$\to \angle KLT = \frac{1}{2}\angle KLM = \frac{\gamma+\beta}{2}$

4) $\angle DPC = \frac{\pi}{2} - \gamma$ (прям/уг $\triangle DPC$)

$\angle KLT + \angle DPC + \alpha = \pi$

$\frac{\gamma+\beta}{2} + \frac{\pi}{2} - \gamma + \alpha = \pi \Longleftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma-\beta}{2} = \frac{\pi-\gamma+\beta}{2} > \frac{\pi}{2}$,

т.к. $\gamma < \beta$

значит, $\alpha = \pi - \frac{\pi-\gamma+\beta}{2} = \frac{\pi-\beta+\gamma}{2}$

Ответ: $\frac{\pi-\beta+\gamma}{2}$

Задача №4

$\exists$ блок из 20182019 цифр $- A$

$x^2 = A\cdot 10^{20182019} + A = A(10^{20182019}+1)$

$\cancel{10^{20182019} + 1 = 10^{20182020} - 9\cdot 10^{20182019} + 1}$

$= A\cdot 11\cdot \underbrace{(10^{20182018} - 10^{20182017} + \ldots + 1)}_{\text{не квадрат}}$

имеет вид $9090\ldots 91 \,\vdots\, 11$ по признаку делимости.

$\cancel{10^{20182019}}$

$\cancel{10^{20182019} + 1 = 10^{20182020} - 9\cdot 10^{20182019} + 1}$

$\cancel{10\cdot 10^{20182018} + 1 = 10^{20182018}\left(10 + \frac{1}{10^{20182018}}\right)}$ не квадрат натур. числа

значит, $A\cdot 10^{20182019}+1 \neq x^2$ при $x\in\mathbb{N}$

Ответ: нет

...УРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

9443

1	2	3	4	5	6	сумма
4	4	4	0	2		14

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Санкт-Петербург

Дата 24.02.2019

* *

10–11 класс. Первый вариант

1. Имеется 8 черных ладей и n белых. При каком наибольшем n их можно расставить на шахматной доске так, чтобы одноцветные ладьи не били друг друга? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Даны положительные числа x, y, z. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{xyz(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4 + (yz)^4 + (xz)^4}}.$$

3. Дан треугольник ABC с меньшей стороной AB. На сторонах AB и AC выбраны соответственно точки X и Y так, что $BX = CY$. Под каким углом прямая, проходящая через центры описанных окружностей треугольников ABC и AXY, пересекает прямую BC, если $\angle ABC = \beta$ и $\angle BCA = \gamma$?

4. Десятичная запись квадрата натурального числа x представляет собой два одинаковых соседних блока из n цифр. Может ли n равняться 20182019?

5. На однокруговой турнир по настольному теннису подало заявку 16 человек. Когда было сыграно n матчей, оказалось, что среди любых трех теннисистов найдутся двое, уже сыгравших между собой. При каком наименьшем n такое возможно?

6. Три конуса с общей вершиной, касающихся друг друга внешним образом, имеют высоту 2 и радиус основания $\sqrt{3}$. Два шара касаются внешним образом друг друга и всех конусов. Найдите отношения радиусов шаров (большего к меньшему).

Чистовик

Задача №1.

Если имеются ладьи только одного цвета, то, удовлетворяя условию можно выставить только 8 шт, т.к. каждая перекрывает 1 вертикаль (и 1 горизонталь), а их всего по 8.

