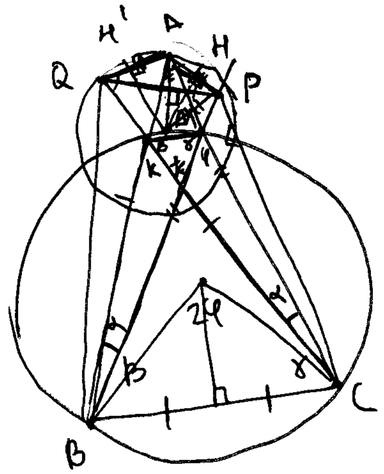


$CQ = AB$

$PB = AC$

$\angle KCB = \alpha = \angle ABP$ т.к. опираются на одну дугу. $\Rightarrow$

$\triangle ABP = \triangle CQA$ (по I признаку) $\Rightarrow$

$AP = AQ$.

~~Кароче~~ говоря $\exists \angle CQA = \beta_1$

тогда $\angle BAP = \beta_1$

$\exists \angle APB = \gamma_1$ ~~тогда~~

$\cancel{\angle QAC =}$ $\angle QAC = \gamma_1$

$\exists \angle BAC = t$ тогда:

$\cancel{\beta_1 + \gamma_1 + \beta_1 + \gamma_1 - t}$

$\angle AKC = \angle ALB = \beta_1 + \gamma_1 + \alpha - \alpha - t =$

$= \beta_1 + \gamma_1 - t$

Ответ 1

Проведем серединный перпендикуляр ~~из точки~~ от отрезка QP назовем точку пересечения с окружностью точкой M докажем, что перпендикуляр опущенный ~~от~~ из точки M на AP делит AP пополам, т.к. $\triangle APQ$ – равнобедренный то угол QAP делится серединным перпендикуляром пополам значит $AH = AH'$ проведем MP он равен ~~из...~~ AM т.к. ~~угол APM~~ $\angle HMP = \angle AMP$ поэтому точка M лежит на окр-ти $\triangle$-ка KBC и находится на расстоянии 1

РГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

1	2	3	4	5	6	сумма

2998

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада САНКТ - ПЕТЕРБУРГ

Дата 24.02.2019

* *

10–11 класс. Второй вариант

1. Имеется 9 черных ладей и n белых. При каком наибольшем n их можно расставить на шахматной доске так, чтобы одноцветные ладьи не били друг друга? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Даны положительные числа x, y, z. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{xyz\,(x+y+z)}{x^4+y^4+z^4}.$$

3. Окружность ω единичного радиуса проходит через вершины B и C треугольника ABC и вторично пересекает его стороны AB и AC в точках K и L соответственно. На лучах BL и CK отмечены соответственно такие точки P и Q, что $BP = AC$ и $CQ = AB$. Найдите расстояние между центрами описанных окружностей треугольников APQ и KBC.

4. Шестнадцатиричная запись квадрата натурального числа x представляет собой два одинаковых соседних блока из n цифр. Может ли n равняться 2023?

5. В однокруговом турнире по настольному теннису участвует $2k$ спортсменов. В каждом туре все участники проводят по одному матчу. Какое наименьшее число туров надо сыграть, чтобы при любом расписании игр обязательно нашлось трое теннисистов, сыгравших друг с другом?

6. Имеется три одинаковых конуса с общей вершиной, касающихся друг друга внешним образом, а также два шара, касающихся внешним образом друг друга и всех конусов. Радиусы шаров относятся как 1 : 3. Найдите угол при вершине конусов. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении).

№2

наидем ~~значение~~ ~~А~~ максимально число t при котором

$A = t$

$$\frac{xyz(x+y+z)}{x^4+y^4+z^4} \leq \frac{xyz(x+y+z)}{x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2}$$

т.к $(x^2+y^2+z^2)^2 = x^4+y^4+z^4 + 2x^2y^2 + 2x^2z^2 +$

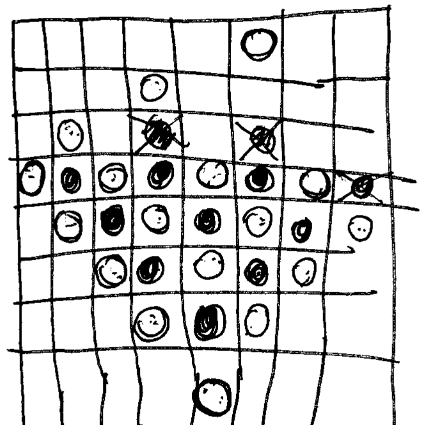
$(a+b)^2 = a^2+b^2 \geq 2ab$

Т.к $\frac{x^4}{z} + \frac{y^4}{z} \geq x^2y^2$ и так далее по неравенству Коши

$$\frac{xyz(x+y+z)}{x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2} \leq \frac{x^2yz+y^2xz+z^2xy}{x^2yz+y^2xz+z^2xy} \leq 1 \Rightarrow$$

$A \leq 1$ ~~неравенство~~ равенство выполняется, когда, $x=1, y=1, z=1$

№1



У нас есть шахматная доска 8×8. Белая ладья может бить только черную ладью, а черная только белую. Каждая ~~черная~~ ладья обьет не более 4 х других. Будем ставить фигуры по диагоналям.

Сделаем так, чтобы каждую черную ладью было по 4 белые ладьи.

