РГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

8330

1

65

1	2	3	4	5	6	сумма
2	3	4	1	3		13

65

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Москва

Дата 10 марта 2019

* *

10–11 класс. Девятый вариант

1. Какое наибольшее количество ладей можно расставить на шахматной доске так, чтобы каждую ладью било не более трех других? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Числа x, y, z — углы треугольника, причем больший угол z не превосходит $\frac{\pi}{2}$. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \sqrt{\sin x \cdot \sin(z-y)} + \sqrt{\sin y \cdot \sin(z-x)}.$$

3. Дан четырехугольник $ABCD$, отличный от параллелограмма. На сторонах AB, BC, CD и DA выбираются соответственно точки K, L, M и N так, что $KL \parallel MN \parallel AC$ и $LM \parallel KN \parallel BD$. Найдите геометрическое место точек пересечения диагоналей параллелограмма $KLMN$.

4. Натуральное число x в восьмеричной системе 2019-значное, его младшая цифра равна 3, а все остальные цифры отличны от 3 и совпадают через одну. Число y получается записью цифр x в обратном порядке. Оказалось, что восьмеричное представление $x \cdot y$ содержит только цифры 1 и 6. Найдите $x \cdot y$ (в восьмеричной системе).

5. В однокруговом турнире по настольному теннису участвовало 100 спортсменов, причем ни один из них не выиграл все матчи. Будем говорить, что игрок A *круче* игрока B, если A выиграл у B или найдется такой игрок C, что A выиграл у C, а C выиграл у B. Каково наименьшее количество теннисистов, оказавшихся по итогам турнира круче всех остальных? Ничьих в теннисе не бывает.

6. На столе лежат два конуса с общей вершиной O, касаясь друг друга внешним образом. Угол между их осями симметрии равен $\operatorname{arctg} \frac{4}{3}$. Найдите максимальный угол при вершине меньшего из двух конусов с вершиной O, которые лежат на столе и касаются внешним образом первых двух конусов. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении.)

№2

$A = \sqrt{\sin x \cdot \sin(z-y)} + \sqrt{\sin y \cdot \sin(z-x)}$

Т.к. $x+y+z = 180°$ (углы △), то $z = 180° - x - y$. Тогда

$\sin(z-y) = \sin(180° - x - 2y) = \sin(x+2y)$

Наше выражение A принимает вид:

$A = \sqrt{\sin x \cdot \sin(x+2y)} + \sqrt{\sin y \cdot \sin(2x+y)}$.

Отсюда:

$$\begin{cases} \sqrt{\sin x \cdot \sin(x+2y)} \le \dfrac{\sin x + \sin(x+2y)}{2} \\ \sqrt{\sin y \cdot \sin(2x+y)} \le \dfrac{\sin y + \sin(2x+y)}{2} \end{cases}$$

Тогда $A \le \dfrac{\sin x + \sin y + \sin(x+2y) + \sin(2x+y)}{2} =$

$= \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) + \sin\left(\frac{3x+3y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) =$

$= \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\left(\sin\left(\frac{x+y}{2}\right) + \sin\left(\frac{3x+3y}{2}\right)\right) = 2\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \cdot \sin(x+y) \cdot \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) =$

$= (\cos x + \cos y) \cdot \sin(x+y)$.

Заметим, что при фиксированной сумме $x+y$ ($x, y \ge \frac{\pi}{2}$) наиб. значение $\cos x + \cos y$ достигается при $x = y$. Кроме того, известно, что $x+y \ge \frac{\pi}{2}$ т.к. $z \le \frac{\pi}{2}$, значит $\frac{\pi}{2} \ge x = y \ge \frac{\pi}{4}$, $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \ge \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$, значит максимум достигается при $x = y = \frac{\pi}{4}$. Подставим в наше неравенство. Тогда исходное выражение: $A \le \sqrt{2}$. Равенство достигается при $x = y = \frac{\pi}{4}$.

Ответ: $\sqrt{2}$.

№4.

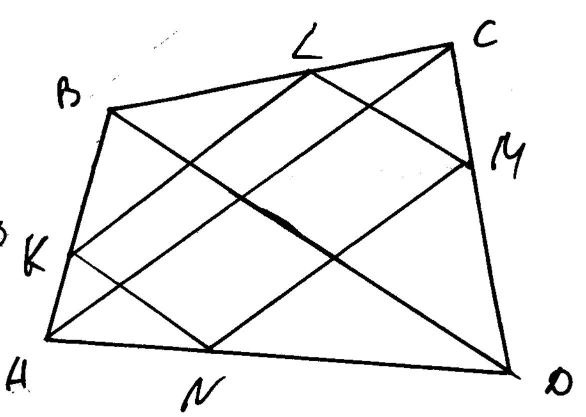
Представим исходное число x в виде $ababab...ab3$, тогда $y = 3ba...ba$. Т.к. их произв. $x \cdot y$ оканч. на 1, либо на 6 попробуем найти последнюю цифру числа y: a, ~~то~~ есть $3 \cdot 1 = 3$; $3 \cdot 2 = 6$; $3 \cdot 4 = 14$; $3 \cdot 5 = 17$; $3 \cdot 6 = 22$; $3 \cdot 7 = 25$. Видим, что подходит только 2, т.к должно оканч. на 6. b находим подбором: $b = 5$. Искомое число: $x = 2525...253$, $y = 35252...52$

$x \cdot y = 1\underbrace{1616...1616}_{1009 \text{ пар}}$ $1\underbrace{1616...1616}_{1009 \text{ пар}}$

№3.

