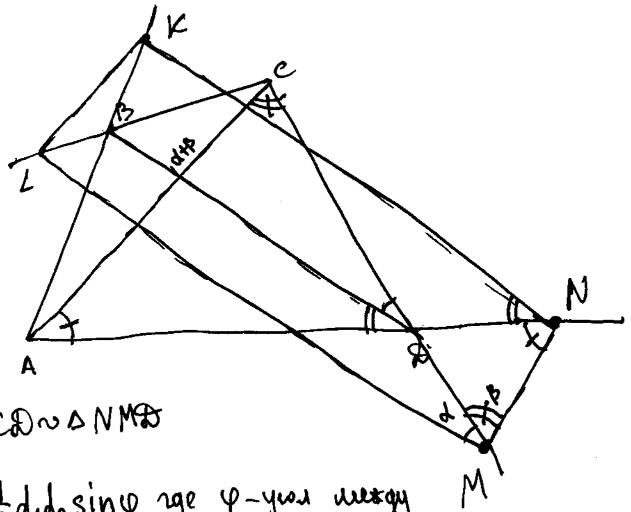
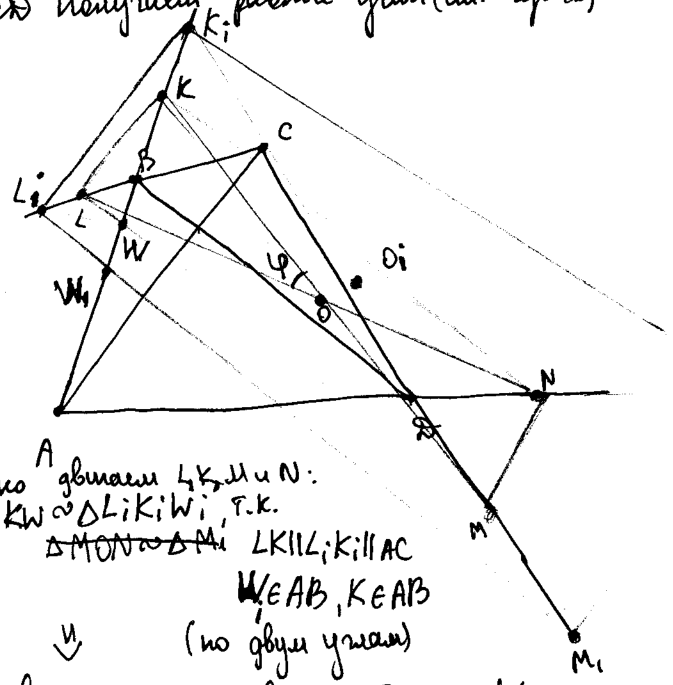
чистовик



$\triangle ACD \sim \triangle NMD$

1) $S_{LKNM} = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi$, где φ — угол между диагоналями d_1 и d_2.

Из параллельности сторон LKNM диагоналям ABCD получаем равные углы (см. чертеж)



2) Мысленно двигаем L, K, M и N:
$\triangle LKW \sim \triangle L_1K_1W_1$, т.к. $LK \parallel L_1K_1 \parallel AC$, $W \in AB$, $K \in AB$ (по двум углам)
~~$\triangle MON \sim \triangle M_1$~~
$\Downarrow$
высоты этих △ков относятся как k (коэф. подобия)
$k = \frac{LK}{L_1K_1}$

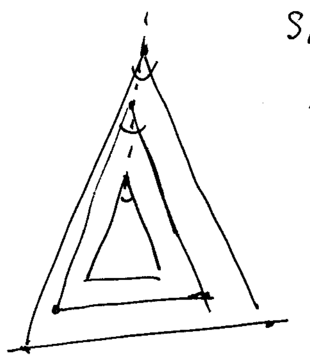
$\triangle LKM \sim \triangle L_1K_1M_1$, т.к. сохраняется пар-ть сторон LKNM
$\Downarrow$
$\frac{KM}{K_1M_1} = \frac{LK}{L_1K_1} = k$

