САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Олимпиада школьников СПбГУ по математике

Задания заключительного этапа

2023/2024 учебный год

Олимпиада школьников СПбГУ по математике

Заключительный этап. 2023/2024 учебный год.

Задания для 10-11 классов

(Правильное и полное решение каждой задачи оценивается в 20 баллов)

Олимпиада школьников СПбГУ по математике
Задания заключительного этапа
2023/2024 учебный год

Задания для 10–11 классов

Вариант 1. Условия

1. Кузнечик прыгает по числовой прямой. Каждый свой прыжок он может совершить в любом направлении. Он начинает в точке 0 прыжком единичной длины. Каждый следующий прыжок должен быть на пять больше предыдущего (т. е. первый прыжок длины 1, второй длины 6, третий длины 11 и т. д.). За какое наименьшее число прыжков кузнечик сможет оказаться в точке 2024?

2. Найдите угол α, если известно, что $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ и

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{(1+\operatorname{tg}1^\circ)(1+\operatorname{tg}3^\circ)-2}{(1-\operatorname{tg}1^\circ)(1-\operatorname{tg}3^\circ)-2}.$$

3. Дан остроугольный треугольник ABC, меньший угол которого $\angle ABC = 40^\circ$. Внутри треугольника выбрана такая точка D, что $\angle BAC + \angle ADB = 180^\circ$ и $2\angle ACB + \angle DBA = 180^\circ$. Через точку C провели прямую, параллельную прямой AD, она пересекла прямую BD в точке E. Биссектрисы углов $\angle ABD$ и $\angle CAD$ пересекаются в точке F. Найдите угол $\angle DFE$.

4. Решите в целых числах уравнение $k^2 + m^2 = 5 \cdot 2023^n + 77$.

5. В стране 750 городов. Некоторые из них соединены беспосадочными двухсторонними авиалиниями. Известно, что среди любых 375 городов есть хотя бы 375 пар городов, соединенных друг с другом авиалинией. Какое наименьшее возможное количество авиалиний может быть в этой стране.

1. Кузнечик прыгает по числовой прямой. Каждый свой прыжок он может совершить в любом направлении. Он начинает в точке 0 прыжком единичной длины. Каждый следующий прыжок должен быть на пять больше предыдущего (т. е. первый прыжок длины 1, второй длины 6, третий длины 11 и т. д.). За какое наименьшее число прыжков кузнечик сможет оказаться в точке 2024?

Ответ: 31.

Решение. Поскольку

$$1+6+11+16+\ldots+136=28+5(1+2+\ldots+27)=28+5\cdot\frac{27\cdot 28}{2}=1918<2024,$$

за 28 прыжков допрыгнуть не удастся. Поэтому потребуется не менее 29 прыжков. Но прыжки с нечетными номерами меняют четность положения кузнечика. Поэтому после 29 прыжков кузнечик окажется на нечетном числе, тридцатый прыжок четности не поменяет и, значит, после 30 прыжков кузнечик также будет на нечетном числе и, в частности, не может оказаться в точке 2024. Следовательно, потребуется не менее 31 прыжка.

Покажем, что за 31 прыжок можно попасть в 2024. Поскольку

$$1+6+11+16+\ldots+156=31+5(1+2+\ldots+30)=31+5\cdot\frac{30\cdot 31}{2}=2356,$$

кузнечик все время прыгая вправо окажется в точке 2512, поэтому он перескакивает цель на 332. Таким образом, ему нужно в сумме на 166 прыгнуть в другую сторону. Например, подойдут прыжки на 1, 11, 21, 31, 41 и 61.

2. Найдите угол α, если известно, что $0^\circ<\alpha<90^\circ$ и

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{(1+\operatorname{tg}1^\circ)(1+\operatorname{tg}3^\circ)-2}{(1-\operatorname{tg}1^\circ)(1-\operatorname{tg}3^\circ)-2}.$$

Ответ: $\alpha=41^\circ$.

Первое решение. По условию

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{(1+\operatorname{tg}1^\circ)(1+\operatorname{tg}3^\circ)-2}{(1-\operatorname{tg}1^\circ)(1-\operatorname{tg}3^\circ)-2}=\frac{1-\operatorname{tg}1^\circ-\operatorname{tg}3^\circ-\operatorname{tg}1^\circ\cdot\operatorname{tg}3^\circ}{1+\operatorname{tg}1^\circ+\operatorname{tg}3^\circ-\operatorname{tg}1^\circ\cdot\operatorname{tg}3^\circ}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1-\dfrac{\operatorname{tg}1^\circ+\operatorname{tg}3^\circ}{1-\operatorname{tg}1^\circ\cdot\operatorname{tg}3^\circ}}{1+\dfrac{\operatorname{tg}1^\circ+\operatorname{tg}3^\circ}{1-\operatorname{tg}1^\circ\cdot\operatorname{tg}3^\circ}}.$$

Поскольку $\operatorname{tg}4^\circ=\dfrac{\operatorname{tg}1^\circ+\operatorname{tg}3^\circ}{1-\operatorname{tg}1^\circ\cdot\operatorname{tg}3^\circ}$, имеем соотношение

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}4^\circ}{1+\operatorname{tg}4^\circ}=\frac{\operatorname{tg}45^\circ-\operatorname{tg}4^\circ}{1+\operatorname{tg}45^\circ\cdot\operatorname{tg}4^\circ}=\operatorname{tg}(45^\circ-4^\circ)=\operatorname{tg}41^\circ.$$

Стало быть, $\alpha=41^\circ$.

