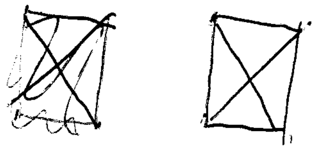
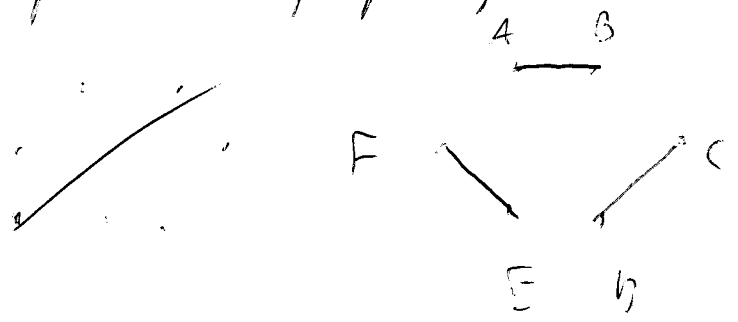
№5

1) Представим прав. 2k-угольник, в к-ом вершины - участники, а стороны и диаг. - партии. Чтобы 3 сыграли друг с другом должен получиться треугольник. Каждый раз добав. к сторон и/или диаг.



2) рассмотрим одного игрока (вершину)

разберём для k=3, ост. ан-но, т.к. будем исп. метод, не опир. на конкр. знач. k.



1) AB; CD; EF - без изм. первый тур общности задачи т.к. мы всегда можем так расп. игроков

2) "A" а может сыграть с C - F, но каждый след тур он обязан "перескакивать" через одну вершину, иначе будет треугол.

3) Он их и сыграет за $\frac{2k-2}{2}$ туров, т.к. вершин 2k - A - B т.е. за k-1.

4) ~~при~~ до этого был первый тур. а след. туром появится треуг. Итого $k-1+1+1=k+1$

Ответ: за k+1 туров

+1 +1 +1 лист

ТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

1	2	3	4	5	6	сумма
0	1		2,5	3	–	[illegible]

8081

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Санкт-Петербург

Дата 24.02.2019

* *

10–11 КЛАСС. ВТОРОЙ ВАРИАНТ

1. Имеется 9 черных ладей и n белых. При каком наибольшем n их можно расставить на шахматной доске так, чтобы одноцветные ладьи не били друг друга? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Даны положительные числа x, y, z. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{xyz\,(x+y+z)}{x^4+y^4+z^4}.$$

3. Окружность ω единичного радиуса проходит через вершины B и C треугольника ABC и вторично пересекает его стороны AB и AC в точках K и L соответственно. На лучах BL и CK отмечены соответственно такие точки P и Q, что $BP = AC$ и $CQ = AB$. Найдите расстояние между центрами описанных окружностей треугольников APQ и KBC.

4. Шестнадцатиричная запись квадрата натурального числа x представляет собой два одинаковых соседних блока из n цифр. Может ли n равняться 2023?

5. В однокруговом турнире по настольному теннису участвует $2k$ спортсменов. В каждом туре все участники проводят по одному матчу. Какое наименьшее число туров надо сыграть, чтобы при любом расписании игр обязательно нашлось трое теннисистов, сыгравших друг с другом?

6. Имеется три одинаковых конуса с общей вершиной, касающихся друг друга внешним образом, а также два шара, касающихся внешним образом друг друга и всех конусов. Радиусы шаров относятся как 1 : 3. Найдите угол при вершине конусов. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении).

№2

$$A=\frac{xyz(x+y+z)^4}{x^4+y^4+z^4}$$

1) $\sqrt[3]{xyz} \le \frac{(x+y+z)}{3}$ из н-ва Коши

$xyz \le \frac{(x+y+z)^3}{27}$ равенство вып. при $x=y=z$

$A \le \frac{(x+y+z)^4}{x^4+y^4+z^4}\cdot\frac{1}{27}$

$x=y=z$

$A=\frac{(3\cdot x)^4}{3x^4}\cdot\frac{1}{3^3}=1$ Ответ: 1

№3 4

1) пусть y - n первых ~~чисе~~ цифр 16-ой записи x, тогда

$y+16^{2023}y=x^2$

$y(1+2^{4\cdot 2023})=x^2$, если $1+2^{4\cdot 2023}$ - простое, то $n=2023$

2) т.к. n цифр, то мин. $y=\underbrace{100..0}_{2023}$, т.е. т.к. $y<16^{2023}$ не подх,

$16^{2022}=2^{8088}$

~~$1+2^{4\cdot 2023}$ - простое~~

~~Ответ: нет~~

3) тогда $y=2^{8086}+\alpha$ α - нат.

