белых + красных клеточек равняется $24 + 50 = 74$.