KL047

1896

1

60

'РГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

1	2	3	4	5	6	сумма
4	4	4	0	0	0	12

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Минск

Дата 14 марта 2019 г.

* *

10–11 класс. Пятый вариант

1. Какое наибольшее количество слонов можно расставить на шахматной доске так, чтобы на каждой диагонали располагалось не более трех слонов?

2. Даны различные числа a, b, c. Найдите минимальное значение выражения

$$A = \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{|a-b|^3 + |b-c|^3 + |c-a|^3}.$$

3. На сторонах BC и AB остроугольного треугольника ABC выбраны точки D и X. Прямые, проходящие через X параллельно BC и AD, пересекают соответственно стороны AC и BC в точках Y и Z. Пусть M, K и N — середины отрезков BC, YZ и AD соответственно. Найдите угол MKN.

4. Десятичная запись натурального числа x — это написанная 2019 раз подряд пара каких-то цифр. Число y получено некоторой перестановкой цифр x. Может ли десятичная запись числа $x \cdot y$ представлять собой многократно повторенный блок из четырех цифр?

5. В однокруговом турнире по настольному теннису приняло участие 25 человек. Каждый теннисист одержал по 12 побед. Сколько по итогам турнира оказалось троек участников, одержавших во встречах между собой ровно по одной победе? Ничьих в теннисе не бывает.

6. Три конуса с общей вершиной O касаются друг друга внешним образом. Первые два конуса имеют угол при вершине $\frac{\pi}{3}$, а ось симметрии третьего конуса перпендикулярна осям симметрии первых двух. Еще один конус с вершиной O касается внешним образом трех других. Найдите его угол при вершине. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении.)

Аналогично, ур-е прямой MN имеет вид $y=k_2x$
Т.к. $N\in MN$, то $\frac{a_2}{2}=k_2\frac{a_1+d}{2} \Rightarrow k_2=\frac{a_2}{a_1+d}$
Докажем, что $k_0=k_2 \Leftrightarrow \frac{a_2}{b+d+\frac{x_1a_2-ba_2}{y_1}}=\frac{a_2}{a_1+d} \Leftrightarrow b+d+$
$+\frac{x_1a_2-ba_2}{y_1}=a_1+d \Leftrightarrow by_1+a_2(x_1-b)=a_1y_1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a_1-b)y_1=a_2(x_1-b)$, что верно, т.к. $X(x_1;y_1)\in AB$
(т.к. ур-е AB имеет вид $y=\frac{a_2}{a_1-b}x-\frac{a_2b}{a_1-b}$, а т.к.
$X\in AB$, то $y_1=\frac{a_2}{a_1-b}x_1-\frac{a_2b}{a_1-b} \Leftrightarrow y_1(a_1-b)=a_2(x_1-b)$)

Таким образом $MK \parallel MN$, а т.к. они имеют общую точку, то эти прямые совпадают, т.е. $\angle MKN=180°$
Ответ: 180°.

√1

1 X	2	3 X	4	5	6	7	8
2 X	3 X	4	5	6	7	8	9
3 X	4	5	6	7	8	9	10
4	5	6	7	8	9	10	11
5	6	7	8	9	10	11	12
6	7	8	9	10	11	12	13 X
7	8	9	10	11	12	13 X	14 X
8	9	10	11	12	13 X	14 X	15 X

Будем рассматривать диагонали, которые идут слева снизу вправо вверх.
В углу клеточки я напишу номер диагонали, в которой она находится
В 1-ой и 5-ой диагоналях находятся не более, чем по 1 слону, во 2 и 14 не более, чем по 2, а в 3-13 не более, чем по 3, тогда всего слонов не более, чем
$2\cdot1+2\cdot2+11\cdot3=2+4+33=39$, однако если слонов 39, то во всех клетках 1, 2, 3, 13, 14 и 15 диагоналей есть слоны (обозначим их x), но тогда в обведённой (см. рис.) диагонали стоит не менее 4 слонов (4 x уже есть + возможно слоны стоят в других клетках этой диагонали), что противоречит условию, следовательно 39 слонов расставить нельзя.
(А вот пример для 38 (здесь "x" обозначены клетки, в которых стоят слоны)

x	x	x	x	x	x	x	x
x		x	x	x	x		x
x							x
x							x
x							x
x							x
x	x	x	x	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x	x	x

