$$A=\frac{\cancel{xy}\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt{2}}{\cancel{xy}\left(\frac{x}{y}-1+\frac{y}{x}\right)}=\frac{\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt{2}}{\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-1\right)}$$

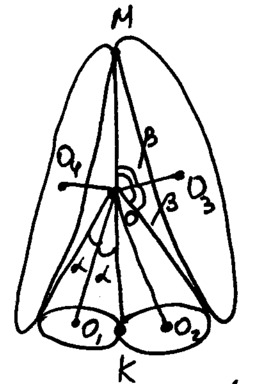
$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$ как сумма двух взаимнообратных величин.

$$A\leq\frac{\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt{2}}{2-1}=\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt{2}=\sqrt[4]{8}$$

Наибольшее значение $A=\sqrt[4]{8}$ при $x=y$

Ответ: $\sqrt[4]{8}$

6.



O – общая вершина всех конусов

OO_1, OO_2 – оси конусов с углами 2α при вершине

OO_3, OO_4 – оси конусов с углами 2β при вершине

OK – образующая, по которой касаются первые 2 конуса

OM – образующая, по которой касаются другие два конуса

В силу симметрии конструкции: $(OO_1O_2)\perp(OO_3O_4)$, MOK – прямая, а не два луча

$\angle O_1OK=\alpha$

$\angle MOO_3=\beta$ $\quad\angle O_3OK=\pi-\beta$

$\angle O_1OO_3=\alpha+\beta$ (первый и третий конус касаются)

OO_3 – наклонная к (OO_1O_2)

OK – ее проекция на (OO_1O_2)

OO_1 – прямая в (OO_1O_2)

тогда $\cos\angle O_1OO_3=\cos\angle O_1OK\cdot\cos\angle O_3OK$

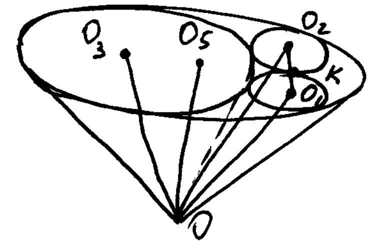
$$\cos\underbrace{(\alpha+\beta)}_{\text{тупой угол}}=\cos\alpha\cdot\cos\underbrace{(\pi-\beta)}_{\text{тупой угол}}$$

$\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta=-\cos\alpha\cdot\cos\beta.$

$\sin\alpha\cdot\sin\beta=2\cos\alpha\cdot\cos\beta.$

$\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\beta=2$

По условию, пятый конус не совпадает с четвертым



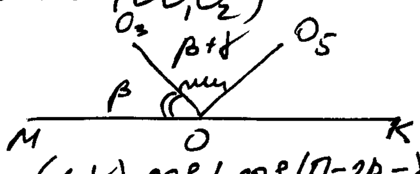
Ось пятого конуса OO_5 лежит в (O_3OK)

$(OO_1O_2)\perp(O_3OK)$, 2γ – угол при вершине пятого конуса

OO_5 – наклонная к (OO_1O_2)

OK – [redacted] ее проекция на (OO_1O_2)

OO_1 – прямая в (OO_1O_2)



тогда $\cos\angle O_1OO_5=\cos\angle O_1OK\cdot\cos\angle O_5OK$

$\angle O_1OO_5=\alpha+\gamma$ (конусы касаются)

$\angle O_5OK=\pi-2\beta-\gamma$

$\angle O_3OO_5=\beta+\gamma$ (конусы касаются)

$\cos(\alpha+\gamma)=\cos\alpha\cdot\cos(\pi-2\beta-\gamma)$

$$\begin{cases}\cos(\alpha+\gamma)=\cos\alpha\cdot\cos(\pi-2\beta-\gamma)\\ \mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\beta=2\end{cases}$$

Отсюда находим γ

Ответ: 2γ

80

А0-5

...РГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

68

1	2	3	4	5	6	сумма
4	4	-	4	-	4	16

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Архангельск

Дата 23.03.2019

* *

10–11 класс. Четвертый вариант

1. При каком наибольшем n на доске 9×9 можно расставить n королей и 6 ладей так, чтобы никакая фигура не была под боем?

2. Даны числа $x, y > 0$. Найдите максимальное значение выражения

$$A=\frac{xy\,(x+y)}{\sqrt[4]{x^{12}+y^{12}}}.$$

3. Дан тупой угол BAD, где точка D отлична от A. На луче AB произвольным образом выбирается точка X, также отличная от A. Пусть P — точка пересечения касательных к описанной окружности треугольника ADX, проведенных в точках D и X. Найдите геометрическое место точек P.

