KL 035

БУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

7226 55

1	2	3	4	5	6	сумма
4	4	1	2	0	0	11

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (8–9 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Калининград

Дата 16 марта 2019 года

* *

8–9 класс. Второй вариант

1. Из нескольких одинаковых белых кубиков Петя сложил большой куб и покрасил его грани в черный цвет. Оказалось, что число кубиков с одной черной гранью равно числу полностью белых кубиков. Сколько маленьких кубиков ровно с двумя черными гранями?

2. Найдите все такие квадратные трехчлены ax^2+bx+c с целыми коэффициентами, графики которых проходят через точки (a,b), (b,c) и (c,a) (среди этих точек могут быть совпадающие).

3. Том Сойер и Гекльберри Финн играют в игру, заключающуюся в покраске забора, состоящего из 1000 неокрашенных дощечек, в синий и красный цвета. Начинает Том, ходы делаются по очереди. За один ход игрок выбирает одну из неокрашенных дощечек и цвет, а затем красит эту дощечку в выбранный цвет. Игра заканчивается, когда будут покрашены все дощечки. Том хочет, чтобы по окончании игры было как можно больше пар соседних разноцветных дощечек, а Гек хочет, чтобы было как можно меньше пар соседних разноцветных дощечек. Какое максимальное число таких пар Том может обеспечить вне зависимости от игры Гека?

4. Вещественные числа a, b, c и d удовлетворяют соотношениям $a+b+c+d=0$ и $a^2+b^2+c^2+d^2=12$. Найдите наименьшее и наибольшее значения произведения $abcd$.

5. Дан неравнобедренный остроугольный треугольник ABC. На лучах AB и AC выбраны соответственно такие точки K и L, что четырехугольник $KBCL$ вписанный. Точка H — основание высоты, опущенной из вершины A на сторону BC. Докажите, что если $KH = LH$, то H — центр описанной окружности треугольника AKL.

6. Найдите все пары простых чисел p и q, для которых p^2+q^3 является точным кубом.

№2.

$$\begin{cases} a^3+ab+c=b, \\ ab^2+b^2+c=c, \ (1) \\ ac^2+bc+c=a, \\ a,b,c\in\mathbb{Z}, \\ a\neq 0 \end{cases}$$

(1) $ab^2+b^2+c=c$

$ab^2+b^2=0$

$b^2(a+1)=0$

$$\left[\begin{array}{l} b=0, \\ a=-1. \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} a^3+ab+c=b, \\ ac^2+bc+c=a, \\ \left[\begin{array}{l} b=0, \\ a=-1. \end{array}\right. \end{cases}$$

$b=0$:

$$\begin{cases} a^3+c=0, \\ ac^2+c=a; \end{cases} \downarrow \ominus$$

$a^3+c-ac^2-c=-a.$

$a^3-ac^2+a=0.$

$a(a^2-c^2+1)=0$

$$\left[\begin{array}{l} a=0, \\ a^2-c^2+1=0; \end{array}\right.$$ Т.к. $a\neq 0$ (по ус-ю), то:

$a^2-c^2+1=0$

$(a-c)(a+c)=-1.$

Т.к. $a,c\in\mathbb{Z}$ (по ус-ю), то:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a-c=-1, \\ a+c=1; \end{cases} (2) \\ \begin{cases} a-c=1, \\ a+c=-1; \end{cases} (3) \end{array}\right.$$

(2) $$\begin{cases} a-c=-1 \ |\cdot(-1) \\ a+c=1 \end{cases} \quad \begin{cases} -a+c=1, \\ a+c=1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} c=1+a, \\ c=1-a. \end{cases} \downarrow \ominus.$$

$0=1+a-1+a$

$2a=0$

$a=0$ (противоречие с условием)

(3) $$\begin{cases} a-c=1, \\ a+c=-1; \ |\cdot(-1) \end{cases} \quad \begin{cases} a-c=1, \\ -a-c=1 \end{cases} \downarrow \ominus. \rightarrow a-c+a+c=0$$

$2a=0$

$a=0$

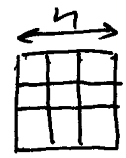
(противоречие с условием)

Тогда:

$$\begin{cases} a^3+ab+c=b, \\ ac^2+bc+c=a, \\ a=-1. \end{cases}$$

№1 Чистовик.