$S_{LKM} = \frac{1}{2} S_{LKNM}$

$\frac{S_{LKM}}{S_{L_1K_1M_1}} = k^2 \Rightarrow \frac{S_{NMLK}}{S_{N_1M_1L_1K_1}} = k^2$

по п. 1 $\to \sin\varphi = const$

$\varphi \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi = const$



Точки пересеч. диагоналей лежат на одной прямой

8622

60

VL 182

…УРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

1	2	3	4	5	6	сумма
4	2	2	4	0	0	12

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Липецк

Дата 16.03.2019

* *

10–11 класс. Десятый вариант

1. Какое наибольшее количество ладей можно расставить на шахматной доске так, чтобы каждую ладью било не более двух других? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Числа x, y, z — углы некоторого треугольника, один из которых не меньше $\frac{\pi}{2}$. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \cos x + \cos y + \cos z + \cos(x-y) + \cos(y-z) + \cos(z-x).$$

3. Дан четырехугольник $ABCD$, отличный от параллелограмма. На лучах AB, CB, CD и AD вне сторон четырехугольника $ABCD$ выбираются соответственно точки K, L, M и N так, что $KL \parallel MN \parallel AC$ и $LM \parallel KN \parallel BD$. Найдите геометрическое место точек пересечения диагоналей параллелограмма.

4. Натуральное число x в восьмеричной системе 2018-значное, и его цифры повторяются через одну. Оказалось, что восьмеричная запись x^2 содержит только цифры 3 и 4, причем в равном количестве. Найдите x^2 (в восьмеричной системе).

5. В однокруговом турнире по настольному теннису участвовало n теннисистов ($n \geqslant 3$). Будем говорить, что игрок A *круче* игрока B, если A выиграл у B или найдется такой игрок C, что A выиграл у C, а C выиграл у B. При каких n по итогам турнира могло оказаться так, что каждый игрок круче всех остальных? Ничьих в теннисе не бывает.

6. На столе лежат два конуса с общей вершиной O, касаясь друг друга внешним образом. Угол между их осями симметрии равен $\operatorname{arctg}\frac{12}{5}$. Найдите максимальный угол при вершине большего из двух конусов с вершиной O, которые лежат на столе и касаются внешним образом первых двух конусов. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении.)

чистовик

№2) $A=\cos x+\cos y+\cos z+\cos(x-y)+\cos(y-z)+\cos(z-x)$. Не умаляя общности пусть $x \geq \frac{\pi}{2}$.

Поскольку сумма углов в Δ-ке равна π, $x=\pi-(y+z) \Rightarrow \cos x=\cos(\pi-(y+z))=-\cos(y+z)$

Преобразовав аналогичным образом $\cos y$ и $\cos z$, получим:

$A=\cos(x-y)-\cos(x+y)+\underbrace{\cos(y-z)-\cos(y+z)}_{-2\sin\left(\frac{2y}{2}\right)\sin\left(\frac{-2z}{2}\right)}+\cos(z-x)-\cos(z+x)=+2(\sin x\sin y+\sin y\sin z+\sin z\sin x)$

Поскольку $\sin x=\sin(z+y)$:

$A=2(\sin y\sin z+\sin(z+y)(\sin z+\sin y))$. Проанализируем A при фиксированном угле x, а значит, и сумме $y+z$:

• $\sin y\sin z=\frac{1}{2}(\cos(y-z)-\underbrace{\cos(y+z)}_{\text{фиксировано}})$ – максимально при максимальном $\cos(y-z)$, т.е. при $y=z$

• $\sin z+\sin y=2\underbrace{\sin\frac{y+z}{2}}_{\text{фиксировано}}\cos\frac{y-z}{2}$ – максимально при макс. $\cos\frac{y-z}{2}$, т.е. при $y=z$.

A максимально, когда оба слагаемых ($\sin y\sin z$ и $(\sin z+\sin y)\sin(z+y)$) максимальны. ~~А~~ Значит, A максимально при $y=z$.

