4). В расстановке n стоит ~~правее~~ справа от 1 и $n-1$ справа от ~~правее~~ 2

1) $\ldots, 1, n, \ldots, 2, n-1, \ldots$

2) $\ldots, 2, n-1, \ldots, 1, n, \ldots$

} в обоих вариантах за место троеточия можно подставить любой упорядоченный набор из оставшихся теннисистов

=> всего $2 \cdot 3^{n-4}$ вариантов

т.к. либо 1 вариант, либо 2

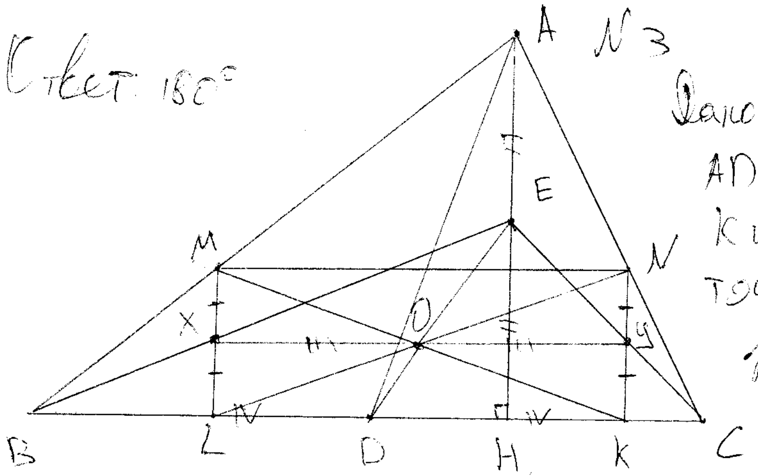
$n-4$ числа распределяем по трем промежуткам и упорядочиваем

Легко видно, что все эти варианты подходят. Например, в 1 варианте в конце первого троеточия любой бьет 1 (либо никто), в начале второго троеточия n выигрывает у любого, а в конце последний всегда выиграет у 2. И в начале (либо у 2) третьего троеточия $n-1$ выигрывает у любого. (В этой части любой — значит какой-бы ни был)

5) Итого: $1+2^{n-2}-2+2^{n-4}+2\cdot 3^{n-4} = 2(2^{n-3}+2^{n-5}+3^{n-4})-1$

Ответ: 180°

N3



Дано: △ABC, AH - высота, E - середина AH, AD - медиана, KLMN - прямоугольник, K и L на AC, M на AB, N на AC, O - точка пересечения диагоналей KLMN. Найти ∠DOE

1) Проведем BE и CE. Пусть BE пересекла ML в точке X, а CE пересекла KN в точке Y

2) $ML \parallel AH \Rightarrow \frac{MX}{XL} = \frac{AE}{AH}$ (из-за подобия △BML и △BAH, △BMX и △BAE, △BXL и △BEH) $\frac{AE}{AH} = 1$ по условию => MX = XL. Аналогично NY = YK

3) Проведем XY (O очевидно лежит на XY и делит XY пополам)

4) $XY \parallel BC$ (т.к. LXYK - прямоугольник)

5) т.к. $XY \parallel BC$, EO должна пройти через середину BC (по теме замечательной в п. 2) => EO проходит через D => ∠EOD = 180°, что

6918

...СКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

1	2	3	4	5	6	сумма
4	4	4	0	3	-	15

75

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Краснодар

Дата 05.03.2019

* *

10–11 класс. Седьмой вариант

1. Имеется один черный ферзь и n белых. При каком наибольшем n эти фигуры можно расставить на шахматной доске так, чтобы белые ферзи не били друг друга? Ферзь не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Числа x, y, z — углы треугольника. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{\sin x \cdot \sin y \cdot \sin z}{\sin x + \sin y + \sin z}.$$

3. Дан остроугольный треугольник ABC. В него вписан прямоугольник $KLMN$ так, что точки M и N лежат соответственно на сторонах AB и AC, а точки K и L — на стороне BC. Пусть AD — медиана треугольника ABC, E — середина его высоты, опущенной из вершины A, O — точка пересечения диагоналей прямоугольника. Найдите угол DOE.

4. Даны натуральные числа x и y. В восьмеричной системе они $4n$-значные, причем в записи x цифры повторяются через одну, а в записи y — через три. Оказалось, что восьмеричная запись $x \cdot y$ состоит из последовательных блоков по 4 одинаковых цифры. При каких n это возможно?