Рассмотрим грани квадрата.



n=3

Ⅎ n – число квадратов в одном ряду.

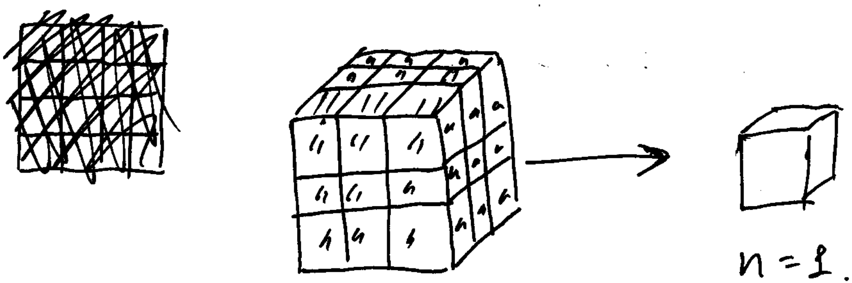
$n_б$ – число полностью белых кубов

$n_г$ – число кубов с одной черной гранью

n_0 – число кубов с двумя черными гранями.

После составления большого куба из маленьких и окрашивание его граней в черный цвет все полностью белые кубы будут составлять один куб, у которого грань на 2 меньше, чем у большого черного. (Т.е. число полностью белых кубов $n_б$ – куб натур. числа)

Например:


n=3 n=1.

Тогда для каждого большого черного куба верно:

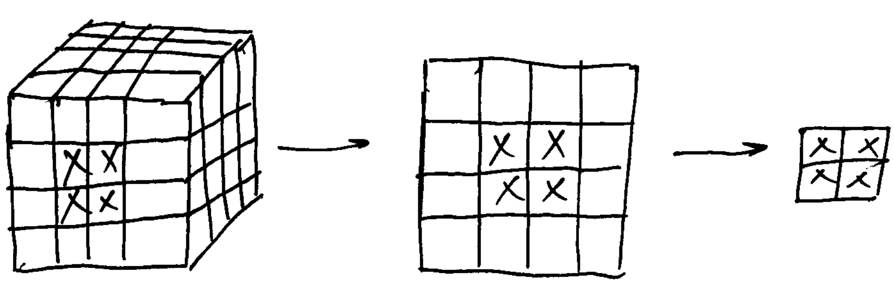
$$n_б = (n-2)^3$$

(Т.к. все кубы подобны)

~~Для любого большого грани черного куба число кубов с одной черной Рассмотрим~~

Для любого большого черного куба число кубов с одной черной гранью $n_г$ равно $(n-2)^2 \cdot 6$; т.к. все маленькие кубы с одной черной гранью не находятся вплотную к ребру большого куба (т.к. если находятся, то уже имеют как минимум 2 черные грани) и образуют на грани большого куба своими черными гранями квадрат, у которого n на 2 меньше, чем у грани большого куба

Например:



По условию задачи:

$n_б = n_г$ т.е. $(n-2)^3 = (n-2)^2 \cdot 6$

$n^3 - 6n^2 + 12n - 8 = 6n^2 - 24n + 24$

$n^3 - 12n^2 + 36n - 32 = 0$

$n=2$;
$8-48+72-32=0$
$0=0$
верно

$$\begin{array}{l|l} n^3-12n^2+36n-32 & n-2 \\ \underline{n^3-2n^2} & \overline{n^2-10n+16} \\ \quad -10n^2+36n & \\ \quad \underline{-10n^2+20n} & \\ \qquad 16n-32 & \\ \qquad \underline{16n-32} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

