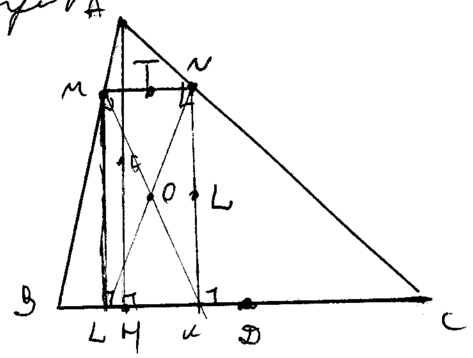
N3.

сер. пер. — серединный перпендикуляр



1) Заметим, что $OM = ON = OK$ =>

=> O — точка пересечения ~~[illegible]~~ серединных на перпендикуляров к MN и NK.

2) Будем двигать точку N линейно по прямой AC (A, B, C — на месте) ~~[illegible]~~ т.к. $MN \parallel KL$ => $MN \parallel BC$ => прямая MN также движется линейно, а т.к. AB остаётся на месте, то M тоже движется линейно => ~~[illegible]~~ T (середина MN) также движется линейно, а т.к. сер. пер. к MN перпендикулярен MN => перпендикулярен BC, тоже движется линейно.

Точка K — проекция линейно движущейся точки на ~~[illegible]~~ BC (которая остаётся на месте) => она движется линейно => L движется линейно, а т.к. $NK \perp BC$, то сер. пер. к NK параллелен BC => он движется линейно (т.к. L движется линейно) => O движется линейно как пересечение 2-х линейно движущихся прямых.

3) когда ~~[illegible]~~ N совп. с A, то M совп. с A, K и L совп. H (AH — высота в $\triangle ABC$) => ~~[illegible]~~ O совп. с E (т.к. сер. пер. к MN переходит в AH, сер. пер. к NK переходит в прямую через E параллельно BC).

4) когда N совпадает с C, ~~[illegible]~~ то M совп. с B, K совп. с C, L совп. с B => сер. пер. к MN переходит в сер. пер. к BC, сер. пер. к NK переходит в BC => O совп. с D

5) т.к. ~~[illegible]~~ при ~~[illegible]~~ линейном движении N от A к C O движется линейно от E к D, то ~~[illegible]~~ O ~~[illegible]~~ всегда лежит на отрезке ED => $\angle DOE = 90°$. Ответ: 90

M 105

РГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

8856 85

1	2	3	4	5	6	сумма
4	4	1	0	4	4	17

85

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Челябинск

Дата 02.03.2019

* *

10–11 класс. Седьмой вариант

1. Имеется один черный ферзь и n белых. При каком наибольшем n эти фигуры можно расставить на шахматной доске так, чтобы белые ферзи не били друг друга? Ферзь не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Числа x, y, z — углы треугольника. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{\sin x \cdot \sin y \cdot \sin z}{\sin x + \sin y + \sin z}.$$

3. Дан остроугольный треугольник ABC. В него вписан прямоугольник $KLMN$ так, что точки M и N лежат соответственно на сторонах AB и AC, а точки K и L — на стороне BC. Пусть AD — медиана треугольника ABC, E — середина его высоты, опущенной из вершины A, O — точка пересечения диагоналей прямоугольника. Найдите угол DOE.

4. Даны натуральные числа x и y. В восьмеричной системе они $4n$-значные, причем в записи x цифры повторяются через одну, а в записи y — через три. Оказалось, что восьмеричная запись $x \cdot y$ состоит из последовательных блоков по 4 одинаковых цифры. При каких n это возможно?