Второе решение. По условию

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{(1+\operatorname{tg}1^\circ)(1+\operatorname{tg}3^\circ)-2}{(1-\operatorname{tg}1^\circ)(1-\operatorname{tg}3^\circ)-2} = \frac{(\cos 1^\circ+\sin 1^\circ)(\cos 3^\circ+\sin 3^\circ)-2\cos 1^\circ\cdot\cos 3^\circ}{(\cos 1^\circ-\sin 1^\circ)(\cos 3^\circ-\sin 3^\circ)-2\cos 1^\circ\cdot\cos 3^\circ}.$$

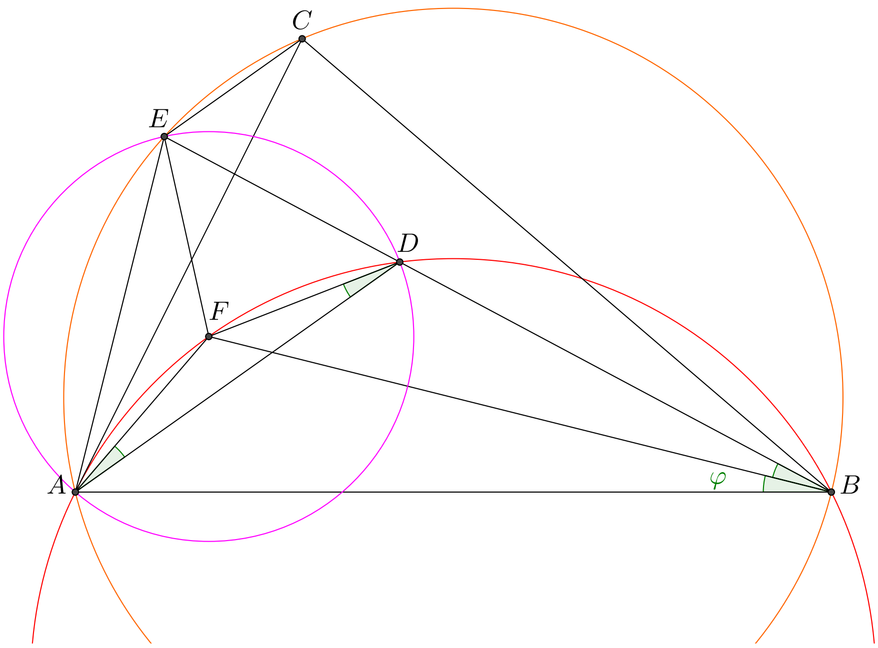
Поскольку $\cos x \pm \sin x = \sqrt{2}\sin(45^\circ \pm x)$, Следовательно,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2}\sin 46^\circ\cdot\sqrt{2}\sin 48^\circ - 2\cos 1^\circ\cos 3^\circ}{\sqrt{2}\sin 44^\circ\cdot\sqrt{2}\sin 42^\circ - 2\cos 1^\circ\cos 3^\circ} = \frac{\sin 46^\circ\sin 48^\circ-\cos 1^\circ\cos 3^\circ}{\sin 42^\circ\sin 44^\circ-\cos 1^\circ\cos 3^\circ} =$$
$$= \frac{\frac{1}{2}(\cos 2^\circ-\cos 94^\circ)-\frac{1}{2}(\cos 2^\circ+\cos 4^\circ)}{\frac{1}{2}(\cos 2^\circ-\cos 86^\circ)-\frac{1}{2}(\cos 2^\circ+\cos 4^\circ)} = \frac{\cos 94^\circ+\cos 4^\circ}{\cos 86^\circ+\cos 4^\circ} = \frac{\cos 4^\circ-\sin 4^\circ}{\cos 4^\circ+\sin 4^\circ} =$$
$$= \frac{\sqrt{2}\sin(45^\circ-4^\circ)}{\sqrt{2}\sin(45^\circ+4^\circ)} = \frac{\sin 41^\circ}{\cos 41^\circ} = \operatorname{tg}41^\circ.$$

Стало быть, $\alpha = 41^\circ$.

3. Дан остроугольный треугольник ABC, меньший угол которого $\angle ABC = 40^\circ$. Внутри треугольника выбрана такая точка D, что $\angle BAC + \angle ADB = 180^\circ$ и $2\angle ACB + \angle DBA = 180^\circ$. Через точку C провели прямую, параллельную прямой AD, она пересекла прямую BD в точке E. Биссектрисы углов $\angle ABD$ и $\angle CAD$ пересекаются в точке F. Найдите угол $\angle DFE$.

Ответ: 80°.



Решение. Положим для краткости $\angle ABF = \varphi$, тогда $\angle DBF = \varphi$ и $\angle DBA = 2\varphi$. По условию

$$2\angle ACB + 2\varphi = 2\angle ACB + \angle DBA = 180^\circ$$

и, значит, $\angle ACB = 90^\circ - \varphi$.

$$\angle BAD = 180^\circ - \angle DBA - \angle ADB = 180^\circ - 2\varphi - (180^\circ - \angle BAC) = \angle BAC - 2\varphi.$$

Следовательно,

$$\angle DAF = \frac{\angle DAC}{2} = \frac{\angle BAC - \angle BAD}{2} = \varphi$$

и четырехугольник $AFDB$ вписанный. Таким образом, $\angle ADF = \angle ABF = \varphi$, значит, треугольник AFD равнобедренный и, в частности, $FA = FD$. Поскольку AF — биссектриса угла $\angle CAD$, а прямые AD и CE параллельны, $\angle ACE = \angle CAD = 2\varphi = \angle ABE$. Следовательно, четырехугольник $AECD$ является вписанным и поэтому

$$\angle AED = \angle AEB = \angle ACB = 90^\circ - \varphi = \frac{\angle AFD}{2}.$$

Стало быть, точка F является центром описанной окружности треугольника ADE и, значит, $\angle DFE = 2\angle DAE$. Осталось заметить, что

$$\angle DAE = 180^\circ - AED - \angle ADE = 180^\circ - \angle ACB - \angle BAC = \angle ABC = 40^\circ,$$

откуда получаем ответ $\angle DFE = 80^\circ$.

