65

АО-54

СКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

1966

1	2	3	4	5	6	сумма
4	4	2	2	1	0	13

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Владимир

Дата 17.03.2019

* *

10–11 класс. Второй вариант

1. Имеется 9 черных ладей и n белых. При каком наибольшем n их можно расставить на шахматной доске так, чтобы одноцветные ладьи не били друг друга? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Даны положительные числа x, y, z. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{xyz\,(x+y+z)}{x^4+y^4+z^4}.$$

3. Окружность ω единичного радиуса проходит через вершины B и C треугольника ABC и вторично пересекает его стороны AB и AC в точках K и L соответственно. На лучах BL и CK отмечены соответственно такие точки P и Q, что $BP = AC$ и $CQ = AB$. Найдите расстояние между центрами описанных окружностей треугольников APQ и KBC.

4. Шестнадцатиричная запись квадрата натурального числа x представляет собой два одинаковых соседних блока из n цифр. Может ли n равняться 2023?

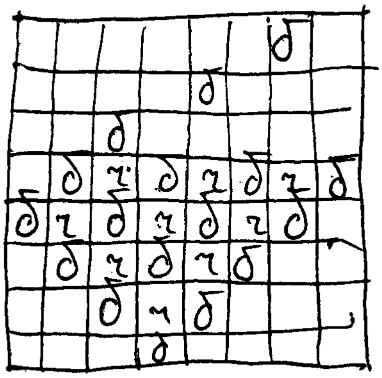
5. В однокруговом турнире по настольному теннису участвует $2k$ спортсменов. В каждом туре все участники проводят по одному матчу. Какое наименьшее число туров надо сыграть, чтобы при любом расписании игр обязательно нашлось трое теннисистов, сыгравших друг с другом?

6. Имеется три одинаковых конуса с общей вершиной, касающихся друг друга внешним образом, а также два шара, касающихся внешним образом друг друга и всех конусов. Радиусы шаров относятся как $1 : 3$. Найдите угол при вершине конусов. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении).

Чистовик.

№1

Пример для $\boxed{17}$ белых.



Докажем, почему нельзя больше.

Пусть у нас в первой строчке a_1 чёрных ладей, a_2 во второй ... a_8 в восьмой.

Тогда заметим, что для каждой строчки кол-во белых не больше, чем a_i+1, т.к. иначе хотя бы две белые будут рядом (между ними не будет чёрной)* => они будут бить друг друга => в каждой строчке не больше чем a_i+1 белых ладей.

* Это так, т.к. будем идти слева направо и смотреть на ладьи. Чтобы они не били друг друга цвета должны чередоваться =>

б ч б ч б ч ... б ч б если a_i чёрных, то белых $\le a_i+1$ =>

=> ~~Слож~~ Тогда сложим кол-во ладей ~~во каждо~~ всех строчках:

$a_1+1+a_2+1+\dots+a_8+1 = a_1+\dots+a_8+8$, а т.к. по условию кол-во чёрных — 9 => белых $\le 9+8=17$, а пример для 17 есть =>

=> Ответ: 17

№2

$$\frac{xyz(x+y+z)}{x^4+y^4+z^4}$$

По теореме Коши $x^4+y^4 \geq 2\sqrt{x^4y^4} = 2x^2y^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^4+y^4+z^4 \geq \frac{2x^2y^2+2y^2z^2+2x^2z^2}{2} = x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2$$

Опять же по т. Коши:

$$y^2x^2+y^2z^2 \geq 2\sqrt{y^4x^2z^2} = 2y^2xz \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2 \geq \frac{2y^2xz+2x^2yz+2z^2xy}{2} = yxz(x+y+z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{xyz(x+y+z)}{x^4+y^4+z^4} \leq \frac{xyz(x+y+z)}{xyz(x+y+z)} = 1$$, что

достигается при $x=y=z=1$ $\left(\frac{1(1+1+1)}{1+1+1} = 1\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Ответ: 1

Чистовик.

№5

Пусть участники – вершины,

игры – рёбра~~ходы~~

Тогда пусть у нас есть хотя бы 3 компоненты связанности, назовём их ①, ② и ③. Тогда если мы возьмём тройку, у которой один участник из ①, второй из ②, третий из ③, то они друг с другом не играли, что противоречит условию, ⇒

⇒ у нас не более двух компонент связанности.

Пусть их две, и в одной x людей, а в другой $2k-x$.

