(50)

Ac-68



1

264

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | сумма |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 4 | 0 | – | 2 | 0 | 10 |

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Владимир

Дата 16.03.2019

* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *

## 10–11 класс. Первый вариант

**1.** Имеется 8 черных ладей и $n$ белых. При каком наибольшем $n$ их можно расставить на шахматной доске так, чтобы одноцветные ладьи не били друг друга? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

**2.** Даны положительные числа $x, y, z$. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{xyz\,(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4 + (yz)^4 + (xz)^4}}\,.$$

**3.** Дан треугольник $ABC$ с меньшей стороной $AB$. На сторонах $AB$ и $AC$ выбраны соответственно точки $X$ и $Y$ так, что $BX = CY$. Под каким углом прямая, проходящая через центры описанных окружностей треугольников $ABC$ и $AXY$, пересекает прямую $BC$, если $\angle ABC = \beta$ и $\angle BCA = \gamma$?

**4.** Десятичная запись квадрата натурального числа $x$ представляет собой два одинаковых соседних блока из $n$ цифр. Может ли $n$ равняться 20182019?

**5.** На однокруговой турнир по настольному теннису подало заявку 16 человек. Когда было сыграно $n$ матчей, оказалось, что среди любых трех теннисистов найдутся двое, уже сыгравших между собой. При каком наименьшем $n$ такое возможно?

**6.** Три конуса с общей вершиной, касающихся друг друга внешним образом, имеют высоту 2 и радиус основания $\sqrt{3}$. Два шара касаются внешним образом друг друга и всех конусов. Найдите отношения радиусов шаров (большего к меньшему).

1

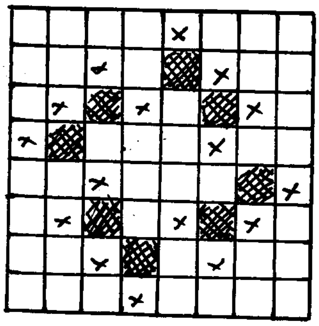
Заметим, что если в строке $k$ белых ладей, то для того, чтоб они не били друг друга, в строке должно быть хотя бы $k-1$ черная ладья, т.к. между двумя белыми, между кот. нет других белых должна быть хотя бы одна черная ладья. Пусть $k_i$ − число бел. ладей в $i$-ой строке. Тогда $k_1+k_2+\ldots+k_8$ − число белых ладей на доске.

$(k_1-1)+(k_2-1)+(k_3-1)+\ldots+(k_8-1)\le T$, где $T$ − число черн. ладей на доске, $T=8$.

$(k_1-1)+\ldots+(k_8-1)\le 8$ (в кажд. строке хотя бы $k_i-1$ черн. ладья)

$k_1+\ldots+k_8\le 16$.

Тогда белых ладей не более 16. Пример на 16:



x − белая ладья

■ − черная ладья

В данном примере между $\forall$ двумя белыми ладьями, нах. в одной строке, стоит хотя бы одна черная ладья и между $\forall$ двумя черными в кажд. строке стоит хотя бы одна белая.

черных 8, белых − 16.

Тогда пример подходит.

Ответ: 16.

2

$$A=\frac{xyz\,(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4+(yz)^4+(xz)^4}}=\frac{xy\cdot xz+yx\cdot yz+zy\cdot zx}{\sqrt{(xy)^4+(yz)^4+(xz)^4}}$$

сделаем замену $xy=a$, $yz=b$, $zx=c$.

Тогда
$$A=\frac{ac+ab+bc}{\sqrt{a^4+b^4+c^4}}$$
числа положительные, т.е. $a>0,\ b>0,\ c>0$

Из неравенства о средних между ср. арифмет. и ср. квадратич. получаем

$$\sqrt{\frac{a^4+b^4+c^4}{3}}\ge\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{a^4+b^4+c^4}}\le\frac{\sqrt3}{a^2+b^2+c^2}$$

Причем равенство достигается при $a=b=c$.