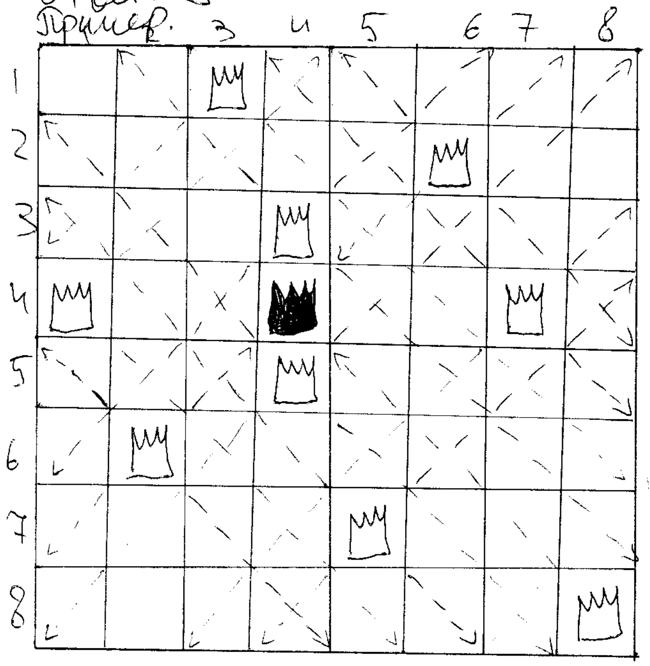
5. В однокруговом турнире по настольному теннису участвовало n теннисистов с различными рейтингами ($n > 4$). Во всех партиях, кроме двух, победил участник с более высоким рейтингом, но теннисист с самым маленьким рейтингом выиграл у теннисиста с самым большим рейтингом, а теннисист с предпоследним рейтингом выиграл у теннисиста со вторым рейтингом. Сколькими способами можно расставить спортсменов в ряд так, что каждый (кроме самого правого) выиграл у своего соседа справа?

6. На столе лежат три конуса с общей вершиной, касаясь друг друга внешним образом. Оси симметрии первых двух конусов взаимно перпендикулярны. Два шара вписаны в третий конус и касаются друг друга внешним образом. Найдите максимальное отношение радиусов большего и меньшего шаров.

N1

Ответ: 9

Пример:



♕ - белый ферзь

♛ - черный ферзь

Можно легко убедиться, что белые ферзи не бьют друг друга.

Оценка.

Пусть черный ферзь стоит в j столбце. Тогда в любом другом не более одного ферзя (иначе они бы били друг друга) то есть ≤ 7 ферзей во всех столбцах, кроме j. В j столбце не более одного ферзя „выше" черного и не более одного „ниже" (или они опять же будут бить друг друга) Тогда всего $\leq 7+2=9$ ферзей. ч.т.д.

N5

Ответ: $2(2^{n-3}+2^{n-5}+3^{n-4})-1$

~~Назовем ситуацию, когда 1~~

Присвоим каждому теннисисту рейтинг от 1 до n ~~с сохранением условия.~~ (самому слабому 1, второму по слабости 2, ..., самому сильному n) Условие не изменится, но так удобнее. Рассмотрим несколько случаев:

1) В нашей расстановке человек с рейтингом n не стоит правее человека с рейтингом 1, и n-1 не стоит праве 2.

Дальше в решении я буду называть людей с помощью их рейтинга (т.е. 1 значит человек с рейтингом 1 ..)

В таком случае возможна только одна расстановка:

n, n-1, n-2, ..., 3, 2, 1

2) В расстановке n стоит ~~правее~~ справа от 1, но n-1 не стоит ~~правее~~ справа от 2 (Дальше я исп. „справа от" - значит сразу справа, „впритык")

... 1, n ... Тогда справа и слева от этой ситуации можно взять любой набор (даже пустой) упорядочить их по рейтингу не убыванию и получить правильную расстановку. Таких вариантов 2^{n-2} (каждое число мы „шлём" либо справа, либо слева. Набор получится правильным, если не получилось, что n-1 стоит левее 2 после упорядочивания. Тогда пусть эта ситуация произошла справа от ситуации 1n

.... 1, n ... n-1, 2 ... 2.1) между n и n-1 нет людей, иначе противоречие (только n и 2 могут выиграть у n-1, 2 стоит правее => это n)

2.2) после двойки нет чисел (т.к. там могут быть только 1 и n-1, но они оба левее) => ситуация выглядит в точности так: n-2, n-3, ..., 3, 1, n, n-1, 2. Такая ровно одна. Также, если n-1, 2 стоит левее 1, n: n-1, 2, 1, n, n-3, n-2, ..., 3.

