ЦЦ 180

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

17-96

50

1

1	2	3	4	5	6	сумма
3	3	0	2	2	0	10

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Тамбов

Дата 14.03.2019

* *

10–11 класс. Десятый вариант

1. Какое наибольшее количество ладей можно расставить на шахматной доске так, чтобы каждую ладью било не более двух других? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Числа x, y, z — углы некоторого треугольника, один из которых не меньше $\frac{\pi}{2}$. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \cos x + \cos y + \cos z + \cos(x - y) + \cos(y - z) + \cos(z - x).$$

3. Дан четырехугольник $ABCD$, отличный от параллелограмма. На лучах AB, CB, CD и AD вне сторон четырехугольника $ABCD$ выбираются соответственно точки K, L, M и N так, что $KL \parallel MN \parallel AC$ и $LM \parallel KN \parallel BD$. Найдите геометрическое место точек пересечения диагоналей параллелограмма.

4. Натуральное число x в восьмеричной системе 2018-значное, и его цифры повторяются через одну. Оказалось, что восьмеричная запись x^2 содержит только цифры 3 и 4, причем в равном количестве. Найдите x^2 (в восьмеричной системе).

5. В однокруговом турнире по настольному теннису участвовало n теннисистов ($n \geqslant 3$). Будем говорить, что игрок A *круче* игрока B, если A выиграл у B или найдется такой игрок C, что A выиграл у C, а C выиграл у B. При каких n по итогам турнира могло оказаться так, что каждый игрок круче всех остальных? Ничьих в теннисе не бывает.

6. На столе лежат два конуса с общей вершиной O, касаясь друг друга внешним образом. Угол между их осями симметрии равен $\operatorname{arctg} \frac{12}{5}$. Найдите максимальный угол при вершине большего из двух конусов с вершиной O, которые лежат на столе и касаются внешним образом первых двух конусов. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении.)

$$= \sqrt{2}\cos\frac{y-z}{2} + \cos(y-z) + 2\sin\frac{y+z}{2}\cos\frac{y-z}{2} = \sqrt{2}\cos\frac{y-z}{2} + \cos(y-z) + 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{y-z}{2} = \sqrt{2}\cos\frac{y-z}{2} + \cos(y-z) + \sqrt{2}\cos\frac{y-z}{2} = 2\sqrt{2}\cos\frac{y-z}{2} + 2\cos^2\frac{y-z}{2} - 1 =$$

$$= 2\cos^2\frac{y-z}{2} + 2\sqrt{2}\cos\frac{y-z}{2} - 1.$$

Пусть $\cos\frac{y-z}{2} = a$, $|a| \le 1$, тогда

$$A = 2a^2 + 2\sqrt{2}a - 1$$

График ф-ции $f(x) = 2x^2 + 2\sqrt{2}x - 1$ — парабола с ветвями вверх, значит максимум ф-ции на одном из концов отрезка, ограничивающего значения x.

То есть максимум A достигается либо при $a = -1$, либо при $a = 1$.

$A(-1) = 2 - 2\sqrt{2} - 1 = 1 - 2\sqrt{2}$

$A(1) = 2 + 2\sqrt{2} - 1 = 1 + 2\sqrt{2}$.

$1 + 2\sqrt{2} > 1 - 2\sqrt{2} \Rightarrow A_{max} = A(1) = 1 + 2\sqrt{2}$

Ответ: $1 + 2\sqrt{2}$

5. Заметим, что при $n = 3$ могло оказаться такое, что каждый игрок круче всех остальных. Покажем это: A выиграл B, но проиграл C; B проиграл A, но выиграл C; C выиграл A, но проиграл B. A круче B и C, B круче C и A, C круче A и B.

Для $n = 4$ ~~построим~~ заполним таблицу

I

	A	B	C	D
A	X	>	<	>
B	<	X	>	<
C	>	<	X	>
D	<	>	<	X

по вертикали первый игрок, по горизонтали — второй

$>$ — первый выиграл

$<$ — первый проиграл

~~Таблица заполнялась так, чтобы каждый игро~~

(см. доп. лист)

1.

Л	Л						
Л	Л						
		Л	Л				
		Л	Л				
				Л	Л		
				Л	Л		
						Л	Л
						Л	Л

Л - ладья

При расположении ладей, изображенном на рисунке, каждую ладью бьют ровно две другие ладьи.

Кроме того, если в оставшиеся пустыми клетки поставить хотя бы одну ладью, то ~~какие-то две~~ по крайней мере две другие ладьи будут биты больше двух раз.

Поэтому можно сделать вывод, что на рисунке изображено наибольшее возможное количество ладей, удовлетворяющих условию задачи.

Всего ладей: $4 \cdot 4 = 16$.

Ответ: 16.

2. x, y, z - углы треугольника, $\cancel{x \geq \frac{\pi}{2}}$

$A \to \max$.

