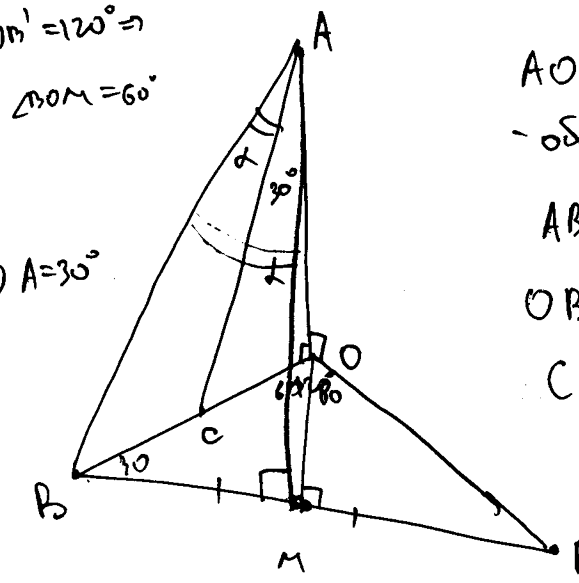
$\angle BOM' = 120° \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BOM = 60°$

$\angle COA = 30°$



AO – ось симметрии картинки, AC – общая касательная к сфере и конусу

AB – ось конуса, AB' – ось второго конуса

OB = OB' (мы так выбрали эти точки)

C лежит на BO (тоже выбрали)

Тогда если M – середина BB', то из симметрии B' это точка касания 2-х конусов $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ AM – общая касательная $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BAM = \angle BAC = \alpha$, а нас интересует угол 2α.

$\frac{BM}{AB} = \sin\alpha$, $\frac{BM}{OB} = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BM = \frac{\sqrt{3}}{2} OB$

$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2} OB}{AB} = \sin(\alpha + 30°) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\alpha$

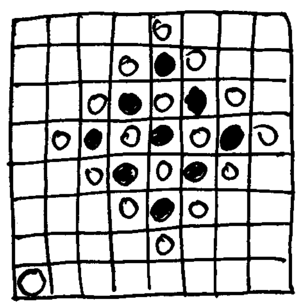
$\boxed{\begin{aligned} &\sin\alpha = \tfrac{\sqrt{3}}{2}(\sin\alpha\cos 30 + \cos\alpha \sin 30) \\ &\sin\alpha = \tfrac{3}{4}\sin\alpha + \tfrac{\sqrt{3}}{4}\cos\alpha \\ &\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3} \\ &\alpha = 60° \end{aligned}}$

т.е. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\alpha + 30°) \Rightarrow \alpha = 60° \Rightarrow 2\alpha = 120°$

Ответ: 120°.

№1. очевидно, что в одной строке не может стоять k одних ~~...~~ ладей более, чем k+1 других (исходя из числа промежутков между одноцветными ладьями). $\Rightarrow$ всего не более 9+8=17 белых ладей. 8 строк $\Rightarrow$ не более, чем всего черных ладей + 8 = 9+8 = 17.

Осталось построить пример на 17.



Вот он.

Ответ: 17.

3390

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

1	2	3	4	5	6	сумма
4	4	4			4	16

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Санкт-Петербург

Дата 24.02.2019

* *

10–11 класс. Второй вариант

1. Имеется 9 черных ладей и n белых. При каком наибольшем n их можно расставить на шахматной доске так, чтобы одноцветные ладьи не били друг друга? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Даны положительные числа x, y, z. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{xyz\,(x+y+z)}{x^4+y^4+z^4}.$$

3. Окружность ω единичного радиуса проходит через вершины B и C треугольника ABC и вторично пересекает его стороны AB и AC в точках K и L соответственно. На лучах BL и CK отмечены соответственно такие точки P и Q, что $BP = AC$ и $CQ = AB$. Найдите расстояние между центрами описанных окружностей треугольников APQ и KBC.

4. Шестнадцатиричная запись квадрата натурального числа x представляет собой два одинаковых соседних блока из n цифр. Может ли n равняться 2023?

5. В однокруговом турнире по настольному теннису участвует $2k$ спортсменов. В каждом туре все участники проводят по одному матчу. Какое наименьшее число туров надо сыграть, чтобы при любом расписании игр обязательно нашлось трое теннисистов, сыгравших друг с другом?

6. Имеется три одинаковых конуса с общей вершиной, касающихся друг друга внешним образом, а также два шара, касающихся внешним образом друг друга и всех конусов. Радиусы шаров относятся как 1 : 3. Найдите угол при вершине конусов. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении).

N2 Будем пользоваться неравенством $a^2+b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$

