55

АО-61

'СКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

1867

1	2	3	4	5	6	сумма
4	3	0	0	4	0	11

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Владимир

Дата 16.03.2019

* *

10–11 класс. Второй вариант

1. Имеется 9 черных ладей и n белых. При каком наибольшем n их можно расставить на шахматной доске так, чтобы одноцветные ладьи не били друг друга? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Даны положительные числа x, y, z. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{xyz\,(x+y+z)}{x^4+y^4+z^4}.$$

3. Окружность ω единичного радиуса проходит через вершины B и C треугольника ABC и вторично пересекает его стороны AB и AC в точках K и L соответственно. На лучах BL и CK отмечены соответственно такие точки P и Q, что $BP = AC$ и $CQ = AB$. Найдите расстояние между центрами описанных окружностей треугольников APQ и KBC.

4. Шестнадцатиричная запись квадрата натурального числа x представляет собой два одинаковых соседних блока из n цифр. Может ли n равняться 2023?

5. В однокруговом турнире по настольному теннису участвует $2k$ спортсменов. В каждом туре все участники проводят по одному матчу. Какое наименьшее число туров надо сыграть, чтобы при любом расписании игр обязательно нашлось трое теннисистов, сыгравших друг с другом?

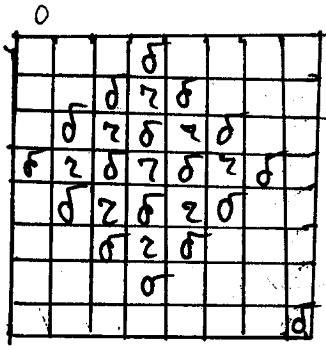
6. Имеется три одинаковых конуса с общей вершиной, касающихся друг друга внешним образом, а также два шара, касающихся внешним образом друг друга и всех конусов. Радиусы шаров относятся как $1 : 3$. Найдите угол при вершине конусов. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении).

Чистовик.

1. Заметим, что если на линии стоит k чёрных ладей, то белых ладей можно расставить не более чем $k+1$

Будем ~~??~~ следовать этому и расставлять ладей.

ч - чёрные
б - белые



~~Поставим сначала~~

Получилось 17 ладей

Докажем, что больше нельзя

Будем считать по линиям сколько у нас чёрных ладей.

$k=9$

$k_1+k_2+k_3+\ldots+k_8$

Посчитаем теперь сколько у нас белых ладей по вертикалям

$(k_1+1)+(k_2+1)+\ldots+(k_8+1)=k+8=17$

Ответ: 17.

2. $$A=\frac{xyz(x+y+z)}{(x^4+y^4+z^4)} \qquad x,y,z>0$$

по неравенству Коши.

$$\frac{x+y+z}{3}\geq\sqrt[3]{x+y+z}$$

данное равенство достигается при $x=y=z$, значит числитель достигает наибольшего значения при $x=y=z$

$$x\cdot y\cdot z\leq\frac{(x+y+z)^3}{27}$$

по неравенству Коши:

$$x+y+z\leq\sqrt{(x^2+z^2+y^2)3}$$

$$x^2+y^2+z^2\leq\sqrt{(x^4+z^4+y^4)3} \qquad \left(\frac{x^2+y^2+z^2}{9}\right)^2\leq x^4+z^4+y^4$$

Данное равенство достигается при $x=y=z$, значит

знаменатель достигает минимального значения при $x=y=z$

Значит, наибольшее значение A принимает при $x=y=z$

$$A=\frac{x\cdot x\cdot x(x+x+x)}{x^4+x^4+x^4}=\frac{3x^4}{3x^4}=1$$

Ответ: 1.

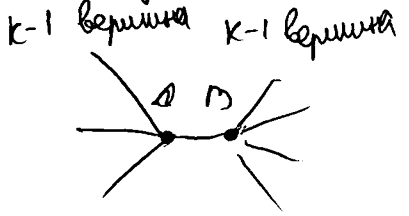
Чистовик.

5. ~~Заметим, что у 2х~~

· Представим теннисистов в виде вершин графа.

Трое теннисистов сыграют друг с другом, если образуют треугольник из соединённых вершин. ~~У двух вершин чтобы не было~~

Чтобы была такая тройка у двух соединенных вершин должна быть хотя бы одна общая вершина. Такое не возможно после максимум k ~~+1~~ туров ~~когда~~



Очевидно, что после одного тура у вершин A и B ~~появится~~ общая вершина.

Теперь посмотрим, когда это возможно. Пронумеруем все вершины от 1 до 2k и начнём соединять только нечётные с чётными в каждом туре. Таких туров будет k, т.к. k чётных чисел будут соединены с каждой нечётной вершиной.

Будем соединять со сдвигом

1 тур: $1 \to 2 \quad 3 \to 4 \quad \ldots \quad 2k-1 \to 2k$

2 тур: $1 \to 4 \quad 3 \to 6 \ldots 2k-3 \to 2k \quad 2k-1 \to 2$

и т.д.

~~Так~~ Если мы возьмём любые 3 точки, то у нас окажется по крайней мере 2 точки одинаковой чётности и они не будут соединены, значит у нас не будет треугольником. Но на следующий тур мы сможем соединять уже только точки одинаковой чётности. Возьмём эти 2 точки и т.к. они соединены со всеми точками другой чётности, то у них будет общая точка, а значит и треугольник.

Ответ: через k+1 туров.

Чистовик

4. $\underbrace{abc\ldots x}_{2023}\underbrace{abc\ldots x}_{2023}{}_{16} = m^2 = (abc\ldots x)(1+16^{2023})$

$\underbrace{100\ldots001}_{2023}{}_{16}$

~~Заметим, что $1+16^{2023}$ – простое число~~ у ~~этого~~ числа все простые делители в 1 степени, значит

~~$abc\ldots x \le 16^{2023}$~~

~~$\Downarrow$~~

~~$(abc\ldots x)(1+16^{2023})$ – не может быть квадратом.~~

чтобы число $abc\ldots x$ имело те же

~~Ответ: не может.~~ простые делители в нечётной степени, значит $abc\ldots x$ как минимум равно $1+16^{2023}$, но $abc\ldots x < 16^{2023}$ значит это невозможно

Ответ: не может.

2