УРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ц850

1

73

1	2	3	4	5	6	сумма
1,5	4	4	1	4		14,5

73

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Москва

Дата 10.03.2019

* *

10–11 класс. Десятый вариант

+ **1.** Какое наибольшее количество ладей можно расставить на шахматной доске так, чтобы каждую ладью било не более двух других? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

+ **2.** Числа x, y, z — углы некоторого треугольника, один из которых не меньше $\frac{\pi}{2}$. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \cos x + \cos y + \cos z + \cos(x-y) + \cos(y-z) + \cos(z-x).$$

+ **3.** Дан четырехугольник $ABCD$, отличный от параллелограмма. На лучах AB, CB, CD и AD вне сторон четырехугольника $ABCD$ выбираются соответственно точки K, L, M и N так, что $KL \parallel MN \parallel AC$ и $LM \parallel KN \parallel BD$. Найдите геометрическое место точек пересечения диагоналей параллелограмма.

+ **4.** Натуральное число x в восьмеричной системе 2018-значное, и его цифры повторяются через одну. Оказалось, что восьмеричная запись x^2 содержит только цифры 3 и 4, причем в равном количестве. Найдите x^2 (в восьмеричной системе).

+ **5.** В однокруговом турнире по настольному теннису участвовало n теннисистов ($n \geqslant 3$). Будем говорить, что игрок A *круче* игрока B, если A выиграл у B или найдется такой игрок C, что A выиграл у C, а C выиграл у B. При каких n по итогам турнира могло оказаться так, что каждый игрок круче всех остальных? Ничьих в теннисе не бывает.

6. На столе лежат два конуса с общей вершиной O, касаясь друг друга внешним образом. Угол между их осями симметрии равен $\operatorname{arctg} \frac{12}{5}$. Найдите максимальный угол при вершине большего из двух конусов с вершиной O, которые лежат на столе и касаются внешним образом первых двух конусов. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении.)

(2) Заметим, что $\cos x+\cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

Тогда $\cos x + \cos(y-z) = 2\cos\frac{x+y-z}{2}\cos\frac{x-y+z}{2} = 2\cos\frac{\pi-2z}{2}\cos\frac{\pi-2y}{2} =$

$= 2\cos\left(\frac{\pi}{2}-z\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right) = 2\sin z\sin y$

Тогда $A = 2(\sin x\sin y + \sin z\sin x + \sin z\sin y)$.

Пусть $z \geq \frac{\pi}{2}$, тогда $\sin z = \sin(x+y) \Rightarrow A = 2(\sin x\sin y + (\sin x+\sin y)\cdot\sin(x+y))$,

~~тогда~~ т.к. $x, y, x+y \leq \frac{\pi}{2}$, а на $[0;\frac{\pi}{2}]$ $\sin(x)$ монотонно возрастающая, то увеличив x или y и уменьшив z, A увеличится - значит можем искать максимум для $z=\frac{\pi}{2}$.

Итак, $A = 2\cdot(\sin x\sin y + \sin x + \sin y)$, $x+y=\frac{\pi}{2}$

Пусть $a=\sin x$, $b=\sin y$

$a, b \geq 0$, $a^2+b^2=1$

тогда $A = 2(a+b+ab)$

$\sqrt{ab} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \Rightarrow a+b \leq 2\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

Тогда $A \leq 2\cdot\left(\frac{1}{2}+\sqrt{2}\right) = \boxed{1+2\sqrt{2}}$

такое A достигается при треугольнике с углами $\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}$.

$\cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} + \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) + \cos 0 = 1+4+\frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{1+2\sqrt{2}}$ ✓

(4) $\underbrace{525252\ldots52}_{2018\text{ символов}}{}_8^2 = \underbrace{3434\ldots34}_{2016\text{ символов}}\,33\,\underbrace{\cancel{3}43434\ldots43}_{2016\text{ символов}}\,44$

Ответ: $\underbrace{343434\ldots34}_{2016}\,33\,\underbrace{4343\ldots43}_{2016}\,44$

