ргский государственный университет

6487 100

1	2	3	4	5	6	сумма
4	4	4	4	4	0	20

100

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Санкт-Петербург

Дата 24 февраля 2019 г.

* *

10–11 класс. Второй вариант

1. Имеется 9 черных ладей и n белых. При каком наибольшем n их можно расставить на шахматной доске так, чтобы одноцветные ладьи не били друг друга? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Даны положительные числа x, y, z. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{xyz\,(x+y+z)}{x^4+y^4+z^4}.$$

3. Окружность ω единичного радиуса проходит через вершины B и C треугольника ABC и вторично пересекает его стороны AB и AC в точках K и L соответственно. На лучах BL и CK отмечены соответственно такие точки P и Q, что $BP = AC$ и $CQ = AB$. Найдите расстояние между центрами описанных окружностей треугольников APQ и KBC.

4. Шестнадцатиричная запись квадрата натурального числа x представляет собой два одинаковых соседних блока из n цифр. Может ли n равняться 2023?

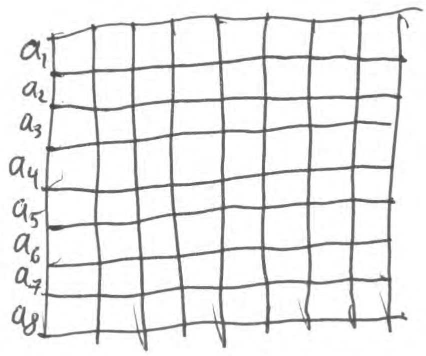
5. В однокруговом турнире по настольному теннису участвует $2k$ спортсменов. В каждом туре все участники проводят по одному матчу. Какое наименьшее число туров надо сыграть, чтобы при любом расписании игр обязательно нашлось трое теннисистов, сыгравших друг с другом?

6. Имеется три одинаковых конуса с общей вершиной, касающихся друг друга внешним образом, а также два шара, касающихся внешним образом друг друга и всех конусов. Радиусы шаров относятся как $1:3$. Найдите угол при вершине конусов. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении).

① ЧИСТОВИК

Ответ: 17.

Оценка: Для каждой строки пометим кол-во чёрных ладей в ней,



Так как в каждой строке Ч и Б ладьи должны чередоваться, ~~Б~~ Б ладей в i строке $\leq a_i+1$.
Тогда всего белых ладей $\leq \sum\limits_{i=1}^{8}(a_i+1)=8+\sum\limits_{i=1}^{8}a_i=8+9=17$

Пример на 17:

			Б				
		Б	Ч		Б		
	Б	Ч	Б		Ч	Б	
Б	Ч	Б	Ч		Б		
				Б		Ч	Б
	Б	Ч	Б		Ч	Б	
		Б		Ч	Б		
				Б			

Ответ: 17.

② ЧИСТОВИК

$\exists a,b,c>0$

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \geqslant \frac{a+b+c}{3} \Rightarrow a^2+b^2+c^2 \geqslant \frac{1}{3}(a+b+c)^2$$

$$x^4+y^4+z^4=(x^2)^2+(y^2)^2+(z^2)^2 \geqslant \frac{1}{3}(x^2+y^2+z^2)^2 \geqslant \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}(x+y+z)^2\right)^2=$$

$$=\frac{1}{27}(x+y+z)^4$$

$$A=\frac{xyz(x+y+z)}{x^4+y^4+z^4} \leq \frac{xyz(x+y+z)}{\frac{1}{27}(x+y+z)^4}=\frac{27xyz}{(x+y+z)^3} \leq$$

$$\leq \frac{27}{(x+y+z)^3}\cdot\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^{3*}=1 \Rightarrow A\leq 1$$

$* \sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3}$

При $x=y=z=1$ $A=1$

Ответ: 1

④ ~~Уже~~

Пусть $n = 2023 = 2k+1$

наше число.

$A = 16^n \cdot a_0 + a_0 = a_0(16^n+1)$, где $a_0 < 16^n$

$16^n+1 = 16^{2k+1}+1 = 2^{4(2k+1)}+1 = (16+1)(16^{2k}-16^{2k-1}+\ldots-16+1) =$

$= 17(16^{2k}-16^{2k-1}+\ldots-16+1)$

$16^{2k}-16^{2k-1}+\ldots-16+1 \underset{17}{\equiv} (-1)^{2k}-(-1)^{2k-1}+\ldots-(-1)+1 \underset{17}{\equiv} \underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{17} \underset{17}{\equiv} 0$

Тогда $16^n+1 = 17^2 \cdot a$, где a — какое-то натуральное число.
(т.к. $(16^n+1) \vdots 17^2$)

$A = a_0 \cdot 17^2 a$

Пусть $a_0 = a$. Тогда $A = (17a)^2$. — при $x = 17a$ число x^2 имеет нужный вид.

