KL 045

2876

G5

УРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

1	2	3	4	5	6	сумма
2	4	4	0	3	0	13

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада г. Минск

Дата 14 марта 2019г.

* *

10–11 класс. Пятый вариант

1. Какое наибольшее количество слонов можно расставить на шахматной доске так, чтобы на каждой диагонали располагалось не более трех слонов?

2. Даны различные числа a, b, c. Найдите минимальное значение выражения

$$A = \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{|a-b|^3 + |b-c|^3 + |c-a|^3}.$$

3. На сторонах BC и AB остроугольного треугольника ABC выбраны точки D и X. Прямые, проходящие через X параллельно BC и AD, пересекают соответственно стороны AC и BC в точках Y и Z. Пусть M, K и N — середины отрезков BC, YZ и AD соответственно. Найдите угол MKN.

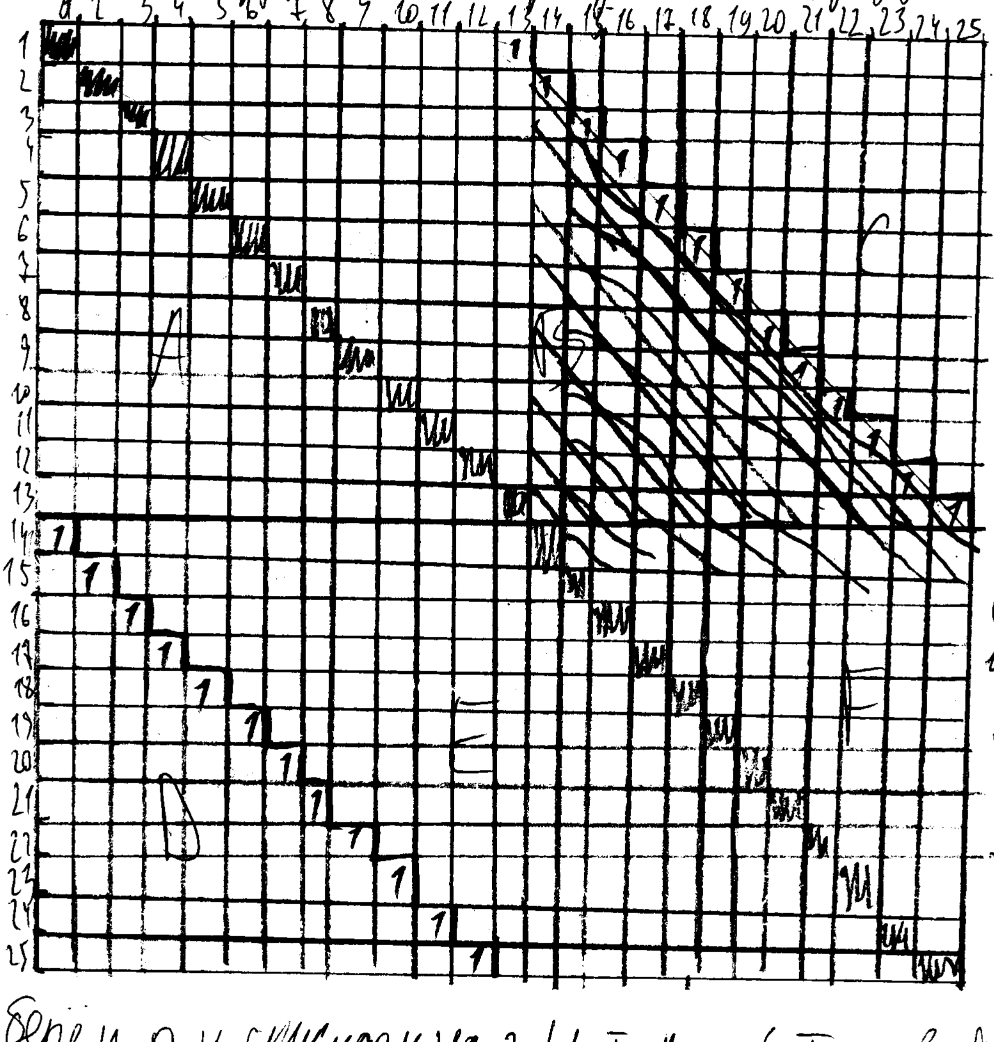
4. Десятичная запись натурального числа x — это написанная 2019 раз подряд пара каких-то цифр. Число y получено некоторой перестановкой цифр x. Может ли десятичная запись числа $x \cdot y$ представлять собой многократно повторенный блок из четырех цифр?

5. В однокруговом турнире по настольному теннису приняло участие 25 человек. Каждый теннисист одержал по 12 побед. Сколько по итогам турнира оказалось троек участников, одержавших во встречах между собой ровно по одной победе? Ничьих в теннисе не бывает.

6. Три конуса с общей вершиной O касаются друг друга внешним образом. Первые два конуса имеют угол при вершине $\frac{\pi}{3}$, а ось симметрии третьего конуса перпендикулярна осям симметрии первых двух. Еще один конус с вершиной O касается внешним образом трех других. Найдите его угол при вершине. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении.)