Пусть $x = \overline{ab\ldots ab}_8$

Тогда заметим, что $\overline{ab}^2$ оканчивается на число из 3 и 4, тогда

$(8a+b)^2 \equiv 3$ или 4

Если $b \not\vdots 2$, то $(8a+b)^2 \equiv_8 1$

$(8a+(b-1))(8a+(b+1)) \vdots 8$, Тогда $b \vdots 2$

Значит $b \not\vdots 4$, т.к. тогда $(8a+b)^2 \equiv_8 0$

Тогда $8a+b = 4c+2$

$(4c+2)^2 \equiv_{64} 3\cdot 8+4$ или $4\cdot 8+4$

Тогда $4c\cdot(4c+4) \equiv_{64} 3\cdot 8$ или $4\cdot 8$

Но слева число $\vdots 16$, значит справа $4\cdot 8$

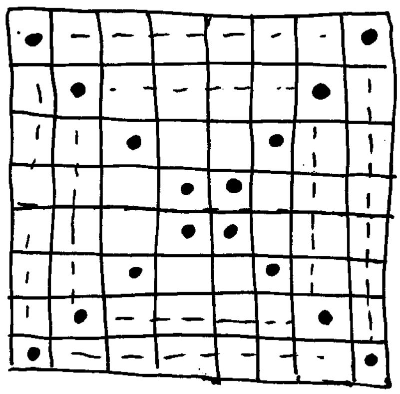
Итак, $16c\cdot(c+1) \equiv_{64} 32 \Rightarrow c(c+1) \not\vdots 4$. Значит, $c \equiv_4 1$ или 2

Теперь заметим, что $\overline{ab}_8 = 06_8, 12_8, 26_8, 32_8, 46_8, 52_8, 66_8, 72_8$

37

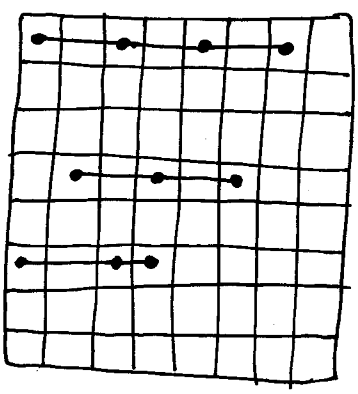
① $\boxed{\text{Ответ: } 16}$

Пример:



Ладьей 16, условие, очевидно, выполнено.

Оценка: будем соединять ладьи линией, если они бьют друг друга.
Пусть ладьей $\boxed{x}$



Заметим, что из каждой ладьи, кроме самой ~~крайн~~ правой в строке исходит одна линия вправо

Т.к. ладьей, которые самые правые в строке ≤ 8, то горизонтальных линий $\boxed{\geq x-8}$

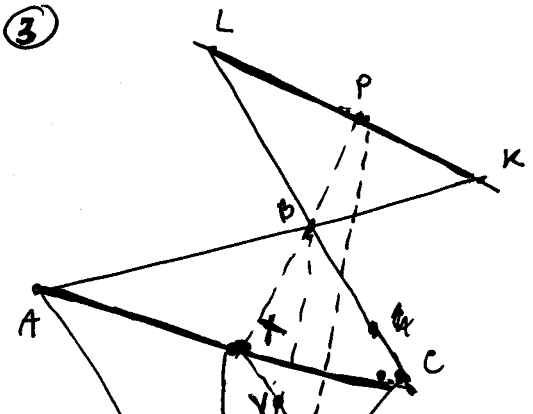
Аналогично, вертикальных линий $\boxed{\geq x-8}$

Значит всего линий $\geq 2x-16$

Но из каждой ладьи выходит ≤ 2 линий и у каждой ~~ладьи~~ линии 2 конца, значит линий $\leq x$.

Итак, $2x-16 \leq x \Rightarrow \underline{x \leq 16}$

③



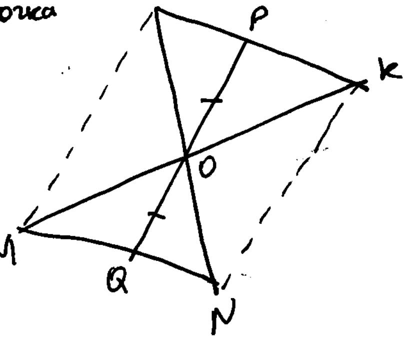
Заметим, что $KLMN$ — параллелограмм $\Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{KL} = \vec{NM}$

Пусть X — сер. AC, P — сер. KL, Q — сер. MN, Y — ~~сер.~~ BD,
O — сер. PQ

Заметим, что диагонали $KLMN$ пересекаются в точке O, т.к. ~~P~~ $PKQM$ и $PLQN$ — параллелограммы а O — середина PQ

Значит O — нужная точка



$\triangle ACD$ и $\triangle NMD$ подобны $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ т. X, D, Q на одной прямой
и $\frac{XD}{DQ} = \frac{AC}{MN}$

Аналогично т. X, B, P — на одной прямой

$\frac{XB}{BP} = \frac{AC}{LK} = \frac{AC}{MN} = \frac{XP}{PQ} \Rightarrow$

⇒ (по теореме Фалеса) $BD \parallel PQ$ ⇒ $\triangle XBD$ и $\triangle XPQ$ подобны ⇒ X, Y, O лежат на одной прямой причем Y между X и O ~~и~~ и $\frac{YO}{YX} = \frac{BP}{PX}$

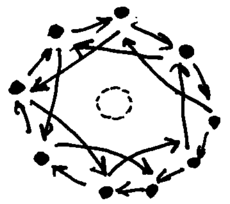
Заметим, что $\frac{BP}{BX} = \frac{BL}{BC}$ может быть любым положительным числом, тогда

O может быть любой точкой на продолжении луча XY за точку Y, где X и Y — середины AC и BD соответственно.

