(80)

АО-50

КИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Ш

1

330

1	2	3	4	5	6	сумма
4	4	–	4	4	–	16

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Владимир

Дата 16.03.2019.

* *

10–11 класс. Второй вариант

√ 1. Имеется 9 черных ладей и n белых. При каком наибольшем n их можно расставить на шахматной доске так, чтобы одноцветные ладьи не били друг друга? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Даны положительные числа x, y, z. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{xyz\,(x+y+z)}{x^4+y^4+z^4}.$$

√ 3. Окружность ω единичного радиуса проходит через вершины B и C треугольника ABC и вторично пересекает его стороны AB и AC в точках K и L соответственно. На лучах BL и CK отмечены соответственно такие точки P и Q, что $BP = AC$ и $CQ = AB$. Найдите расстояние между центрами описанных окружностей треугольников APQ и KBC.

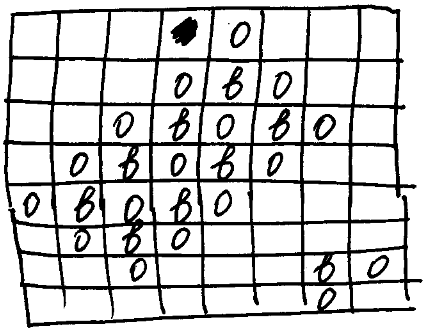
√ 4. Шестнадцатиричная запись квадрата натурального числа x представляет собой два одинаковых соседних блока из n цифр. Может ли n равняться 2023?

√ 5. В однокруговом турнире по настольному теннису участвует $2k$ спортсменов. В каждом туре все участники проводят по одному матчу. Какое наименьшее число туров надо сыграть, чтобы при любом расписании игр обязательно нашлось трое теннисистов, сыгравших друг с другом?

6. Имеется три одинаковых конуса с общей вершиной, касающихся друг друга внешним образом, а также два шара, касающихся внешним образом друг друга и всех конусов. Радиусы шаров относятся как 1 : 3. Найдите угол при вершине конусов. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении).

чистовик.

1. Обозначим о - белые, в - черные



В каждой из строчек и столбцов их можно расположить не более чем 1 белую ладью больше, чем черных. Сложим все белые ладьи по всем строкам и столбцам: 18 + 16 = 34. (дважды черные и единожды за каждую строку и столбец). Каждую ладью при этом взяли дважды => возможно не более чем 17 белых ладей.

Ответ: 17.

2. $A = \frac{xyz(x+y+z)}{x^4+y^4+z^4}$ $\quad x, y, z > 0$ (1)

1. Запишем неравенство Коши, Буняковского, Шварца для трех переменных a, b, c:

$(a^2+b^2+c^2)\cdot(b^2+c^2+a^2) \geq (ab+bc+ac)^2$ (2)

извлечем квадратный корень:

$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ac$ (3)

это неравенство будем использовать в дальнейшем.

2. Заметим, что:

$x^4+y^4+z^4 \geq x^2\cdot y^2+y^2\cdot z^2+x^2\cdot z^2$ (4)

Это следует из неравенства (3), если $a = x^2$, $b = y^2$, $c = z^2$.

Тогда $A = \frac{x\cdot y\cdot z(x+y+z)}{x^4+y^4+z^4} \leq \frac{xyz(x+y+z)}{(xy)^2+(yz)^2+(xz)^2} =$

$= \frac{x^2y\cdot z+xy^2z+xyz^2}{(xy)^2+(yz)^2+(xz)^2}$ (5)

3. Сделаем еще одну замену:

$xy = a > 0$

$yz = b > 0$

$xz = c > 0$

$$A \leq \frac{ab + bc + ac}{a^2 + b^2 + c^2} \quad (6)$$

По тому же самому неравенству (3) получаем что:

$A \leq 1 \quad (7)$

Максимальное значение A не превосходит 1.

Равенство достигается при $x = y = z$

$$A = \frac{x^3 \cdot 3x}{3x^4} = 1 \quad (8)$$

Ответ: 1

Чистовик.

5. Для выполнения условия задачи, необходимо доказать, что $k+1$ туров будет достаточно:
как мы можем заметить, каждый из игроков сыграл $k+1$ матчей.
А - один из выбраных случайных игроков так же из группы $k+1$ выберем еще 1-ого игрока - Б.
Теперь мы можем сделать вывод, что А не играет с игроками, которых осталось $k-2$.
Так же известно, что определенно есть игрок, который сыграл и с игроком А и с игроком Б.
Это становится понятно из того, что Б так же сыграл $k+1$
Обязательно будет 3 игрока, сыгравших друг с другом.
Чтоб получить ситуацию, в которых было k турниров, а игравших друг с другом так и не нашлось, выберем случайным образом игрока - N
В случаях, когда N сыграл с k игроков - обозначим данное множество G
В тех случаях, когда N не играл с $k-1$ игроков - обозначим за F.
Пусть каждый игрок из множества G сыграл с каждым игроков из множества F. Получим что каждый из игроков с k матчей и не нашлось таких трех игроков, чтобы играли между собой.

Ответ: $k+1$

4. Легко заметить, что 2023 : 17. следовательно $16^{2023}+1 =$

$= (16+1)(16^{2022} - 16^{2021} + \dots - 16^1 + 1)$.

Как мы видим, каждое из слагаемых во 2-ой скобке можно сравнить с 1 по модулю 17.

Поскольку это число делится на 17 и слагаемых 2023, то вторая скобка тоже делится на 17 $\Rightarrow$ $16^{2023}+1$ так же : на 289

т.к $x = \frac{16^{2023}+1}{17}$, то $x^2 = (16^{2023}+1)\left(\frac{16^{2023}+1}{289}\right)$, но мы еще не нашли искомое число, т.к $\frac{16^{2023}+1}{289} < 16^{2022}$

Проведем умножение x на 16; получим:

$x = (16^{2023}+1)\cdot\frac{16}{17}$;

$x^2 = (16^{2023}+1)\cdot 256\cdot\frac{16^{2023}+1}{289}$.

Поскольку $256\cdot\frac{16^{2023}+1}{289}$ является целым и восмерично системе счисления оно записывается 2023 цифрами,

то восмеричную запись можно представить как x^2 и она будет представлять из себя два блока: из n цифр.

таким образом, n может равняться 2023.

Ответ: 2023