Ответ: 38 слонов

№2 Ясно, что A может быть отрицательным, поэтому и минимальное значение A будет отрицательным (A может быть отрицательным, т.к. знаменатель положителен, а числитель может быть отрицательным, когда одна из скобок меньше 0, а 2-е другие больше (все 3 скобки не могут быть отриц., т.к. в таком случае $a<b<c<a$, чего не может быть))

Тогда мы будем рассматривать только случаи, когда $A<0$. Есть 3 варианта: ① $a-b<0,\ b-c>0,\ c-a>0$

$a<b,\ b>c,\ c>a$

$b>c>a$

② $a-b>0,\ b-c<0,\ c-a>0$

$c>a>b$

③ $a-b>0,\ b-c>0,\ c-a<0$

$a>b>c$

Без нарушения общности будем считать, что $a<c<b$.

Положим $\begin{cases} a-b=x<0 \\ b-c=y>0 \\ c-a=z>0 \end{cases}$, тогда $x+y+z=a-b+b-c+c-a=0$, т.е.

$-x=|x|=y+z \ (*)$

Пусть $B=\frac{1}{A}$, ~~тогда чтобы найти минимальное значение A нужно найти максимальное значение B (в силу отрицательности этих выражений)~~

$$B=\frac{|x|^3+|y|^3+|z|^3}{xyz}=\frac{-x^3+y^3+z^3}{xyz}\overset{(*)}{=}\frac{y^3+z^3+(y+z)^3}{-(y+z)yz}=$$

$$=-\frac{(y+z)(y^2-yz+z^2)+(y+z)(y+z)^2}{(y+z)yz}=-\frac{y^2-yz+z^2+y^2+2yz+z^2}{yz}=$$

$$=-\frac{2y^2+2z^2+yz}{yz}\leq-\frac{2\cdot\sqrt{2y^2\cdot 2z^2}+yz}{yz}=-\frac{2\cdot 2yz+yz}{yz}=-\frac{5yz}{yz}=-5$$

$-|B|\leq-5 \Leftrightarrow |B|\geq 5 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{A}\right|\geq 5 \Rightarrow$

$B\leq-5$ ~~[illegible]~~ $A<0$ $\Leftrightarrow |A|\leq\frac{1}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{5}\leq A\leq\frac{1}{5} \\ A<0 \end{cases}$, т.е. $A\geq-\frac{1}{5}$.

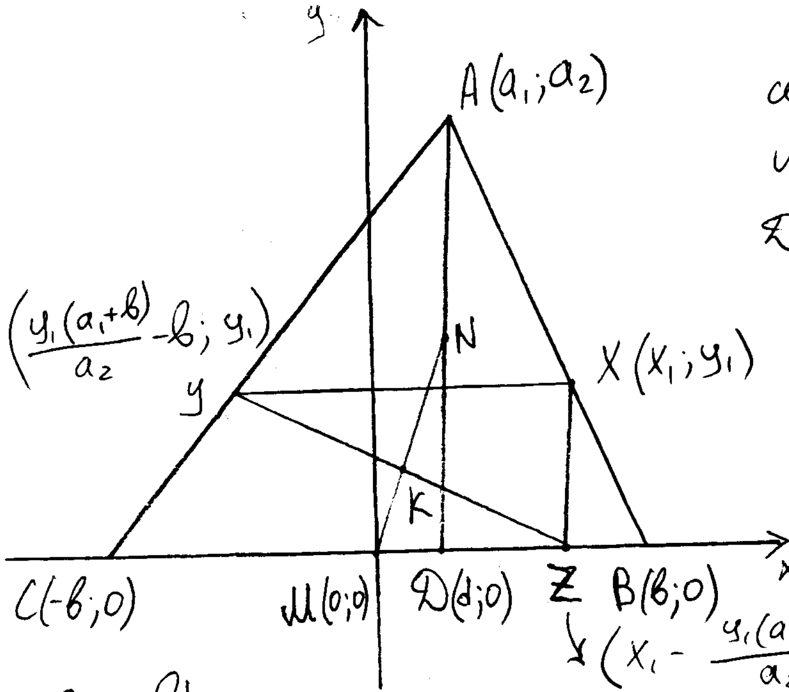
т.к. мы рассматриваем случай $A<0$, чтобы найти наим. знач. A.

Равенство достигается при $y=z$, при, например

$a=3,\ b=5,\ c=4$

Ответ: $-\frac{1}{5}$.

