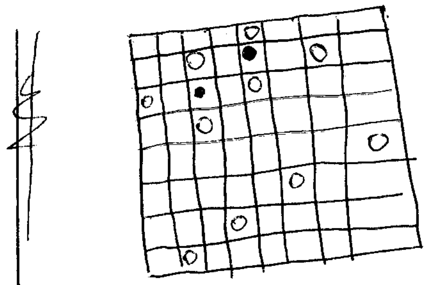
Задача №1

Оценка:

Количество ~~чер~~ белых ферзей не превосходит 10, т.к. благодаря черному ферзю можно в строку поставить дополнительного белого ферзя, всего черных 2 строк 8 всего белых ферзей $\le \cancel{10}\, 8+2=10$

Пример



o - белые ферзи

● - черные

Ответ: 10

Задача №2

$x+y+z=\pi$

$$A=\frac{\cos x\cos y\sin z}{\cos x+\cos y+\sin z}=\frac{\cos x\cos y\sin(\pi-x-y)}{\cos x+\cos y+\sin(\pi-x-y)}=\frac{\cos x\cos y\sin(x+y)}{\cos x+\cos y\sin(x+y)}=$$

Ц $x=\frac{\pi}{2}-x_1$; $y=\frac{\pi}{2}-y_1$

$$=\frac{\sin x_1 \sin y_1 \sin(x_1+y_1)}{\sin x_1+\sin y_1+\sin(x_1+y_1)}$$

Ц $x_1=y_1=\varepsilon$, тогда $\varepsilon\neq 0$

$$\frac{\sin^2\varepsilon\sin 2\varepsilon}{2\sin\varepsilon+\sin 2\varepsilon}=\frac{\sin^2\varepsilon\cdot 2\sin\varepsilon\cos\varepsilon}{2\sin\varepsilon(1+\cos\varepsilon)}=\frac{\sin^2\varepsilon(\cos\varepsilon+1)-\sin^2\varepsilon}{(\cos\varepsilon+1)}=$$

$$=1-\frac{\sin^2\varepsilon}{\cos\varepsilon+1}=1-\frac{1-\cos^2\varepsilon}{\cos\varepsilon+1}=1-(1-\cos\varepsilon)=\cos\varepsilon$$

при $\varepsilon\to 0$ $\cos\varepsilon\to 1$, т.о. $A\to 1$ при $z\to 0$ $x\to\frac{\pi}{2}$, $y\to\frac{\pi}{2}$

Ответ: $A\to 1$

Задача №4

$x=x_1x_2\ldots$ $y=y_1y_2y_3y_4\ldots$ $y_1y_2y_3y_4$ $a_1a_2a_3a_4$

Т.к. xy – блоки по 4 одинаковые цифры $a_1a_1a_1a_1bbbb\ldots a_na_na_na_n$, то

$xy \vdots \cancel{1000}\,1111$ $xy=1111\cdot((\ldots(1000a_1+a_2)\cdot 1000+a_3)\ldots)\cdot 1000+a_n)$, тогда

$xy \vdots 101\cdot 11$

$x \vdots 101$, но $x \not\vdots\, 11$ иначе цифры повторяются каждые, тогда $y \vdots 11$, значит

$y_1+y_3=y_2+y_4$, $\frac{xy}{1111}\equiv_{10^4} a_n$, где a_n – цифра

M049

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

4254

1

50

1	2	3	4	5	6	Σ
4	0	4	0	2	–	10

50

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА
ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ
201~~8~~ ~~2~~ 019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА, 10-11 класс

Город, в котором проводится Олимпиада Сыктывкар

Дата 24.02.2019

10-11 класс, ВАРИАНТ 8

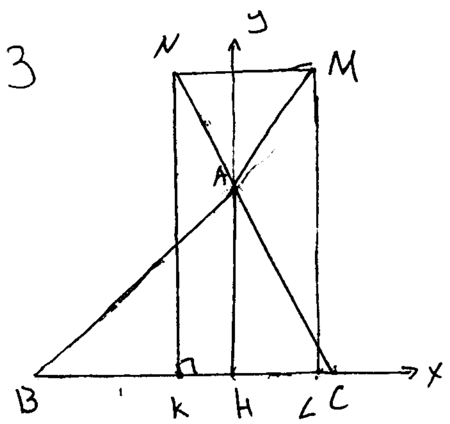
1. Имеется два черных ферзя и n белых. При каком наибольшем n эти фигуры можно расставить на шахматной доске так, чтобы одноцветные ферзи не били друг друга? Ферзь не бьет насквозь через другую фигуру.
2. Числа x, y, z — углы треугольника. Найдите максимальное значение выражения
$$A=\frac{\cos x\cdot\cos y\cdot\sin z}{\cos x+\cos y+\sin z}.$$
3. Дан остроугольный треугольник ABC. У прямоугольника $KLMN$ вершины M и N лежат соответственно на на продолжениях сторон AB и AC за точку A, а K и L — на стороне BC. Пусть AD — медиана треугольника ABC, E — середина его высоты, опущенной из вершины A, O — точка пересечения диагоналей прямоугольника. Найдите угол DEO.
4. Даны натуральные числа x и y. В десятичной системе они $4n$-значные, причем в записи x цифры повторяются через одну, а в записи y — через три. Оказалось, что десятичная запись $x\cdot y$ состоит из последовательных блоков по 4 одинаковых цифры. При каких n это возможно?
5. В однокруговом турнире по настольному теннису участвовало n спортсменов ($n\geqslant 3$). По итогам турнира оказалось, что всех участников можно рассадить за круглым столом так, что для произвольной пары соседей A и B любой теннисист, отличный от A и B, проиграл хотя бы одному из теннисистов A и B. При каких n такое возможно?
6. На столе лежат три конуса с общей вершиной, касаясь друг друга внешним образом. Оси симметрии первых двух конусов взаимно перпендикулярны. Угол при вершине первого конуса равен $\arcsin\frac{4}{5}$. Два шара вписаны в третий конус и касаются друг друга внешним образом. Найдите отношение радиусов шаров (большего к меньшему).

