РГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

3346

1

50

1	2	3	4	5	6	сумма
2	1		3	4		10

50

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Москва

Дата 10 марта 2019

* *

10–11 класс. Десятый вариант

1. Какое наибольшее количество ладей можно расставить на шахматной доске так, чтобы каждую ладью било не более двух других? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Числа x, y, z — углы некоторого треугольника, один из которых не меньше $\frac{\pi}{2}$. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \cos x + \cos y + \cos z + \cos(x - y) + \cos(y - z) + \cos(z - x).$$

3. Дан четырехугольник $ABCD$, отличный от параллелограмма. На лучах AB, CB, CD и AD вне сторон четырехугольника $ABCD$ выбираются соответственно точки K, L, M и N так, что $KL \parallel MN \parallel AC$ и $LM \parallel KN \parallel BD$. Найдите геометрическое место точек пересечения диагоналей параллелограмма.

4. Натуральное число x в восьмеричной системе 2018-значное, и его цифры повторяются через одну. Оказалось, что восьмеричная запись x^2 содержит только цифры 3 и 4, причем в равном количестве. Найдите x^2 (в восьмеричной системе).

5. В однокруговом турнире по настольному теннису участвовало n теннисистов ($n \geqslant 3$). Будем говорить, что игрок A *круче* игрока B, если A выиграл у B или найдется такой игрок C, что A выиграл у C, а C выиграл у B. При каких n по итогам турнира могло оказаться так, что каждый игрок круче всех остальных? Ничьих в теннисе не бывает.

6. На столе лежат два конуса с общей вершиной O, касаясь друг друга внешним образом. Угол между их осями симметрии равен $\operatorname{arctg} \frac{12}{5}$. Найдите максимальный угол при вершине большего из двух конусов с вершиной O, которые лежат на столе и касаются внешним образом первых двух конусов. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении.)

После 2019 столбика: 2018 столбцу = 2016 столбцу.

2019 столбец будет равен 2018 столбцу, т.к. мы не перешли через 10ки ещё 1 раз → цифры будут такие же, как у 2018 столбца = 3.

Затем происходит то же самое, что и описано ранее, но уже мы не +7, а вычитаем её.

Получается

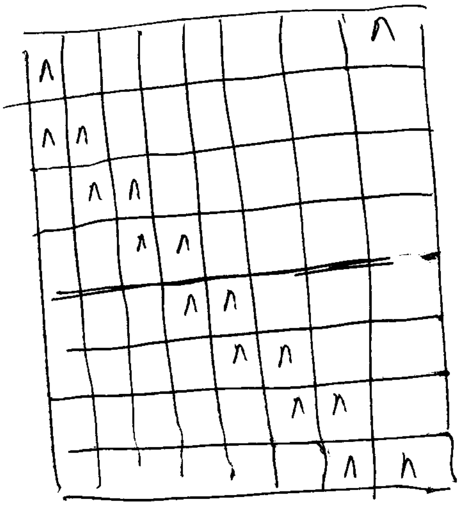
$$\underbrace{3434343\ldots43}_{2016\text{ раз}}\ \underbrace{34343434\ldots34}_{2016\text{ раз}}\ 344$$

ч.т.д.

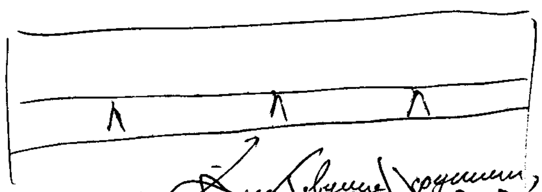
N1.

Ответ: 16.

Пример:



Оценка: допустим, можно поставить 17 ладей. Тогда хотя бы в 1 строке и 1 столбце будет минимум 3 ладьи:



~~столбцы можно сгруппировать~~

~~Ладью посередине бьют 2 раза, значит на этих столбцах не может стоять других ладей. (Таких ладей в этой строке n−2, где n − кол-во ладей в этой строке)~~

~~Аналогично с 3 ладьями в столбце~~ ~~Т.е. нам нужно поставить 17 ладей (17 − n) ладей в 8 − (n−2) столбцов~~

Санкт-Петербургский государственный университет

Ладью, стоящую посередине бьют 2 раза ⇒ в столбце с этой ладьей не может стоять других ладей. Значит нам нужно поставить 14 ладей в 7 оставшихся столбцов ⇒ в каждой столбце будет минимум по 2 ладьи + те 2 ладьи, которые стоят в уже разобранной строке. Т.е. будет как минимум 2 столбца с 3 ладьями. Ладьи, которые посередине в столбцах уже бьют 2 раза, а т.к. по принципу Дирихле в этой строке будет столько же как минимум 4 ладьи, мы приходим к противоречию.

