т.к $\overline{AB\ldots AB} = 8^2(\overline{AB\ldots AB}) + 8A + B$, последняя цифра зависит от A и B.

1) $(1\cdot 8+6)^2 = 1\cdot 8^2 + 12\cdot 8 + 36 = 3\cdot 8^2 + 0\cdot 8 + 4$ – не подходит т.к. на конце 0.

2) $(5\cdot 8+2)^2 = (5\cdot 8)^2 + 20\cdot 8 + 4 = 7\cdot 8^2 + 4\cdot 8 + 4$ – подходит.

а все остальные варианты не возможны $x_8 = 5252\ldots 52.52$

заметим, что $52_8 = 42_{10}$ т.е. $x^2 = (\frac{2}{3})^2 \cdot (77777\ldots 777)^2 =$

$(\frac{2}{3})^2 \cdot (777\ldots 77000\ldots 001) -$ 2017 – нулей, 2018 – семерок $\Rightarrow 3^{2_8} = 11 \Rightarrow (\frac{2}{3})^2 (777\ldots 77577\ldots 770+11) =$

$= (\frac{2}{3})^2 \cdot (777\ldots 7770000\ldots 000 - 110000\ldots 000 + 77\ldots 7770+11) = $?

$34343434\ldots 3434\ 37434\ldots 34344.$

2

Задание 2 $\Rightarrow$

очевидно, что при $\cos x = 0$ т.е. $x = \frac{\pi}{2}$, тогда $A \leq -1 + \cos y +$

$\cos z + 2 - \cos^2 y - \cos^2 z$ т.к. $x, y, z \in \Delta \Rightarrow x+y+z = \pi$

$x = \frac{\pi}{2}$ // $\Rightarrow$ $z + y = \frac{\pi}{2}$. $z = \frac{\pi}{2} - y$

$A \leq 1 + \cos y + \cos(\frac{\pi}{2} - y) + 2 - \cos^2 y - \cos^2(\frac{\pi}{2} - y) = 3x + \cos y + \sin y -$

$\cos^2 y - \sin^2 y = 3 + \cos y - \sin y - 1 = 2 + \cos y + \sin y$

Задание 5

для четного числа участников предположим $k < n$ не существует только для k. которых, что все круче всех

$k = 2$ т.к. все должны быть круче всех, то мы сможем разбить все множество, на подмножества тоже между двумя множествами однонаправлены

Кол-во множеств ≥ 2 и условие на то, что все должны быть круче всех, тогда мощностное число множеств, чтобы одно из них четное по размеру и тогда через индукцию $\Rightarrow$ не существует турнира для четного n и нечетных n может быть к $n-2$, разбив на a, b и остальных где a выигрывает у остальных b проигрывает и b выигрывает a, тогда может ~~убрал~~ ~~добавл~~ убрать a и b а рассмотреть для меньшего числа $n-2$ и так свести к 3, а для этого есть пример: a выигрывает у b, b – у c и c у a

Ответ: для всех нечетных n.

1 7259

50

…БУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

1	2	3	4	5	6	сумма
2	0	4	2	2		10

50

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Москва

Дата 10. 03. 2019

* *

10–11 класс. Десятый вариант

1. Какое наибольшее количество ладей можно расставить на шахматной доске так, чтобы каждую ладью било не более двух других? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Числа x, y, z — углы некоторого треугольника, один из которых не меньше $\frac{\pi}{2}$. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \cos x + \cos y + \cos z + \cos(x-y) + \cos(y-z) + \cos(z-x).$$

3. Дан четырехугольник $ABCD$, отличный от параллелограмма. На лучах AB, CB, CD и AD вне сторон четырехугольника $ABCD$ выбираются соответственно точки K, L, M и N так, что $KL \parallel MN \parallel AC$ и $LM \parallel KN \parallel BD$. Найдите геометрическое место точек пересечения диагоналей параллелограмма.

4. Натуральное число x в восьмеричной системе 2018-значное, и его цифры повторяются через одну. Оказалось, что восьмеричная запись x^2 содержит только цифры 3 и 4, причем в равном количестве. Найдите x^2 (в восьмеричной системе).