4. Решите в целых числах уравнение $k^2 + m^2 = 5 \cdot 2023^n + 77$.

Ответ: $(\pm 1, \pm 9, 0)$, $(\pm 9, \pm 1, 0)$, $(\pm 56, \pm 84, 1)$ и $(\pm 84, \pm 56, 1)$.

Решение. Если $n < 0$, то левая часть уравнения будет целой, а правая нецелой. Если $n = 0$, то $k^2 + m^2 = 82$. Поскольку квадраты дают остатки 0, 1 и 4 от деления на пять, числа k^2 и m^2 дают остаток 1 от деления на 5, кроме того $|k| \leqslant 9$ и $|m| \leqslant 9$. Стало быть, $k = \pm 1$ и $m = \pm 9$ или $k = \pm 9$ и $m = \pm 1$ и других вариантов быть не может.

Пусть $n \geqslant 1$. Поскольку 2023 делится на семь, в этом случае правая часть делится на семь. Квадраты целых чисел могут давать остатки 0, 1, 2 и 4 от деления на семь. Сумма двух таких остатков равна нулю только в случае, когда они оба равны нулю. Таким образом, k и m делятся на семь. Стало быть, $k = 7k_1$ и $m = 7m_1$ для некоторых целых чисел k_1 и m_1. Следовательно,

$$7k_1^2 + 7m_1^2 = 5 \cdot 289 \cdot 2023^{n-1} + 11.$$

Если $n \geqslant 2$, то число $7k_1^2 + 7m_1^2 - 5 \cdot 289 \cdot 2023^{n-1}$ делится на семь, что невозможно, поскольку оно равно 11. Стало быть, $n = 1$ и уравнение принимает вид

$$7k_1^2 + 7m_1^2 = 5 \cdot 289 + 11 = 1456 = 7 \cdot 208.$$

Таким образом, $k_1^2 + m_1^2 = 208 = 13 \cdot 16$. Поскольку квадраты при делении на 4 дают лишь остатки 0 и 1, оба числа k_1 и m_1 четны и тогда $k_1 = 2k_2$ и $m_1 = 2m_2$ для некоторых целых чисел k_2 и m_2. Стало быть, $k_2^2 + m_2^2 = 13 \cdot 4$. Аналогично получаем, что $k_2 = 2k_3$, $m_2 = 2m_3$ и $k_3^2 + m_3^2 = 13$. Но у такого уравнения решения найти совсем легко: $k_3 = \pm 2$ и $m_3 = \pm 3$ или $k_3 = \pm 3$ и $m_3 = \pm 2$. Тогда $k = \pm 56$ и $m = \pm 84$ или $k = \pm 84$ и $m = \pm 56$.

5. В стране 750 городов. Некоторые из них соединены беспосадочными двухсторонними авиалиниями. Известно, что среди любых 375 городов есть хотя бы 375 пар городов, соединенных друг с другом авиалинией. Какое наименьшее возможное количество авиалиний может быть в этой стране.

Ответ: 1875.

Решение. Разобьем 750 городов на 125 групп по 6 городов в каждой и любые два города в каждой группе соединим авиалинией. Тогда в каждой группе по $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ авиалиний и общее количество авиалиний $125 \cdot 15 = 1875$. Покажем, что эти города удовлетворяют условию задачи. Действительно, рассмотрим какие-то 375 городов. Пусть n_1 из них из первой группы, n_2 из второй, …, n_{125} из 125-й группы. Тогда общее количество авиалиний между этими городами равно

$$m = \frac{n_1(n_1 - 1)}{2} + \frac{n_2(n_2 - 1)}{2} + \ldots + \frac{n_{125}(n_{125} - 1)}{2}.$$

Поскольку неравенство $x(x-1) \geqslant 5x-9$ справедливо для всех x,

$$2m \geqslant (5n_1-9)+(5n_2-9)+\ldots+(5n_{125}-9) = 5(n_1+n_2+\ldots+n_{125}) - 9\cdot 125 = \\ = 5\cdot 375 - 9\cdot 125 = (15-9)\cdot 125 = 750.$$

Стало быть, $m \geqslant 375$.

Докажем теперь, что общее количество авиалиний всегда не меньше, чем 1875. Разобьем города на две одинаковые по размеру группы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ таким образом, что авиалиний между городами из $\mathcal{A}$ наименьшее возможное количество. Рассмотрим пару городов $A \in \mathcal{A}$ и $B \in \mathcal{B}$. Пусть город A соединен авиалиниями с a городами из $\mathcal{A}$, а город B соединен авиалиниями с b городами из $\mathcal{A}$. Тогда $a \leqslant b$, поскольку в противном случае можно было бы поменять местами города A и B, уменьшив количество авиалиний между городами из $\mathcal{A}$.

Если каждый город из $\mathcal{B}$ соединен авиалинией хотя бы с тремя городами из $\mathcal{A}$, то общее количество авиалиний будет не меньше чем $375 + 3\cdot 375 + 375 = 1875$ (хотя бы 375 авиалиний между городами из $\mathcal{A}$, хотя бы $3\cdot 375$ авиалиний ведет из $\mathcal{B}$ в $\mathcal{A}$ и хотя бы 375 авиалиний между городами из $\mathcal{B}$). В этом случае нужное неравенство доказано.