№2.

$$A = \cos x + \cos y + \cos z + \cos(x-y) + \cos(y-z) + \cos(z-x)$$

Пусть $y \geq \frac{\pi}{2}$?

$$\underbrace{\cos x}_{} + \overset{\leq 0}{\cos y} + \cos z + \cos x \cdot \overset{\leq 0}{\cos y} + \sin x \cdot \overset{\leq \sin x}{\sin y} + \overset{\leq 0}{\cos y} \cdot \cos z + \overset{\leq \sin z}{\sin y} \cdot \sin z +$$

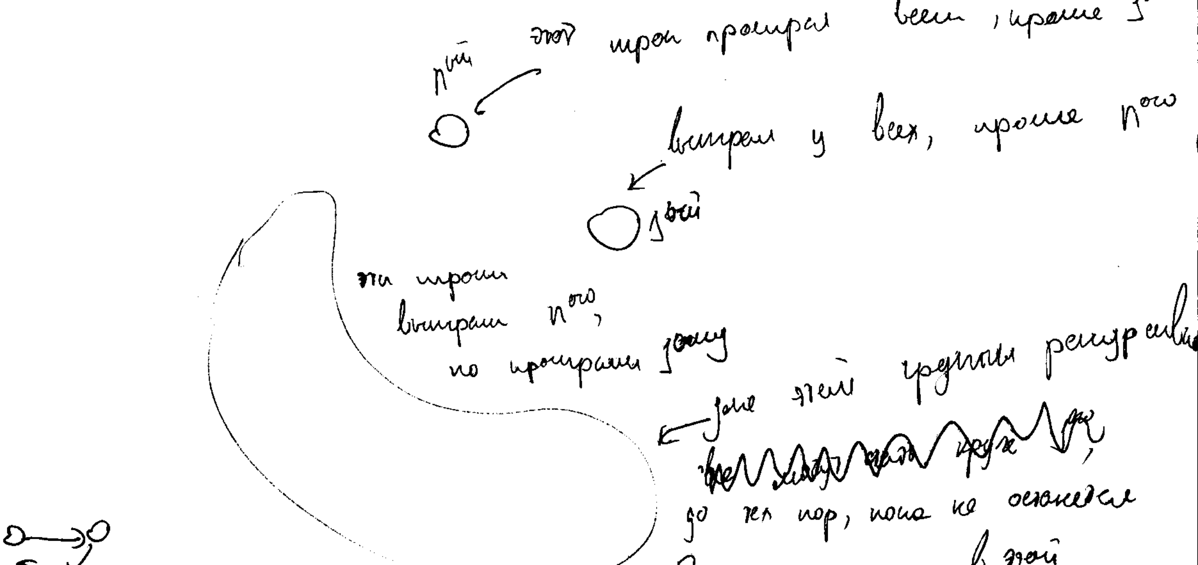
$\cos z \cdot \cos x + \sin z \cdot \sin x$. Для максимизации сумм $y = \frac{\pi}{2}$

$$\cos x + \cos z + \sin x + \overset{\sin z}{\cancel{\cos z}} + \sin z \cdot \sin x + \cos x \cdot \cos z = \cos x + \sin x + \sin x + \cancel{\cos x} +$$

$$\cos x \cdot \sin x + \sin x \cdot \cos x = 2(\cos x + \sin x + \sin x \cdot \cos x) = 2\cos x + 2\sin x + \sin 2x =$$

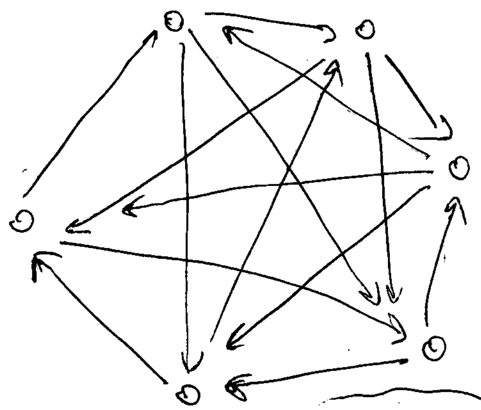
$$= \frac{2 \cdot 2}{\sqrt{2}}\left(\sin(x + 45^\circ)\right) + \sin 2x \xrightarrow{\max\ \text{при}\ x = 45^\circ} = \underline{\underline{2\sqrt{2} + 1}}$$

№5. При нечётных n это выполняется

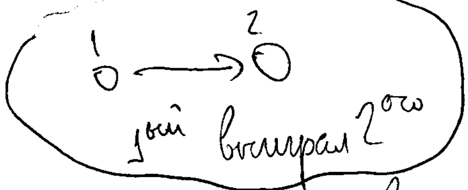


Дальше этой группы рекурсивно ~~выбираем...~~ до тех пор, пока не останется 3 игрока, а они в этой группе проиграют у 1 и выиграют у другого группе проиграют у одного и выиграют у другого для 6 человек ~~так~~ можно такое было:

Т.к. для 6 человек можно сделать, то и для всех четных >6 тоже.

