РСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

4448 1 65

	2	3	4	5	6	сумма
3	0	4	-	4	2	13

65

ПИСЬМЕН... ...ОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (8–9 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Челябинск

Дата 02.03.2019

* *

8–9 класс. Четвертый вариант

1. На свой день рожденья Вася принес в класс несколько конфет и все их раздал своим одноклассникам (каждому досталось не менее одной конфеты). Некоторые из них поделились с одноклассниками полученными конфетами. В результате у четверти всего класса оказалось по 2 конфеты, у трети класса — по 1 конфете, у Маши оказалось 6 конфет, а больше ни у кого конфет не осталось. Какое наибольшее количество конфет мог раздать Вася?

2. При каких a квадратные трехчлены $x^2 + ax - 6$ и $2x^2 - 5x + 2a$ имеют общий корень?

3. В тетради карандашом нарисована квадратная сетка 2019×2019 клеток (сторона клетки равна 1). Петя и Вася играют в игру по следующим правилам. Ходят по очереди, начинает Петя. За один ход игрок стирает один единичный отрезок этой сетки. Выигрывает тот игрок, после чьего хода образуется клетка, все четыре стороны которой стерты. Кто из игроков может обеспечить себе победу вне зависимости от игры соперника?

4. Для положительных чисел a, b и c докажите неравенство

$$\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geqslant \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}.$$

5. В остроугольном треугольнике ABC с наименьшей стороной AB провели высоты BB_1 и CC_1, они пересеклись в точке H. Через точку C_1 провели окружность ω с центром в точке H и окружность ω_1 с центром в точке C. Через точку A провели касательную к ω, касающуюся ее в точке K, а также касательную к ω_1, касающуюся ее в точке L. Найдите $\angle KB_1L$.

6. Найдите все пары простых чисел p и q, для которых $\frac{p^3+1700}{q^3+96} = q^3$.

①. Пусть x - количество одноклассников Васи
Т.к. в конце у четверти класса осталось по 2 конфеты, то в сумме у четверти класса было $\left(\frac{x}{2}\right)$ конфет
Т.к. в конце у трети класса осталось по 1 конфете, то в сумме у трети было $\left(\frac{x}{3}\right)$ конфет. И 6 конфет осталось у Маши. Т.е всего было $\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+6\right)$ конфет

Т.к. Вася дал каждому не менее одной конфеты, то в сумме конфет не меньше чем учеников в классе, значит:

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+6 \geq x \quad | \cdot 6$$
$$5x+36 \geq 6x$$
$$x \leq 36$$

Тогда оценим количество конфет, которые раздал Вася: $\frac{5x}{6}+6 \leq \frac{5\cdot 36}{6}+6$

$$\frac{5x}{6}+6 \leq 36$$

$\Rightarrow$ Вася раздал не более 36 конфет
Ответ: 36 конфет.

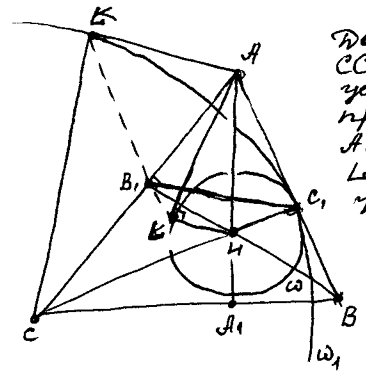
②. $P(x)=x^2+ax-6$
$Q(x)=x^2-5x+2a$
~~Если~~ Квадратные трехчлены $P(x)$ и $Q(x)$ имеют общий корень $\Leftrightarrow$ $P(x)=Q(x)$ имеет решения,
Рассмотрим это уравнение:

$x^2+ax-6=x^2-5x+2a$
$x^2-(a+5)x+2a+6=0$ — Квадратное уравнение, имеет решения при $D\geq 0$

$D=(a+5)^2-4\cdot 2(a+3)=a^2+10a+25-8a-24=a^2+2a+1=(a+1)^2$
Заметим, что $(a+1)^2\geq 0$ при любых $a \Rightarrow$ многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ имеют общий корень при $a\in\mathbb{R}$

Ответ: трехчлены имеют общий корень $\forall a\in\mathbb{R}$.

⑤



Дано: $\triangle ABC$, CC_1, BB_1 - высоты, $CC_1\cap BB_1=H$; ω,ω_1 - окружности с центром в точках H, C соответств., проходящие через точку C_1.
AL, AK - касательные к ω,ω_1 соотв.
$L, K\in\omega,\omega_1$ соотв.
Найти: $\angle KB_1L$

⑤ продолжение:

I Т.к. отрезок BC виден из точек B_1, C_1 под углом $90°$, то CB_1C_1B – вписанный четырехугольник. $\Rightarrow \angle BCC_1 = \angle BBC_1$, и $\angle CBC_1 = \angle C_1B_1A$ по св-ву вписанного.