$$x^4 + \frac{y^4+z^4}{2} \geq x^4 + y^2z^2 \geq 2x^2yz$$

аналогично

$$y^4 + \frac{x^4+z^4}{2} \geq 2y^2xz$$

$$z^4 + \frac{x^4+y^4}{2} \geq 2z^2xy$$

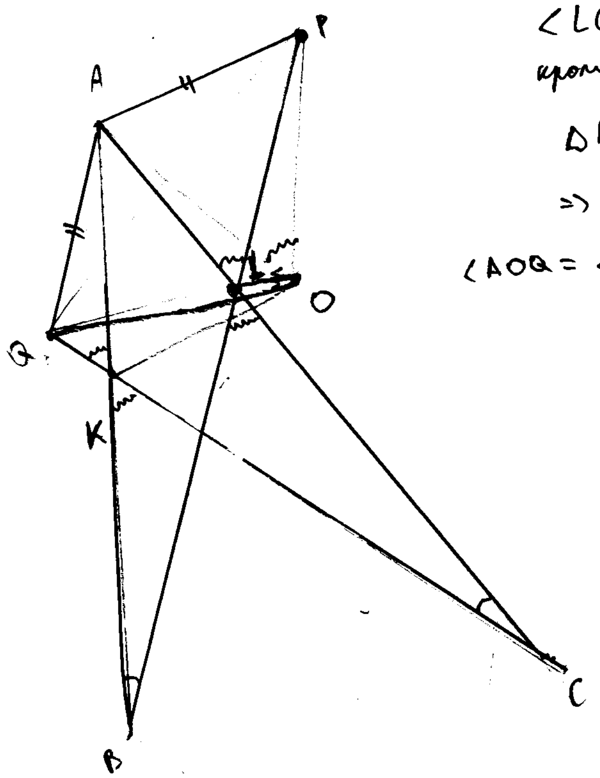
Сложив, имеем $2(x^4+y^4+z^4) \geq 2xyz(x+y+z) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{xyz(x+y+z)}{x^4+y^4+z^4} \leq 1$ (можем делить, т.к. числа >0).

равенство при $x=y=z=1$

Ответ: $\max = 1$ при $x=y=z=1$.

N3



O — центр описанной окружности APQ.

$\angle LCK = \angle LBK$ (т.к. BKLC — вписанный)

кроме того $BP = AC$ и $CQ = AB \Rightarrow$

$\triangle ACQ = \triangle PBA \Rightarrow AP = AQ. \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle APQ = \angle AQP = \frac{180 - \angle QAP}{2}$

$\angle AOQ = \angle AOP = 2\angle AQP = 180 - \angle QAP$

$\angle QAP = \angle QAC + \angle PAB - \angle BAC =$

$= \angle QAC + \angle AQC - \angle BAC =$ (из равенства $\triangle$)

$= 180 - \angle ACQ - \angle BAC =$

$= 180 - \angle ACK - \angle BAC =$

$= 180 - \angle BKC = 180 - \angle BLC$

$\angle AOQ = \angle AOP = 180 - \angle QAP = \angle BLC = \angle BKC = \angle ALP = \angle AKQ \Rightarrow$

точки A,P,O,L лежат на одной окружности и точки A,Q,K,O тоже.

$\angle AOL = \angle APL$, $\angle AOK = 180 - \angle AQK \Rightarrow \angle KOL = 180 - \angle AQK - \angle APL =$

$= 180 - \angle BAP - \angle APB = \angle ABP \Rightarrow$ точки K,L,O,D лежат на одной окружности.
(из равенства $\triangle$)

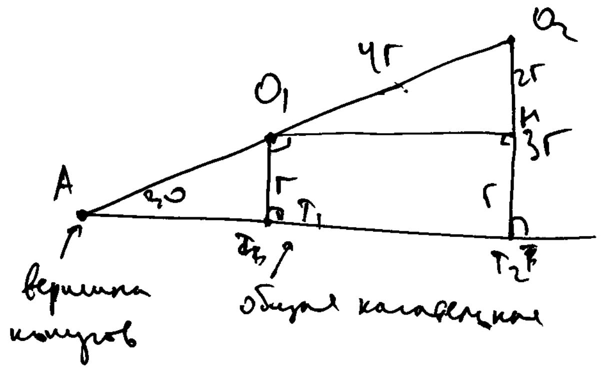
Тогда расстояние между центрами (APQ) и (BKC) = 1. Ответ: 1.

Для других случаев расположения точек док-во аналогичное.

P.S. Извините за неориентированные углы.

N6 Конструкция переходит в себя при повороте на 120° относительно прямой, проходящей через центры шаров и вершину конусов. (очевидно из симметрии).

Рассмотрим общую касательную к сферам из ~~...~~ вершины конусов, принадлежащую одному из конусов.



$O_1O_2 = r + 3r = 4r$

H — основание перпендикуляра из O_1 на O_2T_2

(T_1, T_2 — точки касания)

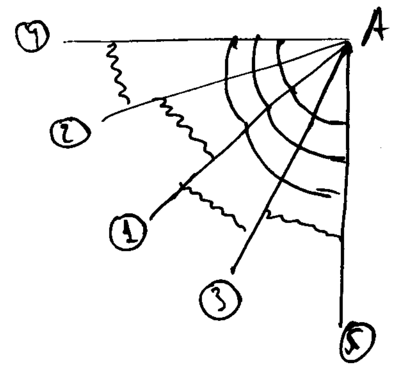
$O_1HT_2T_1$ — прямоугольник $\Rightarrow$

$\Rightarrow HT_2 = r \Rightarrow HO_2 = 2r = \frac{O_1O_2}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle O_2O_1H = 30° = \angle O_1AT_1$.

Итак, ось симметрии картинки по отношению к касательным имеет угол 30°.

Пусть 2 равных конуса имеют общую вершину и касаются. Покажем тогда, что угол между образующими равен углу между осями.



Рассмотрим общую касательную (1), оси (2 и (3)) и образующие, такие, что они лежат в одной плоскости с ~~...~~ (1), (2), (3).

Тогда $\angle(2;1) = \angle(1;3) = \angle(4;2) = \angle(3;5) \Rightarrow$

$\angle(4;1) = \angle(2;3)$ что и требовалось.

См. на обороте