Тогда $A\le\dfrac{ac+ab+bc}{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt3$

$a^2+b^2\ge 2ab$ (т.к. $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2\ge0$).

$a^2+c^2\ge 2ac$

$b^2+c^2\ge 2bc$

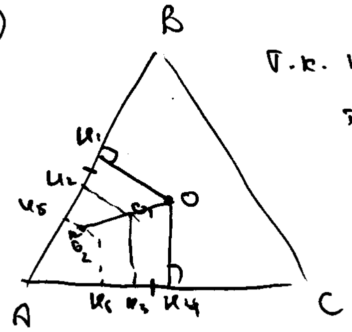
$\Rightarrow a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ac$

Тогда $\dfrac{ab+bc+ac}{a^2+b^2+c^2}\le1$

$A\le1\cdot\sqrt3=\sqrt3$. Тогда наиб. знач. $A=\sqrt3$. Док, что оно достигается: $x=y=z$, тогда $A=\dfrac{3x^4}{\sqrt{3x^8}}=\dfrac{3}{\sqrt3}=\sqrt3$

Ответ: $\sqrt3$

(3)



Т.к. $K_1K_2 = K_3K_4$, $K_5K_2 = K_6K_3$

т. $O, O_1, O_2$ лежат на одной прямой

Пусть $O_1O \cap K_5O_2$ в т. $K$

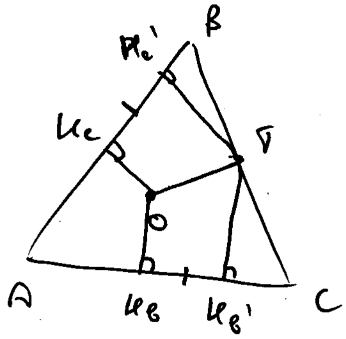
Тогда $\frac{K_1K_2}{K_2K_5} = \frac{OO_1}{O_1K}$

$O_1O \cap K_6O_2$ в т. $L$, тогда

$\frac{K_3K_4}{K_6K_3} = \frac{OO_1}{O_1L}$

Тогда $O_1K = O_1L$ т.е. $K$ и $L$ совпадают.

Тогда пусть $OO_1 \cap BC = T$



$TK_C' \perp AB$, $TK_B' \perp AC$

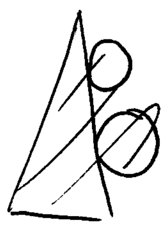
По ранее док. $K_CK_C' = K_BK_B'$

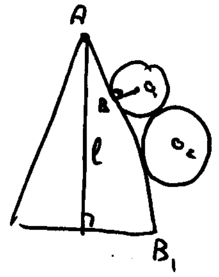
т.е. $\angle OTC$ — искомый

Санкт-Петербургский
государственный
университет

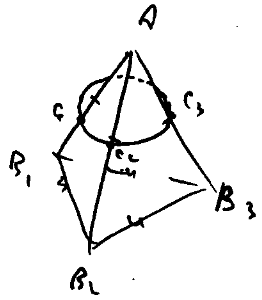
Чистовик

6. Т.к. конусы равны и попарно касаются внешним образом, прямая, соед. центры шаров содержит вершину конусов (т.к. углы между этой прямой и осями цилиндра равны и оси цилиндров равны двум, а также расстояния от точек $O_1$ и $O_2$ (центры шаров) равны



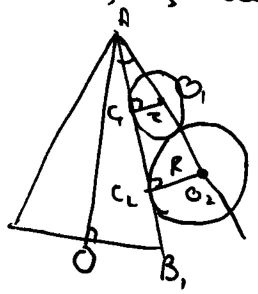



Расстояния $AB$ и $BO_1$ равны у всех цилиндров из касания.
Пусть $AB_1$, $AB_2$, $AB_3$ — образующие которых касается цилиндр.
Рассмотрим пирамиду $AB_1B_2B_3$.




$C_1, C_2, C_3$ — точки кас. одной из окр. цилиндра.
$\triangle C_1C_2C_3$ — правильный, тогда $AO_1 \perp (B_1B_2B_3)$, $AO_2 \perp (B_1B_2B_3)$, т.е. $O_1 \in AO_2$.

