65

О-16

КИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

1	2	3	4	5	6	сумма
4	4	1	–	–	4	13

940

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (8–9 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Царицк

Дата 13.03.2019

* *

8–9 класс. Первый вариант

1. Маша на свой день рождения принесла в школу конфеты, оставила несколько конфет себе, а остальные раздала шестерым своим подружкам. Оказалось, что у всех девочек разное число конфет и количество конфет у любых четырех девочек больше, чем у трех оставшихся. Какое наименьшее количество конфет Маша могла оставить себе?

2. При каких a квадратные трехчлены $x^2 + ax - 2$ и $2x^2 - 3x + 2a$ имеют общий корень?

3. На столе лежит 2019 камней. Петя и Вася играют в игру по следующим правилам. Ходят по очереди, начинает Петя. За один ход можно взять со стола 1 или 2 камня, но один и тот же игрок два раза подряд не может брать 2 камня. Проигрывает не имеющий хода. Кто из игроков сможет обеспечить себе победу вне зависимости от игры противника?

4. Для любых положительных чисел a, b и c докажите неравенство

$$\frac{a}{2a^2+b^2+c^2} + \frac{b}{a^2+2b^2+c^2} + \frac{c}{a^2+b^2+2c^2} \leqslant \frac{9}{4(a+b+c)}.$$

5. Внутри треугольника ABC выбрана такая точка D, что $\angle ABD = \angle ACD$ и $\angle ADB = 90°$. Точки M и N середины сторон AB и BC соответственно. Найдите угол $\angle DNM$.

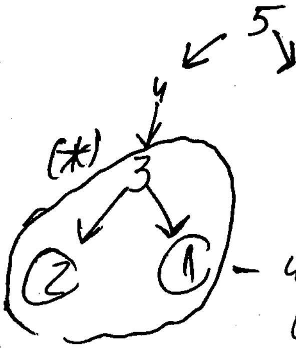
6. Найдите все пары простых чисел p и q, для которых $p^2 + pq + q^2$ является точным квадратом.

Таким образом после каждой пары ходов будет забираться либо 2, либо 4 камня и чётность кол-ва камней меняться не будет.

Пронумеруем камни, расположим их по возрастанию номера, и будем считать, что они камни берут с конца.

Отсчитаем 3 камня сначала, а остальное разобьём на четвёрки подряд идущих камней. Т.к. ход максимум 4, то наша пара побывает в каждой четвёрке. Рассмотрим тот момент, когда они пришли в последнюю четвёрку, они могли остановиться на 5 или 7 камне.

1) они остан-ись на 5 камне. Ход первого игрока.



– ход 1-го

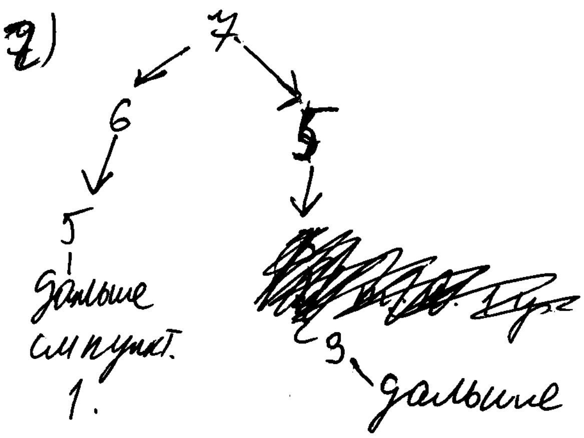
– ход 2-го

2 – победа, т.к. 1-ый взять 2 не может.

– и там и там победа т.к. 2-ой может взять как 2; так и 1.

Если они остановились на 5-ом камне – победа 2-го

2)



– дальше см (*) пункта 1.

№6.

Пусть $p^2+pq+q^2=n^2$

$p^2+2pq+q^2-n^2-pq=0.$

$(p+q)^2-n^2=pq$

$(p+q+n)(p+q-n)=pq$

1) случай: скобки равны p и q по отдельности: но т.к. $p, q, n>0$.

$p+q+n>p$ и $p+q+n>q$, значит она равняться p или q не может.

№1.

Ответ: 10.

Решение:

1. ~~Нам требуется найти~~ Пусть $a_1, a_2, a_3 \dots a_7$ — кол-во конфет у каждой девочки.