Осталось показать, что $a < 16^n$.

Пусть $a \geq 16^n$. Тогда $17^2 a > 16^n \cdot 17^2 > 16^n + 1$?!

$\Downarrow$

$a < 16^n$

Ответ: да.

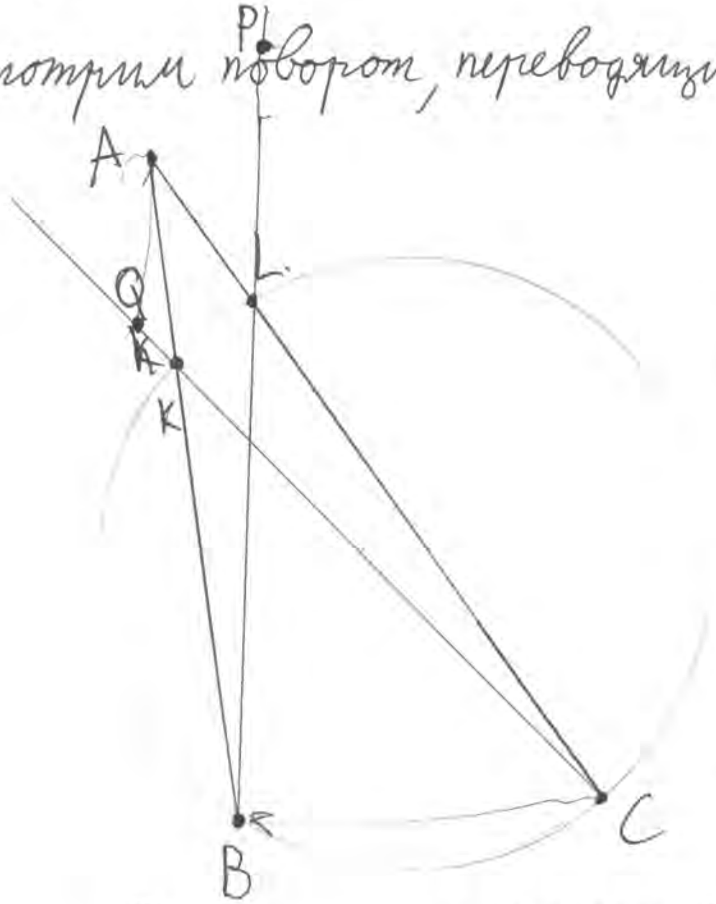
③ ЧИСТОВИК

Напом~~ню~~ню известный факт: (Прасолов, ~~как~~ Гомотетия и ~~П~~ поворотная гомотетия, ~~у~~ центр поворотной гомотетии)

~~Пусть~~ Даны два отрезка: AB и $A'B'$. Прямые AB и $A'B'$ пересекаются в точке S. Тогда центр поворотной гомотетии, переводящей AB в $A'B'$, лежит на пересечении (втором) описанных окружностей треуг. $AA'S$ и $BB'S$.

~~[illegible]~~

Рассмотрим поворот, переводящий QC в AB.



$Q \to A$

$C \to B$

O – его центр.

С одной стороны,

$OB = OC$

$QQ = OA$, т.к.

~~поворот сох~~

расстояние от точки до ~~[illegible]~~ центра поворота не меняется.

Значит, O лежит на пересечении серединных перпенд. к BC и AQ.

С другой стороны, O лежит на пересечении описанных окружностей $\triangle KBC$ и $\triangle KAQ$, т.к. поворот является поворотной гомотетией с $k=1$.

опис. окр. $\triangle KBC$ — ω.

То есть O лежит на ω.

Но мы уже знаем, что O лежит на серед. $\perp$ к BC.

То есть O — ~~точка~~ середина дуги $\overset{\frown}{BC}$.

Ещё O лежит на серед. $\perp$ к AQ, то есть $OQ=OA$.

Теперь вместо Q возьмём P.

Аналогичные рассуждения показывают, что O' — середина дуги $\overset{\frown}{BC}$, и $O'P=O'A$.

Так как O' и O лежат в одной полуплоскости относительно BC, они совпадают, т.к. они середины дуги $\overset{\frown}{BC}$.

$$O=O' \Rightarrow OQ=OA=OP$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} O - \text{центр. опис. окр. } \triangle APQ \\ O \in \omega \end{cases} \Rightarrow \text{расстояние от } O \text{ до центра } \omega \text{ равно радиусу } \omega.$$

$$\Downarrow$$

Ответ: 1

5 ЧИСТОВИК

Ответ: $k+1$

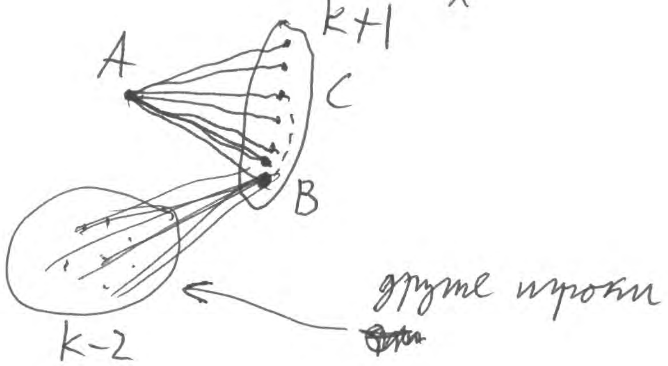
~~Оценка:~~

Почему $(k+1)$ подходит: Пусть после $k+1$ ~~раунда~~ тура нет треугольников.