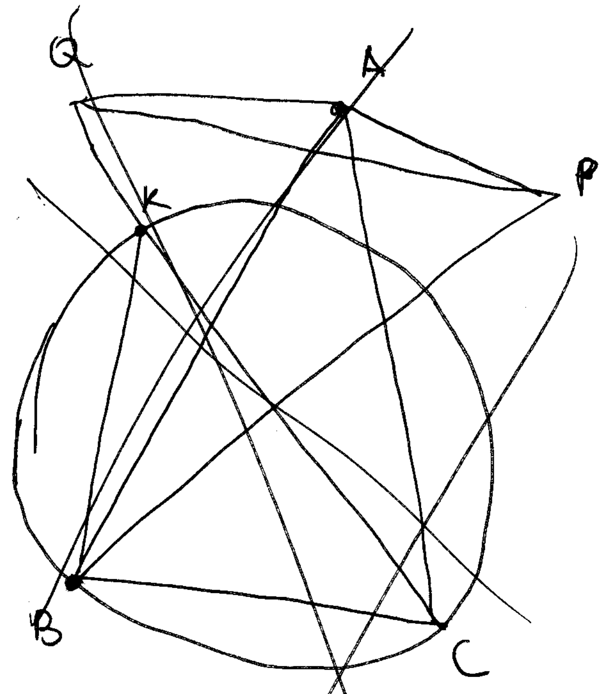
Рассмотрим каждый ~~строчку~~ ряд, для каждого ряд. ~~строчки~~ верно, что кол-во белых ~~на~~ может быть на 1 больше кол-ва ~~черных~~.

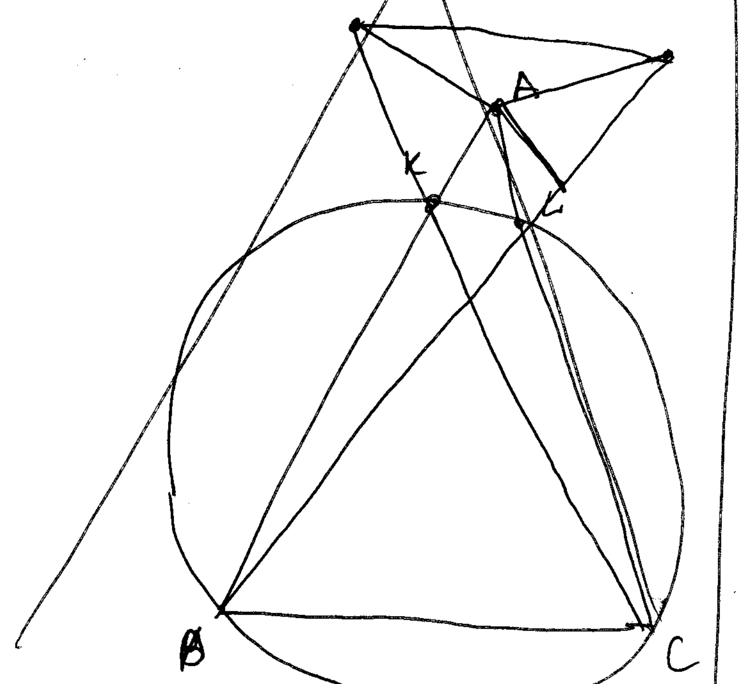
поэтому $max = 9+8 = 17$

~~Ответ 17~~

Ответ 17.

№3





~~т.к $16^{n-1} - 16^{n-2} + 16^{n-3} - ... + 1$~~

$$\left(\frac{16^{n-1}-16^{n-2}+...-16+1}{17}\right)(16^n a_1 + ... + 16a_n + 16^{n-1}a_1+...+a_n) = t^2 \text{ причем}$$

$X \vdots 17$

$a^2 = X(16^n a_1 + ... + 16a_n) + X(16^{n-1} + ... + a_n)$

№4

~~$a^2 = 16a_0$~~

$a^2 = (16^n+1)(16^{n-1}a_1 + ... + a_n)$

при $n=2023$ $a^2 \vdots 17$

~~$n = 2023$~~

~~$16^{n-1} \underset{17}{\equiv} 1$~~

~~поэтому~~

~~$16^n + 1 = 16+1\,(16^{n-1} - 16^{n-2} + ... + 1)$~~

~~т.к $16^{n-2} \underset{17}{\equiv} -1$ и так далее не кратно 17^2~~

~~т.к~~

~~$\frac{16^{n-1}}{1} - \frac{16^{n-2}}{1} + ... + 1$ mod 7~~

~~$a^2 \underset{3}{\equiv} 2(a_1 + ... + a_n)$~~

~~$a^2 \underset{9}{\equiv} (-2^n+1)((-2)^{n-1}a_1 + ... + a_n)$~~

~~из этого следует, что~~

~~a_n – четно~~

$16^n + 1 = ((16+1)(16^{n-1} - 16^{n-2} + ... + 16+1)$ ⋮ 17, ⋮ 17

⋮ 17^2 ~~иначе~~ (т.к $\underbrace{1+1+...+1}_{2023}$ ⋮̸ 17)

поэтому

$$\frac{X}{17} = \left(\frac{16^{n-1} - 16^{n-2} + ... + 16 + 1}{17}\right) \cdot (16^{n-1}a_1 + ... + a_n) =$$

$= t^2$ такое возможно когда левая и правая части равны

$16^{n-1} - 16^{n-2} + ... - 16 + 1 = \underbrace{16^n a_1 + ... + 16a_n}$

$+ \underbrace{16^{n-1}a_1 + ... + a_n}$,

понятно, что правая часть больше чем левая

т.к $a_i \geq 0$ ~~⇔~~ $16^n a_1 > 16^{n-1}$

$\Rightarrow$ равенство невозможно (ч.т.д.)