Если же найдется город B из $\mathcal{B}$, соединенный авиалиниями не более чем с двумя городами из $\mathcal{A}$, то для любого города из $\mathcal{A}$ есть не больше двух авиалиний ведущих в города из $\mathcal{A}$. Но тогда общее количесвто авиалиний между городами из $\mathcal{A}$ не больше 375. Но по условию оно не меньше, чем 375, поэтому для любого города из $\mathcal{A}$ есть ровно две авиалинии ведущие в города из $\mathcal{A}$. Пусть A — один из городов, с которыми соединен город B. Рассмотрим набор из 375 городов: город B и все города из $\mathcal{A}$, за исключением A. Посчитаем общее количество авиалиний между городами этого набора. Между выбранными городами из $\mathcal{A}$ в точности 373 авиалинии (две авиалинии ведут в город A) и еще одна авиалиния ведет в город B (вторая авиалиния из B ведет в A), итого получилось 374 авиалинии, что противоречит условию. Таким оборзом, этот случай невозможен.

Олимпиада школьников СПбГУ по математике

Заключительный этап. 2023/2024 учебный год

Задания для 8-9 классов

(Правильное и полное решение каждой задачи оценивается в 20 баллов)

Олимпиада школьников СПбГУ по математике
Задания заключительного этапа
2023/2024 учебный год

Задания для 8–9 классов

Вариант 1. Условия

1. Дан квадратный трехчлен $f(x) = 2x^2 + ax + b$ с целыми коэффициентами, при любом вещественном x удовлетворяющий неравенству $20f(x) + 19 \geqslant 0$. Докажите, что $2f(x) + 1 \geqslant 0$ при любом вещественном x.

2. Есть 35 кроликов и 35 клеток, клетки пронумерованы числами от 1 до 35, а кролики — числами от 36 до 70. Кроликов рассаживают по клеткам (по одному кролику в клетку) так, чтобы номер каждого кролика был взаимно прост с номером его клетки. Докажите, что количество способов так рассадить кроликов по клеткам не меньше, чем 40 тысяч.

3. Для любого натурального числа n докажите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt[1]{2!}} + \frac{1}{\sqrt[2]{4!}} + \frac{1}{\sqrt[3]{6!}} + \frac{1}{\sqrt[4]{8!}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[n]{(2n)!}} \geqslant \frac{n}{n+1}.$$

(Как обычно, $n!$ обозначает произведение всех натуральных чисел, не превосходящих n. Например, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$.)

4. Возьмем произвольное натуральное число n_1. Вычислим значение $5n_1+1$ и уберем из его разложения на простые множители все множители, кроме двоек и троек. Полученное число назовем n_2. Например,

$$\begin{aligned}
&n_1 = 25 \quad \to \quad 5 \cdot 25 + 1 = 126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \quad \to \quad n_2 = 18,\\
&n_1 = 24 \quad \to \quad 5 \cdot 24 + 1 = 121 = 11^2 \quad \to \quad n_2 = 1,\\
&n_1 = 22 \quad \to \quad 5 \cdot 22 + 1 = 111 = 3 \cdot 37 \quad \to \quad n_2 = 3.
\end{aligned}$$

Потом вычислим значение $5n_2 + 1$ и уберем из этого числа все простые множители, кроме двоек и троек, полученное число назовем n_3 и т. д.

Докажите, что с какого бы натурального числа n_1 мы ни начали, через некоторое время в этой последовательности встретится число 1.

5. Углы $\angle BAD$ и $\angle BCD$ выпуклого четырехугольника $ABCD$ равны. Точки P и Q симметричны точке A относительно прямых BC и CD соответственно. Прямые AP и AQ пересекают отрезок BD соответственно в точках E и F. Докажите, что описанные окружности треугольников BEP и DFQ касаются друг друга.

6. Даны четыре кучи камней, занумерованные числами от 1 до 4. Сначала в каждой куче лежит по 2024 камня. Петя и Вася играют в игру. Ходят по очереди, начинает Петя. Каждый ход игрок выбирает натуральные числа $m < n \leqslant 4$, берет m камней из кучи с номером n и раскладывает все взятые камни, добавляя их по одному камню в каждую из куч с номерами от $n - m$ до $n - 1$. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может победить независимо от игры соперника?

1. Дан квадратный трехчлен $f(x) = 2x^2 + ax + b$ с целыми коэффициентами, при любом вещественном x удовлетворяющий неравенству $20f(x) + 19 \geqslant 0$. Докажите, что $2f(x) + 1 \geqslant 0$ при любом вещественном x.

Решение. Поскольку все коэффициенты трехчлена $f(x)$ целые, он принимает в целых точках целые значения и эти значения не меньше чем $-\frac{19}{20}$. Поэтому значения трехчлена $f(x)$ во всех целых точках неотрицательны. Следовательно, расстояние между его корнями не превосходит единицы, в противном случае между корнями нашлась хотя бы одна целая точка и значение в ней было бы отрицательным. Но расстояние между корнями равно $\frac{1}{2}\sqrt{d}$, где d — дискриминант трехчлена, т. е. $d = a^2 - 8b$. Стало быть, $d \leqslant 4$. Осталось заметить, что наименьшее значение трехчлена равно $-\frac{d}{8} \geqslant -\frac{1}{2}$.

2. Есть 35 кроликов и 35 клеток, клетки пронумерованы числами от 1 до 35, а кролики — числами от 36 до 70. Кроликов рассаживают по клеткам (по одному кролику в клетку) так, чтобы номер каждого кролика был взаимно прост с номером его клетки. Докажите, что количество способов так рассадить кроликов по клеткам не меньше, чем 40 тысяч.

Решение. Сначала приведем один способ рассадить кроликов по клеткам. При $36 \leqslant k \leqslant 70$ посадим k-го кролика в клетку с номером $71-k$. Если числа k и $71-k$ имеют общий делитель, то этот же делитель имеет их сумма $k + (71 - k) = 71$, являющаяся простым числом. Но число k не делится на 71. Поэтому правило рассадки соблюдено.