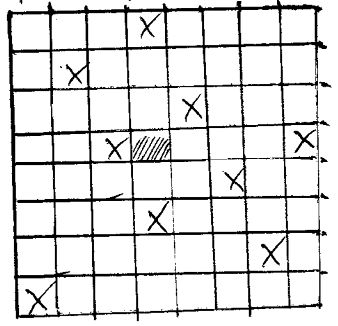
5. В однокруговом турнире по настольному теннису участвовало n теннисистов с различными рейтингами ($n > 4$). Во всех партиях, кроме двух, победил участник с более высоким рейтингом, но теннисист с самым маленьким рейтингом выиграл у теннисиста с самым большим рейтингом, а теннисист с предпоследним рейтингом выиграл у теннисиста со вторым рейтингом. Сколькими способами можно расставить спортсменов в ряд так, что каждый (кроме самого правого) выиграл у своего соседа справа?

6. На столе лежат три конуса с общей вершиной, касаясь друг друга внешним образом. Оси симметрии первых двух конусов взаимно перпендикулярны. Два шара вписаны в третий конус и касаются друг друга внешним образом. Найдите максимальное отношение радиусов большего и меньшего шаров.

№1.

Ответ: $n=9$

Пример:



▒ – чёрный ферзь

X – белый ферзь

Очевидно, что при данном расположении никакие 2 белых ферзя не бьют друг друга.

Оценка:

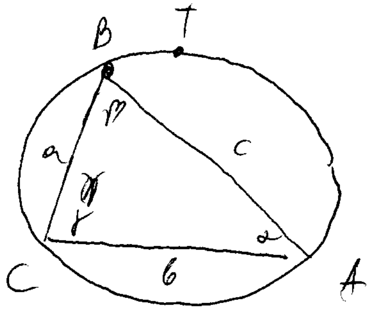
рассмотрим строку, в которой стоит чёрный ферзь. Очевидно, в этой строке стоит не более 2-х белых ферзей. В остальных 7 строках, очевидно, стоит не более 1-го ферзя (если бы стояло больше, то 2 белых били бы друг друга) => всего не более $7\cdot 1+1\cdot 2=9$ белых ферзей

№2.

Лемма:

Наибольший по площади треугольник, вписанный в данную окружность – правильный.

Д-во:



Докажем, что площадь любого тр-ка не больше правильного. Пусть стороны нашего тр-ка – это a, b, c, причём $a\le b\le c$ а углы – α, β, γ (α – напротив a, β – напротив b, γ – напротив c) => $\alpha\le\beta\le\gamma$ =>

=> т.к. $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$, то $\alpha\le 60^\circ$, $\gamma\ge 60^\circ$, $\beta<90^\circ$.

Пусть T – середина дуги AC, сод. т. B.

=> при движении B по направлению к T (по дуге BT), когда-то мы получим такое положение, в котором $\alpha=60^\circ$ или $\gamma=60^\circ$, потому что когда $B=T$ $\alpha=\gamma$ =>

=> угол α или угол γ должен был перейти значение в 60°. Заметим, что новая площадь тр-ка больше старой, т.к. расстояние от B до AC стало больше, а AC не изменилось. Повторив такую же операцию с новым тр-ком (у которого один из углов – 60°), мы получим ещё один угол 60° => и оставшийся будет 60° => этот тр-к – правильный => площадь исходного тр-ка не больше площади правильного.

Лемма доказана.

Задача.

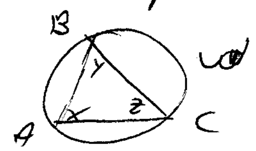
Ответ: $\frac{1}{4}$.

Пример: $x=y=z=60^\circ$

$$\Rightarrow \frac{\sin x\sin y\sin z}{\sin x+\sin y+\sin z}=\frac{\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)^3}{3\cdot\frac{\sqrt3}{2}}=\frac{\frac{3\sqrt3}{8}}{\frac{3\sqrt3}{2}}=\frac{2}{8}=\frac14$$

Оценка:

Рассмотрим $\triangle ABC$ с углами x, y, z, описанная окружность которого имеет диаметр 1. (окружность ω)