$(n-2)(n^2-10n+16)=0$

$$\left[\begin{array}{l} n=2, \\ n^2-10n+16=0; (1) \end{array}\right.$$

(1) $n^2-10n+16=0$

$D=100-64=6^2$

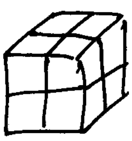
$n_{1,2}=\dfrac{10\pm6}{2}=5\pm3$

$n_1=8,\quad n_2=2.$

$$\left[\begin{array}{l} n=8, \\ n=2. \end{array}\right.$$

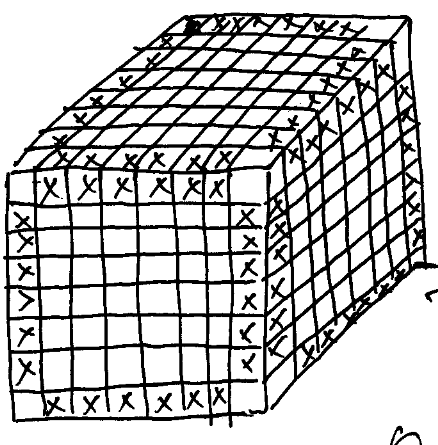
Т.е. условие выполняется, если большой куб имеет $n=8$ или $n=2$.

Если $n=2$:



Куб не имеет полностью белых кубов и ~~черных~~ кубов, у которых одна грань черная ($n_б = n_ч = 0$)
Не имеет ~~[illegible]~~ кубов с ~~2~~ двумя черными гранями (очевидно) $n_0=0$

Если $n=8$: (крестами отмечены грани кубов с двумя черными гранями)



Назовем ряд ~~[illegible]~~ кубов ~~[illegible]~~ с двумя черными гранями полоской. В одной полоске ~~[illegible]~~ 6 кубов (видно по рисунку)
А число полосок равно ~~[illegible]~~ числу ребер куба. (очевидно)

Тогда $N_0=6\cdot12=72$

Ответ: $N_0=0$ или $N_0=72$.

Чистовик

№2 (начало см. на стр. 3)

$$\begin{cases} a^3+ab+c=b, \\ ac^2+bc+c=a, \\ a=-1; \end{cases} \quad \begin{cases} -1-b+c=b, \\ -c^2+bc+c=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2b-c=-1, \\ c(-c+b+1)=-1. \end{cases} \quad \begin{cases} b=\frac{c-1}{2}; & (5) \\ c(b+1-c)=-1 & (4) \end{cases}$$

(4) $c(b+1-c)=-1.$

$c\left(\frac{c-1}{2}+1-c\right)=-1.$

$c\left(\frac{c-1+2-2c}{2}\right)=-1.$

$c\cdot\frac{1-c}{2}=-1. \quad |\cdot 2$

$c(1-c)=-2.$

$-c^2+c=-2$

$c^2-c-2=0$

$D=1+8=3^2$

$c_{1,2}=\frac{1\pm3}{2}.$

$c_1=2$

$c_2=-1.$

(5) $\begin{cases} b=\frac{c-1}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} c=2, \\ c=-1 \end{array}\right. \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} c=2, \\ b=0{,}5; \text{ (противоречит условию)} \end{cases} \\ \begin{cases} c=-1, \\ b=-1. \end{cases} \end{array}\right.$

Имеем:

$\begin{cases} c=-1, \\ b=-1, \\ a=-1. \end{cases}$

Ответ: $a=-1,\ b=-1,\ c=-1.$

№4.

$$\begin{cases} a+b+c+d=0, & (1) \\ a^2+b^2+c^2+d^2=12 & (2) \\ a,b,c,d\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

Упорядочим числа. $a\geq b\geq c\geq d$.

Из первого выражения в системе следует, что либо все числа равны нулю, либо среди них есть отрицательные. Наибольшее значение $abcd$ будет тогда, когда два минимальных числа будут равны и отрицательны, а два максимальных — равны и положительны. Т.е. $a=b>0>c=d$.

Подставим в (1): $a+a+c+c=0$; $2a+2c=0$; $a=-c$.