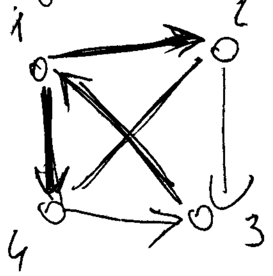


Добавляем еще одного человека, выигравшего у всех, но проигравшего одному новому, и второй проигравший всем, кроме $1^{\text{ому}}$ новому.



Для 4 это сделать невозможно:

т.к. всего 6 ребер, то найдется 1 человек который обыграл тоже бы $2^{\text{их}}$.



Чтобы условие выполнялось 3 должен выиграть $1^{\text{ого}}$. $2^{\text{ой}}$ и $4^{\text{ый}}$ обыгрывают $3^{\text{его}}$, иначе они не будут круче $1^{\text{ого}}$. Как бы мы не поставили стрелку между $2^{\text{ым}}$ и $4^{\text{ым}}$, они не будут круче друг друга.

Ответ: для всех n, кроме 4. V

№4. Ответ: ~~...434344~~

~~343...4343 34...3434344~~ ~~2016 цифр~~ ~~2016 цифр~~

$\underbrace{343\ldots4343}_{2016\text{ цифр}}\underbrace{3434\ldots34344}_{2016\text{ цифр}}$

Решение:

$$\overline{abababab\ldots ab}\cdot\overline{abababab\ldots ab}=\overline{\ldots\ldots bxb}$$

Рассмотрим последнюю цифру x^2.

составим таблицу умножения для 8-ной с.с.

	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7
2	2	4					
3	3		11				
4	4			20			
5	5				31		
6	6					44	
7	7						61

т.е. число b может быть либо 6, либо 2, т.к. остальные цифры в квадрате не дают на конце ни 3, ни 4.

~~Инвар.~~

Возьмем любое число $\overline{abcd\ldots z}_8 = a\cdot 8^n + b\,8^{n-1} + \ldots + z\cdot 8^0$

$$= \underbrace{a(7)(8^{n-1}+8^{n-2}+\ldots+1)}_{⋮7} + \underbrace{7\cdot b\cdot(8^{n-2}+\ldots+1)}_{⋮7} + \ldots + a+b+c+d+\ldots+z$$

т.е. если число $\overline{abcd\ldots z}_8 ⋮ 7 \Longleftrightarrow (a+b+c+d+\ldots+z) ⋮ 7$

Т.к. $x^2 ⋮ 7$ (одинаковое число 3 и 4), то у нас остается 2 варианта — либо $x = 5252\ldots52$, либо $x = 161616\ldots616$

Посмотрим на последнюю цифру числа $(161616\ldots616)^2$:

$$\begin{array}{r} \times\, 161616\ldots16 \\ 161616\ldots16 \\ \hline \ldots\ldots24 \\ 6 \\ \hline \ldots\ldots34 \end{array}$$

В числе $8x^2$ присутствует цифра 0, что противоречит условию.

Значит $x = 52525252\ldots52_8$

Возведем в квадрат

$$
\begin{array}{r}
4\;3\;2\;1\;0 \quad \text{№ столбца} \\
52525252525252 \\
\times\; 52525252525252 \\
\hline
125252525252524 \\
3252525252522\;11 \\
1\,3\,5252525252\,6\;11\;4 \\
32525252525\,2\;11\;4 \\
1252525252524\;11\;11 \\
18 \quad 11
\end{array}
$$

для чисел вида $(5252\ldots52)_8$ удвоенное число $= 125252525\ldots2524_8$

для чисел вида $(5252\ldots52)_8$ увеличен. в 5 раз число $= 3252525\ldots2522_8$

Заметим, что сумма цифр в $0^{ом}$ и $1^{ом}$ столбце равны, во $2^{ом}$ и $3^{ем}$ — равны и т.д.

Также заметим, что разница между $3^{им}$ и $1^{ым}$ столбцом — 7, $5^{ым}$ и $3^{им}$ — 7 и т.д.

До $2019^{ого}$ столбца подходит.

$2019^{ый}$ столбец $< 2017^{ого}$ на 1.

И далее, каждый след. н/ч столбец меньше предыд. на 7.

Посмотрим переходы через $10^{ки}$.

0 и 1 столбик не переходят через $10^{ки}$.

2 столбик переходит через $10^{ки}$ ⇒ значит 3 столбик будет давать число большее на 1.

4 столбик $= 2$ столбик $+ 7 + 1$ (от 3 столбика) $=$ цифре во 2 столбике

5 столбик $= 3$ столбик $+ 7 + 7$ (4 не перешли через 10 2 раза) $=$ цифре в 3 столбике.