=> по теореме синусов

$AB=\sin z$, $BC=\sin x$, $AC=\sin y$

$$\Rightarrow \frac{\sin x\sin y\sin z}{\sin x+\sin y+\sin z}=\frac{AB\cdot BC\cdot CA}{AB+BC+CA}=\frac13\cdot\frac{3}{\frac{1}{AB\cdot BC}+\frac{1}{AB\cdot AC}+\frac{1}{BC\cdot AC}}\le\frac13\cdot\sqrt[3]{AB\cdot BC\cdot AB\cdot AC\cdot BC\cdot AC}=$$

по нер-ву м/у средним гармоническим и средним геометрическим

$$=\frac13\sqrt[3]{AB^2\cdot BC^2\cdot AC^2}=\frac13\left(\sqrt[3]{AB\cdot BC\cdot\sin y}\right)^2=\frac13\left(\sqrt[3]{2S}\right)^2,$$

(S – площадь $\triangle ABC$); но S по лемме не больше площади правильного тр-ка, вписанного в ω, но она равна $\frac{3\sqrt3}{16}$ =>

$$\Rightarrow \frac{\sin x\sin y\sin z}{\sin x+\sin y+\sin z}\le\frac13\left(\sqrt[3]{2S}\right)^2\le\frac13\left(\sqrt[3]{2\cdot\frac{3\sqrt3}{16}}\right)^2=\frac13\left(\sqrt[3]{\frac{3\sqrt3}{8}}\right)^2=\frac13\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)^2=$$

$$=\frac13\cdot\frac34=\frac14$$

№5.

Лемма: кол-во способов разбить k чисел на t упорядоченных мн-в равно t^k

Док-во:

каждое число можно положить в одно из t мн-в, $\Rightarrow$ всего вариантов $\underbrace{t \cdot t \cdot t \ldots t}_{k} = t^k$

Задача:

Назовём теннисистов от 1 до n - в порядке убывания ~~по~~ рейтинга.

1) теннисист n - на последнем месте в ряду

$\Rightarrow$ теннисист 1 - на 1-м месте (т.к. его победил только n)

1. теннисист $n-1$ - на $n-1$-м месте $\Rightarrow$ осталось $n-3$ теннисиста и $n-3$ места, причём эти теннисисты ~~победители~~ играли правильно (т.е. теннисист с более высоким ~~рейтингом~~ номером ~~не~~ побеждает теннисиста с более низким номером $\Rightarrow$ они должны быть отсортированы по возрастанию номеров ~~убыванию~~ $\Rightarrow$ 1 вариант

2. теннисист $n-1$ - не на $n-1$-м месте $\Rightarrow$ после него кто-то стоит, причём это не $n \Rightarrow$ это 2:

$1, \overset{\mathrm{I}}{\frown} \ldots, n-1, 2, \overset{\mathrm{II}}{\frown} \ldots, n$. Очевидно, что в группах I и II теннисисты отсортированы по возрастанию номеров. $\Rightarrow$ Кол-во таких способов равно кол-ву способов разбить оставшиеся $n-4$ теннисистов на 2 группы $\Rightarrow$ это 2^{n-4} варианта

2) теннисист n - не на последнем месте $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ после него стоит 1 (т.к. он победил только его)

1. теннисист $n-1$ стоит на последнем месте

$\overset{I}{\ldots}, n, 1, \overset{II}{\ldots}, n-1$ => игроки в группах I и II отсортированы по возрастанию => кол-во способов равно кол-ву способов разбить оставшихся $n-3$ теннисистов на 2 группы и равно 2^{n-3}

2. теннисист $n-1$ стоит перед теннисистом n

$\overset{I}{\ldots}, n-1, n, 1, \overset{II}{\ldots}$ аналогично пред. пункту, кол-во вариантов равно 2^{n-3}

3. $n-1$ не стоит перед n и не на последнем месте => после него стоит 2 (т.к. от победил только его и n)