Определим, при каких x A максимально:

$A=2(\sin^2 y+\sin 2y\cdot 2\sin y)=2(\sin^2 y+2\sin^2 y\cos y)=2\sin^2 y(1+2\cos y)=2\sin^2\left(\frac{\pi-x}{2}\right)\left(1+2\cos\left(\frac{\pi-x}{2}\right)\right)=$

$=2\cos^2\frac{x}{2}\left(1+2\sin\frac{x}{2}\right)$. Пусть $\frac{x}{2}=\alpha\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$

Пусть $f(x)=\cos^2\alpha(1+2\sin\alpha)=(1-\sin^2\alpha)(1+2\sin\alpha)=1+2\sin\alpha-\sin^2\alpha-2\sin^3\alpha$

$f'(x)=-2\sin\alpha\cos\alpha(1+2\sin\alpha)+\cos^2\alpha\cdot 2\cos\alpha=2\cos^3\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha(1+2\sin\alpha)=0$

$\left[\begin{array}{l}\cos\alpha=0 \ (1)\\ \cos^2\alpha-2\sin\alpha(1+2\sin\alpha)=0 \ (2)\end{array}\right.$

(2): $\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha-\sin\alpha=0$

$1-3\sin^2\alpha-\sin\alpha=0$

$3\sin^2\alpha+\sin\alpha-1=0$

$D=13 \Rightarrow \sin\alpha=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{6}$

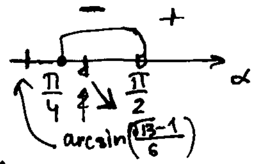
$\frac{-1+\sqrt{13}}{6} \vee \frac{1}{\sqrt{2}}$

$-1+\sqrt{13} \vee 3\sqrt{2}$

$14-2\sqrt{13} \vee 18$

$-4 \vee 2\sqrt{13}$

<



A при $\frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}$: $A=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+0+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+1=1+\frac{4}{\sqrt{2}}=$

$=1+2\sqrt{2}$

Ответ: $1+2\sqrt{2}$.

№4) Рассмотрим остатки степеней восьмёрки при делении на 7: $8^0 \underset{7}{\equiv} 1$, $8^1=8\cdot 8^0=(7+1)\cdot 1\underset{7}{\equiv}1$.

Видим, что они всегда равны 1. Поэтому в восьмеричной системе счисления признак делимости на 7 аналогичен признаку делимости на 9 (т.к. число представляется в виде суммы числа, кратного 7, и числа, равного сумме цифр исходного числа).

Пусть $x=\overline{abab\ldots ab}$. Тогда $x\underset{7}{\equiv}1009(a+b)\underset{7}{\equiv}1447(a+b)+(a+b)\underset{7}{\equiv}a+b$.

Пусть в x^2 2з цифр $\Rightarrow x^2\underset{7}{\equiv}з(3+4)\underset{7}{\equiv}7з\equiv 0$.

$x^2 \vdots 7 \Rightarrow x\vdots 7$, т.к. 7 – простое $\Rightarrow (a+b)\vdots 7$. Поскольку $0<a, b\leq 7$, имеем следующие варианты:

1.) $a, b=7$ – не подходит, т.к. по условию a и b различны.

2.) a и b это 0 и 7. $a\neq 0$, т.к. она в старшем разряде $x \Rightarrow x=\overline{70\ldots70} \Rightarrow x^2$ оканчивается на 0, 0 не 3 и не 4 ⇒ невозможно.

3.) a и b это 1 и 6. $x=\overline{16\ldots16} \Rightarrow x^2$ оканч. на 4

$x=\overline{61\ldots61} \Rightarrow x^2$ оканч. на 1 – не подходит

4.) 2 и 5: $x=\overline{25\ldots25} \Rightarrow x^2\underset{8}{\equiv}1$ – не подходит

$x=\overline{52\ldots52} \Rightarrow x^2\underset{8}{\equiv}4$

чистовик

5.) 3 и 4: $x=\overline{34\ldots34} \Rightarrow x^2\underset{8}{\equiv}0$ – не подходит

$x=\overline{43\ldots43} \Rightarrow x^2\underset{8}{\equiv}1$ – не подходит.