Имеется восемь кроликов, номера которых являются простыми числами: 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61 и 67. Этих кроликов можно произвольно пересаживать по тем восьми клеткам, которые они занимают, потому что номер любого из этих кроликов — простое число, которое больше номера любой клетки, из-за чего оно не может иметь общих делителей с номером клетки. Количество способов рассадить 8 кроликов по 8 клеткам равно $8! = 40\,320$. Мы уже предъявили 40 320 способов рассадки, поэтому общее количество способов не меньше 40 000.

3. Для любого натурального числа n докажите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt[1]{2!}} + \frac{1}{\sqrt[2]{4!}} + \frac{1}{\sqrt[3]{6!}} + \frac{1}{\sqrt[4]{8!}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[n]{(2n)!}} \geqslant \frac{n}{n+1}.$$

(Как обычно, $n!$ обозначает произведение всех натуральных чисел, не превосходящих n. Например, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$.)

Решение. Покажем, что

$$\frac{1}{\sqrt[k]{(2k)!}} \geqslant \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}. \qquad (*)$$

Для этого достаточно проверить неравенство $(k(k+1))^k \geqslant (2k)!$. Для его доказательства разобьем все множители, составляющие $(2k)!$ на пары j и $2k+1-j$ (здесь j пробегает числа от 1 до k) и заметим, что произведение чисел в каждой паре не превосходит $k(k+1)$. Действительно,

$$k(k+1) - j(2k+1-j) = (k^2+k) - (2kj + j - j^2) = (k-j)^2 + (k-j) \geqslant 0.$$

Просуммируем неравенства $(*)$ по k от 1 до n и получим требуемое.

4. Возьмем произвольное натуральное число n_1. Вычислим значение $5n_1+1$ и уберем из его разложения на простые множители все множители, кроме двоек и троек. Полученное число назовем n_2. Например:

$$
\begin{aligned}
&n_1 = 25 \quad\to\quad 5\cdot 25+1 = 126 = 2\cdot 3^2\cdot 7 \quad\to\quad n_2 = 18,\\
&n_1 = 24 \quad\to\quad 5\cdot 24+1 = 121 = 11^2 \quad\to\quad n_2 = 1,\\
&n_1 = 22 \quad\to\quad 5\cdot 22+1 = 111 = 3\cdot 37 \quad\to\quad n_2 = 3.
\end{aligned}
$$

Потом вычислим значение $5n_2+1$ и уберем из этого числа все простые множители, кроме двоек и троек, полученное число назовем n_3 и т. д.

Докажите, что с какого бы натурального числа n_1 мы ни начали, через некоторое время в этой последовательности встретится число 1.

Решение. Допустим, что нашлось некоторое n_1, для которого последовательность не содержит 1. Тогда все числа в последовательности, начиная со второго, могут иметь в разложении на множители только простые множители 2 и 3. Далее в рассуждениях считаем, что $k>1$. Заметим, что если n_k делится на простое число $p\in\{2,3\}$, то $5n_k+1$, очевидно, не делится на p и, следовательно, n_{k+1} не делится на p. Отсюда следует, что в последовательности n_k чередуются степени 2 и 3. Проверим, что последовательность убывает и из-за этого в ней все-таки должна содержаться 1.

Экспериментируя с $n_k\in\{2,2^2,3,3^2\}$, видим, что в этих случаях последовательность быстро приходит к 1. Поэтому можно считать, что чередующиеся степени имеют показатели не меньше 3.

Пусть $n_k=2^m$ (где $m\geqslant 2$), $n_{k+1}=3^\ell$. Тогда или $n_{k+1}=5n_k+1$, или 3^ℓ получается из числа $5n_k+1$ сокращением на какие-то простые множители не меньшие 7 (потому что это число не делится на 5). В первом случае n_{k+2} — это степень двойки, на которую делится число

$$5n_{k+1}+1 = 5(5n_k+1)+1 = 25\cdot 2^m+6,$$

т. е. $n_{k+2}=2$, что не соответствует нашим ограничениям — слишком маленький показатель. Во втором случае $n_{k+1}\leqslant \frac{5n_k+1}{7}<n_k$.

Теперь рассмотрим случай $n_k=3^\ell$, $n_{k+1}=2^m$ (где $\ell\geqslant 2$, $m\geqslant 3$). Здесь аналогично или $n_{k+1}=5n_k+1$, или 2^m получается из числа $5n_k+1$ сокращением на какие-то простые множители, не меньшие 7. Второй случай опять ведет к убыванию, что нам и требуется. В первом случае n_{k+2} — это степень тройки, на которую делится число

$$5n_{k+1}+1 = 5(5n_k+1)+1 = 25\cdot 3^\ell+6,$$

т. е. $n_{k+2}=3$, что не соответствует нашим ограничениям.

Замечание. Для $n_k=3^\ell$ и $n_{k+1}=2^m$ первый случай можно рассмотреть несколько иначе. А именно, тогда