↑ это и есть ГМТ ✓

5 $\boxed{\text{Ответ: для всех } n \neq 4}$ ~~Пото~~ ✓

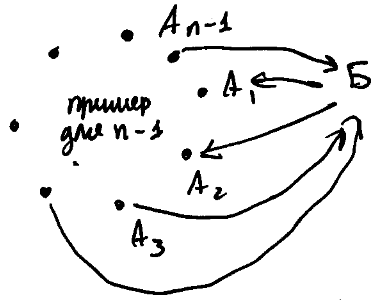
Посмотрим сначала пример для $n \not\vdots 2$. Расположим игроков по кругу, теперь если расстояние по час. стрелке между игроком А и игроком Б нечетное, то А выиграл у Б, иначе наоборот



Тогда ∀ А, Б ~~[illegible]~~ если А выиграл у Б, то всё хорошо, а ~~иначе~~ иначе А выиграл у следующего по часовой стрелке, а тот выиграл у Б (т.к. растояние по часовой стрелке между ними на 1 меньше, ~~[illegible]~~.

Тогда все круче всех.

Тогда построим пример для $n \vdots 2$, $n \geq 6$



Рассмотрим пример для $n-1$, добавим Б $n-1 \geq 5$, тогда пусть в примере на $n-1$ по кругу стоят $A_1, A_2, A_3 \dots A_{n-1}$

Б выиграл у A_1 и A_2, остальным проиграл.

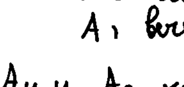
Тогда заметим, что $\forall i = 3, 4, \dots, n-1$ A_i проиграл или A_1 или A_2, тогда Б круче $A_3, A_4, \dots A_{n-1}$, а тогда он круче всех остальных.

A_2 выигр. у A_3, а A_3 у Б
A_1 выигр. у A_4, а A_4 — у Б

Знаит, A_4 и A_2 круче Б, Тогда все А-шки круче Б

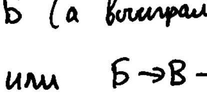
Докажем, что для $n = 4$ нельзя, от противного. Пусть люди — А, Б, В, Г, Пусть А → Б (а выиграл у Б)

Тогда или Б → В → А, или Б → Г → А (пусть первое)



Г должен был у кого-то выиграть, пусть Г → А

т.к. В круче Г ~~[illegible]~~, а В ← Б, то В → Г



т.к. А круче Г, а А ← Г, то Б → Г

тогда Г не круче В, противоречие

Чистовик

Заметим, что последние 4 цифры числа $\overline{abab_8}^2$, это 3 или 4

Сделаем перебор :(

$606_8^2 = 390^2 = 15210 = 451044_8$

$1212_8^2 = 650^2 = 422500 = 1471144_8$

$2626_8^2 = 1430^2 = 2044900 = 7631744_8$

$3232_8^2 = 1690^2 = 2856100 = 12712244_8$

$4646_8^2 = 2470^2 = 6100900 = 27213644_8$

$5252_8^2 = 2730^2 = 7452900 = 3433\underbrace{4344}_{}{}_8$

$6666_8^2 = 3510^2 = 12320100 = 56776544_8$

$7272_8^2 = 7770^2 = 14212900 = 66157444_8$

Подходит только $\overline{ab_8} = 52_8$

Тогда число $\underbrace{\overline{abab\ldots ab_8}}_{2018}{}^2 = \underbrace{343434\ldots34}_{2016}\;33\;\underbrace{4343\,43\ldots43}_{2016}\;44$ Откуда?

Разделим на 2 : (т.к. $\frac{52_8}{2} = 25_8$; $\frac{34_8}{2} = 16_8$, $\frac{334_8}{2} = 156_8$)

$$\underbrace{252525\ldots25_8^2}_{2018} \overset{?}{=} \underbrace{1616\ldots16}_{2016\text{ раз}}156\,\underbrace{161616\ldots16}_{2016\text{ раз}}\,2$$

4