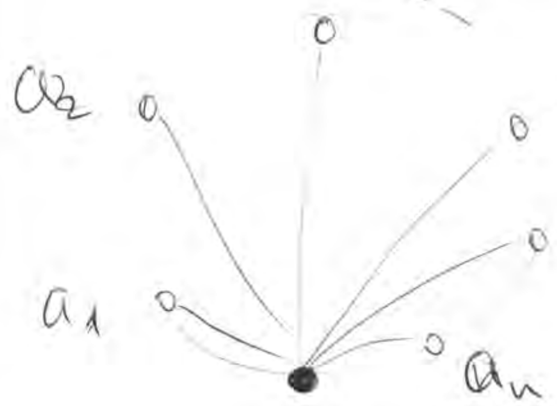
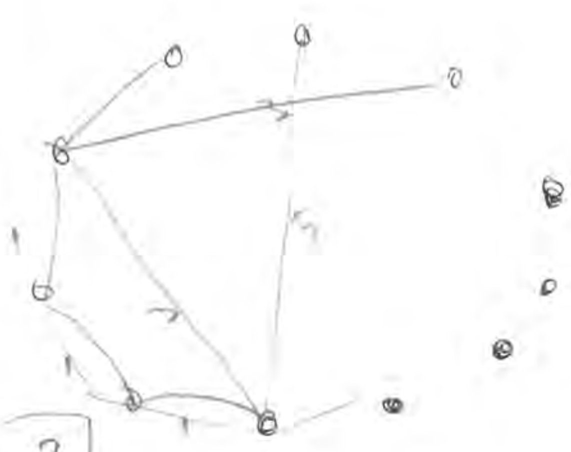
№ 5: Представим участников как вершины графа, тогда 1 партия = 1 ребро, а если ~~Пусть у нас уже сыграно~~ три человека сыграли друг с другом — рёбра образуют треугольник.
Пусть сыграно n партий. тогда ~~из~~ каждой вершины выходит n рёбер, рассмотрим одну из них:



тогда из каждой ~~из~~ вершины a_i ~~от 1 до n~~ выходит ещё n-1 ребро, и при этом никакие две a_i и a_j вершины не соединены рёбрами, значит, нужна ещё минимум n-1 вершина

тогда вершин: $n+1+(n-1)=2n \leq 2k$.
т.к. кол-во партий, после которых может не остаться ~~треуг, в кот.~~ треугольников в графе $\leq k$.

Док-м, что при $n=k$ сущ-т такая расстановка рёбер, при кот. нет Δ-в!
Если $k \vdots 2$!
~~Если $k \not\vdots 2$~~!



будем проводить ребра так! для каждой вершины будем отмеч: каждую 1-ю, 3-ю, 5-ю и т.д. Тогда кол-во вершин между концами одного ребра чётно, а между концами 2-х рёбер, вых. из одной точки — нечётно, ⇒ Δ-в не будет.

Ёлох 12^{55}-12^{58}

САНКТ-ПЕТЕР[...]ГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

1	2	3	4	5	6	сумма
4	4	0	0	4		12

60

1819

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Санкт-Петербург

Дата 24 февраля 2019

* *

10–11 класс. Второй вариант

1. Имеется 9 черных ладей и n белых. При каком наибольшем n их можно расставить на шахматной доске так, чтобы одноцветные ладьи не били друг друга? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Даны положительные числа x, y, z. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{xyz\,(x+y+z)}{x^4+y^4+z^4}.$$

3. Окружность ω единичного радиуса проходит через вершины B и C треугольника ABC и вторично пересекает его стороны AB и AC в точках K и L соответственно. На лучах BL и CK отмечены соответственно такие точки P и Q, что $BP = AC$ и $CQ = AB$. Найдите расстояние между центрами описанных окружностей треугольников APQ и KBC.

4. Шестнадцатиричная запись квадрата натурального числа x представляет собой два одинаковых соседних блока из n цифр. Может ли n равняться 2023?