а) пара $(n-1, 2)$ стоит перед парой $(n, 1)$

$\overset{I}{\ldots}, n-1, 2, \overset{II}{\ldots}, n, 1, \overset{III}{\ldots}$ Очевидно, что игроки в группах I, II, III отсортированы по возрастанию номеров => кол-во ~~вариантов~~ способов равно кол-ву вариантов разбить оставшихся $n-4$ теннисистов на 3 группы и равно 3^{n-4}

б) пара $(n-1, 2)$ стоит после пары $(n, 1)$

$\overset{I}{\ldots}, n, 1, \overset{II}{\ldots}, n-1, 2, \overset{III}{\ldots}$ аналогично пред. пункту кол-во вариантов равно 3^{n-4}

=> всего $3^{n-4}+3^{n-4}+2^{n-3}+2^{n-3}+2^{n-4}+1 =$
$= 2\cdot 3^{n-4}+2^{n-4}+2^{n-2}+1$ вариант

Ответ: $2\cdot 3^{n-4}+2^{n-4}+2^{n-2}+1$ (очевидно, что все описанные расстановки подходят)

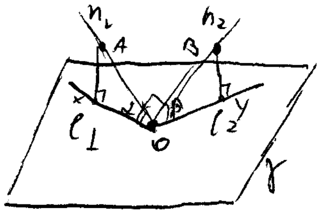
№6. $\angle(a;b)$ - угол м/у 2-мя лучами или м/у 2-мя прямыми или м/у лучом и прямой.

Пусть общая вершина конусов — O, ~~конус 1 касается~~ плоскость стола — γ, луч касания конуса i со столом — l_i, его ось симметрии — n_i.

1) Докажем, что l_1 и l_2 — на одной прямой.

~~Пусть~~ Очевидно, что l_i - проекция n_i на γ.

Пусть $\angle(l_1; n_1)=\alpha$, $\angle(l_2; n_2)=\beta$



рассмотрим т. $A \in n_1$, т. $B \in n_2$: $OA=OB=1$, X, Y - проекц. A, B на l_1 и l_2 соотв. $\Rightarrow OX=\cos\alpha$, $AX=\sin\alpha$, $OY=\cos\beta$, $BY=\sin\beta$.

Пусть $\angle XOY = t$.

Т.к. l_1 - проекция n_1 на γ, X - проекц. A на l_1, то $AX \perp \gamma$, аналогично $BY \perp \gamma \Rightarrow AX \perp XY$, $BY \perp XY \Rightarrow AB^2 = XY^2 + (AX-BY)^2 =$

$= OX^2 + OY^2 - 2\cos t \cdot OX \cdot OY + AX^2 + BY^2 - 2AX \cdot BY =$

$= \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos t \cos\alpha\cos\beta + \sin^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin\alpha\sin\beta = 2 - 2\sin\alpha\sin\beta -$

$- 2\cos t\cos\alpha\cos\beta$.

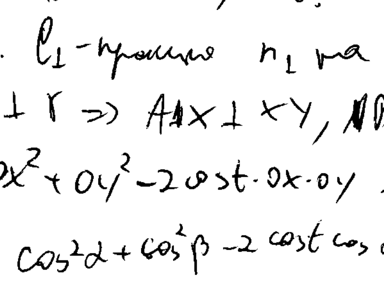
Но, $\angle AOB = \alpha+\beta$ (условие касания конусов), а т.к. $\angle AOB = 90°$, то

$AB^2 = 2$, $\alpha+\beta = 90°$ $\Rightarrow \sin\alpha = \cos\beta$, $\sin\beta = \cos\alpha$

$\Rightarrow 2 = AB^2 = 2 - 2\sin\alpha\sin\beta - 2\cos t\cos\alpha\cos\beta \Rightarrow \sin\alpha\sin\beta = -\cos t\cos\alpha\cos\beta =$
$= -\cos t \sin\beta\sin\alpha$

$\Rightarrow \cos t = -1 \Rightarrow t = 180° \Rightarrow l_1$ и l_2 на одной прямой

2)



по п.(1) l_1, l_2 - на одной прямой.