Подставим в (2): $(-c)^2+(-c)^2+c^2+c^2=12$; $4c^2=12$; $c^2=3$; $c=-\sqrt{3}$ (т.к. мы задали $c<0$)

Тогда $abcd_{max}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot(-\sqrt{3})\cdot(-\sqrt{3})=9.$

Минимальное значение abcd будет тогда, когда максимальное число будет положительно, а оставшиеся три — равны и отрицательны. Т. е. $a>0>b=c=d$. Подставим в (1): (либо 3 максимальных равны и положительны а четвертое — отрицательно, но результат будет такой же, как и в описанном случае)

$a+3b=0$

$a=-3b$.

Подставим в (2):

$(-3b)^2+b^2+b^2+b^2=12$; $12b^2=12$; $b^2=1$; $b=-1$ (т.к. мы задали $b<0$)

Тогда $abcd_{min} = -3\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1) = -3$.

Ответ: $abcd_{max}=9$; $abcd_{min}=-3$.

№3

Рассмотрим забор из 10 дощечек.

Пронумеруем дощечки от 1 до 10.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
С	С	К	К	С	С	К	К	С	С

Тактика для Тома:

1) Окрасить любую дощечку в любой цвет.

2) Ход Гека. Если номер дощечки, которую он окрасил, меньше либо равен пяти, то Том находит неокрашенную дощечку с номером меньше пяти, но максимально ближайшую к пяти и окрашивает ее в противоположный цвет относительно того, в какой цвет окрашена соседняя с ней дощечка. Если номер окрашенной Геком дощечки больше либо равен шести, то алгоритм тот же, но Том ищет дощечку с номером больше шести. Например: 1) Том окрасил №3 в красный цвет. 2) Гек окрасил №6 в синий. 3) Том окрасил №7 в красный 4) Гек окрасил №4 в красный. 5) Том окрасил №2 в синий. 6) Гек окрасил №1 в синий. 7) (В случае, когда число меньше 5 или больше 6 выбрать не удается, Том берет число, максимально приближенное к числу дощечки, которую закрасил Гек) Том окрасил №5 в синий 8) Гек окрасил № 8 в красный. 9) Том окрасил №9 в синий 10) Гек окрасил №10 в синий

Таким образом, Том имеет 4 пары закрашенных разными цветами дощечек. (2-3; 4-5; 6-7; 8-9) Том всегда сможет в свой ход (кроме первого) создать минимум одну разноцветную пару, то есть следуя этому алгоритму у пяти кодов у него всегда будет четыре пары. Рассчитаем для по 500 кодов. Тогда у Тома

Чистовик

№2 (начало см. на стр. 3)

$$\begin{cases} a^3+ab+c=b,\\ ac^2+bc+c=a,\\ a=-1;\end{cases}\quad \begin{cases}-1-b+c=b,\\ -c^2+bc+c=-1\end{cases}\quad \begin{cases}2b-c=-1,\\ c(-c+b+1)=-1.\end{cases}\quad \begin{cases} b=\frac{c-1}{2}; & (5)\\ c(b+1-c)=-1 & (4)\end{cases}$$

(4) $c(b+1-c)=-1.$

$c\left(\frac{c-1}{2}+1-c\right)=-1.$

$c\left(\frac{c-1+2-2c}{2}\right)=-1.$

$c\cdot\frac{1-c}{2}=-1. \quad |\cdot 2$

$c(1-c)=-2.$

$-c^2+c=-2$

$c^2-c-2=0$

$D=1+8=3^2$

$c_{1,2}=\frac{1\pm 3}{2}.$

$c_1=2$

$c_2=-1.$

(5) $\begin{cases} b=\frac{c-1}{2},\\ \left[\begin{array}{l} c=2,\\ c=-1\end{array}\right.\end{cases}$

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}c=2,\\ b=0{,}5;\end{cases} \text{(противоречит условию)}\\ \begin{cases}c=-1,\\ b=-1.\end{cases}\end{array}\right.$

Имеем:

$\begin{cases}c=-1,\\ b=-1,\\ a=-1.\end{cases}$

Ответ: $a=-1,\ b=-1,\ c=-1.$

№4

$\begin{cases} a+b+c+d=0, & (1)\\ a^2+b^2+c^2+d^2=12 & (2)\\ a,b,c,d\in\mathbb{R}.\end{cases}$

Упорядочим числа. $a\geq b\geq c\geq d$.