рассмотрим какого-то игрока A.

* Если $k=1$, то ответа нет, т.к. можно сыграть только один тур.

Он сыграл с $(k+1)$ игрокам. *



Среди этих $(k+1)$ выберем игрока B.

Если он сыграл с игроком C, с которым сыграл A, образовался треугольник ?!

Тогда B играл только с A и другими $(k-2)$ игроками.

Тогда он сыграл не более $1+(k-2)=k-1$ игр. ?!

Почему нельзя меньше (пример такого расписания на $\le k$ туров, что в нём нет Δ).

Разделим игроков на две группы по k человек.

Занумеруем их числами от 0 до $k-1$.

На туре с номером t (t-тый тур с начала) рёбра проводятся так:

n-тый игрок из левой группы играет с $(n+t) \bmod k$ -тым из правой группы.

~~Если~~ $n+t \underset{k}{\equiv} m+t \Longleftrightarrow n \underset{k}{\equiv} m$

$\Downarrow \quad \Downarrow$

пары не пересекаются.

То есть такое расписание подходит под условие.

Почему нет Δ? Δ — нечётный цикл. В двудольном графе нечётных циклов нет. Наш граф двудолен на каждом шаге.

Ответ: $k+1$

6 ЧИСТОВИК

Пусть угол при вершине конусов равен 2φ.

Два конуса с общей вершиной касаются, если полусумма их углов при вершинах равна углу между их осями симметрии (биссектрисами; как угодно).

Направление задаётся вектором. Пусть у двух конусов эти векторы — $\vec{u}$ и $\vec{v}$.

$$2\varphi = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$$

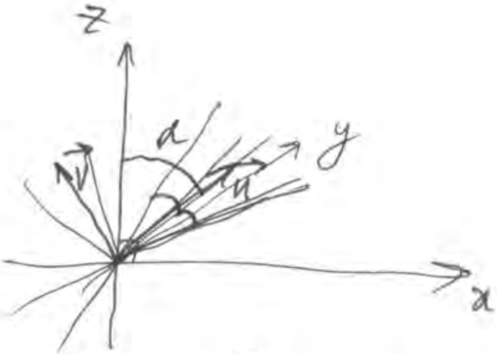
Так как три конуса одинаковы и касаются, при повороте на $\frac{2\pi}{3}$ относительно оси вращения (понятно какой) система перейдёт сама в себя. Поэтому и $\vec{u} \to \vec{v}$.

Поместим всё в систему координат:

общая вершина $\to O$

ось вращения $\to Oz$

$\vec{u} \in Oxz$.



$x_u = 1$

$\vec{u}(x_u, 0, z_u)$ $\frac{z_u}{x_u} = ctg\,\alpha$, где α — угол между $\vec{u}$ и осью вращения.

$\vec{v}\left(-\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2};\ z\right)$ — повернули на $\frac{2\pi}{3}$

$z_v = ctg\alpha$

$\vec{u}(1; 0; ctg\alpha)$

$\vec{v}\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; ctg\alpha\right)$

$$\frac{\vec{u}\,\vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|} = \frac{-\frac{1}{2} + ctg^2\alpha}{\sqrt{1+ctg^2\alpha}\cdot\sqrt{1+ctg^2\alpha}} = \frac{-\frac{1}{2} + ctg^2\alpha}{1+ctg^2\alpha} = 2\cos\varphi$$

$$-\frac{1}{2} + ctg^2\alpha = 2\cos\varphi + 2\cos\varphi\, ctg^2\alpha$$

$$ctg^2\alpha\,(2\cos\varphi - 1) = -\frac{1}{2} - 2\cos\varphi$$

$$ctg\,\alpha = \sqrt{\frac{\frac{1}{2} + 2\cos\varphi}{1 - 2\cos\varphi}}$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \quad \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \sqrt{\frac{1-2\cos\varphi}{\frac{1}{2}+2\cos\varphi}}$$

$$\frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha} = \frac{1-\cos\varphi}{\frac{1}{2}+2\cos\varphi} = k$$

$$\sin^2\alpha = k - k\sin^2\alpha$$

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{k}{k+1}}$$