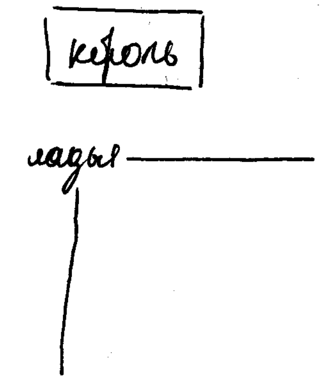
4. Дано натуральное число x, шестнадцатиричная запись которого n-значная и не содержит нулей. Числа x и x^2 в шестнадцатиричной системе одинаково читаются слева направо и справа налево. Найдите все n, при которых такое x существует.

5. В однокруговом турнире по настольному теннису принимает участие 20 человек. Если тройка участников A, B, C такова, что A выиграл у B, а B — у C, то организаторы турнира вручают спортсменам из этой тройки соответственно "золотой", "серебряный" и "бронзовый" сувениры. Участник, оказавшийся в нескольких тройках, получает сувенир за каждую из них. Какое наименьшее количество "серебряных" сувениров надо закупить организаторам, чтобы их хватило вне зависимости от результатов турнира? Ничьих в теннисе не бывает.

6. Четыре конуса с общей вершиной O касаются друг друга внешним образом, причем первые два и последние два их них имеют одинаковый угол при вершине. Пятый конус, отличный от четвертого, касается первых трех конусов внешним образом. Найдите максимальный угол при вершине пятого конуса. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении).

1.

6 ладей
королей – n.



король – К
ладья – Л

Ладья, выставленная на поле, бьет всю вертикаль и всю горизонталь.

Посчитаем, сколько останется свободных клеток, чтобы выставить туда королей:

$$(9-6)^2 = 3^2 = 9$$

Наибольшее кол-во королей, которое можно выставить на клетчатое поле (9×9), равно 9

Приведем пример расстановки 9 королей и 6 ладей:

К		К		К				
								Л
К		К		К				
							Л	
К		К		К				
						Л		
	Л							
			Л					
					Л			

Ответ: 9

5.

20 человек

$A^1 \to B$ ② – ? $\to C_3$

Возьмем игрока В.

Пусть он выиграл x матчей из 19, тогда он проиграл $(19-x)$ матчей

Игрок В может участвовать в $x(19-x)$ различных тройках нужного нам вида.

Рассмотрим $f(x) = x(19-x)$

Найдем наиб. значение

$$f(x) = -x^2 + 19x$$

$$\frac{-b}{2a} = \frac{-19}{-2} = 9{,}5.$$

По смыслу задачи, x – целое число, кроме того, парабола симметрична относительно оси, которая проходит через вершину, тогда $f_{наиб.} = f(9) = f(10) = 90$

Значит, игроку В потребуется 90 „серебряных" сувениров.

Игрок В был выбран произвольно, поэтому организаторам турнира потребуется $20 \cdot 90 = 1800$ „серебряных" сувениров.

Приведем пример:

Каждый игрок выигрывал 9 или 10 побед. Представим игроков в виде точек на окружности, каждый игрок выигрывает у 9 участников, идущих за ним по часовой стрелке, и проигрывает всем остальным. Организаторы турнира должны иметь 1800 „серебряных" сувениров. Меньшее число нам не подходит. Ответ: 1800

2

Найдем неравенство, позволяющее избавиться от двенадцатых степеней и корня четвертой степени

$$(x^6 - y^6)^2 \geq 0$$
$$x^{12} - 2x^6y^6 + y^{12} \geq 0$$
$$2x^{12} + 2y^{12} \geq x^{12} + 2x^6y^6 + y^{12}$$
$$2x^{12} + 2y^{12} \geq (x^6 + y^6)^2$$

$$A = \frac{xy(x+y)\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{x^{12}+y^{12}} \cdot \sqrt[4]{2}} = \frac{xy(x+y)\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2x^{12}+2y^{12}}} \leq \frac{xy(x+y)\sqrt[4]{2}}{\sqrt{x^6+y^6}}$$

$$(x^3 - y^3)^2 \geq 0$$
$$x^6 - 2x^3y^3 + y^6 \geq 0$$
$$2x^6 + 2y^6 \geq x^6 + 2x^3y^3 + y^6$$
$$2x^6 + 2y^6 \geq (x^3 + y^3)^2$$

$$A = \frac{xy(x+y)\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{x^6+y^6}\cdot\sqrt{2}} = \frac{xy(x+y)\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2x^6+2y^6}} \leq \frac{xy(x+y)\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt{2}}{x^3+y^3} = \frac{\cancel{(x+y)}xy\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt{2}}{\cancel{(x+y)}(x^2-xy+y^2)}$$