Пусть $A \in n_1$, $B \in n_2$, $C \in n_3$: $OA=OB=OC=1$,

X, Y, Z - проекции A, B, C на l_1, l_2, l_3 соотв. (аналогично п. (1)) $AX \perp \gamma$, $BY \perp \gamma$, $CZ \perp \gamma$. Пусть $\angle AOX = \alpha \Rightarrow \angle BOY = 90°-\alpha$, $\angle COZ = \beta$, $\angle XOZ = t$, тогда $\angle YOZ = 180° - t \Rightarrow AX = \sin\alpha$, $OX = \cos\alpha$, $OC = \cos\beta$, $CZ = \sin\beta$, $\angle AOC = \alpha+\beta$ (условие касания конусов 1 и 3)

Из $\triangle XOZ$: $XZ^2 = OX^2 + OZ^2 - 2\cos t\, OX \cdot OZ = \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos t \cos\alpha \cos\beta$

Из $\triangle AOC$: $AC^2 = OA^2 + OC^2 - 2\cos(\alpha+\beta)\, OA \cdot OC = 2 - 2\cos(\alpha+\beta)$

$AX \perp \gamma$, $CZ \perp \gamma \Rightarrow AX, CZ$ - верхн. плоскости, причём $AX \perp XZ$,

$CZ \perp XZ \Rightarrow AC^2 = XZ^2 + (AX - CZ)^2 = \cancel{\cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos t \cos\alpha\cos\beta} +$

$XZ^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos t \cos\alpha \cos\beta + \sin^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin\alpha \sin\beta =$

$= 2 - 2\cos t \cos\alpha \cos\beta - 2\sin\alpha \sin\beta$, но $AC^2 = 2 - 2\cos(\alpha+\beta) =$

$= 2 - 2\cos\alpha \cos\beta + 2\sin\alpha \sin\beta$

$\Rightarrow 2 - 2\cos t \cos\alpha \cos\beta - 2\sin\alpha \sin\beta = 2 - 2\cos\alpha \cos\beta + 2\sin\alpha \sin\beta$

$\cos\alpha \cos\beta(\cos t - 1) + 2\sin\alpha \sin\beta = 0 \quad | : \cos\beta$

$\Rightarrow \cos\alpha(\cos t - 1) + 2\sin\alpha\, tg\beta = 0$

Аналогично, записав CB двумя способами, получим рав-во:

$\cos(90^\circ - \alpha)(\cos(180^\circ - t) - 1) + 2\sin(90^\circ - \alpha)\, tg\beta = 0$ (т.к. там $\alpha \to 90^\circ - \alpha$, $t \to 180^\circ - t$)

$\Rightarrow \sin\alpha(-\cos t - 1) + 2\cos\alpha\, tg\beta = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha \cos t + 2\sin\alpha\, tg\beta = \cos\alpha & | \cdot \sin\alpha \\ -\sin\alpha \cos t + 2\cos\alpha\, tg\beta = \sin\alpha & | \cdot \cos\alpha \end{cases}$

$\oplus \begin{cases} \sin\alpha \cos\alpha \cos t + 2\sin^2\alpha\, tg\beta = \sin\alpha\cos\alpha \\ -\sin\alpha \cos\alpha \cos t + 2\cos^2\alpha\, tg\beta = \sin\alpha\cos\alpha \end{cases}$

$2\,tg\beta = 2\sin\alpha\cos\alpha \Rightarrow 2\,tg\beta = \sin 2\alpha \Rightarrow tg\beta = \frac{\sin 2\alpha}{2} \Rightarrow$ максимальное значение $tg\beta$ - это $\frac{1}{2} \Rightarrow$ максимальное значение β - это $arctg\frac{1}{2}$

3) рассмотрим сечение 3-го конуса плоскостью, проходящей через n_3. Т.к. центры этих сфер лежат на n_3, то радиусы полученных окружностей (в результате сечения) равны радиусам этих сфер), а угол, полученный в результате сечения конуса, равен 2β