$$5\cdot 3^\ell = 2^m-1.$$

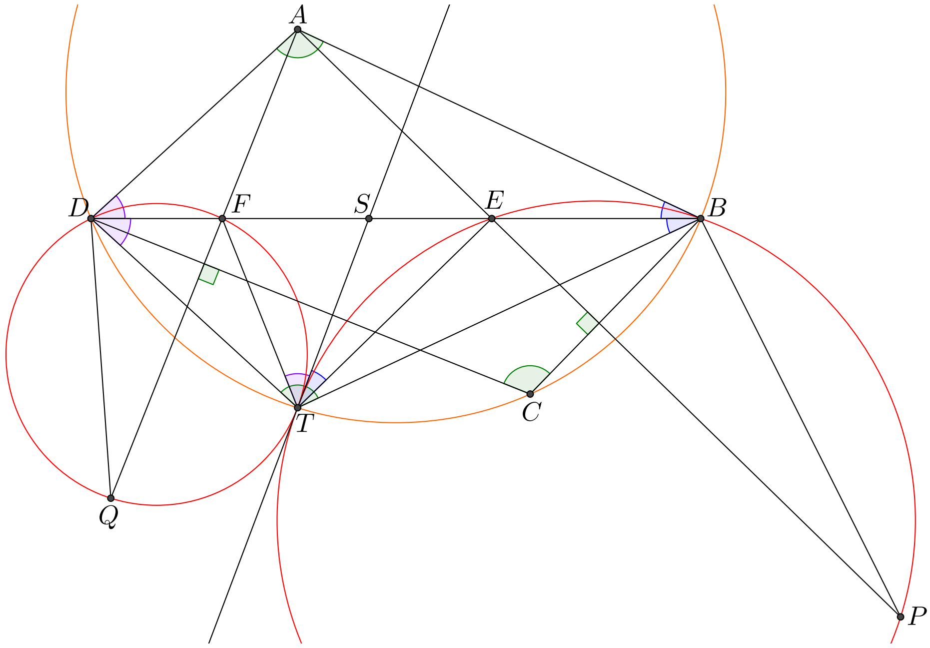
Правая часть делится на 3 только при четных m, пусть $m=2s$, мы можем считать, что $s>1$. Тогда разложим правую часть на множители

$$5\cdot 3^\ell = 2^{2s}-1 = (2^s+1)(2^s-1).$$

Поскольку нечетные множители в правой части взаимно просты (так как их разность равна 2) и больше 1, равенство было бы возможно только в случае когда одна из скобок равна 5, а другая равна 3^ℓ, но разность этих чисел равна 2 только при $\ell=1$. Значит, первый случай при наших ограничениях невозможен.

5. Углы $\angle BAD$ и $\angle BCD$ выпуклого четырехугольника $ABCD$ равны. Точки P и Q симметричны точке A относительно прямых BC и CD соответственно. Прямые AP и AQ пересекают отрезок BD соответственно в точках E и F. Докажите, что описанные окружности треугольников BEP и DFQ касаются друг друга.

Решение.



Пусть точка T симметрична точке A относительно прямой BD (возможно она совпадает с точкой C). В силу симметрии $\angle BAP = \angle BPA$ и $\angle BTE = \angle BAE = \angle BAP$. Поэтому четырехугольник $PBET$ вписанный и, значит, точка T лежит на описанной окружности треугольника BEP. Аналогично проверяется, что точка T лежит на описанной окружности треугольника DFQ. Кроме того по симметрии $\angle BTD = \angle BAD = \angle BCD$. Следовательно, точки B, C, D и T лежат на одной окружности. Проведем касательную в точке T к описанной окружности треугольника BEP, пусть она пересекает прямую BD в точке S. Тогда

$$\begin{aligned}\angle FTS &= \angle ETF - \angle ETS = \angle ETF - \angle TBE = \angle EAF - \angle ABE = \\ &= \angle EAF + \angle BAD + \angle ADB - 180^\circ = \angle EAF + \angle BCD + \angle ADB - 180^\circ = \\ &= \angle EAF + \angle ADB - \angle CBD - \angle CDB = \\ &= \angle EAF + \angle ADB - (90^\circ - \angle AEF) - (90^\circ - \angle AFE) = \angle ADB = \angle BDT.\end{aligned}$$

Следовательно, TS — касательная к описанной окружности треугольника DFQ в точке T.

6. Даны четыре кучи камней, занумерованные числами от 1 до 4. Сначала в каждой куче лежит по 2024 камня. Петя и Вася играют в игру. Ходят по очереди, начинает Петя. Каждый ход игрок выбирает натуральные числа $m < n \leqslant 4$, берет m камней из кучи с номером n и раскладывает все взятые камни, добавляя их по одному камню в каждую из куч с номерами от $n-m$ до $n-1$. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может победить независимо от игры соперника?

Ответ: Выигрывает Петя.

Решение. Будем следить за количеством камней во второй и четвертой кучах (числа a и b). Количество камней в остальных кучах не будет иметь значения. Назовем позицию (a, b) *выигрышной*, если игрок, делающий ход из этой позиции, может затем победить. В противном случае позицию назовем *проигрышной*. Покажем, что позиции, в которых a четно, а b дает остаток 1, 3 или 4 при делении на 5, а также позиции в которых a нечетно, а b не дает остаток 1 при делении на 5 выигрышные. Для этого надо проверить, что из любой выигрышной позиции есть ход в проигрышную позицию, а из любой проигрышной позиции либо вообще нет хода, либо ход есть только в выигрышные позиции. Отметим, что любой ход, в котором камни берутся из второй или третьей куч на единицу меняет число камней во второй куче и не меняет число камней в четвертой куче, поэтому из проигрышной позиции такой ход заведомо ведет в выигрышную.

выигрышные	
a	b
четно	$1, 3, 4 \pmod 5$
нечетно	$0, 2, 3, 4 \pmod 5$

проигрышные	
a	b
четно	$0, 2 \pmod 5$
нечетно	$1 \pmod 5$

Рассмотрим ходы, в которых камни берутся из четвертой кучи. Покажем, что любой такой ход переводит проигрышную позицию в выигрышную. Взятие одного камня из четвертой кучи не затрагивает вторую кучу и меняет остаток b от деления на пять, поэтому он заведомо переводит проигрышную позицию в выигрышную. Если из четвертой кучи взято два или три камня, то a увеличится на единицу и, в частности, сменит четность. Но если b давало остаток 1 при делении на 5, то уменьшение b на два или три приведет к остаткам 3 или 4, что соответствует выигрышной позиции. Если же b давало остаток 0 или 2 от деления на 5, то уменьшение b на два или три не может привести к остатку 1 (0 переходит в 2 или 3, а 2 переходит в 0 или 4), что также соответствует выигрышной позиции.