Тогда заметим, что в каждой из них должен быть полный граф, т.к. иначе мы возьмём этих двух людей из одной компоненты, которые не играли друг с другом и одного из другой и получим тройку, противоречащую условию ⇒ в обеих компонентах полный граф. Тогда рёбер:

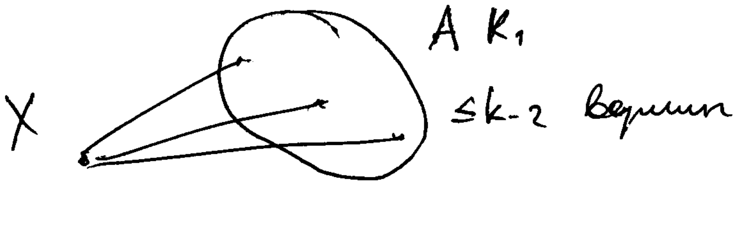
$$\frac{x(x-1)}{2}+\frac{(2k-x)(2k-x-1)}{2}=\frac{x^2-\cancel{x}+4k^2-\cancel{2k}x-2k-2x\cancel{k}+x^2+\cancel{x}}{2}=$$

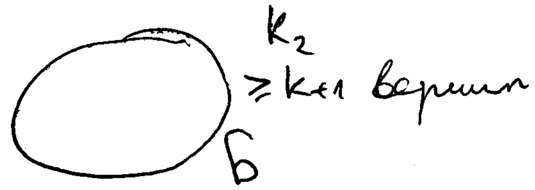
$$=\frac{2x^2+4k^2-2k-4kx}{2}=x^2+2k^2-k-2kx \Rightarrow$$ минимум будет в вершине

параболы, т.е. при $x=\frac{2k}{2}=k$ ⇒ мы получили, что минимальное кол-во рёбер будет при равенстве кол-ва элементов в компонентах,

и всего рёбер будет $\frac{k(k-1)}{2}+\frac{k(k-1)}{2}=\boxed{k(k-1)}$

Тогда предположим, что мы можем сделать рёбер меньше в одной компоненте (если всего будет одна), тогда у нас найдётся вершина, из которой ведёт (степень которой) не больше $k-2$, т.к. иначе рёбер $\geq \frac{2k(k-1)}{2} = k(k-1)$, а нам надо, чтобы было меньше. Назовём эту вершину X, вершины, ~~куда~~ в которые из X ведёт ребро зоной A, а остальные зоной $Б$, тогда:





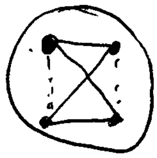
Тогда заметим, что в $Б$ должен быть полный граф, т.к. иначе возьмём не соединённую пару и X и тем самым получим тройку, в которой любые два не сыграли друг с другом, что противоречит условию. $\Rightarrow$ в зоне $Б$ ~~это до $\frac{(k+1)k}{2}$~~ рёбер полный граф.

Тогда сделаем в A полный граф, по доказанному для 2 компонент, рёбер сейчас будет больше, чем $k(k-1)$, тогда будем убирать рёбра из A. ~~Заметим, что для пары k, m,~~ ~~где k и вершины в A~~ Пусть мы убрали одно ребро, тогда мы должны провести хотя бы K_2 рёбер из $Б$ в A, где k_2 — кол-во вершин в $Б$, $K_2 \geq k+1$. Это так, т.к. иначе найдётся вершина в $Б$, которая не соединена ни с одной из вершин, между которыми мы убрали ребро $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ образуется тройка, не удовл. условию.

Чистовик

№5

Тогда заметим, что если у нас найдутся две пары в A, между которыми нет рёбер:



, то к каждой из них надо провести $\geq k_2$ рёбер и т.д.

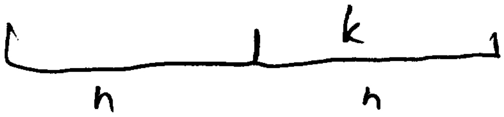
Теперь заметим, что одна вершина может быть задействована не более чем в k_1-1 парах (убираем все рёбра из неё, которые в A) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ для каждой вершины из A мы можем убрать не более k_1-1 рёбер и добавить не менее k_2 рёбер, а т.к. $k_2 > k_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ убиранием рёбер из A мы только увеличиваем общее кол-во рёбер $\Rightarrow$ оценка минимальная и пример есть $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Ответ: $k(k-1)$ рёбер

№4



Пусть один блок равен k в десятичной системе, тогда всё число равно $(16^{2023}+1)k$, так же в десятичной системе.

По условию $(16^{2023}+1)k = x^2$. Заметим, что $k < 16^{2023}$ и $k \geq 16^{2022}$, а значит $k < 16^{2023}+1 \Rightarrow x > k$. Тогда предположим, что такой x существует. Тогда мы можем сравнить $16^{2023}+1$ и k:

$(16^{2023}+1)k = \frac{16^{2023}+1}{m} \cdot k \cdot m^{*}$, где $m < 16$, т.к. иначе k станет $< 16^{2022} \Rightarrow$

$* \; \frac{16^{2023}+1}{m} = k \cdot m = x$

$\Rightarrow m$ может быть $[2, 15]$.