Задача №3

Дано
$\triangle ABC$
$K, L \in BC$
$M \in AB$
$N \in AC$
AD - медиана
O - центр $KLMN$
$KLMN$ - прямоуг.
AH - высота
E - сер AH

Найти
$\angle DEO = ?$

Решение



1 Введем ПСК
~~в~~ с центром в т-ке H
~~К~~ и осями Ox совп. с HC, и Oy совп с HA
$(AH \perp CH)$

$H(0;0)$
$B(x_B;0)$
$K(x_K;0)$
$L(x_L;0)$
$C(x_C;0)$
$A(0;y_A)$
$E(0;\frac{y_A}{2})$
$D(\frac{x_B+x_C}{2};0)$
$N(x_K;y_N)$
$M(x_L;y_N)$

$O(\frac{x_K+x_L}{2};\frac{y_N}{2})$

2 ~~Х~~ пр. AB ур-е $y = kx + b$

$$\begin{cases} y_A = 0 \cdot k + b \\ 0 = kx_B + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -y_A \\ k = -\frac{y_A}{x_B} \end{cases}$$

$$y = -\frac{y_A}{x_B}x + y_A$$

ур-е пр. AC аналогично.

$$y = -\frac{y_A}{x_C} \cdot x + y_A$$

т.к. $M \in AB$, то

$$y_N = -\frac{y_A}{x_B} \cdot x_L + y_A$$

т.к. $N \in AC$, то

$$y_N = -\frac{y_A}{x_C} \cdot x_K + y_A = y_A\left(1 - \frac{x_K}{x_C}\right)$$

$$y_A\left(1 - \frac{x_L}{x_B}\right) = \left(1 - \frac{x_K}{x_C}\right)$$

$$\frac{x_L}{x_B} = \frac{x_K}{x_C}$$

$x_L = x_K \cdot \frac{x_B}{x_C}$, тогда координата т-ки O

$$O\left(\frac{x_K + x_K \cdot \frac{x_B}{x_C}}{2}; \frac{1}{2}y_A\left(1 - \frac{x_K}{x_C}\right)\right) \quad O\left(\frac{x_K}{2} \cdot \left(\frac{x_C + x_B}{x_C}\right); \frac{1}{2}y_A\left(1 - \frac{x_K}{x_C}\right)\right)$$

~~коор.~~

3 ~~Х~~ ур-е пр DE

$$\begin{cases} \frac{x_B + x_C}{2} \cdot k + b = 0 \\ 0 \cdot k + b = \frac{y_A}{2} \end{cases}$$

$$b = \frac{y_A}{2}$$

$$k = -\frac{y_A}{x_B + x_C}$$

Проверим принадлежность точки O прямой DE

$$-\frac{y_A}{x_B + x_C} \cdot \frac{x_B + x_C}{x_C} \cdot \frac{x_K}{2} + \frac{y_A}{2} = \frac{y_A}{2}\left(1 - \frac{x_K}{x_C}\right)$$

$$-\frac{y_A}{2} \cdot \frac{x_K}{x_C} + \frac{y_A}{2} = \frac{y_A}{2}\left(1 - \frac{x_C}{x_C}\right)$$

$$\frac{y_A}{2} - \frac{y_A}{2} + \frac{y_A}{2} \cdot \frac{x_K}{x_C} - \frac{y_A}{2} \cdot \frac{x_K}{x_C} = 0$$

$0 = 0$ верно, значит $O \in DE$

4. т.к. $y_N > y_A$ (т.к. N лежит за точкой A), то $\frac{y_N}{2} > \frac{y_A}{2} > 0 \Rightarrow$
$y_O > y_E > y_D$, значит O и D лежат в разных полуосях от-но т-ки E
и O и D лежат на одной прямой $\Rightarrow \angle DEO = 180°$
Ответ: $180°$

Задача №5

Для всех $n \geq 2$, докажем ММИ

1. БИ: $n = 3$

Обозначим спортсменов 1 2 3, тогда если 1 проиграл 2-му, 2 - ~~3-е~~ 3-му, а 3-ий первому, то для любой пары найдется человек проигравший хотя бы одному из этой пары.

2. ИП.

Ц ~~вер~~ утв. верно для n, док-м для $n+2$, то есть ~~Среди n людей~~ для любой пары соседей из n человек можно найти того, кто проиграл одному из пары. Тогда добавим 2 человека, ~~которой выиграл всех людей~~ проигнорируем людей (не считая добавленных) ~~находящихся за столом и рядом с ним человека, который проиграл~~ Ц первый выиграл всех с четным номером, а второй всех с нечетным ~~(второй вы~~ ~~втор~~ тогда посадим первого со второй стороны, а второго рядом с первым, тогда для любой пары ~~первый~~ из предыдущих ~~пер~~ проиграл ~~хот~~ хотя бы одному и второй

Док-ва, что при $n:2$ невозможно, заметим, что если A проиграл двум своим соседям, то ~~ре~~ один из его соседей выиграл другого, а значит тот проиграл и A и его соседу, значит такого быть не может
$\Rightarrow$ если A проиграл 1 соседу, то выиграл другого