Наконец, покажем, что из выигрышной позиции всегда есть ход в проигрышную. Если a нечетно, то надо просто переложить один камень из второй кучи в первую. Если a — четно, то b дает остаток 1, 3 или 4 при делении на 5. Для остатков 1 и 3 можно переложить один камень из четвертой кучи в третью. А для остатка 4 — взять три камня и разложить их по первым трем кучам. Тогда a станет нечетным, а b будет давать остаток 1 от деления на 5, что соответствует проигрышной позиции.

Олимпиада школьников СПбГУ по математике

Заключительный этап. 2023/2024 учебный год

Задания для 6-7 классов

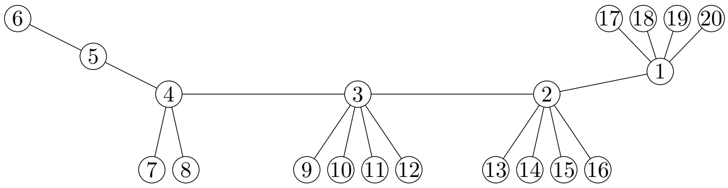
(В задачах 1, 2 и 3 правильное и полное решение каждого из пунктов 1а, 1б, 2а, 2б, 2в и 3а оценивается в 10 баллов; правильное и полное решение пункта 3б и задач 4 и 5 оценивается в 20 баллов)

Олимпиада школьников СПбГУ по математике
Задания заключительного этапа
2023/2024 учебный год

Задания для 6–7 классов

Вариант 1

1. Оля красит сороконожку, составленную из кружков и отрезков (см. рисунок). Два кружка, соединенных отрезком, считаются соседними. Сначала Оля красит в зеленый цвет N любых кружков. Далее происходит *докрашивание*: Оля выбирает любой зеленый кружок, у которого все соседние кружки, кроме одного, уже зеленые, — и этот оставшийся тоже красит в зеленый цвет. Потом она выбирает следующий кружок и т. д. При каком наименьшем N Оля сможет сделать все кружки зелеными?



а) Напишите, чему равно N, и укажите, какие кружки нужно закрасить вначале.

б) Докажите, что если вначале Оля закрасит меньшее количество кружков, то ей не удастся докрасить сороконожку.

2. На листе бумаги в треугольную клеточку нарисован шестиугольник. Каждая треугольная клетка лежит в полосах трех разных направлений. При пересечении полосы́, содержащей клетку, со сторонами шестиугольника получаются отрезки, которые называются *проекциями* клетки на стороны шестиугольника. Для примера на рисунке изображен шестиугольник со стороной 3, закрашена одна клетка и изображены все ее проекции на стороны. Считаем, что сторона клетки равна 1.

Можно ли в шестиугольнике со стороной 100 так закрасить 9 клеток, не имеющих общих точек с его контуром, чтобы суммарная длина всех проекций этих клеток оказалась равна

а) 18 б) 53 в) 56 ? Если можно — объясните как, если нельзя — объясните, почему нельзя.

При подсчете суммы длин проекций каждый отрезок учитывается один раз, независимо от того, проекциями скольких клеток он является.

3. Есть 30 кроликов и 30 клеток, клетки пронумерованы числами от 1 до 30, а кролики — числами от 31 до 60. Кроликов рассаживают по клеткам (по одному кролику в клетку) так, чтобы номер каждого кролика был взаимно прост с номером его клетки.

а) Предложите способ такой рассадки.

б) Докажите, что количество способов так рассадить кроликов по клеткам больше 5000.

4. Возьмем произвольное натуральное число n_1. Вычислим значение $5n_1 + 1$ и уберем из его разложения на простые множители все множители, кроме двоек и троек. Полученное число назовем n_2. Например:

$$n_1 = 25 \quad \to \quad 5 \cdot 25 + 1 = 126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \quad \to \quad n_2 = 18,$$
$$n_1 = 24 \quad \to \quad 5 \cdot 24 + 1 = 121 = 11^2 \quad \to \quad n_2 = 1,$$
$$n_1 = 22 \quad \to \quad 5 \cdot 22 + 1 = 111 = 3 \cdot 37 \quad \to \quad n_2 = 3.$$

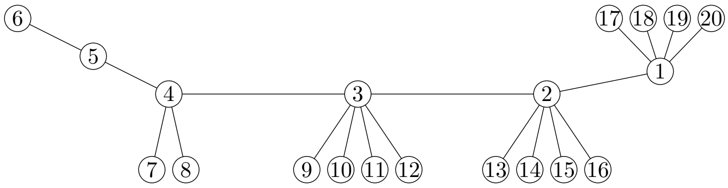
Потом вычислим значение $5n_2 + 1$ и уберем из этого числа все простые множители, кроме двоек и троек, полученное число назовем n_3 и т. д.

Докажите, что с какого бы натурального числа n_1 мы ни начали, через некоторое время в этой последовательности встретится число 1.

5. В некоторой толпе каждый человек имеет не более чем 111 знакомых. (Знакомство симметрично: если Маша знакома с Мишей, то и Миша знаком с Машей.) Докажите, что толпу можно разделить на две части A и B так, чтобы в A каждый человек имел не более 100 знакомых, а в B каждый человек имел не более 10 знакомых.

Решения

1. Ответ: потребуется покрасить 11 кружков.



а) Достаточно закрасить кружки 7–11, 14–19. При докрашивании мы можем сразу докрасить все кружки, «из которых растут ноги», т. е. 1–4. После этого закрасим все остальные кружки.

б) Заметим, что среди кружков 9—12 должно быть не меньше трех закрашенных. В противном случае, даже если вся остальная сороконожка уже закрашена, у кружка 3 остаются два незакрашенных соседа и докрасить сороконожку в этом месте невозможно. Аналогично в группах кружков 13–16 и 17–20 должно быть по три закрашенных. Кроме того, в группе кружков 5–8 должно быть не меньше двух закрашенных кружков (иначе нам не удастся докрасить обе ноги 7 и 8 или хвост 5-6 и одну из ног). Итого, требуется покрасить не меньше 11 кружков.

