1

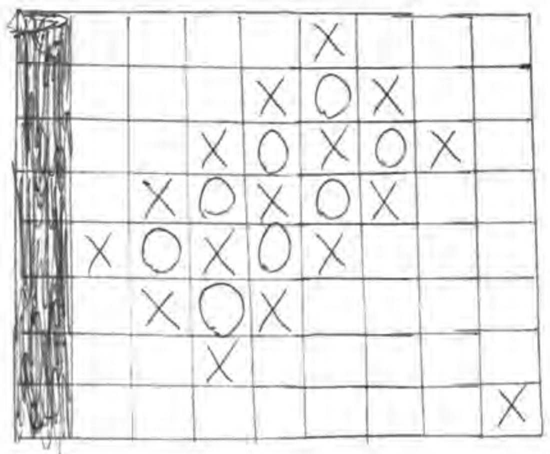
Если на горизонтали находится K чёрных ладей, то на ней может находиться не более K+1 белых ладей: Разобьём горизонталь на промежутки: |_O_O_| между краем и первой чёрной ладьёй, между соседними чёрными ладьями, между последней чёрной ладьёй и краем; всего не больше K+1 промежутка, ~~но~~ в промежутке может находиться не более одной белой ладьи, иначе они будут бить друг друга, значит на горизонтали находится не более, чем K+1 белая ладья.

Просуммировав по всем горизонталям $n \le \sum_{i=1}^{8}(k_i+1) = \left(\sum_{i=1}^{8} k_i\right)+8 = 16$

(k_i — кол-во ладей в i-ной горизонтали)

$n \le 16$

Пример $n=16$:



X — белая ладья

O — чёрная ладья

X — 16

O — 8

Никакие одноцветные ладьи не бьют друг друга

Ответ: 16

5

Пример на $n=56$. Разобьём на две группы по 8 человек, пусть только игроки из каждой группы сыграли (внутри группы) ~~между~~ собой, (всего сыграно $2\cdot\frac{7\cdot 8}{2}=56$ матчей), каких бы трёх спортсменов не взяли, среди них найдётся двое из одной группы, которые играли между собой.

Оценка на 56: ~~допустим~~ возьмём человека, сыгравшего K партий, остальные 15-K игроков сыграли между собой каждый с каждым иначе можно взять первого игрока и эту пару несыгравших (это противоречит условию)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

1	2	3	4	5	6	сумма
4	4	0	4	4		16

80

8015

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Санкт-Петербург

Дата 24 февраля

* *

10–11 класс. Первый вариант

1. Имеется 8 черных ладей и n белых. При каком наибольшем n их можно расставить на шахматной доске так, чтобы одноцветные ладьи не били друг друга? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Даны положительные числа x, y, z. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{xyz\,(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4+(yz)^4+(xz)^4}}.$$

3. Дан треугольник ABC с меньшей стороной AB. На сторонах AB и AC выбраны соответственно точки X и Y так, что $BX = CY$. Под каким углом прямая, проходящая через центры описанных окружностей треугольников ABC и AXY, пересекает прямую BC, если $\angle ABC=\beta$ и $\angle BCA=\gamma$?

4. Десятичная запись квадрата натурального числа x представляет собой два одинаковых соседних блока из n цифр. Может ли n равняться 20182019?

5. На однокруговой турнир по настольному теннису подало заявку 16 человек. Когда было сыграно n матчей, оказалось, что среди любых трех теннисистов найдутся двое, уже сыгравших между собой. При каком наименьшем n такое возможно?

6. Три конуса с общей вершиной, касающихся друг друга внешним образом, имеют высоту 2 и радиус основания $\sqrt{3}$. Два шара касаются внешним образом друг друга и всех конусов. Найдите отношения радиусов шаров (большего к меньшему).

2

$x, y, z > 0$

$$\frac{xyz(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4+(yz)^4+(xz)^4}};\quad 1)\ \frac{(xy)^4}{2}+\frac{(yz)^4}{2} \geq \sqrt{(xy)^4\cdot(yz)^4} = x^2y^4z^2$$

аналогично

$$2)\ \frac{(xy)^4}{2}+\frac{(xz)^4}{2} \geq x^4y^2z^2;\quad 3)\ \frac{(yz)^4+(xz)^4}{2} \geq x^2y^2z^4$$

складывая неравенства 1), 2), 3): $(xy)^4+(yz)^4+(xz)^4 \geq x^4y^2z^2+x^2y^4z^2+x^2y^2z^4 = x^2y^2z^2(x^2+y^2+z^2)$

$3(x^2+y^2+z^2) \geq (x+y+z)^2$, ~~так как~~ по неравенству КБШ:

$$(1+1+1)(x^2+y^2+z^2) \geq (1\cdot x+1\cdot y+1\cdot z)^2$$

$x, y, z > 0$

Тогда $$\frac{xyz(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4+(yz)^4+(xz)^4}} \leq \frac{xyz(x+y+z)}{\sqrt{x^2y^2z^2(x^2+y^2+z^2)}} = \frac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \leq \frac{x+y+z}{\sqrt{\frac{(x+y+z)^2}{3}}} = \sqrt{3}$$

Таким образом, максимальное значение не превосходит $\sqrt3$; значение $\sqrt3$ достигается при $x=y=z=1$:

$$\frac{xyz(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4+(yz)^4+(xz)^4}} = \frac{3}{\sqrt3} = \sqrt3$$