Построим сечение, проходящее через ось одного из цилиндров и прямую $AO_2$




$AO_1 = d$, тогда из $\triangle AO_1C_1 \sim \triangle AO_2C_2$

$$\frac{AO_1}{AO_2} = \frac{O_1C_1}{O_2C_2} = \frac{AC_1}{AC_2}$$

$$\frac{AO_1}{O_1C_1} = \frac{AO_2}{O_2C_2} \Rightarrow \frac{O_1C_1}{AO_1} = \frac{O_2C_2}{AO_2}$$

$$\frac{O_1C_1}{AO_1} = \sin\angle O_1AC_1 \Rightarrow r = AO_1 \cdot \sin\angle O_1AC_1$$

$r = d\sin\alpha$ $\qquad$ $\angle O_1AC_1 = \alpha \Rightarrow \sin\angle O_1AC_1 = \sin\alpha$

$$\frac{O_2C_2}{AO_2} = \frac{R}{r+R+d} = \frac{R}{R+d(\sin\alpha+1)} = \sin\alpha$$

$R = R\sin\alpha + d\sin\alpha(\sin\alpha+1)$

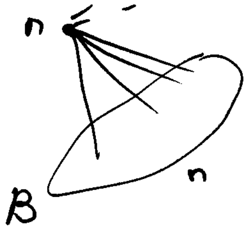
$R(1-\sin\alpha) = d\sin\alpha(\sin\alpha+1) \Rightarrow R = \frac{d\sin\alpha(\sin\alpha+1)}{1-\sin\alpha}$

$\sin\alpha \neq 1$, иначе равенство не вып. $R+0 = d+1(1+1)$ — не верно из $d \neq 0$. Аналог. $\sin\alpha \neq 0$.

$$\frac{R}{r} = \frac{d\sin\alpha(\sin\alpha+1)}{(1-\sin\alpha)} : d\sin\alpha = \frac{\sin\alpha+1}{1-\sin\alpha} = \frac{1+\sin^2\alpha+2\sin\alpha}{\cos^2\alpha}.$$

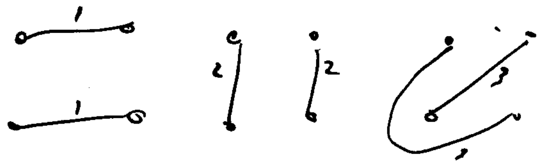
Осталось найти $\sin\alpha$.

5) Т.к. было сыграно $n$ матчей, если перевести игру в граф, у каждой верш. степень $n$.
Возьмем эту вершину и проведем ребра
$A$ ($15-n$) к тем верш., с которыми она уже играла. Их $n$.

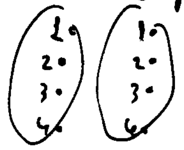


Тогда ост. $16-n-1=15-n$ верш. с ней не соединены.
Возьмем вершину, которую мы выбрали и 2 верш. из мн-ва $A$. Тогда $\forall$ две верш. из $A$ должны быть соед.

Возьмем $A$!  – полный граф на $15-n$ вершинах.
Тогда степень каждой $14-n$
$14-n \leq n$ из того, что ст. каждой верш. $n$.
$n \geq 7$
Тогда $n=7$. Пример: разобьем людей на четверки. За 3 матча все 4 человека обр. полный граф:



Теперь мы имеем 4 полных графа. разобьем их на пары. За 4 хода сделаем так, чтоб все вершины в одной паре были соединены



(Сначала 1-1, 2-2, 3-3, 4-4, затем 1-2, 2-3, 3-4, 4-1, и т.д.)
Тогда за 7 ходов мы сделали граф, сост. из двух компонент связности, каждая из которых полный граф на 8 верш.
Тогда если мы выбираем 3 верш, две из них по принципу Дирихле нах. в одной комп. связности, т.е. соединены. Тогда в $\forall$ тройке найдется пара сыгравших.