Т.к. HC_1, CC_1 – радиусы окружностей ω, ω_1 соответственно и $HC_1 \perp AB$, $CC_1 \perp AB$, то по признаку AB – касательная к ω и ω_1.

Т.к. L, C_1 – точки касания для касательных, проведенных из точки A, то L симметрично C_1 относительно $AC \Rightarrow \angle KB_1A = \angle AB_1C$

$\Rightarrow \angle KB_1A = \angle CBC_1$ ①

Продлим AH до пересечения с BC в точке A_1, AA_1 – так же высота $\Delta ABC \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle C_1CB = \angle HAB$, т.к. $\angle C_1CB = 90° - \angle B$
$\angle HAB = 90° - \angle B$

Т.к. LA, AC_1 – отрезки касательных, проведенных к ω, то по Th об отрезках касательных они равны $\Rightarrow \Delta LAH = \Delta C_1AH$ по катету и гипотенузе $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle LAH = \angle HAB$

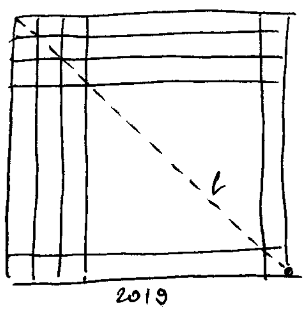
Т.к. LH – радиус, проведенный в точку касания, то $LH \perp AL$ по Th
$\Rightarrow$ из точек L, B_1 отрезок AH виден под углом $90° \Rightarrow HLB_1A$ – вписанный
$\Rightarrow \angle LB_1H = \angle LAH = \angle HAB = \angle C_1CB$ по св-ву вписанного. ②

Тогда $\angle KB_1L = \angle KB_1A + \angle AB_1B + \angle BB_1L = \angle KB_1H + \angle AB_1B + \angle LB_1H$

Из ①, ② и определения высоты $\angle KB_1L = \angle CBC_1 + 90° + \angle C_1CB = 90° + 90° = 180°$ ↑

Ответ: $\angle KB_1L = 180°$.

③ Второй всегда сможет обеспечить себе победу, придерживаясь симметричной стратегии, т.е.:



Рассмотрим квадратное клетчатое поле.
Главная диагональ этого квадрата является его осью симметрии.

Тогда на какой бы из половин не сделал ход Первый, второй может симметрично повторить его на другой половине.

Стратегия для второго:
Всякий раз когда первый убирает отрезок и не получает клетки с одной стороной, второй может сделать симметричный ему ход относительно прямой l

$\Rightarrow$ Если сможет сходить первый, то сможет и второй.
Когда же первый уберет отрезок так, что получится клетка всего с одной стороной, второй побеждает, стирая эту сторону (Такой момент обязательно наступит, т.к. нельзя вечно стирать отрезки).

$\Rightarrow$ победил второй.

⑥ $\dfrac{p^3 + 1700}{q^3 + 96} = q^3$

$p^3 + 1700 = q^6 + 96q^3$

1. Рассмотрим данное уравнение по mod 3
$p^3 + 2 \underset{3}{\equiv} q^6$ ($1700 \underset{3}{\equiv} 1701 - 1 \underset{3}{\equiv} -1 \underset{3}{\equiv} 2$, $1701 \vdots 3$, т.к. его сумма цифр $\vdots 3$)
Т.к. кубы натуральных чисел дают по mod 3 только остатки 0 и 1, то понимаем, что если $p^3 \underset{3}{\equiv} 0$, то $q^6 \underset{3}{\equiv} 2$, что невозможно $\Rightarrow \begin{cases} p^3 \underset{3}{\equiv} 1 \\ q^6 \underset{3}{\equiv} 0 \end{cases}$

Т.к. p, q – простые числа, то если $q^6 \underset{3}{\equiv} 0$, то $q \underset{3}{\equiv} 0$ и $q = 3$

2. Рассмотрим данное уравнение по mod 7:
$p^3 + 6 \underset{7}{\equiv} 3^6 + 96 \cdot 3^3$; $3^3 \underset{7}{\equiv} 27 \underset{7}{\equiv} 6$, тогда
$p^3 + 6 \underset{7}{\equiv} 6^2 + 5 \cdot 6$
$p^3 + 6 \underset{7}{\equiv} 6(6+5) \underset{7}{\equiv} 6 \cdot 11 \underset{7}{\equiv} 3 \Rightarrow p^3 \underset{7}{\equiv} -3 \underset{7}{\equiv} 4$
Но кубы натуральных чисел дают по mod 7 только остатки 0, 1, 6 $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow$ таких пар (p, q) нет.

Ответ: нет таких пар (p, q).