2. Ответы: а) да, б) да, в) нет.

а) Возьмем внутри шестиугольника треугольник со стороной 3 клетки. Он состоит как раз из 9 клеток, а каждая из его шести проекций имеет длину 3.

б) Тут, знаете ли, четность ни при чем. Сумма проекций клетки, не касающейся границы шестиугольника, равна 6. При этом нетрудно подобрать две клетки, у которых для двух разных направлений проекции совпадают. Например на рисунке совпадают горизонтальная проекция вправо верхней темной клетки и «верхне-правая» проекция нижней клетки. В результате сумма длин проекций этих двух клеток равна 11.

Добавляя к такой паре клеток еще 7 клеток с непересекающимися проекциями (например можно взять клетку и сдвинуть ее вниз 6 раз на удвоенную ширину горизонтальной полосы), получаем 9 клеток с суммой проекций, равной $6 \cdot 9 - 1 = 53$.

в) Сумма проекций клетки, не касающейся границы шестиугольника, равна 6. Поэтому 9 клеток не могут иметь сумму проекций больше чем 54.

3. а) При $1 \leqslant k \leqslant 29$ посадим $(31 + k)$-го кролика в k-ю клетку. Если числа $31 + k$ и k имеют общий делитель, то этот же делитель имеет их разность $(31 + k) - k = 31$. Но при указанных k число k не делится на 31. Поэтому правило рассадки соблюдено и клетки со первой по 29-ю уже заняты. Осталось посадить 31-го кролика в 30-ю клетку.

б) Имеется 7 кроликов, номера которых являются простыми числами: 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59. Этих кроликов можно произвольно пересаживать по тем 7 клеткам, которые они занимают, потому что номер любого из этих кроликов — простое число, которое больше номера любой клетки, из-за чего оно не может иметь общих делителей с номером клетки. Количество способов рассадить 7 кроликов по 7 клеткам равно 7!=5040. Возьмем произвольную подходящую расстановку кроликов (например из п. а) и построим новые перестановки, меняя местами указанных 7 кроликов. Мы получим множество из 5040 подходящих перестановок.

4. Допустим, что нашлось некоторое n_1, для которого последовательность не содержит 1. Тогда все числа в последовательности, начиная со второго, могут иметь в разложении на множители только простые множители 2 и 3. Далее в рассуждениях считаем, что $k > 1$. Заметим, что если n_k делится на простое число $p \in \{2, 3\}$, то $5n_k + 1$, очевидно, не делится на p и, следовательно, n_{k+1} не делится на p. Отсюда следует, что в последовательности n_k чередуются степени 2 и 3. Проверим, что последовательность убывает и из-за этого в ней все-таки должна содержаться 1.

Экспериментируя с $n_k \in \{2, 2^2, 3, 3^2\}$, видим, что в этих случаях последовательность быстро приходит к 1. Поэтому можно считать, что чередующиеся степени имеют показатели не меньше 3.

Пусть $n_k = 2^m$ (где $m \geqslant 2$), $n_{k+1} = 3^\ell$. Тогда или $n_{k+1} = 5n_k + 1$, или 3^ℓ получается из числа $5n_k + 1$ сокращением на какие-то простые множители не меньшие 7 (потому что это число не делится на 5). В первом случае n_{k+2} — это степень двойки, на которую делится число

$$5n_{k+1} + 1 = 5(5n_k + 1) + 1 = 25 \cdot 2^m + 6,$$

т. е. $n_{k+2} = 2$, что не соответствует нашим ограничениям — слишком маленький показатель. Во втором случае $n_{k+1} \leqslant \frac{5n_k+1}{7} < n_k$.

Теперь рассмотрим случай $n_k = 3^\ell$, $n_{k+1} = 2^m$ (где $\ell \geqslant 2$, $m \geqslant 3$). Здесь аналогично или $n_{k+1} = 5n_k + 1$, или 2^m получается из числа $5n_k + 1$ сокращением на какие-то простые множители, не меньшие 7. Второй случай опять ведет к убыванию, что нам и требуется. Разберем первый случай

$$5 \cdot 3^\ell = 2^m - 1.$$

Правая часть делится на 3 только при четных m, пусть $m = 2s$, мы можем считать, что $s > 1$. Тогда разложим правую часть на множители

$$5 \cdot 3^\ell = 2^{2s} - 1 = (2^s + 1)(2^s - 1).$$

Поскольку нечетные множители в правой части взаимно просты (так как их разность равна 2) и больше 1, равенство было бы возможно только в случае когда одна из скобок равна 5, а другая равна 3^ℓ, но разность этих чисел равна 2 только при $\ell = 1$. Значит, первый случай при наших ограничениях невозможен.

5. Это теорема Ловаса. В некоторой компании людей каждый знаком с не более чем $s + t + 1$ человеком. Тогда можно разбить всех людей на две части — A и B так, что в A каждый знаком с не более чем s, а в B каждый знаком с не более чем t людьми.

Доказательство. Если A — это какое-то множество людей, то через $|A|$ будем обозначать количество знакомств в этом множестве. Возьмем разбиение исходной толпы на части A и B, для которого величина $t|A| + s|B|$ минимально возможная. Это разбиение нам подходит: если в части A кто-либо имеет не меньше $s + 1$ знакомых, пересадим этого человека в часть B — там у него будет не более t знакомых. Тогда в подсчитываемой сумме первое слагаемое $t|A|$ уменьшится по крайней мере на $t(s + 1)$, а второе увеличится не более чем на ts. То есть, в результате пересадки контрольная сумма уменьшится, что невозможно. Аналогично разбирается случай, когда в части B кто-либо имеет не меньше $t + 1$ знакомого.