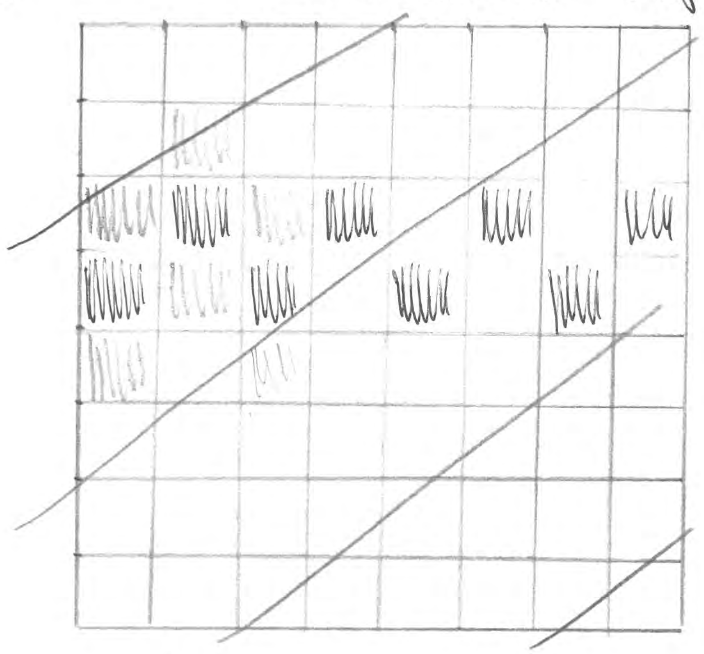
Однако, если между белыми ладьями ставить чёрные, условие будет выполняться:

не работает ×

работает √

т.е. одна чёрная ладья может „освободить" ряд для ещё одной белой. $8 \cdot 2 = 16$ – макс. кол-во белых.

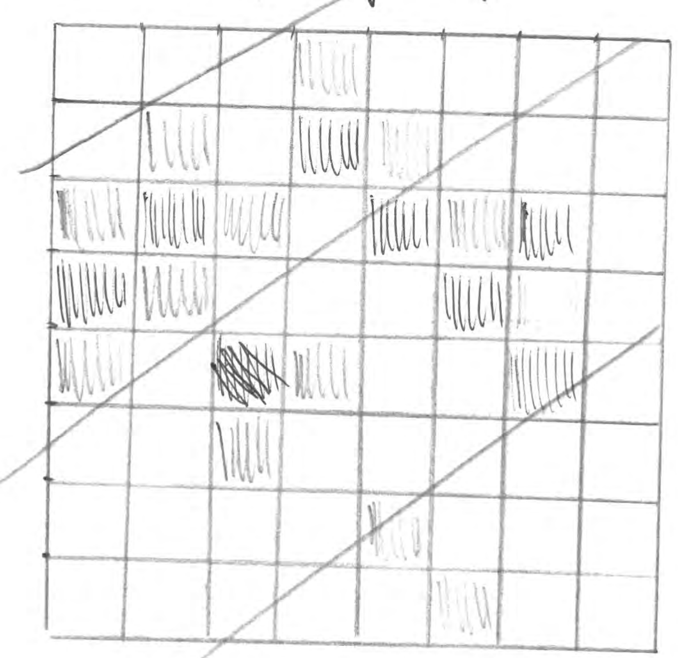
Если их 17, то будет перекрыто $17 - 8 = 9$ вертикалей (или горизонталей, а их всего 8. Т.е. 16 белых ладей перекрывают всё поле (для белых), т.е. больше не влезет.



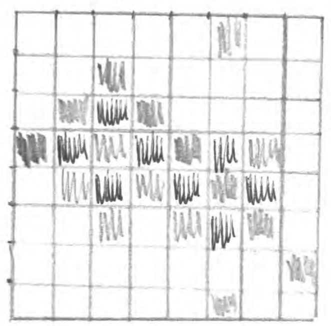
– чёрная (8)

– белая (16)

пример:



пример



Ответ: 16 √

Задача №2.