Ответ: $\sqrt3$

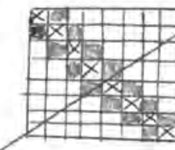
1

Если на горизонтали находится k ~~белых~~ чёрных ладей, то на этой горизонтали может находиться не более $k+1$ ~~чёрных~~ белых ладей: разделим горизонталь ~~не более чем на $k+1$~~ промежутков между краями доски и ~~белыми~~ чёрными ладьями. $1\_0\_0\_0\_1$, тогда всего промежутков не более $k+1$,

край, чёрная ладья, промежуток

В каждом промежутке может находиться не более одной белой ладьи (иначе две белые ладьи бьют друг друга), тогда всего не более $k+1$ белой ладьи; Заметим, что если чёрная ладья стоит на крайней клетке, то всего образуется не более k промежутков, а значит можно поставить (в эту горизонталь) не более k белых ладей;

Если на крайних горизонталях ~~или вертикалях~~ стоят хотя бы две чёрные ладьи, то на соответствующих вертикальных рядах стоят не более k ладей (если вертикаль одна совпадает, то не более $k-1$) и всего, если просуммировать по всем ~~горизонталям~~ вертикалям, стоит не более $(8+8)-2=14$ ладей; Пример на 14:



x - чёрная ладья
■ - белая ладья

$\Sigma k+1$

Если на крайних рядах нет чёрной ладьи (или только одна), то можно уменьшить область квадратика (убрать крайние горизонтали), на них находится не более 4 белых ладей, аналогичными рассуждениями получается, что либо есть две крайние, либо можно уменьшить дальше, в конечном итоге найдётся два ряда, ~~содержащие~~ в которых ~~не более~~ белых ладей не больше, чем чёрных, а значит всего ладей не больше, чем $16-2=14$

Ответ: 14

4

Обозначим a — блок из n цифр ~~из 20182019~~,
Тогда $x^2 = a\cdot(10^n+1)$; достаточно найти a, ~~содер~~ состоящее из 20182019 цифр, что $a\cdot(10^{20182019}+1)$ — является квадратом.

Заметим, что $10^{20182019}+1 \vdots 121$, так как

$$10^{20182019}+1 = (10+1)\sum_{e=0}^{20182018}(-1)^e\cdot 10^e,$$ причём $(-1)^e\cdot 10^e \equiv_{11} (-1)^{2e} \equiv 1 \pmod{11}$, тогда

$$\sum_{e=0}^{20182018}(-1)^e\cdot 10^e \equiv_{11} 20182019 \equiv_{11} 0,$$ так как $20182019 \vdots 11$ $(9+8-1-2-1-2 = 11 \vdots 11$ по признаку деления на 11)

Значит $10^{20182019}+1 \vdots 11^2 = 121$

Возьмём целое $a = \frac{10^{20182019}+1}{121}\cdot 100$; $a\cdot(10^{20182019}+1) = \frac{(10^{20182019}+1)^2}{11^2}\cdot 10^2$ — число целое и является квадратом

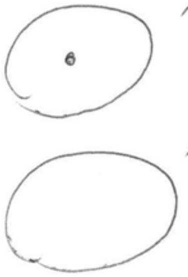
$\frac{10^{20182019}+1}{121}\cdot 100 < 10^{20182019}$, $\frac{10^{20182019}+1}{121}\cdot 100 > 10^{20182018}$ так как

$10^{20182019}+1 > 10^{20182016}\cdot 10^3 > 10^{20182016}\cdot 121 = \frac{10^{20182018}}{100}\cdot 121$, то есть a состоит из 20182019 цифр; a — подходит. Ответ: может

Чистовик 5 (продолжение)

K+1 , группа 1

, группа 2 — клика



15−K

В группе 1 каждый знаком не менее, чем с K людьми, иначе существует треугольник с двумя людьми из группы 1 и одним группы 2 (по принципу Дирихле), что противоречащий условию

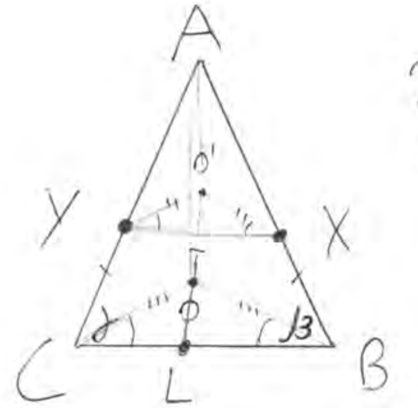
$$n \leq \frac{K(K+1) + (15-K)(14-K)}{2} = \frac{2K^2 - 28K + 15\cdot 14}{2} = K^2 - 14K + 7\cdot 15$$

$K^2 - 14K + 7\cdot 15$ максимально при $K = \frac{14}{2} = 7$,

$n \leq 7^2 - 14\cdot 7 + 7\cdot 15 = 7\cdot 8 = 56$

Ответ: 56

3 ~~Чистовик~~



Так как AB - меньшая сторона $\triangle ABC$, то $\beta > \gamma$

O - центр ~~оп~~ описанной окружности $\triangle ABC$

O' - $\triangle AXY$

$\angle YO'X = 2\angle A = \angle COB$

$\angle O'YX = \angle O'XY = \angle OCB = \angle OBC = \gamma + \beta - 90^\circ$

?

$O'Y = O'X = O'A$

$OC = OB = OA$

$\angle CLA = 90 + \gamma - \beta$

Ответ: ~~$\triangle ABC$~~

$90 + \gamma - \beta$