$A = \cos x + \cos y + \cos z + \cos(x-y) + \cos(y-z) + \cos(z-x)$

~~Выражение A~~

Заметим, что в выражении A можно поменять местами переменные x, y, z без изменения значения выражения, поэтому неважно, какое именно из чисел x, y, z на самом деле не меньше $\frac{\pi}{2}$.

Для определенности пусть $x \geq \frac{\pi}{2}$.

1) $x > \frac{\pi}{2}$

$\cos x < 0$, ~~$\cos y, \cos z$~~ $\cos y > 0$, $\cos z > 0$.

$$\cos(x-y) = \underbrace{\cos x\cos y}_{<0} + \underbrace{\sin x\sin y}_{<\sin y} < \sin y$$

$\cos(y-z)$.

$$\cos(z-x) = \cos(x-z) = \underbrace{\cos x\cos z}_{<0} + \underbrace{\sin x\sin z}_{<\sin z} < \sin z.$$

2) $x = \frac{\pi}{2}$.

$\cos x = 0$, $\cos y > 0$, $\cos z > 0$.

$$\cos(x-y) = \underbrace{\cos x\cos y}_{=0} + \underbrace{\sin x\sin y}_{=\sin y} = \sin y$$

$\cos(y-z)$.

$$\cos(z-x) = \cos(x-z) = \underbrace{\cos x\cos z}_{=0} + \underbrace{\sin x\sin z}_{=\sin z} = \sin z.$$

~~Сравнив каждую сум~~

Сравним: $\cos x < 0$ и $\cos x = 0$.

$<$

$\cos(x-y) < \sin y$ и $\cos(x-y) = \sin y$

$<$

$\cos(z-x) < \sin z$ и $\cos(z-x) = \sin z$

$<$

Значит A принимает большее значение при $x = \frac{\pi}{2}$, а не при $x > \frac{\pi}{2}$.

$x = \frac{\pi}{2}$. $A = \overset{=0}{\cos\frac{\pi}{2}} + (\cos y + \cos z) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) + \cos(y-z) +$

$+ \cos\left(z - \frac{\pi}{2}\right) = 2\cos\frac{y+z}{2}\cos\frac{y-z}{2} + \sin y + \cos(y-z) +$

$+ \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$.

x, y, z – углы треугольника $\Rightarrow x + y + z = \pi$

$y + z = \frac{\pi}{2}$.

Вернемся к A: $A = 2\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{y-z}{2} + \sin y + \cos(y-z) +$

$+ \sin z =$ (см. оборот)

Шестовик

5 (продолжение)

По таблице видно, что A круче всех, B круче всех, C круче всех, а D круче всех кроме A. Если попытаться исправить то, что D не круче A, нарушится „равновесие" других игроков. („равновесие" — ситуация, когда игрок круче всех остальных). Поэтому при $n=4$ невозможна ситуация „равновесие" для каждого игрока.

Для $n=5$ заполним таблицу (аналогично таблице для $n=4$)

	A	B	C	D	E
A	X	>	<	>	<
B	<	X	>	<	>
C	>	<	X	>	<
D	<	>	<	X	>
E	>	<	>	<	X

По таблице видно, что все игроки находятся в равновесии.

~~В каждой строке строчке должно быть равное количество знаков > и знаков <. Более того, между собой строк количества Кроме того, в каждой строке строчке должно быть четное количество клеток без знака X. Эти условия~~

Очевидно, что при нечетных n турнир как бы „замыкается", в связи с чем каждый игрок оказывается в „равновесии". При четных же n такого не происходит и, по крайней мере, один игрок оказывается вне равновесия.

Ответ: при нечетных n.

4. $x = \underbrace{\overline{abab\ldots ab}}_{2018 \text{ раз}}$

$x = 10^{2017}a + 10^{2016}b + 10^{2015}a + \ldots + 10a + b =$

$= 10a(10^{2016} + 10^{2014} + \ldots + 1) + b(10^{2016} + 10^{2014} + \ldots + 1) =$

$= (10^{2016} + 10^{2014} + \ldots + 1)(10a + b)$.

$x^2 = (10^{2016} + 10^{2014} + \ldots + 1)^2 (10a + b)^2$.

$(10^{2016} + 10^{2014} + \ldots + 1)^2$ – старший член данного числа ~~будет равен~~ равен 10^{4032}.

$(10a + b)^2 = 100a^2 + 20ab + b^2$.

Самый старший член числа x^2 ~~будет~~ равен $10^{4032} \cdot 100a^2 = 10^{4034}a^2$.

Это означает, что в числе x^2 – 4034 цифры.

a и b – цифры. Второй член числа x^2 – $10^{4033} \cdot 2ab$.

$2ab \vdots 2 \Rightarrow 2ab = 4$ (3 не кратно 2), $ab = 2$.

Таким образом, x^2 ~~будет иметь~~ имеет следующий вид: $\underbrace{3434\ldots34}_{4034 \text{ раза}}$

Ответ: $\underbrace{3434\ldots34}_{4034 \text{ раза}}$.

3. Геометрическое место точек пересечения диагоналей параллелограмма – ~~то~~ точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$.