(50) вход 12.52
приход 12^{54}

О-1

...КИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

1

9425

1	2	3	4	5	6	сумма
4	–	4	–	–	2	10

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (8–9 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Чебоксары

Дата 19.03.19

* *

8–9 класс. Первый вариант

1. Маша на свой день рождения принесла в школу конфеты, оставила несколько конфет себе, а остальные раздала шестерым своим подружкам. Оказалось, что у всех девочек разное число конфет и количество конфет у любых четырех девочек больше, чем у трех оставшихся. Какое наименьшее количество конфет Маша могла оставить себе?

2. При каких a квадратные трехчлены $x^2 + ax - 2$ и $2x^2 - 3x + 2a$ имеют общий корень?

3. На столе лежит 2019 камней. Петя и Вася играют в игру по следующим правилам. Ходят по очереди, начинает Петя. За один ход можно взять со стола 1 или 2 камня, но один и тот же игрок два раза подряд не может брать 2 камня. Проигрывает не имеющий хода. Кто из игроков сможет обеспечить себе победу вне зависимости от игры противника?

4. Для любых положительных чисел a, b и c докажите неравенство

$$\frac{a}{2a^2+b^2+c^2} + \frac{b}{a^2+2b^2+c^2} + \frac{c}{a^2+b^2+2c^2} \leqslant \frac{9}{4(a+b+c)}.$$

5. Внутри треугольника ABC выбрана такая точка D, что $\angle ABD = \angle ACD$ и $\angle ADB = 90°$. Точки M и N середины сторон AB и BC соответственно. Найдите угол $\angle DNM$.

6. Найдите все пары простых чисел p и q, для которых $p^2 + pq + q^2$ является точным квадратом.

№3

Ответ: выигрывает 1-й игрок

Стратегия:

сначала 1-й игрок берёт 1 камень, затем 1 раз дополняет 2-ого игрока до 3 (если 2-й игрок взял 1 камень первый возьмёт 2 и наоборот). потом 403 раза дополнит до 5 (позже скажу как).

Заметим, что после последнего хода 1-ого игрока останется 0 камней $\Rightarrow$ он выиграет.

Как дополнить до 5:

$$\overset{2\text{-й}}{1}\ \overset{1\text{-й}}{1} \left\langle \begin{array}{l} \overset{2\text{-й}}{2}\ \overset{1\text{-й}}{1} \\ \overset{1\text{-й}}{1}\ \overset{2\text{-й}}{2} \end{array} \right.$$

$$\overset{2\text{-й}}{2}\ \overset{1\text{-й}}{1}\ \overset{2\text{-й}}{1}\ \overset{1\text{-й}}{1}$$

Заметим, что первый ход первого игрока в этом дополнении всегда 1 камень $\Rightarrow$ мы всегда сможем дополнить

$\sqrt{1}$

Оценка:

Обозначим конфеты семи девочек за $x_1, x_2 \dots x_7$.

БОО $x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant x_4 \geqslant x_5 \geqslant x_6 \geqslant x_7$,

Но т.к. $x_1 \neq x_2$, $x_1 \neq x_3$, $x_2 \neq x_3 \dots\dots x_6 \neq x_7 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5 > x_6 > x_7$

$\Downarrow$

$x_1 \geqslant x_2+1 \geqslant x_3+2 \geqslant x_4+3 \geqslant x_5+4 \geqslant x_6+5 \geqslant x_7+6$

$x_2 \geqslant x_3+1 \geqslant x_4+2 \geqslant x_5+3 \geqslant x_6+4 \geqslant x_7+5$

$x_3 \geqslant x_4+1 \geqslant x_5+2 \geqslant x_6+3 \geqslant x_7+4$

По условию задачи $x_7 + x_6 + x_5 + x_4 > x_1 + x_2 + x_3$

$x_7 + \cancel{x_6} + \cancel{x_5} + \cancel{x_4} > \cancel{x_4} + 3 + \cancel{x_5} + 3 + \cancel{x_6} + 3$

$x_7 > 9$

$x_7 \in \mathbb{N}_0$ $\Big| \Rightarrow \boxed{x_7 \geqslant 10}$

Пример:

Мама оставила себе 10 конфет, а подругам дала 11, 12, 13, 14, 15, 16 конфет.

Заметим, что если четвёрка минимальных чисел больше тройки максимальных чисел, то условие будет выполняться для любой четвёрки (т.к. любая четвёрка $\geqslant$ минимальная четвёрка $>$ максимальная тройка $\geqslant$ любая тройка $\Rightarrow$ любая четвёрка $>$ любая тройка)

$10+11+12+13 > 14+15+16$

$46 > 45$ – верно

Ответ: 10 конфет.

№3.

Ответ: выигрывает первый.

Стратегия:

сначала первый берёт 1 камень, затем будет „дополнять" второго игрока до чётного числа (т.е. если 2-й взял 1 камень, то 1-й возьмёт 1, если 2-й возьмёт 2 камня, то 1-й возьмёт 2).

№3.

Ответ: выигрывает первый.

Стратегия:

сначала 1-й ~~игрок~~ берёт 1 камень, затем 402 раза дополняет до 5 (позже расскажу как), потом 1 раз дополняет до 8, ~~потом 1 раз до 8 (позже расскажу как)~~, т.е. после последнего хода 1-ого игрока останется 0 камней => он выиграет

Как дополнять до 5:

Первый ход всегда 2-ого игрока.

2-й 1-й: 1 1 < 2-й 1-й: 2 1; 2-й 1-й: 1 2

2-й 1-й 2-й 1-й: 2 1 1 1

Заметим, что первый ход первого игрока всегда 1 => он всегда сможет дополнить до 5, если хватит камней.

Как дополнить до 8

2-й 1-й: 1 2 < 2-й 1-й: 1 1 < 2-й 1-й: 2 1; 2-й 1-й: 1 2

2-й 1-й 2-й 1-й: 2 1 1 1

2-й 1-й: 2 1 <

Чистовик

3

№ 6.

$p^2+pq+q^2=x^2 \Rightarrow \begin{cases} x>p \\ x>q \end{cases}$ БОО: $p \geq q$

$x \in \mathbb{N}$

$(p+q)^2-x^2=pq$

$(p+q-x)(p+q+x)=pq \Rightarrow pq \vdots p+q-x$

$p+q-x<q \Rightarrow \begin{cases} p+q-x \not\vdots p \\ p+q-x \not\vdots q \end{cases}$ $\Rightarrow p+q-x=1$

$pq \vdots p+q-x$

$x=p+q-1$

$\Downarrow$

$p^2+pq+q^2=p^2+2pq+q^2-2p-2q+1$

$4p-1 \geq pq \Leftarrow \begin{cases} 2p+2q-1=pq \\ p \geq q \end{cases}$

$\begin{cases} 4-\frac{1}{p} \geq q \\ q \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow \boxed{3 \geq q}$

1) Если $q=3$:

$2p+6-1=3p$

$\begin{cases} p=5 \\ q=3 \end{cases}$

2) Если $q=2$:

$2p+4-1=2p$

$3=0$ – неверно

$\Downarrow$

$q \neq 2$

Ответ: $p=5$, $q=3$