Из первого выражения в системе следует, что либо все числа равны нулю, либо среди них есть отрицательные. Наибольшее значение $abcd$ будет тогда, когда два минимальных числа будут равны и отрицательны, а два максимальных — равны и положительны. Т.е. $a=b>0>c=d$

Подставим в (1): $a+a+c+c=0$; $2a+2c=0$; $a=-c$.

Подставим в (2): $(-c)^2+(-c)^2+c^2+c^2=12$; $4c^2=12$; $c^2=3$; $c=-\sqrt{3}$ (т.к. мы задали $c<0$)

Тогда $abcd_{max}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot(-\sqrt{3})\cdot(-\sqrt{3})=9.$

Минимальное значение abcd будет тогда, когда максимальное число будет положительно, а оставшиеся три — равны и отрицательны. Т. е. $a>0>b=c=d$. Подставим в (1): (либо 3 максимальных равны и положительны а четвертое — отрицательно, но результат будет такой же, как и в описанном случае)

$a+3b=0$

$a=-3b$.

Подставим в (2):

$(-3b)^2+b^2+b^2+b^2=12$; $12b^2=12$; $b^2=1$; $b=-1$ (т.к. мы задали $b<0$)

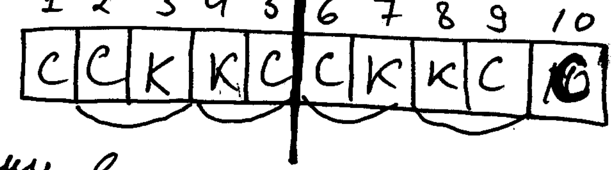
Тогда $abcd_{min}=-3\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)=-3$.

Ответ: $abcd_{max}=9$; $abcd_{min}=-3$.

№3

Рассмотрим забор из 10 дощечек.

Пронумеруем дощечки от 1 до 10.



Тактика для Тома:

1) Окрасить любую дощечку в любой цвет.

2) Ход Гека. Если номер дощечки, которую он окрасил, меньше либо равен пяти, то Том находит неокрашенную дощечку с номером меньше пяти, но максимально близким к пяти и окрашивает ее в противоположный цвет относительно того, в какой цвет окрашена соседняя с ней дощечка. Если номер окрашенной Геком дощечки больше либо равен шести, то алгоритм тот же, но Том ищет дощечку с номером больше шести. Например: 1) Том окрасил №3 в красный цвет. 2) Гек окрасил №6 в синий. 3) Том окрасил №7 в красный. 4) Гек окрасил № 4 в красный. 5) Том окрасил №2 в синий. 6) Гек окрасил №1 в синий. 7) (В случае, когда число меньше 5 или больше 6 выбрать не удается, Том берет число, максимально приближенное к числу дощечки, которую закрасил Гек) Том окрасил №5 в синий 8) Гек окрасил № 8 в красный. 9) Том окрасил №9 в синий

10) Гек окрасил №10 в синий

Таким образом, Том имеет 4 пары закрашенных разными цветами дощечек. (2-3; 4-5; 6-7; 8-9) в свой ход (кроме первого) создать минимум одну разноцветную пару, то есть из пяти ходов у него всегда будет четыре пары. Рассчитаем для 1000 дощечек. Том и Гек сделают по 500 ходов. Тогда у Тома будет минимум 499 разноцветных пар дощечек.

Ответ: 499

Чистовик

№6

p, q – простые

$p^2+q^3=k^3$, $k \in \mathbb{Z}$

$p^2=k^3-q^3$

$p^2=(k-q)(k^2+kq+q^2)$

$p=\sqrt{(k-q)(k^2+kq+q^2)}$

$p=\sqrt{k-q}\cdot\sqrt{k^2+kq+q^2}$