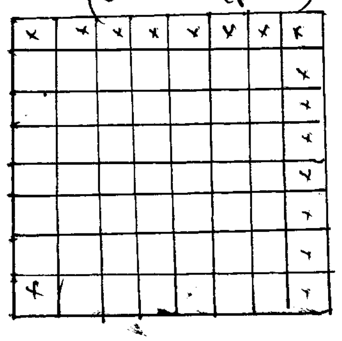
5. В однокруговом турнире по настольному теннису участвовало n теннисистов ($n \geqslant 3$). Будем говорить, что игрок A *круче* игрока B, если A выиграл у B или найдется такой игрок C, что A выиграл у C, а C выиграл у B. При каких n по итогам турнира могло оказаться так, что каждый игрок круче всех остальных? Ничьих в теннисе не бывает.

6. На столе лежат два конуса с общей вершиной O, касаясь друг друга внешним образом. Угол между их осями симметрии равен $\operatorname{arctg}\frac{12}{5}$. Найдите максимальный угол при вершине большего из двух конусов с вершиной O, которые лежат на столе и касаются внешним образом первых двух конусов. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении.)

Задание 1

• шахматная доска состоит из клеток 8×8, следовательно, всего 64 клетки

(см. Вар. 2)



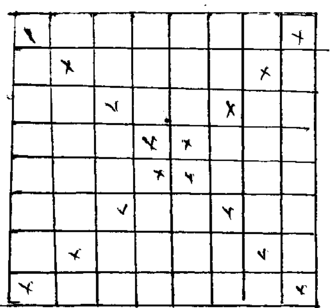
x - место нахождение ладьи

• как известно, ладья ходит по горизонтали и вертикали, не пробивая насквозь т.е. стоя на пустой доске одна ладья бьет 14 клеток

• из условия известно, что одну ладью бьет не более двух других ладей.

- пусть у нас еще одна ладья, но она может обойти эту доску по периметру (если ее расширить до размеров 10×10). мы сможем посчитать, сколько ладей она побьет., это число не будет превышать длину периметра ($8\times4=32$), каждую ладью она бьет два раза (из условия не больше двух раз) => ладья должна быть открыта с двух сторон.

из этого следует, что на доске не может стоять более 16 ладей. (см. рис).



(вариант 2)

Задание 2

$$A=\cos X+\cos Y+\cos Z+\cos(X-Y)+\cos(Y-Z)+\cos(Z-X)$$

• т.к. дан треугольник с углами X, Y, Z, то их сумма ~~превышает~~ равна 180° ($X+Y+Z=\pi$)

• т.к. дано, что один из углов не меньше $\frac{\pi}{2}$, то треугольник не остроугольный (прямо- или тупоугольный)

~~пусть $x=\frac{\pi}{2}$, тогда для max суммы остальные углы $y=z=\frac{\pi}{4}$; (не важно какой угол сколько именно градусов) => $A=0+\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2}{2}+\left(-\frac{\sqrt2}{2}\right)+0+\frac{\sqrt2}{2}=\sqrt2.$~~

max $y=\pi/4$

$A\le 2+\sin\pi/4+\cos\pi/4=2+\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2}{2}=2+\sqrt2.$

$A=\cos X+\cos Y+\cos Z+\cos X\cos Y+\sin X\sin Y+\cos Y\cos Z+\sin Y\sin Z+\cos Z\cos X+\sin Z\sin X$

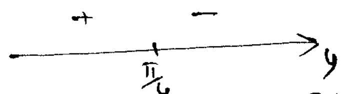
найдем max $f(y)=2+\sin y+\cos y$

$f'(y)=\cos y-\sin y$

$\cos y-\sin y=0.$

$y=\pi/4$

$\cos x\le0$



max $=2+\sqrt2$

$A=-|\cos X|+\cos Y+\cos Z-|\cos X|\cdot\cos Y+\sin X\sin Y+\cos Y\cos X+\sin Y\sin Z-|\cos X|\cdot\cos Z+\sin Z\cdot\sin X$

