ГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

2691

1

70

1	2	3	4	5	6	сумма
3	3	4	1	3		14

70

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Москва

Дата 10 : 03 : 2019

* *

10–11 класс. Девятый вариант

1. Какое наибольшее количество ладей можно расставить на шахматной доске так, чтобы каждую ладью било не более трех других? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Числа x, y, z — углы треугольника, причем больший угол z не превосходит $\frac{\pi}{2}$. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \sqrt{\sin x \cdot \sin(z-y)} + \sqrt{\sin y \cdot \sin(z-x)}.$$

3. Дан четырехугольник $ABCD$, отличный от параллелограмма. На сторонах AB, BC, CD и DA выбираются соответственно точки K, L, M и N так, что $KL \parallel MN \parallel AC$ и $LM \parallel KN \parallel BD$. Найдите геометрическое место точек пересечения диагоналей параллелограмма $KLMN$.

4. Натуральное число x в восьмеричной системе 2019-значное, его младшая цифра равна 3, а все остальные цифры отличны от 3 и совпадают через одну. Число y получается записью цифр x в обратном порядке. Оказалось, что восьмеричное представление $x \cdot y$ содержит только цифры 1 и 6. Найдите $x \cdot y$ (в восьмеричной системе).

5. В однокруговом турнире по настольному теннису участвовало 100 спортсменов, причем ни один из них не выиграл все матчи. Будем говорить, что игрок A *круче* игрока B, если A выиграл у B или найдется такой игрок C, что A выиграл у C, а C выиграл у B. Каково наименьшее количество теннисистов, оказавшихся по итогам турнира круче всех остальных? Ничьих в теннисе не бывает.

6. На столе лежат два конуса с общей вершиной O, касаясь друг друга внешним образом. Угол между их осями симметрии равен $\operatorname{arctg} \frac{4}{3}$. Найдите максимальный угол при вершине меньшего из двух конусов с вершиной O, которые лежат на столе и касаются внешним образом первых двух конусов. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении.)

Черновик!

1

№3 Из условия того что $KLMN$ - параллелограмм, имеем, что $LK = MN$. Еще можем заметить, что присутствуют подобные треугольники: BKL и ABC, ACB и MDN. Из св-ва подобия имеем отношения сторон:

$$\frac{LK}{AC} = \frac{BK}{AB} = \frac{BL}{BC}$$

Для первой пары Δ

$$\frac{MN}{AC} = \frac{MD}{DC} = \cancel{\frac{DN}{AD}} = \frac{DN}{AD}$$

Для второй пары Δ

В виду того что $MN = LK \Rightarrow$ равенство всех этих отношений, т.е есть:

$$\frac{LK}{AC} = \frac{BK}{AB} = \frac{BL}{BC} = \frac{MN}{AC} = \frac{MD}{DC} = \frac{DN}{AD} = x$$

Мы можем заметить, что если при некотором x ~~[illegible]~~ $\in [0; 1]$ отложить на AB отрезок $BK = x \cdot AB$, а на отрезке CB отложить отрезок $BL = x \cdot BC$ и дальше аналогично для всех сторон. То получим параллелограмм $KLMN$. Т.к. он является ~~[illegible]~~ параллелограммом т.к. выполняются следующие условия:

$LK \parallel AC \parallel MN$ и $LK = MN$.

Допустим что координаты точек будут обозначены их буквами. Тогда не сложно посчитать координаты точки пересечения диагоналей параллелограмма.

Т.к. x она является серединой одной из диагоналей, то она имеет следующие координаты $O=\frac{M+K}{2}$.

$K=B+(A-B)\cdot x$

$M=D+(C-D)\cdot x$

$O=\frac{M+K}{2}=\frac{B+(A-B)\cdot x+D+(C-B)\cdot x}{2}=\frac{B+D}{2}+x\cdot\frac{A+C-(B+D)}{2}$

Теперь обозначим середину BD буквой R, а середину AC буквой T. Теперь видим, что вектор $\frac{A+C-(B+D)}{2}=\vec{RT}$. Но из условия что x принадлежит $(0,1)$ становится ясно, что ГМТ таких точек является отрезок RT (концы его не включ.). ✓

№1.

0	0	0	0	0	0	0	0
0							0
0							0
0							0
0							0
0							0
0							0
0	0	0	0	0	0	0	0

Легко заметить, что если ладья стоит в крайних столбцах/строках доски то ее всегда бьет не больше трех других ладей. Так как каждую ладью бьют не более трех других то она не должна быть закрыта другой ладьей хотя бы с одной стороны. Таким образом суммарное количество открытых ладей не может быть больше суммы длин сторон доски, ? т.е. 32, однако каждую ладью мы посчитали как минимум один раз, а угловые по 2 раза (если не использовали – можем легко добавить). Таким образом max число ладей, которые мы можем разместить = 28 ответ: 28

чистовик!