№4

1) Очевидно, что число x разбивается на блоки по 2 цифры (причём все блоки одинаковы). Пусть ~~в каждом из них~~ значение, записанное в этих блоках, равно a (в десятичной с.с.)

$$\underbrace{a\ a\ a\ a\ a\ \ldots\ a}_{2n \text{ блоков}}$$

$$\Rightarrow x = a + a\cdot 8^2 + a\cdot 8^4 + \ldots + a\cdot 8^{4n-2} = a\cdot\frac{8^{4n}-1}{8^2-1} = a\cdot\frac{8^{4n}-1}{63}$$

$(a \leq 7+7\cdot 8 = 63)$

2) Число y разбивается на блоки по 4 цифры (все блоки одинаковы). Пусть значение блока — это b (в десятичной с.с.)

$$\underbrace{b\ b\ b\ \ldots\ b}_{n \text{ блоков}}$$

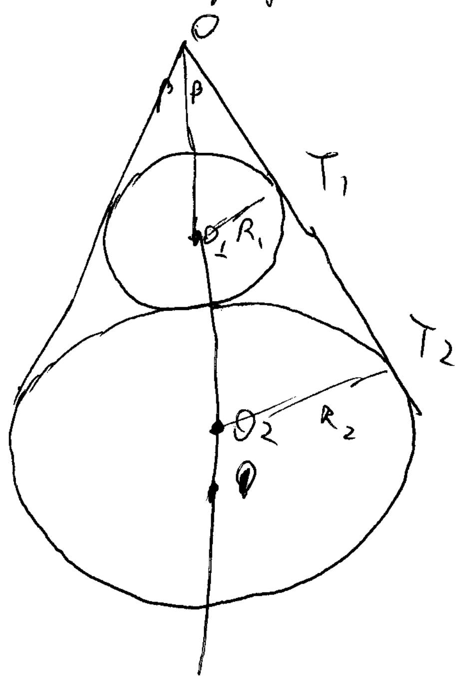
$$\Rightarrow y = b + b\cdot 8^4 + b\cdot 8^8 + b\cdot 8^{12} + \ldots + b\cdot 8^{4n-4} = b\cdot\frac{8^{4n}-1}{8^4-1} =$$

$$= b\cdot\frac{8^{4n}-1}{4095}$$

$(a \leq 7+7\cdot 8+7\cdot 8^2+7\cdot 8^3 = 4095$

3) $$xy = ab\,\frac{(8^{4n}-1)^2}{63\cdot 4095}$$

№6 продолжение



Пусть $R_2 = xR_1 \Rightarrow$ $OO_1 = \frac{O_1T_1}{\sin\beta} = \frac{R_1}{\sin\beta}$,

$OO_2 = \frac{OT_2}{\sin\beta} = \frac{R_2}{\sin\beta} = x\frac{R_1}{\sin\beta}$

т.к. окружности касаются, то $O_1O_2 = O_1T_1 + O_2T_2$

$\Rightarrow OO_2 - OO_1 = O_1T_1 + O_2T_2 \Rightarrow (x-1)\frac{R_1}{\sin\beta} = R_1 + xR_1$

$\Rightarrow \frac{x-1}{\sin\beta} = x+1 \Rightarrow x-1 = x\sin\beta + \sin\beta \Rightarrow x = \frac{\sin\beta+1}{1-\sin\beta} =$

$= \frac{2}{1-\sin\beta} - 1 \Rightarrow x$ — макс, когда $1-\sin\beta$ — минимальна $\Rightarrow$

β должна быть максимальна, но максимальное β — это $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$, но $\sin \operatorname{arctg}\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow$ максимальное значение x — это $\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}+1}{1-\frac{1}{\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} = \frac{(\sqrt{5}+1)^2}{4} =$

$= \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ ($\beta = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$ достигается при $\alpha = 45°$ (очевидно, все условия соблюдаются)

Ответ: $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$