5. В однокруговом турнире по настольному теннису участвует $2k$ спортсменов. В каждом туре все участники проводят по одному матчу. Какое наименьшее число туров надо сыграть, чтобы при любом расписании игр обязательно нашлось трое теннисистов, сыгравших друг с другом?

6. Имеется три одинаковых конуса с общей вершиной, касающихся друг друга внешним образом, а также два шара, касающихся внешним образом друг друга и всех конусов. Радиусы шаров относятся как 1 : 3. Найдите угол при вершине конусов. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении).

№1: Заметим, что добавление одной чёрной ладьи добавляет не более, чем одно место для дополнительной белой. ~~Не~~ используя чёрные ладьи вообще, можно выставить на доске ~~равно~~ максимум 8 белых ладей, после чего 9-ю чёрными добавить не более ~~9~~, чем ~~9~~ ещё 9 белых. $8+9=17$ – наиб. кол-во белых ладей (больше точно нельзя, по док-му). Приведём пример такой расстановки (с 17-ю белыми ладьями)

б							
				б			
			б	ч	б		
		б	ч	б	ч	б	
	б	ч	б	ч	б	ч	б
		б	ч	б	ч	б	
			б	ч	б		
				б			

б – белая ладья,
ч – чёрная

Ответ: 17

№2 $A = \frac{xyz(x+y+z)}{x^4+y^4+z^4}$

~~x^4+y^4+z~~ Из нер-ва Коши: $\sqrt[4]{\frac{x^4+y^4+z^4}{3}} \geq \frac{x+y+z}{3}$ $|^4$ $(x,y,z>0)$
(среднее степенное ~~любой~~ степени не меньше ср. арифм.)

$$\frac{x^4+y^4+z^4}{3} \geq \frac{(x+y+z)^3}{3^4} \quad |\cdot 3^4$$

$$x^4+y^4+z^4 \geq \left(\frac{1}{27}\right)(x+y+z)^3$$

$$\frac{1}{x^4+y^4+z^4} \leq \frac{27}{(x+y+z)^3}, \quad |\cdot xyz(x+y+z)$$

(т.к. нер-ва можно домнож. на положит. число:)

$$A = \frac{xyz(x+y+z)}{x^4+y^4+z^4} \leq \frac{27xyz(x+y+z)}{(x+y+z)^4} = \frac{xyz\cdot 27}{(x+y+z)^3}$$

$$\cancel{A \leq \frac{xyz}{27(x+y+z)^3}} \quad A \leq \frac{27\cdot xyz}{(x+y+z)^3}$$

т.к. среднее геометр. не больше ср. арифм.:

№2 (продол-е):

$$\sqrt[3]{xyz} \leq (x+y+z)/3 \quad |\cdot 3$$

$$3(xyz)^{\frac{1}{3}} \leq x+y+z \quad |^3$$

$$27xyz \leq (x+y+z)^3 \quad |: (x+y+z)^3$$

$$\frac{27xyz}{(x+y+z)^3} \leq 1.$$

$$\frac{27xyz}{(x+y+z)^3} = A, \quad A \leq 1. \quad \exists\, x=y=z=1:$$

$$\cancel{x^4+y^4} \quad A = \frac{xyz(x+y+z)}{x^4+y^4+z^4} = \frac{1\cdot1\cdot1(1+1+1)}{1^4+1^4+1^4} = 1.$$

Ответ: $\max(A) = 1$

~~№4: $\exists\, X^2 = \overline{\underbrace{a_0a_1a_2\dots a_{2022}}_{2023}\underbrace{a_0a_1a_2\dots a_{2022}}_{2023}}_{16}$~~