2

№2 $A = \sqrt{\sin(x)\cdot\sin(z-y)} + \sqrt{\sin y\cdot\sin(z-x)}$ (3)

сумма углов в треугольнике $= x+y+z = 180$, а значит $z = 180 - x - y$. Тогда используя формулу приведения, получаем:

~~$\sin(z-x)$~~

$\sin(z-y) = \sin(180 - x - 2y) = \sin(x+2y)$ черновик!

Исходное выражение перепишется в виде:

$A = \sqrt{\sin(x)\cdot\sin(x+2y)} + \sqrt{\sin(y)\cdot\sin(2x+y)}$.

используем неравенства о средних, получаем:

$$\begin{cases} \sqrt{\sin(x)\cdot\sin(x+2y)} \le \dfrac{\sin(x)+\sin(x+2y)}{2} \\ \sqrt{\sin(y)\cdot\sin(2x+y)} \le \dfrac{\sin(y)+\sin(2x+y)}{2} \end{cases}$$

Тогда можем получить оценку сверху для A:

$$A \le \frac{\sin(x)+\sin(y)+\sin(x+2y)+\sin(2x+y)}{2} = \sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)+\sin\left(\frac{3x+3y}{2}\right)\cdot$$

$$\cdot\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\cdot\left(\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)+\sin\left(\frac{3x+3y}{2}\right)\right) = 2\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\cdot\sin(x+y)\cdot$$

$$\cdot\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) = (\cos(x)+\cos(y))\cdot\sin(x+y)$$

Очевидно что при фиксированном значении $x+y$ $(x, y \le \frac{\pi}{2})$ наибольшее значение $\cos(x)+\cos(y)$ достигается при $x=y$. Т.к. по условию $z < \frac{\pi}{2}$ значит $x+y > \frac{\pi}{2}$, а отсюда ?

$\frac{\pi}{2} \ge x = y \ge \frac{\pi}{4}$

Т.к. косинус $\left(\frac{\pi}{4}\right) \ge \cos\frac{\pi}{2}$, max достигается при $x=y=\frac{\pi}{4}$.

Подставляем в неравенство о средних полученное значение. Получаем:

$A \le \sqrt{2}$.

Причем равенство достигается при $x = y = \frac{\pi}{4}$; $z = \frac{\pi}{2}$

Ответ: $\sqrt{2}$

Санкт-Петербургский государственный университет

(И)

Молодец!

Задача 5

Возьмем произвольное множество игроков. Докажем что в нем находится хотя бы 1 игрок, который круче всех в данном множестве

Пусть игрок А выиграл больше всех матчей. Пусть игроку Б он проиграл. Игрок Б в свою очередь проиграл игроку В, у которого выиграл игрок А, так как иначе количество побед у игрока Б будет больше, чем у А и мы получили бы противоречия. Таким образом ~~игр~~ игрок А лучше всех, т.к любой игрок, которому он проиграл, проиграл тому, кого обыграл игрок А.

Рассмотрим множество из 100 игроков.

Пусть игрок ИКС круче всех в ~~...~~ данном множестве.

Рассмотрим множество игроков которым ИКС проиграл. На этом множестве есть игрок круче всех, который выиграл у игрока ИКС, значит он через одно звено выиграл всех, у кого выиграл ИКС. Этот игрок будет второй круче всех. Пусть это будет ИКС 2.

Поступая таким же образом для ~~...~~ ИКС 2 найдем игрока ИКС 3.

Пример; где среди 100 игроков — три круче всех. Пусть ИКС 1 выиграл ИКС 2, ИКС 2 выиграл ИКС 3, а ИКС 3 выиграл у ИКС 1. Причем каждый из них остается круче всех

Ответ: 3

Санкт-Петербургский
государстэенный
университет

(5)

Чистовик!

№4

Представим исходное число x в следующем виде $ab\ldots ab3$, тогда y можно представить как $3ba\ldots ba$. Их произведение $x \cdot y$ оканчивается либо на единицу либо на 6, следовательно можно подобрать последнюю цифру (a) числа y. Перебрав произведения 3 на все числа от 1 до 9 получим, что $a = 2$, так как $3 \cdot 2 = 6$. b можно найти подбором ($b = 5$). Тогда $x = 2525\ldots253$, а $y = 35252\ldots52$.
Произведение $x \cdot y = 11616\ldots161611616\ldots1616$ (между единицами не ~~стоящего в паре между~~ стоящими в паре с шестерками 1009 пар 1 и 6; после второй единицы не стоящей в паре аналогично 1009 пар 1 и 6)

откуда?

~~[illegible]~~