Если $x=\overline{16\ldots16}$, то вторая справа цифра $x^2=0$; $\times\begin{array}{r}16\ldots616\\16\\\hline 24\\ \ldots\ldots 6^4\end{array}$ ⇒ не подходит.

Убедимся, что подходит $x=\overline{52\ldots52}$: $x^2=$

$$\begin{array}{r}52\ldots52525252\\ 52\ldots52525252\\\hline 125\ldots2525252\,4\\ 3252\ldots525252\,2\,4\\ +\ 12525\ldots2525\,2\,4\,4\\ 325252\ldots5252\,2\\ 1252525\ldots2524\,4\,3\\ 32525252\ldots522\,3\\ \ldots\\\hline 33343434\ldots\end{array}$$

← заметим, что в каждом столбце от самого правого до 2018 справа записана сумма: $4+7\cdot c$, где $c=\left[\frac{n-1}{2}\right]$, n – номер столбца, считая справа налево

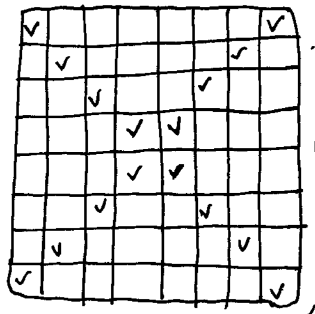
для n от 2019 до 4036: сумма в столбцах равна $3+7c$, где $c=\left[\frac{m-1}{2}\right]$,

$x^2=\overline{33343434\ldots343444}$

Ответ: ~~$x=\overline{5252\ldots5252}_8$~~. $x^2=33343434\ldots3444$ (34 повтор. 2016 раз) а $m=$ ~~$2018+n$~~ $4037-n$

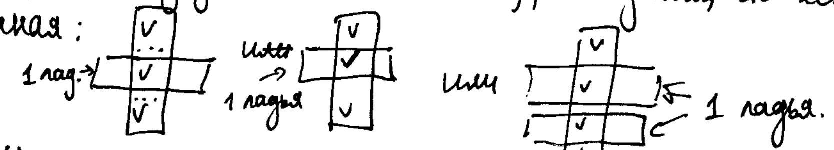
№1) 16 ладей. Пример:

☑ – ладья



Оценка: пусть ладей ≥ 17. 1) По принципу Дирихле есть min одна строка, где стоят min 3 ладьи. Рассмотрим ту из этих трёх ладей, что стоит между двумя другими. В столбце, где стоит рассматриваемая ладья, других ладей, кроме этой, быть не может, иначе рассматриваемую ладью будут бить min 3 других.

2.) Поскольку есть столбец, где ладья всего одна, по принципу Дирихле хотя бы в двух столбцах стоит по 3 ладьи (или есть столбец, где ладей 4). Рассуждая аналогично п.1), получаем, что есть две строки, где ладья единственная:



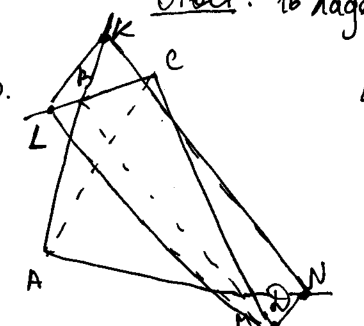
Но тогда есть ещё 2 ладьи, у которых обе бьющих их ладьи стоят с ними в одной строке, а значит, в столбцах с рассматриваемыми ладьями эти ладьи единственные.

3.) Поскольку мы каждый раз говорим о новых ладьях, единственных в своём столбце/своей строке, то и столбцы/строки с одной ладьёй не совпадают с предыдущими столбцами/строками с 1 ладьёй.

Продолжая рассуждения, аналогичные п. 1,2 получаем, что столбцов с единственной ладьёй больше восьми, что невозможно ⇒ ладей ≤ 16.

Ответ: 16 ладей

№3.



$LK \parallel MN$, $KN \parallel LM$ ⇒ $LKNM$ – параллелограмм.

см. на обороте