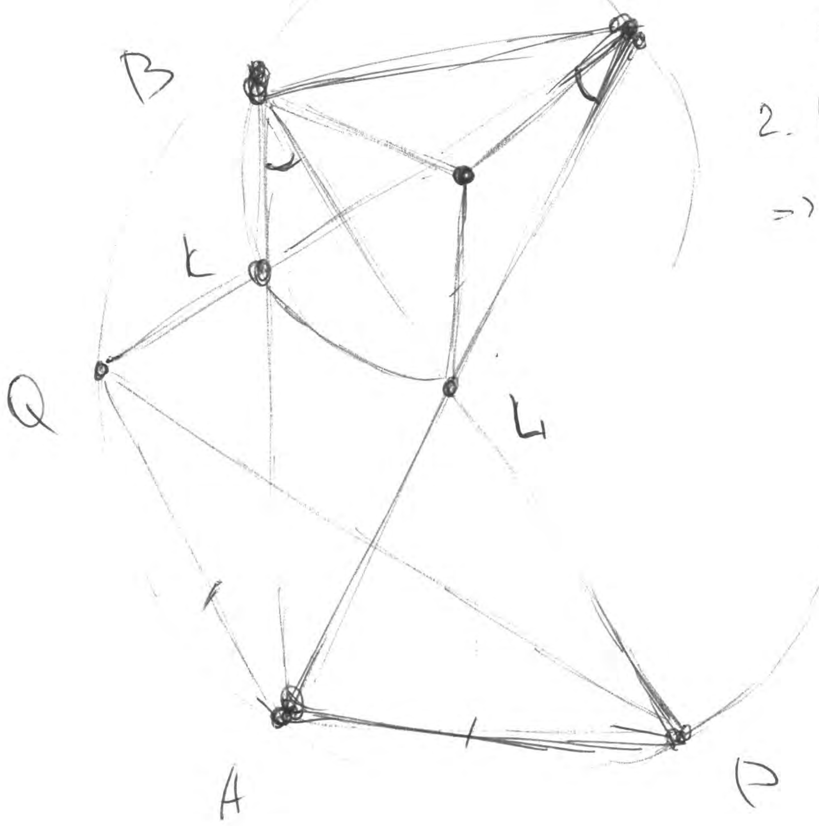
№4: $\exists\, X^2 = \overline{\underbrace{a_{2022}a_{2021}\dots a_1a_0}_{2023}\underbrace{a_{2022}a_{2021}\dots a_1a_0}_{2023}}_{16}$

тогда: $X^2 = a_0\cdot 16^0 + a_1\cdot 16^1 + a_2\cdot 16^2 + \dots + a_{2022}\cdot 16^{2022} + a_0\cdot 16^{2023+0} + a_1\cdot 16^{2023+1} + \dots + a_{2022}\cdot 16^{2023+2022} =$

$$= \left(a_0\cdot 16^0 + a_1\cdot 16^1 + a_2\cdot 16^2 + \dots + a_{2022}\cdot 16^{2022}\right)\cdot\left(16^{2023}+1\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{2022} \neq 0, \\ 0 \leq a_i \leq 15 \end{cases}$$

№4!



1. $\angle KCL = \angle KBL$,
т.к. опи он. на $\cup KL$

2. $BA = CQ$, $CA = BP$, $\angle ABP = \angle ACQ$, $\Rightarrow$
$\Rightarrow \triangle ABP = \triangle QCA$

3.

5 чистовик

№5 (продолжение)! , а т.к. $k \vdots 2$, ни одно такое ребро не будет диагональю, $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ ~~из~~ из вершины будет выходить по 2 ребра каждой „длины", $\Rightarrow$ выходить будет ровно k рёбер. $\underbrace{1, 3, 5 \ldots k-1}_{k/2}$; $n = \frac{k}{2} \cdot 2 = k$

Если же $k \not\vdots 2$, то ребро „длины" k будет ~~диагон~~ „диаметром" и выйдет из каждой вершины только 1 раз, ~~так~~ тогда:

$$\underbrace{1, 3, 5 \ldots}_{\frac{k-1}{2}} k \ ; \ n = \frac{k-1}{2} \cdot 2 + 1 = k.$$

~~Докажем, что за провести рёбер~~,
т.к. расстановка найдена, для $n = k$.

Ответ: после $k+1$ хода тройка обязательно найдётся.

4 чистовик