M 1-5

ГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

8903

1

50

1	2	3	4	5	6	сумма
		-			-	

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Ростов-на-Дону

Дата 2 марта 2019

* *

10–11 класс. Первый вариант

1. Имеется 8 черных ладей и n белых. При каком наибольшем n их можно расставить на шахматной доске так, чтобы одноцветные ладьи не били друг друга? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Даны положительные числа x, y, z. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{xyz\,(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4+(yz)^4+(xz)^4}}.$$

3. Дан треугольник ABC с меньшей стороной AB. На сторонах AB и AC выбраны соответственно точки X и Y так, что $BX = CY$. Под каким углом прямая, проходящая через центры описанных окружностей треугольников ABC и AXY, пересекает прямую BC, если $\angle ABC = \beta$ и $\angle BCA = \gamma$?

4. Десятичная запись квадрата натурального числа x представляет собой два одинаковых соседних блока из n цифр. Может ли n равняться 20182019?

5. На однокруговой турнир по настольному теннису подало заявку 16 человек. Когда было сыграно n матчей, оказалось, что среди любых трех теннисистов найдутся двое, уже сыгравших между собой. При каком наименьшем n такое возможно?

6. Три конуса с общей вершиной, касающихся друг друга внешним образом, имеют высоту 2 и радиус основания $\sqrt{3}$. Два шара касаются внешним образом друг друга и всех конусов. Найдите отношения радиусов шаров (большего к меньшему).

Чистовик.

№1.

			Б				
		Б	Ч	Б			
	Б	Ч			Б		
Б	Ч		Б	Ч		Б	
	Б		Ч	Б		Ч	Б
		Б			Ч	Б	
			Б	Ч	Б		
				Б			

Пример расстановки для $n=16$.

Теперь докажем, что n не может быть больше 16:

Пусть в ряду стоит K черных ладей, тогда в этом же ряду может максимум стоять $(K+1)$ белых ладей (иначе ладьи одного цвета будут бить друг друга, если между ними не будет ладьи другого цвета).

Всего рядов 8, значит на всем поле будет черных ладей $8k$, а белых — не более $8(k+1)=8k+8$. У нас 8 черных ладей, значит $k=1$, значит белых ладей не может быть более $8+8=16$.

Значит 17 и более — неподходит.

Ответ: $n=16$.

№2.

$x, y, z > 0$

$$A = \frac{xyz(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4+(yz)^4+(xz)^4}}$$

Рассмотрим отдельно знаменатель:

Неравенство Коши: $x^4+y^4+z^4 \geq 3\sqrt[3]{x^4y^4z^4} \Rightarrow$

$\Rightarrow (xy)^4+(yz)^4+(xz)^4 \geq 3\sqrt[3]{x^8y^8z^8} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{(xy)^4+(yz)^4+(xz)^4} \geq \sqrt{3}\sqrt[3]{x^4y^4z^4}$

$\Downarrow$

$$\frac{1}{\sqrt{(xy)^4+(yz)^4+(xz)^4}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt[3]{x^4y^4z^4}} \Rightarrow \frac{xyz(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4+(yz)^4+(xz)^4}} \leq \frac{xyz(x+y+z)}{\sqrt{3}\sqrt[3]{x^4y^4z^4}}$$

Тогда максимальное значение A будет при равенстве $\frac{xyz(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4+(yz)^4+(xz)^4}} = \frac{xyz(x+y+z)}{\sqrt{3}\sqrt[3]{x^4y^4z^4}}$

$\Downarrow$

$$\frac{xyz}{\sqrt{(xy)^4+(yz)^4+(xz)^4}} = \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt[3]{xyz}}$$

$\Downarrow$

$$\frac{\sqrt[3]{x^4y^4z^4}}{\sqrt{(xy)^4+(yz)^4+(xz)^4}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$ (возведём в 6ую степень)

$$\frac{x^8y^8z^8}{((xy)^4+(yz)^4+(xz)^4)^3} = \frac{1}{27}$$

$27x^8y^8z^8 = ((xy)^4+(yz)^4+(xz)^4)^3$

$3x^2y^2z^2 = (xy)^4+(yz)^4+(xz)^4$

Заметим, что при $x=y=z$ равенство верное:

$3x^8 = x^8+x^8+x^8$

$3x^8 = 3x^8 \Rightarrow x=y=z$

№4.

~~Рассмотрим число~~

Пусть $x = \overline{PP}$

Тогда

$\overline{PP} = K \cdot 10^{20182019} + K = K(10^{20182019} + 1)$ ~~⇒ число будет состоящее~~

~~как минимум из 20182020 цифр (т.к. 20182019 нулей и~~

Рассмотрим $x = 9090\ldots 9091$, где на нечетных местах стоят 9ки, а на четных везде, кроме последнего символа 0, а последний символ – 1.

Это число делится на 11 (по признаку делимости на 11).

Получившееся ~~число тоже делится~~ при делении на 11 число, тоже делится на 11 (по признаку делимости на 11).

$\frac{X}{121}$ – является квадратом ⇒ X – тоже квадрат какого-то числа ⇒ P может равняться 20182019.

Ответ: да, и может равняться 20182019.

Чистовик.

~~Тогда~~

Подставим $x=y=z$ в A:

$$A=\frac{xyz(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4+(yz)^4+(xz)^4}}=\frac{x^3\cdot 3x}{\sqrt{x^8+x^8+x^8}}=$$

$$=\frac{3x^4}{\sqrt{3x^8}}=\frac{3x^4}{\sqrt{3}\,x^4}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

Ответ: максимальное значение выражения $=\sqrt{3}$.

№5.

Разделим всех теннисистов на 2 равные группы по 8 человек в каждой. Пусть в каждой из этих групп все сыграли со всеми. Тогда ~~в любом случае~~ всего сыграно $2\cdot(7+6+5+4+3+2+1)=2\cdot 28=56$ матчей. Тогда в любом случае при выборе 3х человек, двое сыграли между собой матч (т.к. по принципу Дирихле если выбрать 3х человек из 2х команд, то как минимум двое будут из одной команды) $\Rightarrow$ 56 матчей удовлетворяют условию.

Теперь докажем, что меньше быть не может: Если $n<56$, то невозможно разделить 16 человек на 2 группы так, чтобы в каждой группе все сыграли со всеми, значит при делении 16ти человек на 2 группы по 8 человек, найдутся хотя бы в одной группе 2 теннисиста, которые не ~~сыграли~~ играли между собой, а значит если взять этих двух теннисистов и третьего из другой группы, то получится тройка теннисистов, где никто не с кем из этой тройки не играл $\Rightarrow$ 56 - наименьшее n.

Ответ: наименьшее $n=56$.