Не умаляя общности $a_1 < a_2 < a_3 \dots < a_7$.

По условию сумма любых 4-ёх чисел больше оставшихся

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 > a_5 + a_6 + a_7$.

Найдём минимальное значение a_1:

$a_1 > (a_5 - a_2) + (a_6 - a_3) + (a_7 - a_4)$

$a_5 - a_2 \geq 3$ (т.к. между ними есть числа a_4 и a_3. И друг от друга они отличаются минимум на 1 (a_5 от a_4, a_4 от a_3, a_3 от a_2))

$a_6 - a_3 \geq 3$

$a_7 - a_4 \geq 3$

$a_1 > (a_5 - a_2) + (a_6 - a_3) + (a_7 - a_4) \geq 3 + 3 + 3 = 9$

$a_1 > 9$

$a_1 \geq 10$

т.к. $a_1 < a_2$ и $a_1 \geq 10 \Rightarrow a_2 \geq 11$ и т.д. $a_7 \geq 16$.

И минимальное значение, что может принимать a_1 это $10 \Rightarrow$ минимальное кол-во конфет, которое взяла Маша 10.

Пример:

Маша: 10 конфет, 1-ая подруга: 11, 2ая: 12 ......

6ая подруга: 16.

№2

Решение:

1. Пусть при каком-то x, оба уравнения стали равными 0.

$x^2 + ax - 2 = 2x^2 - 3x + 2a = 0$

$2x^2 - 3x + 2a = x^2 + ax - 2 \iff x^2 - x(a+3) + 2a + 2 = 0$.

Решим это уравнение:

$\sqrt{D} = \sqrt{(a+3)^2 - 4(2a+2)} = \sqrt{a^2 + 6a + 9 - 8a - 8} = \sqrt{a^2 - 2a + 1} = |a - 1|$

$x_1 = \frac{a+3+|a-1|}{2}$

$x_2 = \frac{a+3-|a-1|}{2}$

1) $a \geq 1 \Rightarrow x_1 = \frac{a+3+a-1}{2} = a+1$

$x_2 = \frac{a+3-a+1}{2} = 2$

2) $a < 1 \Rightarrow x_1 = \frac{a+3-a+1}{2} = 2$

$x_2 = \frac{a+3+a-1}{2} = a+1.$

Тоесть мы нашли 2 корня, при которых уравнения принимают значение 0.

Подставим каждый корень в 1ое уравнение и найдём a.

1) $x=2.$

$4+2a-2=0$

$a=-1.$

2). $x=a+1$

$(a+1)^2+a(a+1)-2=0$

$a^2+2a+1+a^2+a-2=0$

$2a^2+3a-1=0.$

$\sqrt{D}=\sqrt{9+8}=\sqrt{17}.$

$a_{12} = \frac{-3\pm\sqrt{17}}{4}.$

Ответ: $a_1=-1 \quad a_{34} = \frac{-3\pm\sqrt{17}}{4}.$

№3

Решение:

Приведём стратегию за 2ого игрока:

Если 1-ый берёт 1 => 2ой берёт 1

Если 1-ый берёт 2 => 2ой берёт 2 (причём 2ой нигде правила не нарушит, т.к. если 1ый может взять 2, то он на прошлом ходу 2 не брал => на прошлом ходу 2ой не брал 2).

Чистовик.

2 случай.

$p+q+n = pq \Rightarrow p+q+n = 1.$

т.к. $p+q+n = 1 \Rightarrow n = p+q-1$

$p+q+n = pq \Leftrightarrow 2p+2q-1 = pq \Leftrightarrow 2q-1 = p(q-2)$

~~Пусть p~~

$\Downarrow$

среди p и q нет чётного иначе
$2p+2q-1$ – нечётное
pq – чётное.

Пусть $p>5$.

$$\frac{2q-1}{q-2} = p > 5$$

$2q-1 > 5q-10$

$q<3$, но q – простое и q – нечётное, этого не может быть.

Значит $p \le 5$.

1) $p=5$.

$2\cdot 5+2q-1 = 5q \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow q=3$.

2) $p=3$.

$2\cdot 3+2q-1 = 3q \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow q=5$

Ответ: $p=5$, $q=3$ или $p=3$, $q=5$.