Заметим, что $16^{2023}+1$ — неч. $\Rightarrow m \underset{2}{\equiv} 1 \Rightarrow$

m может равняться: 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15.

По модулю 3 $16 \underset{3}{\equiv} 1 \Rightarrow 16^{2023} \underset{3}{\equiv} 1 \Rightarrow 16^{2023}+1 \underset{3}{\equiv} 2 \Rightarrow$ не делится $\Rightarrow$

$\Rightarrow m \neq 3$ (а значит $m \neq 9$ и $m \neq 15$)

$16 \underset{5}{\equiv} 1 \Rightarrow 16^{2023} \underset{5}{\equiv} 1 \Rightarrow 16^{2023}+1 \underset{5}{\equiv} 2 \Rightarrow 16^{2023}+1 \not\vdots\, 5$

$16 \underset{7}{\equiv} 2$; $16^2 \underset{7}{\equiv} 4$; $16^3 \underset{7}{\equiv} 1$, $16^4 \underset{7}{\equiv} 2 \Rightarrow$ т.к. получаем цикл $\Rightarrow$

$\Rightarrow 16^x$ никогда не даёт остаток 6 $\Rightarrow 16^x+1$ не делится на 7.

$16 \underset{11}{\equiv} 5$; $16^2 \underset{11}{\equiv} 3$, $16^3 \underset{11}{\equiv} 4$; $16^4 \underset{11}{\equiv} 9$; $16^5 \underset{11}{\equiv} 1$; $16^6 \underset{11}{\equiv} 5$, аналогично предыдущему $m \neq 11$.

Осталось только $m=13$.

$16 \underset{13}{\equiv} 3$; $16^2 \underset{13}{\equiv} 9$; $16^3 \underset{13}{\equiv} 1$; $16^4 \underset{13}{\equiv} 3$. $\Rightarrow$

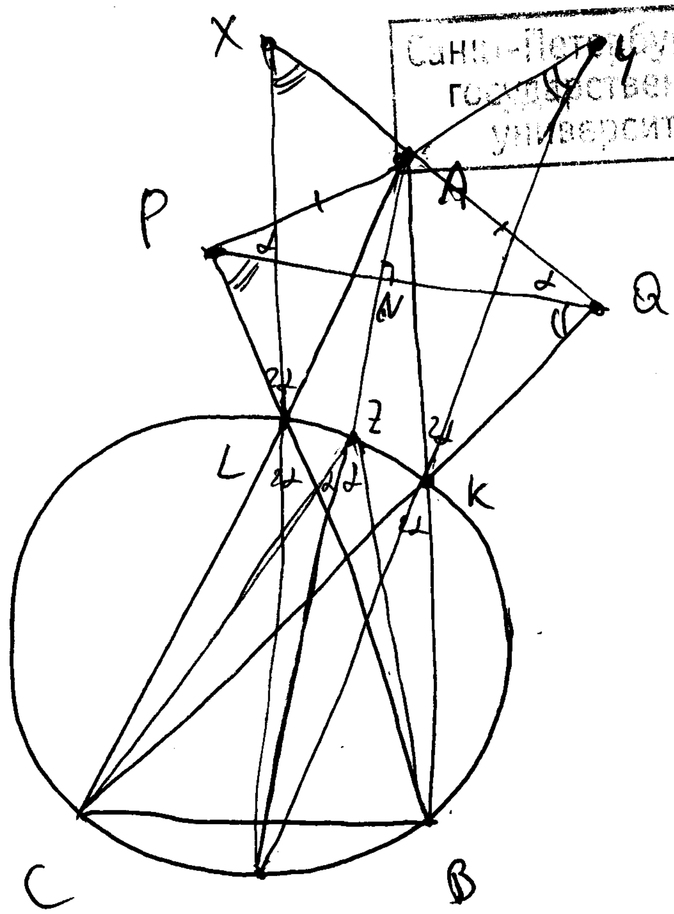
$\Rightarrow m \neq 13 \Rightarrow$ ни одно m не подошло $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Ответ: нет, не может.

Здесь мы пользовались Китайской теоремой об остатках

Чистовик

№3



$BP = AC$

$CQ = AB$

Заметим, что $\triangle BPA = \triangle CQA \Rightarrow$

$\Rightarrow PA = AQ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle APQ = \angle AQP = \alpha$.

