80

0,17

...ургский государственный университет

8988

1	2	3	4	5	6	сумма
4	4	4	4			16

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (8–9 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Саранск

Дата 13.03.2019

* *

8–9 класс. Первый вариант

1. Маша на свой день рождения принесла в школу конфеты, оставила несколько конфет себе, а остальные раздала шестерым своим подружкам. Оказалось, что у всех девочек разное число конфет и количество конфет у любых четырех девочек больше, чем у трех оставшихся. Какое наименьшее количество конфет Маша могла оставить себе?

2. При каких a квадратные трехчлены $x^2 + ax - 2$ и $2x^2 - 3x + 2a$ имеют общий корень?

3. На столе лежит 2019 камней. Петя и Вася играют в игру по следующим правилам. Ходят по очереди, начинает Петя. За один ход можно взять со стола 1 или 2 камня, но один и тот же игрок два раза подряд не может брать 2 камня. Проигрывает не имеющий хода. Кто из игроков сможет обеспечить себе победу вне зависимости от игры противника?

4. Для любых положительных чисел a, b и c докажите неравенство

$$\frac{a}{2a^2 + b^2 + c^2} + \frac{b}{a^2 + 2b^2 + c^2} + \frac{c}{a^2 + b^2 + 2c^2} \leqslant \frac{9}{4(a + b + c)}.$$

5. Внутри треугольника ABC выбрана такая точка D, что $\angle ABD = \angle ACD$ и $\angle ADB = 90^\circ$. Точки M и N середины сторон AB и BC соответственно. Найдите угол $\angle DNM$.

6. Найдите все пары простых чисел p и q, для которых $p^2 + pq + q^2$ является точным квадратом.

1. Пусть x - наименьшее количество конфет, которое она могла оставить.

Понятно, что у Маши должно быть меньше всех конфет, потому что иначе она может поменяться количествами с девочкой, у которой их меньше. Условие по-прежнему выполняется, а у Маши конфет меньше.

Итак, упорядочим количества конфет у девочек (точнее девочек по возрастанию количеств)

Тогда у 2-й, 3-й, 4-й девочек суммарно не меньше $(x+1)+(x+2)+(x+3) = 3x+6$.

А у 5-й, 6-й, 7-й девочек суммарно не менее $(x+4)+(x+5)+(x+6) = 3x+15$.

По условию: $x + 3x+6 > 3x+15 \Leftrightarrow x > 9$.

Так как x - натуральное, то минимальное x это 10.

Пример: у Маши - 10 конфет, у остальных: 11, 12, 13, 14, 15, 16. Проверим; суммарно у 1-4 девочек должно быть больше чем у 5-7 суммарно и тогда условие выполняется:

$10+11+12+13 = 46 > 45 = 14+15+16$ - верно.

Ответ: 10 конфет.

2. Пусть x_1 - общий корень уравнений.

Тогда $\begin{cases} x_1^2 + ax_1 - 2 = 0 \\ 2x_1^2 - 3x_1 + 2a = 0 \end{cases}$

$(2)-(1)$: $x_1^2 - 3x_1 + 2a - ax_1 + 2 = 0$

$x_1^2 - x_1(a+3) + 2a + 2 = 0$

$D = (a+3)^2 - 4(2a+2) = a^2+6a+9-8a-8 = a^2-2a+1 = (a-1)^2$

$x_1 = \dfrac{a+3 \pm (a-1)}{2}$

$x_1 = \dfrac{a+3+a-1}{2} = a+1$

$\Rightarrow (1)$: $(a+1)^2 + a(a+1) - 2 = 0$.

$a^2+2a+1+a^2+a-2=0$

$2a^2+3a-1=0$

$D = 9+8 = 17$.

$a_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}$

$x_1 = \dfrac{a+3-a+1}{2} = 2$

$\Rightarrow (1)$: $4+2a-2=0 \Rightarrow a=-1$

Ответ: $a = \dfrac{-3-\sqrt{17}}{4}$, $a = \dfrac{-3+\sqrt{17}}{4}$, $a=-1$

3. Ответ: Петя.

Опишем стратегию Пети:

Первым ходом он возьмёт 1 камень, а потом все камни разобьёт на две кучи по 100 камней.

Итак, Петя будет брать такое же количество камней, сколько взял Вася, но из другой кучи. Таким образом после каждого нечётного по счёту хода (хода Пети) в этих двух кучах будет поровну камней. При этом Петя ни разу не нарушит, потому что в таком случае нарушит и Вася.

Так Петя и Вася дойдут до позиции, когда в кучах либо по 1, либо по 2 камня. Ход будет Васин и он опустошит одну кучу, а следом за ним Петя опустошит другую и выиграет.

Обговорим ситуацию, когда в кучах останется по 1 камню. Эта ситуация была получена либо из (2;2), либо из (3;3). В первом случае мы обговорим, обратимся ко второму. Мы поняли, что в предыдущий ход оба взяли по два камня, следовательно в этот ход 2 камня брать не можем, поэтому и в ситуации (1;1) мы доказали выигрышность Петиной стратегии.

4.
$$\frac{a}{2a^2+b^2+c^2} + \frac{b}{a^2+2b^2+c^2} + \frac{c}{a^2+b^2+2c^2} \le \frac{9}{4(a+b+c)}$$

По Коши для 3-ёх чисел:

$\dfrac{2a^2+b^2+c^2}{3} \ge \sqrt[3]{2a^2b^2c^2}$

$\dfrac{a^2+2b^2+c^2}{3} \ge \sqrt[3]{2a^2b^2c^2}$

$\dfrac{a^2+b^2+2c^2}{3} \ge \sqrt[3]{2a^2b^2c^2}$

$\Rightarrow \dfrac{a}{2a^2+b^2+c^2} \le \dfrac{a}{3\sqrt[3]{2a^2b^2c^2}}$

$\Rightarrow \dfrac{a}{2a^2+b^2+c^2} + \dfrac{b}{a^2+2b^2+c^2} + \dfrac{c}{a^2+b^2+2c^2} \le \dfrac{a+b+c}{3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}$

Докажем, что $\dfrac{a+b+c}{3\sqrt[3]{2a^2b^2c^2}} \overset{?}{\le} \dfrac{9}{4(a+b+c)}$

$\Updownarrow$

$4(a+b+c)^2 \le 27\sqrt[3]{2a^2b^2c^2}$

$\Updownarrow$

$64(a+b+c)^6 \le 3^9 \cdot 2a^2b^2c^2$

$32(a+b+c)^6 \le 3^9 \cdot a^2b^2c^2$