тут нет чисел по аналогичным причинам

Получается, во втором пункте всего $2^{n-2}-2$ варианта

3) В расстановке n-1 стоит ~~правее~~ справа от 2, но n не стоит ~~левее~~ справа от 1

n, ..., 2, n-1, ..., 1. Тогда n стоит в самой левой позиции (либо никто её не выиграл, кроме 1), а 1 стоит в конце (т.к 1 выиграл только n, но n левее) Теперь в промежутки между n и 2 и n-1 и 1 можно подставить любой упорядоченный не убывающий набор => всего 2^{n-4} вариантов (n-4 числа ...

Чистовик

~~В решении я использовал известный факт, что в подобных треугольниках отношение медиан равно коэффициенту подобия~~

№2

Ответ: $\frac{1}{4}$

Пример: Пусть $x=y=z=\frac{\pi}{3}$, тогда $A=\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3}{3\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{3\sqrt{3}\cdot 2}{8\cdot 3\sqrt{3}}=\frac{1}{4}$

Оценка:

Докажем, что $\frac{\sin x\cdot\sin y\cdot\sin z}{\sin x+\sin y+\sin z}\overset{?}{\leq}\frac{1}{4}$

1) $\sin x, \sin y, \sin z>0$ т.к. это углы $\triangle$ (Если $\triangle$ вырожденный, то $A=0$, что меньше $\frac{1}{4}$)

2) Перевернём (можно, т.к. все >0)

$$\frac{\sin x\sin y\sin z}{\sin x+\sin y+\sin z}\overset{?}{\leq}\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{\sin x+\sin y+\sin z}{\sin x\sin y\sin z}\overset{?}{\geq}4\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{\sin y\sin z}+\frac{1}{\sin x\sin y}+\frac{1}{\sin x\sin z}\overset{?}{\geq}4$$

По неравенству о средних для трёх переменных:

$\frac{1}{\sin y\sin z}+\frac{1}{\sin x\sin y}+\frac{1}{\sin x\sin z}\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{\sin^2x\sin^2y\sin^2z}}$. Докажем теперь, что

$3\sqrt[3]{\frac{1}{\sin^2x\sin^2y\sin^2z}}\overset{?}{\geq}4\Leftrightarrow\frac{\sqrt[3]{\sin^2x\sin^2y\sin^2z}}{3}\overset{?}{\leq}\frac{1}{4}$ (Опять перевернули)

$f(t)=\sin t$ выпукла вверх на отрезке $[0,\pi]$, которому принадлежат числа x, y, z) $\Rightarrow$ Мы можем сдвигать попарно числа x, y, z с сохранением суммы, отчего произведение $\sin x\sin y\sin z$ не уменьшится. Сдвинем так, чтобы стало $x=y=z$. Тогда $\sin x=\sin y=\sin z=\frac{\sqrt{3}}{2}$ и

$\frac{\sqrt[3]{\left(\frac{3}{4}\right)^3}}{3}\leq\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{1}{4}\leq\frac{1}{4}$ — верно (равенство $\Rightarrow$ при других x, y, z тоже верно). Последнее неравенство верно, $\Rightarrow$ мы можем от него „подняться" по всем шагам и доказать исходное. чтд.

N4

$x = \overline{ababab \ldots ab}_8 = \overline{ab}_8(10101\ldots01_8) = (8a+b)(1+8^2+8^4+\ldots+8^{4n-2})_{10}$

$y = \cancel{d}\ \overline{cdefcdef \ldots cdef}_8 = \overline{cdef}(100010001\ldots0001) = (8^3c+8^2d+8e+f)(1+8^4+\ldots+8^{4n-4})_{10}$

$x\cdot y = \overline{gggghhhh \ldots iiii} = \overline{g000h\ldots000i}\cdot 1111_8 = \overline{g000h\ldots000i}_8\cdot(1+8+64+512)_{10} \Rightarrow$

$xy \vdots (1+8+64+512) = 585 = 5\cdot 9\cdot 13$

5