Тогда пусть $\angle PQK = \beta$,

тогда $\angle PAB = \beta + \alpha$ (из равенства $\triangle$-ов) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle PNA = \angle QNK = 180^\circ - \alpha - \beta - \alpha = 180^\circ - 2\alpha - \beta$, где N – т. пересечения AB и $PQ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle NKQ = 180^\circ - 180^\circ + 2\alpha + \beta - \beta = 2\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CKB = \angle CLB = \angle PLA = 2\alpha$

Тогда если мы проведём биссектрисы $\angle PLA$ и $\angle AKQ$, то $PXQL$ лежат на 1 окр. и $PYQK \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle PYK = \angle PQK$; $\angle QXL = \angle QPL$.

Если точка Z точка пересечения ср. пер-а PQ с окр.

то $\angle CZB = 2\alpha$. Осталось доказать, что $\angle AZQ = 2\alpha$,

тогда Z и будет центром окр. около $\triangle PAQ$ а расстояние

между центрами будет равно $\boxed{1}$, а это так. т.к. если $PA = a$, то радиусы окр. возле $PAL = \dfrac{a}{2\sin\alpha}$ = возле $AQK \Rightarrow$

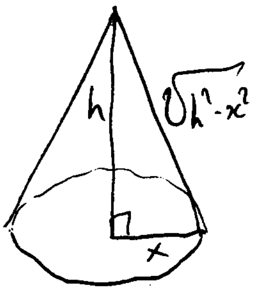
$\Rightarrow$ их пересечение - точка $Z \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Ответ: $\boxed{1}$

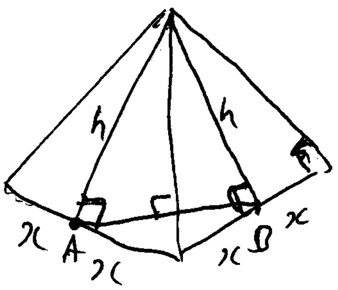
Чистовик

№6

Пусть радиус основания конусов равен x, ~~образующая~~ ~~равна~~ высота равна h:



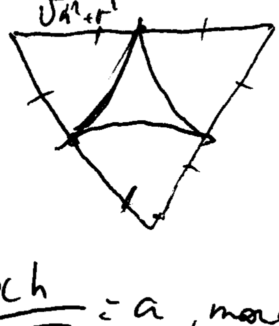
Тогда рассмотрим два касающихся конуса и их проекцию:



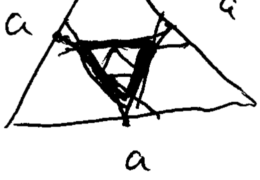
Тогда расстояние между основаниями высот

$$(AB) = \frac{\cancel{x} \cdot h}{\sqrt{h^2+r^2}} \cdot 2 -$$

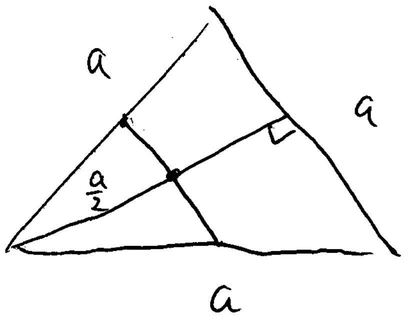
Посмотрим на проекцию сверху:



Пусть $2\frac{xh}{\sqrt{h^2+r^2}} = a$, тогда наши шары вписаны в правильную пира пирамиду, у которой сторона основания $\frac{a}{\sqrt{3}}$:



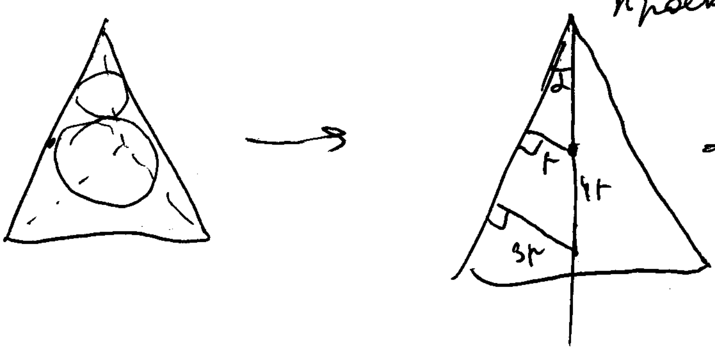
т.к. x — неизвестная сторона



из подобия равна: $\frac{x}{\frac{a}{2}} = \frac{a}{\frac{\sqrt{3}a}{2}} \Rightarrow \frac{2x}{a} = \frac{2a}{\sqrt{3}a} \Rightarrow \sqrt{3}x = a \Rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Тогда заметим, что для данной ~~пира~~ пирамиды центры шаров лежат на высоте, а в проекции в том числе на биссектрисе:

Проекция



$\Rightarrow -\frac{r}{\sin\alpha} + \frac{3r}{\sin\alpha} = 4r \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{2r}{\sin\alpha} = 4r \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{2}$