KL010

7860

55

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

1	2	3	4	5	6	сумма
4	4	0	0	3	0	11

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Новосибирск

Дата 07.03.2019

* *

10–11 класс. Первый вариант

1. Имеется 8 черных ладей и n белых. При каком наибольшем n их можно расставить на шахматной доске так, чтобы одноцветные ладьи не били друг друга? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Даны положительные числа x, y, z. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{xyz\,(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4+(yz)^4+(xz)^4}}\,.$$

3. Дан треугольник ABC с меньшей стороной AB. На сторонах AB и AC выбраны соответственно точки X и Y так, что $BX = CY$. Под каким углом прямая, проходящая через центры описанных окружностей треугольников ABC и AXY, пересекает прямую BC, если $\angle ABC = \beta$ и $\angle BCA = \gamma$?

4. Десятичная запись квадрата натурального числа x представляет собой два одинаковых соседних блока из n цифр. Может ли n равняться 20182019?

5. На однокруговой турнир по настольному теннису подало заявку 16 человек. Когда было сыграно n матчей, оказалось, что среди любых трех теннисистов найдутся двое, уже сыгравших между собой. При каком наименьшем n такое возможно?

6. Три конуса с общей вершиной, касающихся друг друга внешним образом, имеют высоту 2 и радиус основания $\sqrt{3}$. Два шара касаются внешним образом друг друга и всех конусов. Найдите отношения радиусов шаров (большего к меньшему).

Чистовик

~~№4. Ответ: нет~~

~~Решение: Докажем от противного. Пусть нашлось подходящее x, тогда x^2 запишется в виде $a_1 \dots a_{20}$~~

~~$x^2 = \overline{a_1 \dots a_{20182019} a_1 \dots a_{20182019}} = \overline{a_1 \dots a_{20182019}} \cdot (10^{20182019} + 1)$~~

~~$10^{20182019} + 1 = \overline{1\underbrace{0 \dots 0}_{20182018}1}$. Заметим, что в числе~~

№11. Ответ: ~~18~~ 16

Решение:

1) Приведём пример расстановки 16 белых и 8 чёрных ладей в соответствии с условием:

				Б			
			Б	Ч	Б		
		Б	Ч	Б	Ч	Б	
	Б	Ч	Б	Ч	Б		
Б			Ч	Б	Ч		Б
			Б	Ч	Б		
				Б			
		Б					

Здесь Б – белая ладья, Ч – чёрная

2) Докажем, что $n \le 16$. Обозначим за k_i кол-во белых ладей в i-ой строке для произвольной расстановки ладей ($1 \le i \le 8$). Тогда $\forall 1 \le i \le 8$ кол-во ~~ладей в~~ i-чёрных ладей в i-ой строке – хотя бы $k_i - 1$, так как между k_i белыми ладьями ровно $k_i - 1$ ~~пар~~ ~~соседних друг друга~~, ~~⇒ что~~ пар стоящих подряд, и ~~все~~ во всех этих $k_i - 1$ промежутках должно стоять по чёрной ладье, чтобы никакие 2 белые не били друг друга. Тогда $k_1 + \dots + k_8 = n$, а ~~чёт~~ $(k_1 - 1) + (k_2 - 1) + \dots + (k_8 - 1) \le 8$. $\Rightarrow n - 8 \le 8 \Rightarrow n \le 16$.

ч.т.д.

№5) Представим задачу в виде графа G, где вершины – теннисисты, ребро проводится между сыгравшими между собой теннисистами. Тогда наименьшее n – это наименьшее число рёбер в данном графе. Либо G – полный граф, и тогда его число рёбер $|E| = \frac{16\cdot 15}{2}$, либо в нём найдутся 2 несмежные вершины ⇒ тогда из каждой ~~оставшейся~~ из 14 остальных вершин ведёт ребро хотя бы в 1 из данных двух несмежных. Рассмотрим подграф G из 14 остальных вершин G'. Либо G' – полный граф, и тогда общее число рёбер в G ~~|E| = 14~~ $|E| \geq 14 + \frac{14\cdot 13}{2}$, либо в графе G' есть две несмежные вершины ⇒ из ~~оставшихся~~ каждой из 12 оставшихся вершин в G' ведёт ребро хотя бы в 1 из этих 2 несмежных. Аналогично показываем, что:

$|E| = \frac{16\cdot 15}{2} = 120$

$|E| \geq 14 + \frac{14\cdot 13}{2} = 105$

$|E| \geq 14 + 12 + \frac{12\cdot 11}{2} = 92$

$|E| \geq 14 + 12 + 10 + \frac{10\cdot 9}{2} = 81$

$|E| \geq 14 + 12 + 10 + 8 + \frac{8\cdot 7}{2} = 72$

$|E| \geq 14 + 12 + 10 + 8 + 6 + \frac{6\cdot 5}{2} = 65$

$|E| \geq 14 + 12 + 10 + 8 + 6 + 4 + \frac{4\cdot 3}{2} = 60$

$|E| \geq 14 + 12 + 10 + 8 + 6 + 4 + 2 = 56$

$|E| \geq$

$\Rightarrow$ ~~|E|~~ $n \geq 56$

Пример для $n = 56$: Разобьём 4 людей на 2 группы по 8 человек, и пусть в каждой группе все теннисисты сыграли между собой. Тогда ~~в каждой~~ всего было сыграно $n = \frac{8\cdot 7}{2}\cdot 2 = 56$ матчей. Из любой тройки теннисистов хотя бы двое принадлежат одной группе (по принципу Дирихле) ⇒ хотя бы двое сыграли между собой. Ч.т.д.