№3



Зададим прямоугольную систему координат так, что $M(0;0)$, $B(b;0)$, $C(-b;0)$, $A(a_1;a_2)$, $D(d;0)$, $X(x_1;y_1)$

Т.к. $XY \parallel BC$, то ордината точки Y $y_Y = y_1$

Найдём абсциссу точки Y:

для этого найдём ур-е прямой AC: $y = kx + m$

C: $0 = -bk + m$

A: $a_2 = a_1 k + m$

$$a_2 = k(a_1+b) \Longleftrightarrow k = \frac{a_2}{a_1+b}$$

$$m = bk = \frac{ba_2}{a_1+b}$$

$y = \frac{a_2}{a_1+b}x + \frac{ba_2}{a_1+b}$ — ур-е прямой AC, т.к. $Y \in AC$, то

$$y_1 = \frac{a_2}{a_1+b}x_Y + \frac{ba_2}{a_1+b} \Longleftrightarrow \frac{y_1a_1 + y_1b - a_2b}{a_1+b} : \frac{a_2}{a_1+b} = x_Y \Longleftrightarrow$$

$$x_Y = \frac{y_1(a_1+b)}{a_2} - b$$

Аналогично

Найдём ур-е прямой AD: $y = \frac{a_2}{a_1-d}x - \frac{a_2d}{a_1-d}$

Найдём ур-е прямой XZ также

Т.к. $AD \parallel XZ$, то угловой коэфф XZ равен $\frac{a_2}{a_1-d}$. XZ: $y = \frac{a_2}{a_1-d}x + m_1$, т.к. $X \in XZ$, то

$$y_1 = \frac{a_2}{a_1-d}x_1 + m_1 \Rightarrow m_1 = \frac{y_1a_1 - y_1d - a_2x_1}{a_1-d}$$

$$XZ: y = \frac{a_2}{a_1-d}x + \frac{y_1(a_1-d) - a_2x_1}{a_1-d}$$

Ордината $Z = 0$, тогда $(XZ \in Z)$: $0 = \frac{a_2x_Z}{a_1-d} + \frac{y_1(a_1-d) - a_2x_1}{a_1-d} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\frac{a_2x_1}{a_1-d} - y_1\right) \times \frac{a_1-d}{a_2} = x_Z \Rightarrow x_1 - \frac{y_1(a_1-d)}{a_2} = x_Z$$

Т.к. N — середина AD, то $N\left(\frac{a_1+d}{2};\frac{a_2}{2}\right)$

т.к. K — середина YZ, то $x_K = \frac{y_1(a_1+b) - ba_2 + x_1a_2 - y_1(a_1-d)}{2a_2} =$

$$= \frac{y_1b + y_1d + x_1a_2 - ba_2}{2a_2};\quad y_K = \frac{y_1}{2}$$

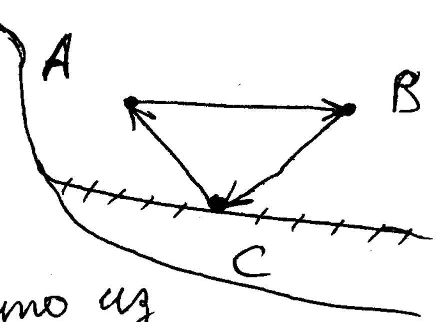
Найдём ур-е прямой MK: т.к. $M(0;0)$, то это ур-е имеет вид $y = k_0x$, т.к. $K \in MK$, то $\frac{y_1}{2} = k_0 \cdot \frac{y_1b + y_1d + x_1a_2 - ba_2}{2a_2}$

$$k_0 = \frac{y_1a_2}{y_1b + y_1d + x_1a_2 - ba_2} = \frac{a_2}{b + d + \frac{x_1a_2 - ba_2}{y_1}}$$

Чистовик . . .

№5 Будем рассматривать граф с 25-ю вершинами (каждому игроку соответствует отдельная вершина), в котором каждая вершина соединена со всеми остальными (каждому ребру соответствует ~~...~~ партия между игроками, соответствующие вершины графа которых он соединяет).

Будем расставлять стрелочки на рёбрах так, что $A \longrightarrow B$ означает, что A выиграл у B, а B проиграл A. Тогда нам нужно найти количество вот таких получившихся циклов:



Будем говорить, что из A выходит ребро, если имеет место $A \longrightarrow$, и что в A входит ребро, если имеет место $A \longleftarrow$

Заметим, что из условия следует, что из каждой вершины выходит 12 рёбер и в каждую вершину входит 12 рёбер.