$$(a-b)^2 \geq 0 \iff a^2 + b^2 \geq 2ab \quad (*)$$

равенство при $a = b$

$$\frac{xyz(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4+(yz)^4+(xz)^4}} = \frac{\sqrt{2}\,xyz(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4+(xz)^4+(yx)^4+(yz)^4+(zx)^4+(zy)^4}} \overset{*}{\leq} \frac{\sqrt{2}\,xyz(x+y+z)}{\sqrt{2x^4y^2z^2+2x^2y^4z^2+2x^2y^2z^4}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\,xyz(x+y+z)}{\sqrt{2}\cdot xyz\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz}{x^2+y^2+z^2}} =$$

$$= \sqrt{1+\frac{2xy+2yz+2xz}{x^2+y^2+z^2}} \overset{*}{\leq} \sqrt{1+\frac{2(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2}} = \sqrt{3}$$

Ответ: $\sqrt{3}$ √

равенство при $x=y=z$

Задача №3

дано:

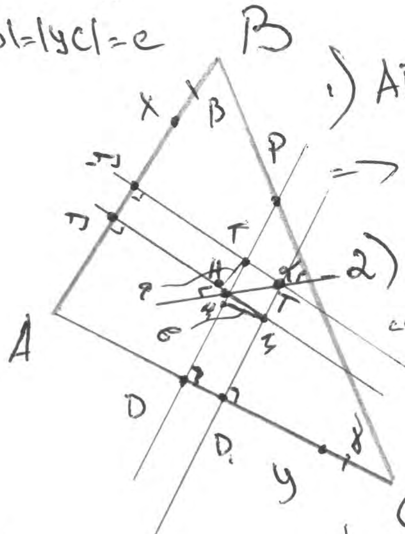
AB – наименьшая сторона

$\angle ABC = \beta$

$\angle BCA = \gamma$

$\alpha = ?$

$\exists\ |XB| = |YC| = e$



1) AB – наименьшая $\Rightarrow$

$\Rightarrow |AB| < |AC| \iff \gamma < \beta$

2) Центр опис. S – тчк перес. сер. перп.

$|AD_1| = |CD_1| = \frac{|AC|}{2}$

$|AD| = |YD| = \frac{|AC| - e}{2}$

$|DD_1| = \big||D_1C| - |D_1C|\big| = \cancel{|DY| + e - |D_1Y| - e} =$
$= \left|\frac{|AC|}{2} - |DY| - e\right| = \left|\frac{|AC|}{2} - \frac{|AC|-e}{2} - e\right| =$

$= \frac{e}{2}$

3) $\angle KLM = \angle FLD = \pi - (\pi - \gamma - \beta) = \gamma + \beta$

также $\angle FLK = \angle DLM$ (верт.) $\Rightarrow$ их $\underline{\underline{\cos}}$ равны

равны и расст-е м/у парами паралл. прямых: F_1K и FL и D_1M и DL

$l(F_1K, FL) = l(D_1M, DL) = \frac{e}{2}$

$\cos\angle FLK = \cos\angle DLM$

$\triangle KLH$ и $\triangle LMH_1$ – п/уг

$\Rightarrow |KL| = |LM|$

KLMT – паралл.

$\Rightarrow$ KLMT – ромб $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ LT – бисс. $\angle KLM \Rightarrow$

(чистовик)

Задача №5

16 участников $\Rightarrow$ всего игр 120

Сколько может быть различных троек для каждого из игроков (A):

$$\frac{15 \cdot 14}{2} = 105$$

A — X
|
A — Y

$\exists$ все сыграли по k матчей:

а если не так!!

Тогда условие задачи точно будет выполнено для

$$\underbrace{14 + 13 + 12 + \ldots + 15-k}_{k} \text{ троек}$$

в оставшихся тройках A не играл ни с X, ни с Y, значит, X играл с Y

A — X — $16-1-k$ вар-тов
|
A — Y — $16-1-k-1$ вар-тов

Все игроки одинаковы, $\exists$ все сыграли одинаковое кол-во игр.

$$k = 16-1-k-1 \Leftrightarrow 2k = 14 \Leftrightarrow k = 7$$

Тогда было сыграно $\frac{16 \cdot 7}{2} = 56$ (игр)

Ответ: 56 игр

$n = 56$

$1 - 10 + 100 - 1000 + 10000$

9091