Чистовик

N2. Ответ: ~~A/~~ $\sqrt{3}$

Пример достижения: Возьмём $x=y=z=1$:

$$A = \frac{1\cdot 3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

Оценка: Докажем, что $A \le \sqrt{3}$

$$A = \frac{xyz\cdot(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4+(yz)^4+(xz)^4}}$$

$$\sqrt{\frac{(xy)^4+(yz)^4+(xz)^4}{3}} \ge \frac{(xy)^2+(yz)^2+(xz)^2}{3}$$

По нер-ву о средних между средним квадратическим и арифметическим

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{(xy)^4+(yz)^4+(xz)^4}} \le \frac{\sqrt{3}}{(xy)^2+(yz)^2+(xz)^2}$$

$$\Rightarrow A \le \sqrt{3}\cdot\frac{x^2yz+y^2xz+z^2xy}{(xy)^2+(yz)^2+(xz)^2}$$

Докажем, что $x^2yz+y^2xz+z^2xy \le (xy)^2+(yz)^2+(xz)^2$.

Не умаляя общности пусть $x \ge y \ge z$

~~Тогда $xy \ge xz \ge yz \ge 0$, тогда и $x^2 \ge y^2 \ge z^2$~~

~~$\Rightarrow$ По транснеравенству $x^2yz + y^2xz + z^2xy \le x^3z +$~~

~~$+ y^3x + z^3y$~~

~~$x^2yz + y^2xz + z^2xy \le x^3z + y^3x + z^3y \overset{?}{\le} (xy)^2 + (yz)^2 + (xz)^2$~~

$\cancel{x^2z\cdot(x-z)+y^2x\cdot(y-x)+z^2y\cdot(z-y)\overset{?}{\le}0}$

Тогда $xy \ge xz \ge yz \ge 0$

и $xy \ge xz \ge yz \ge 0$

$\Rightarrow$ По транснеравенству

$(xy)^2+(xz)^2+(yz)^2 \ge y^2xz+x^2yz+$

$+z^2xy$

ч.т.д. (Обозначим xy за a_1, xz за a_2, yz за a_3, xy за b_1, xz за b_2, yz за b_3; $a_1\ge a_2\ge a_3\ge 0$. $b_1\ge b_2\ge b_3\ge 0$. $\Rightarrow$ по транснеравенству $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 \ge a_1b_3+a_2b_1+a_3b_2$)

Ответ: $\cancel{A}\le\sqrt{3}$

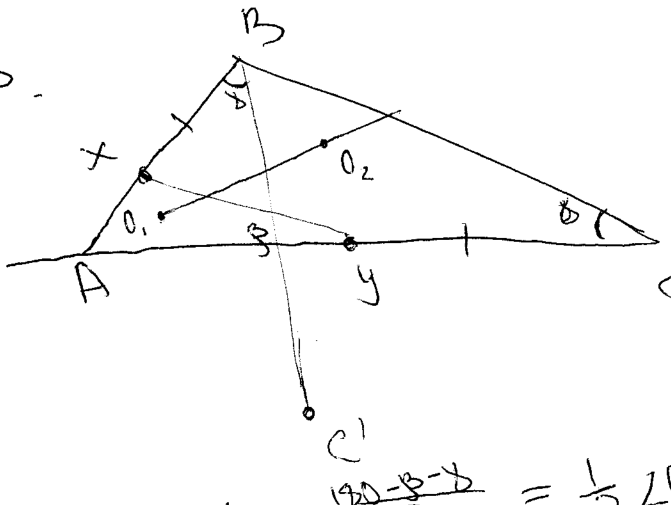
N4. Пусто $x^2=\overline{a_1\ldots a_{20182019}a_1\ldots a_{20182019}}=$

$=\overline{a_1\ldots a_{20182019}}\cdot(10^{20182019}+1)$ $(10^{20182019}+1)\,\vdots\,11$, $\not\vdots\,121$, $\Rightarrow$

$\overline{a_1\ldots a_{20182019}}$ имеет нечётную степень вхождения

11. $\Rightarrow(a_2+\ldots+a_{20182018}-a_1-\ldots-a_{20182019})\,\vdots\,11$

N3.



O_1 и O_2 - центры окр., описанных вокруг $\triangle AXY$ и $\triangle ABC$ соот-но. $\Rightarrow \angle XO_1Y=\angle BO_2C=$

$=2\cdot\angle A$, и $XO_1=O_1Y$, $BO_2=O_2C$

$\Rightarrow \cancel{\triangle XO_1Y}\ \triangle XO_1Y\sim\triangle BO_2C$

$AB<AC$, $\Rightarrow \gamma<\beta$.

$BC'=BC$. $\Rightarrow \triangle BXC'=\triangle CYB$

$\angle BCC'=\angle BC'C=\frac{180-\beta-\gamma}{2}=\frac{1}{2}\angle BAC$. $\Rightarrow CC'$ параллельна бис-се $\angle A$.

Пусть TA - общая хорда данных окружностей. Тогда $TA\perp O_1O_2$