$|\cos X|\cdot\cos Y\le\frac{\cos^2X+\cos^2Y}{2}$

$A\le-|\cos x|+\cos Y+\cos Z-\frac{\cos^2X+\cos^2Y}{2}+\frac{\sin^2X+\sin^2Y}{2}+\frac{\cos^2Y+\cos^2Z}{2}+\frac{\sin^2Y+\sin^2Z}{2}+\frac{\cos^2X+\cos^2Z}{2}+\frac{\sin^2Z+\sin^2X}{2}=-|\cos x|+\cos Y+\cos Z+\frac{\sin^2Y\cdot\cos^2Z}{2}+$

$\frac{\sin^2X-\cos^2Y}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\sin^2Z-\cos^2Z}{2}+\frac{\sin^2Y-\cos^2Y}{2}=1-|\cos x|+\cos Y+\cos Z+$

$\frac{1-2\cos^2X}{2}+\frac{1-2\cos^2Y}{2}+\frac{1-2\cos^2Z}{2}+\frac{1+2\cos^2X}{2}=1-|\cos X|+\cos Y+\cos Z+2-2\cos^2Y-\cos^2Y-\cos^2Z$ =>

Задание 3

$LK=MN$ т.к. $KLMN$ - параллелограмм, также имеем подобные треугольники: $\triangle BKL\sim\triangle ABC$, $\triangle ACD\sim\triangle MDN$, тогда

$\frac{LK}{AC}=\frac{BK}{AD}=\frac{BL}{BC}$; $\frac{MN}{AC}=\frac{MD}{DC}=\frac{DN}{AD}$; из того, что $MN=LK$, их отношение равно коэффициенту k

тогда, можем заметить, что если $k\in(0;+\infty)$, то отложить на луче AB, за точку B, отрезок $B=k\cdot AB$, а за точку B по луче CB, отрезок $BL=k\cdot BC$ и аналогично остальные точки

из этого видно, что $KLMN$ - парал-м (т.к. $KL\parallel MN$ и $KL=MN$)

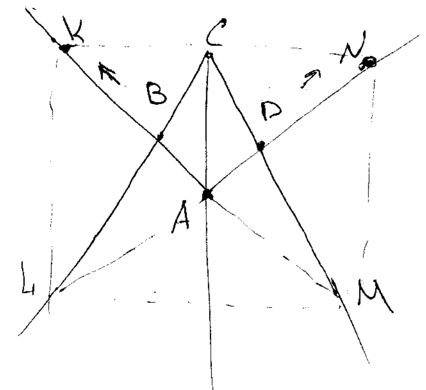
Выведем координаты ~~точек~~ точек через их буквы:

- точка пересечения диагоналей O (она есть середина одной из диагоналей)

$O=\frac{M+K}{2}$; $K=B+(B-A)k$; $M=D+(D-C)k$. =>

$O=\frac{B+(B-A)k+D+(D-C)k}{2}=\frac{B+D}{2}+k\,\frac{2}{B+D-(A+C)}$

обозначим точку середины BD через Q, а середину AC - т. P. => вектор $\frac{B+D-(A+C)}{2}=\overrightarrow{PQ}$ т.к. $k\in(0;+\infty)$, то эта часть луча PQ проходит за т. Q, не включая ее.



Задача 4

Заметим, что в восьмеричной системе счисления (СС) признак делимости на 7 такой же, как и на 9 в десятичной. т.к. $k=8^n\cdot k\equiv1^n\cdot k=k$ по модулю т.е. все числа делятся на сумму всех цифр.

значит $X^2\,⋮\,7$ т.к. его сумма цифр $⋮\,7$ (3 и 4 их одинаковое кол-во)

и $X⋮7$ т.к. $\overline{ABAB\ldots ABAB}\equiv2013+B\pmod7$, то $A+B⋮7$.

посмотрим на последнюю цифру числа X^2 (по условию она 4 или 3)

т.к. $\overline{ABAB\ldots ABAB}=8\cdot(\overline{AB\ldots AB})+B$, то последняя цифра зависит от B

приведем квадраты 8 с.с.:

$0^2=0$
$1^2=1$
$2^2=4$
$3^2=9=8+1$
$4^2=16=2\cdot8+0$
$5^2=25=3\cdot8+1$
$6^2=36=4\cdot8+4$
$7^2=49=6\cdot8+1$

с цифрой 3 на конце нет чисел, а с 4
$a=1$ $B=6$ или
$a=5$ $B=2$.