САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

1	2	3	4	5	6	сумма
4	4	0	0	0	0	12

4295

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (8–9 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Санкт-Петербург

Дата 24 февраля 2019 год

* *

8–9 класс. Первый вариант

1. Маша на свой день рождения принесла в школу конфеты, оставила несколько конфет себе, а остальные раздала шестерым своим подружкам. Оказалось, что у всех девочек разное число конфет и количество конфет у любых четырех девочек больше, чем у трех оставшихся. Какое наименьшее количество конфет Маша могла оставить себе?

2. При каких a квадратные трехчлены $x^2 + ax - 2$ и $2x^2 - 3x + 2a$ имеют общий корень?

3. На столе лежит 2019 камней. Петя и Вася играют в игру по следующим правилам. Ходят по очереди, начинает Петя. За один ход можно взять со стола 1 или 2 камня, но один и тот же игрок два раза подряд не может брать 2 камня. Проигрывает не имеющий хода. Кто из игроков сможет обеспечить себе победу вне зависимости от игры противника?

4. Для любых положительных чисел a, b и c докажите неравенство

$$\frac{a}{2a^2+b^2+c^2} + \frac{b}{a^2+2b^2+c^2} + \frac{c}{a^2+b^2+2c^2} \leqslant \frac{9}{4(a+b+c)}.$$

5. Внутри треугольника ABC выбрана такая точка D, что $\angle ABD = \angle ACD$ и $\angle ADB = 90°$. Точки M и N середины сторон AB и BC соответственно. Найдите угол $\angle DNM$.

6. Найдите все пары простых чисел p и q, для которых $p^2 + pq + q^2$ является точным квадратом.

Задача №1.

Пусть $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ - кол-во конфет у каждой девочки (у Маши a_7). $a_7 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6$.

Из условия известно, что $a_7 + a_1 + a_2 + a_3 > a_4 + a_5 + a_6 \Rightarrow a_7 > \underbrace{(a_4 - a_1) + (a_5 - a_2) + (a_6 - a_3)}_{A}$. Т.к. a_i отличается от a_{i+1} на ≥ 1, то $a_4 - a_1 \geq 3$, $a_5 - a_2 \geq 3$ и $a_6 - a_3 \geq 3$. $\Rightarrow A \geq 9$ $\quad a_7 > A \Rightarrow a_7 > 9 \Rightarrow a_7 \geq 10$.

Пример: $a_7 = 10$, $a_1 = 11$, $a_2 = 12$, $a_3 = 13$, $a_4 = 14$, $a_5 = 15$, $a_6 = 16$.

$10 + 11 + 12 + 13 > 14 + 15 + 16$ - верно.

Ответ: 10.

Задача №6

$p^2 + pq + q^2 = x^2$ - хотим.

$p^2 + 2pq + q^2 = (p+q)^2 \qquad (p+q)^2 - x^2 = pq \qquad (p+q-x)(p+q+x) = pq$

$p+q+x > pq \Rightarrow p+q+x = pq$, $p+q-x = 1 \qquad p+q = x+1$

$\Rightarrow p^2 + 2pq + q^2 = (x+1)^2 \qquad (x+1)^2 - x^2 = 2x+1 \qquad 2x+1 = pq \qquad x = \frac{pq-1}{2}$

$p + q = \frac{pq-1}{2} + 1 \ | \cdot 2 \qquad 2p + 2q = pq + 1$ Пусть $p > q$

$2q = \cancel{4}\, p(q-2) + 1 \qquad 2q < 2p \Rightarrow p(q-2) < 2p \Rightarrow q - 2 < 2$

$q < 4$

$q = 3$

$6 + 2p = 3p + 1 \qquad p + 1 = 6 \Rightarrow p = 5$

Ответ: $(3, 5)$

Задача №2

(1) $x_1^2 + a x_1 - 2 = 0$ $\quad$ (x_1 - общий корень)

(2) $2x_1^2 - 3x_1 + 2a = 0$

(2)-(1): $x_1^2 - (3+a)x_1 + 2(a+1) = 0$. $\qquad x_{1,2} = \frac{3+a \pm \sqrt{(3+a)^2 - 8(a+1)}}{2} = \frac{(3+a) \pm (a-1)}{2} = 2; a+1$

1° $x_1 = 2$

$\begin{cases} 4 + 2a - 2 = 0 \\ 8 - 6 + 2a = 0 \end{cases} \quad a = -1$

2° $x_1 = a+1$

$(a+1)^2 + a(a+1) - 2 = a^2 + 2a + 1 + a^2 + a - 2 = 2a^2 + 3a - 1 = 0 \qquad a_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+8}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}$

$2(a+1)^2 - 3(a+1) + 2a = 2a^2 + 4a + 2 - 3a - 3 + 2a = 2a^2 + 3a - 1 = 0 \qquad a_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}$

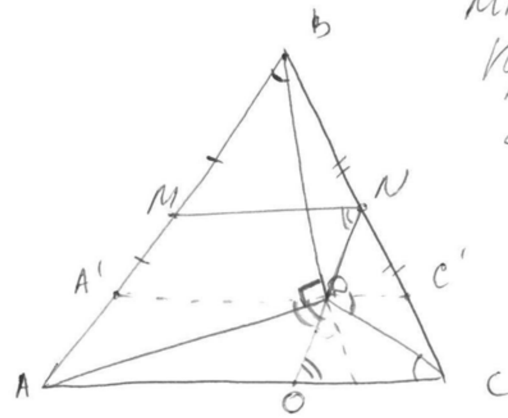
Ответ: $\left\{-1; \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}\right\}$

Задача №3

~~Выиграет Петя. Первым ходом он берёт одну конфету Остаётся 2018 конфет.~~ Дальше Петя берёт столько же ~~конфет~~, сколько взял Вася.

Выигрышной позицией будет 3 к. в конце, тогда мы дополняем кол-во, которое взял соперник до 3.

Задача №5



MN - средняя линия $\triangle ABC \Rightarrow MN \parallel AC$.

Проведем $A'C'$ через т. D. $A'C' \parallel MN \parallel AC$

$\angle MND = \angle NDC'$

$\angle DC' = \angle DCA$, $\quad \angle ADO = \angle DOC = \angle MNO$.

4

Задача №6.

$\frac{a}{2a^2+b^2+c^2} + \frac{b}{2b^2+c^2+a^2} + \frac{c}{2c^2+a^2+b^2} \leq \frac{9}{4(a+b+c)}$

$2a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + a^2 \geq 4\sqrt[4]{a^4 b^2 c^2} = 4a\sqrt{bc}$ (нер-во о сред. арифм. и геом.)

$\Rightarrow \frac{a}{4a\sqrt{bc}} > \frac{a}{2a^2+b^2+c^2}$

$\frac{1}{4\sqrt{bc}} + \frac{1}{4\sqrt{ac}} + \frac{1}{4\sqrt{ba}} \geq \frac{a}{2a^2+b^2+c^2} + \frac{b}{2b^2+c^2+a^2} + \frac{c}{2c^2+a^2+b^2}$

$\frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ac}} + \frac{1}{\sqrt{ba}} \leq \frac{9}{a+b+c}$