№5

Хуже не будет точно, нарисуем таблицу удовлетворяющую условию:



(Извиняюсь за кривизну таблицы)

1 – выиграл, 0 – проиграл.

В областях A, C, E все 0, а в областях B, D, F все 1.

Нетрудно проверить симметрии относительно закрашенной диагонали, что данная таблица удовлетворяет условию.

Смотрим, как же я облегчил подсчёты искомых троек на примере 1 строки (строка).

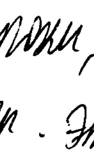
Берём самый левый 1, ~~самую левую 0~~ и спускаем на 1 и, если там 1, то это искомая тройка. Берём 2 слева, берём 0 и спускаем на 2 и т.д. (т.е. взяли a слева 1, смотрим все нули и в тех столбцах спускаемся на a вниз, ибо если мы спустимся на a вниз, то мы получим строку, в которой стоял a слева 1)
если 1 то считаем
такую же как столбец

Аналогично для всех строк, причём нас интересует только то, что ~~слева~~ справа от (заштр. диаг.), ибо слева мы раньше уже эту тройку посчитали.

На рисунке я заштриховал \\\ для 1 строки, ≈ для 2, ... дальше по аналогии.

кол-во клеток заштр. – это и есть тройки кол-во.

(Если непонятно, то берём i ... 1 и опускаем перпендикуляр до ~~конца~~ пересечения с ~~точкой пересечения~~ 2 закр. клеток,

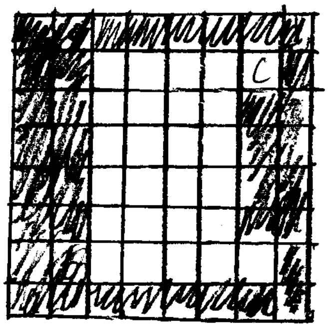


и потом ведём вправо параллельно строке до конца таблицы.

Итого $1+2+..+12 + 1+2+...+10+11\cdot 2 + 1+2+..+9+10\cdot 3 + ... +1\cdot 12 = 650$.

Ответ: 650 троек.

№1



Закрашенные клетки, клетки в которых стоят слоны. Всего таковых 38. Пример есть.

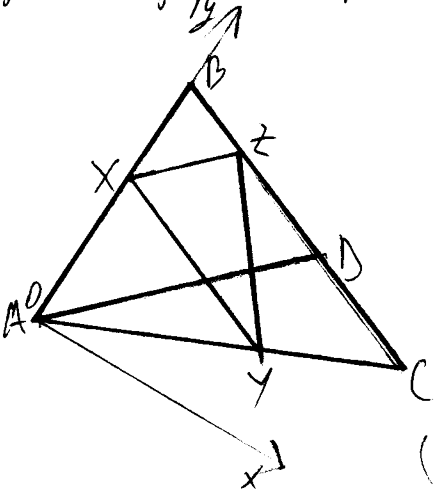
Переходим к док-ву, что больше быть не может:

Рассмотрим все диагонали вида \\\ (т.е. наклонённые вниз вправо). Считая, что в каждой из них может быть максимум 3 слона, рассчитаем, сколько всего слонов можно поместить.

$1+2+11\cdot 3+2+1=39$ (1 – угловые клетки, 2 – диагональ с 2 квадратиками)

Если нам нужно 39 слонов, то мы ставим в клетки a, b, c, d (см. рис.) ибо где они стоят, диагонали содержат максимум 3 клетки. Но тогда по главной / диагонали, т.е. где a, b, c, d расположены, уже 4 слона, чего не может быть. Соответственно 1 нам точно нужно убрать, т.е. $39-1=38$. Ответ: 38.

№3



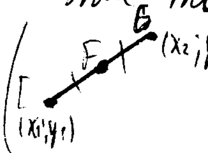
M, K, N – середины BC, ZY, AD соответственно.

Введём систему координат с началом в A и присвоим $A(0;0)$, $B(0;1)$, $X(0;a)$, $Y(\alpha;\beta)$; $D(b;c)$. (AB совпадает с Oy).

Тогда прямая BC имеет уравнение:

(заведомо зная 2 точки, в данном случае B и D, $\frac{c-1}{b}x+1=y$.

Я найти всегда могу уравнение прямой, которая содержит эти точки).



$F\left(\frac{x_2+x_1}{2};\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

Т.к. N – середина AD, то $N\left(\frac{b}{2};\ \frac{c}{2}\right)$.

Прямая AY имеет уравнение: $\frac{\beta}{\alpha}x=y$.

$\frac{\beta}{\alpha}q=\frac{c-1}{b}q+1$, где q – абсцисса C, а p – ордината её же.

$q=\frac{b\alpha}{\alpha+\beta b-c\alpha}$, тогда $p=\frac{\beta b}{\alpha+\beta b-c\alpha}$.

Т.к. $XY \parallel BC$, то коэффициенты при x в уравнениях данных прямых равны, т.е. $XY \rightarrow \frac{c-1}{b}x+a=y$ (ибо $X(0;a)$)

Подставляя Y, получим $c\alpha-\alpha+ba=b\beta$, т.е. $\alpha+\beta b-c\alpha=ba$.