Дано:
четырёхуг $ABCD$
т. $K\in AB$, т. $L\in BC$, т. $M\in CD$, т. $N\in AD$
$KL \parallel AC \parallel NM$
$KN \parallel BD \parallel LM$

ГМТ пересеч. диаг. парал $KLMN$ -?



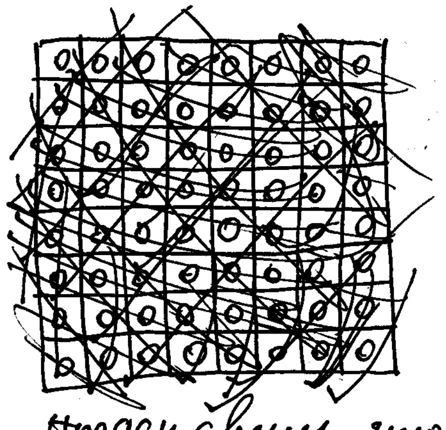
Решение:

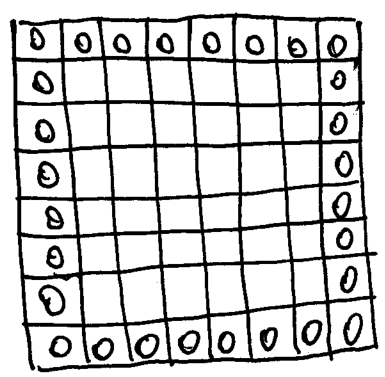
Заметим, что $KL=MN$, т.к. $KLMN$ — паралл. Также имеем подобные $\triangle BKL$ и ABC, ACD и MDN. Тогда $\frac{LK}{AC}=\frac{BK}{AB}=\frac{BL}{BC}=\frac{MN}{AC}=\frac{MD}{DC}=\frac{DN}{AD}$. Из того, что $MN=LK$, эти отношения все равны между собой. Обозн. их через u. Заметим, что если для некоторого $u\in(0;1)$, отложить на отрезке AB отрезок $BK=AB\cdot u$, на отрезке CB отрезок $BL=BC\cdot u$ и т.д., то получим параллелограмм $KLMN$, т.к. $LK\parallel AC\parallel MN$ и $LK=MN$. Обозначим. координаты точек через их буквы. Посчитаем координаты точек пересечения диагоналей параллелограмма. Т.к это середина одной из диагоналей, то эта точка $O=\frac{M+K}{2}$. $K=B+(A-B)\cdot u$; $M=D+(C-D)\cdot u$

$$O=\frac{M+K}{2}=\frac{B+(A-B)\cdot u+D+(C-D)\cdot u}{2}=\frac{B+D}{2}+u\left(\frac{A+C-(B+D)}{2}\right).$$

Обозначим середины BD через P, а середину AC через Q, тогда вектор $\frac{A+C-(B+D)}{2}=\overrightarrow{PQ}$. Т.к. $u\in(0;1)$, то ГМТ таких точек — это отрезок PQ, не включая его концов.

№1.





Заметим, что если ладья стоит на краю доски, то её всегда бьют не более 3 других ладей. (под краем доски подразумеваем крайние столбцы и строки).

Представим, что если у нас есть еще одна ладья, то обойдём ею доску по периметру (представим, что у нас есть столбцы и строки, расширяющие поле до 10×10) обойдём доску по периметру и посчитаем сколько ладей побьёт наша доп. ладья. Она не может побить больше кол-во ладей, чем длина периметра изначальной доски $8\times4=32$, причем каждую ладью побьём как минимум 1 раз, а 4 угловые ладьи мы бьем не меньше чем 2 раза. С таким условием не может стоять больше чем $32-4=28$ ладей, а такой пример приведён на рисунке.

Ответ: 28.

№5.

~~$A=\sin x-\sin(z-y)$~~ Докажем, что может быть подмножество игроков, в котором найдется хотя бы 1 игрок, который будет лучше всех в данном множестве. Возьмём игрока, который выиграл больше всех матчей, назовём его A. Теперь возьмём любого, у которого он проиграл, назовём его B. Игрок B проиграл какому-то игроку, у которого выиграл A, т.к иначе игрок B выиграл больше матчей, чем A. Это было бы противоречие. Получается, что игрок A — лучше всех, потому что любой игрок, которому он проиграл в свою очередь проиграл тому, у которого выиграл A. Теперь возьмём игрока, который лучше всех во множестве из 100 игроков. Назовем его „α". Далее возьмём множество игроков, у которых он проиграл. В этом множестве найдется игрок, который выиграл у „α", соответственно, он через одного выиграл у всех у кого выиграл „α", а также он лучше всех во множестве тех, кому „α" проиграл. Значит это „$\alpha 2$". Аналогично найдём $\alpha 3$. Приведём пример, $\alpha 1$ — выиграл у $\alpha 2$, $\alpha 2$ — выиграл у $\alpha 3$, $\alpha 3$ — выиграл у $\alpha 1$. Каждый из них оказался лучше всех остальных.

Ответ: 3.