4) посм. ост. от дел. 2 на 11

1
2
4
8
5
10
⋮

их 11 8085 ⋮ 11, значит 2^{8092} дает остаток 10 при дел. на 11

5) при прибав. 1 будет ост. 0

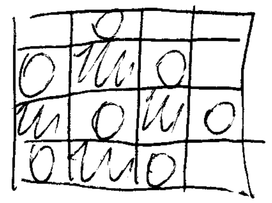
$1+2^{8092} ⋮ 11$

6) Значит $(1+2^{8092})$ можно представить в виде произв. чисел, значит можно разл. на значит можно под. $y<2^{8092}$ чтобы & $y(1+2^{8092})=x^2$ Ответ: да

№1

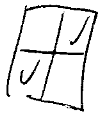
1) Разобьем доску на квадраты 4×4. Квадраты, стоящие по диаг. независ. друг от друга (ладьи не бьют)

2) Разберём один квадрат (4 ч. ладьи)



Это лучшая разбивка, т.к. осталось 5 свободных клетки и 7 белых ладей, а значит каждая клетка бьется.

3) Если мы также построим в диаг. кв

(), то будет 14б. ладей

1 чёрная л. свободная и не помогает, т.к. все своб. клетки бьются 2-мя ладьями

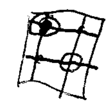
4) Докажем, что больше поставить нельзя

Каждую свободную клетку должно бить не более 2-х ладей

Свободных клеток при 14б. л. и 8ч. = 42, тогда наз. степ. клетки кол-во бьющ. её ладей, сумма степ. всех св. клеток 42·2 = 84

Если добавим 15-ю белую, (без чёрных) то сумма степеней клеток 15·14 = 210 (т.к. каждая ладья бьет 14 кл.)

Каждые 2 чёрн. ладьи уменьшают степень клеток не более чем на 26 (т.к. каждые две ладьи ~~"пересекают"~~ "имеют" две одну клетки

 (- пояснение)

Тогда $9\cdot 13=117$ - макс. уменьш. степ. клеток (не достиж.)

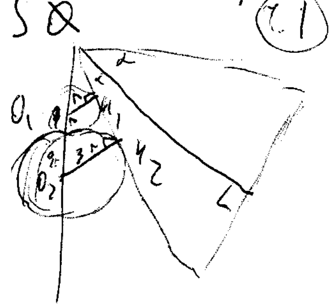
Тогда степ. кл. $100-117=83$

А степ. свобод. $41\cdot 2=82<83$ => 15 нельзя поставить, пример расст. 14 приведен Ответ: 14

Чистовик

№ 6

1) Рис. при ос.сеч. шаров и одного из конусов (т.1)



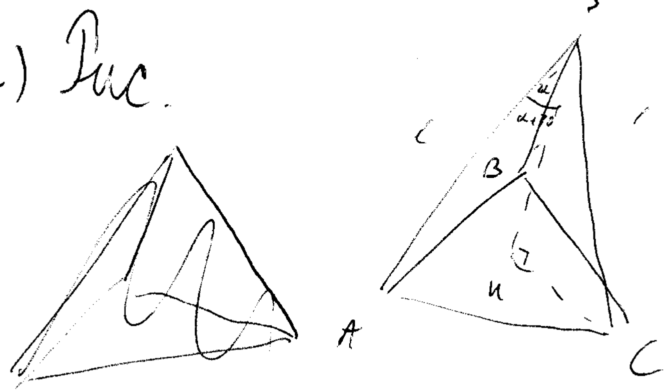
1) $\Delta SO_1K_1 \sim \Delta SO_2K_2$ (I пр)

$\frac{O_1K_1}{O_2K_2} = \frac{SO_1}{SO_1+O_1O_2}$ $\frac{r}{3r} = \frac{SO_1}{4r+SO_1}$

$SO_1 = 2r \Rightarrow \sin K_1SO_1 = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \angle K_1SO_1 = 30^\circ$

2) Рис.



SA

SK − SO_1 из (т.1)

SC, SA и SB − ось конусов

угол при оси = 2α

тогда угол между осью и SK = $\alpha+30$

$\exists\, x = AC$, $l = SC$ ~~SC = SB~~ ACBS − прав. тетр. т.к. SC, AS и SB равные

т. cos ΔASC

1) $x^2 = 2l^2(1-\cos 2\alpha)$

2) K − т. перес. мед., разд. 2:1

$CK = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} x = \frac{x}{\sqrt{3}}$ $x^2 = 3CK^2 = 3 \cdot l^2 \cdot \sin^2(\alpha+30)$

3) $\frac{3}{8} = \frac{\sin^2(\alpha+30)}{8\sin^2 2\alpha} \Rightarrow \sin(\alpha+30) = \sqrt{3}\sin\alpha$

$\alpha = 30$

$2\alpha = 60$

Ответ: 60

~~(2α − иск.~~