Тогда $p=\frac{\beta}{a}$, $q=\frac{\alpha}{a}$. $C(\frac{\alpha}{a};\frac{\beta}{a})$. $AD \to \frac{c}{b}x=y$.

Т.к. $XZ \parallel AD$, то $XZ \to \frac{c}{b}x+a=y$ (ибо $X(0;a)$).

$\frac{c}{b}m+a=\frac{c-1}{b}m+1$, где m - абсцисса Z, а n - ордината.

$m=b-ba$, $n=c+a-ac$. $Z(b-ba;\ c+a-ac)$.

Т.к. M середина BC, то $M(\frac{\alpha}{2a};\frac{\beta+a}{2a})$. Т.к. K середина ZY, то $K(\frac{b-ba+\alpha}{2};\frac{c+a-ac+\beta}{2})$

Докажем и покажем, что точки M, K, N лежат на 1 прямой:

$MN \to \frac{ca-\beta-a}{ba-\alpha}x+\frac{b\beta+ab-c\alpha}{2(ba-\alpha)}=y$ (M и N мы знаем).

Проверим, если координаты K подходят, то M, K, N принадлежат 1 прямой и $\angle MKN=180°$. Подставим.

$$\cancel{c-a-\beta}\ \frac{(ca-\beta-a)(b-ba+\alpha)}{2(ba-\alpha)}+\frac{b\beta+ab-c\alpha}{2(ba-\alpha)}=\frac{abc-\beta b-ab-a^2bc+\beta ba+ba^2\cancel{-ab+ba}+\alpha ac-\beta\alpha-a\alpha+\ldots}{2(ba-\alpha)}$$

$$\cancel{\beta b+ab-c\alpha}=\frac{abc-a^2bc+\beta ba+ba^2+\alpha ac-\beta\alpha-a\alpha-c\alpha}{2(ba-\alpha)}=\frac{ba(c-ac+\beta+a)-\alpha(a+c+\beta-ac)}{2(ba-\alpha)}=$$

$$=\frac{a+c+\beta-ac}{2}$$, ч.т.д. Т.е. $\angle MKN=180°$. Ответ: $180°$.

№2

Ясное дело, что A может принимать отрицательные значения, да хотя бы при $a>b>c$. Пусть не нарушая общности так и будет $a>b>c$. Пусть $a-b=x$, $b-c=y$, $|c-a|=z$, тогда $x,y,z>0$ и $x+y=z$:

$$A=\frac{-xyz}{x^3+y^3+z^3}\overset{\text{т.к. } x+y=z}{=}\frac{-x^2y-xy^2}{2x^3+2y^3+3x^2y+3y^2x}.$$

$$2x^3+2y^3\ge 2(x^2y+xy^2)$$
$$\Updownarrow$$
$$x^2(x-y)+y^2(y-x)\ge 0$$
$(x-y)^2(x+y)\ge 0$, что верно, ибо $x,y>0$.

Тогда $2x^3+2y^3+3x^2y+3y^2x\ge 5(x^2y+y^2x)$.

Т.е. $\frac{-(x^2y+xy^2)}{2x^3+2y^3+3x^2y+3y^2x}\ge\frac{-(x^2y+xy^2)}{5(x^2y+xy^2)}$, т.е. $A\ge -\frac{1}{5}$.

минимальное A достигается да хотя бы при $a=5, b=4, c=3$.

$$A=\frac{(5-4)(4-3)(3-5)}{1^3+1^3+2^3}=-\frac{1}{5}.$$

Ответ: $-\frac{1}{5}$.

Чистовик

№4

Мы некое число $x = \overline{ab\ldots ab}$, где a, b — цифры и таких $ab \to 2019$, перемножаем с y, полученным некоторой перестановкой цифр x.

При умножении в столбик видно: $\begin{array}{r} \times \begin{array}{r} x \\ y \end{array} \\ \hline + \alpha \\ \ldots \\ + \beta \\ \hline \end{array}$ $\alpha_\beta \to$ число, получившееся перемножением x на последнюю цифру y.

Так вот мы видим, что в области сложения будет встречаться только 2 числа α и β, т.е $a \cdot x$ и $b \cdot x$.
(не обязательно соответственно)

Теперь наша задача переформулируется, т.е. док-ть, что $2019_{по}\alpha + 2019_{по}\beta$ не может равняться некоторому $\overline{cdef\ldots cdef}$, где c, d, e, f — цифры. (их 2019, ибо a и b по 2019).

3 цифры
2 цифры

С самого низа слева идёт так 1 цифра и т.д. (или повторяются но не больше 2 подряд)

(типо $\begin{array}{r} \times \begin{array}{r} 273 \\ 372 \end{array} \end{array}$ $\ldots$ 99518)

и потом, когда кол-во дойдёт до 4038 цифр в столбце, пойдёт на спад.

Очевидно, что повторения 4 cdef-очек быть не может, ибо через 3-5 придётся повторять цифры в строках (самые левые), чего быть не может. Ответ: Нет, не может.

Санкт-Петербургский государственный университет