M034

926

ЙЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Шиф

1

55

1	2	3	4	5	6	сумма
4	1	4	–	2	–	11

55

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Стерлитамак

Дата 7.03.19

* *

10–11 класс. Восьмой вариант

1. Имеется два черных ферзя и n белых. При каком наибольшем n эти фигуры можно расставить на шахматной доске так, чтобы одноцветные ферзи не били друг друга? Ферзь не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Числа x, y, z — углы треугольника. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{\cos x \cdot \cos y \cdot \sin z}{\cos x + \cos y + \sin z}.$$

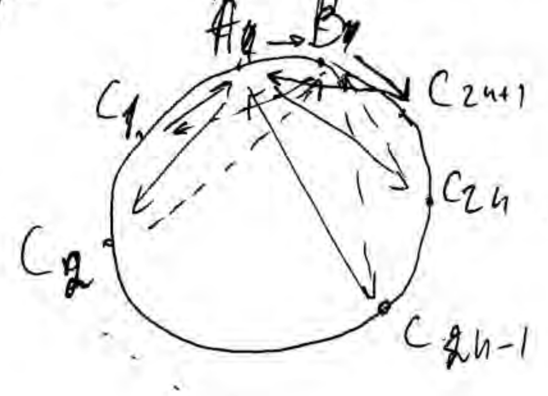
3. Дан остроугольный треугольник ABC. У прямоугольника $KLMN$ вершины M и N лежат соответственно на на продолжениях сторон AB и AC за точку A, а K и L — на стороне BC. Пусть AD — медиана треугольника ABC, E — середина его высоты, опущенной из вершины A, O — точка пересечения диагоналей прямоугольника. Найдите угол DEO.

4. Даны натуральные числа x и y. В десятичной системе они $4n$-значные, причем в записи x цифры повторяются через одну, а в записи y — через три. Оказалось, что десятичная запись $x \cdot y$ состоит из последовательных блоков по 4 одинаковых цифры. При каких n это возможно?

5. В однокруговом турнире по настольному теннису участвовало n спортсменов ($n \geqslant 3$). По итогам турнира оказалось, что всех участников можно рассадить за круглым столом так, что для произвольной пары соседей A и B любой теннисист, отличный от A и B, проиграл хотя бы одному из теннисистов A и B. При каких n такое возможно?

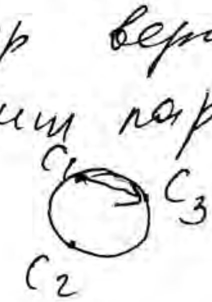
6. На столе лежат три конуса с общей вершиной, касаясь друг друга внешним образом. Оси симметрии первых двух конусов взаимно перпендикулярны. Угол при вершине первого конуса равен $\arcsin\frac{5}{6}$. Два шара вписаны в третий конус и касаются друг друга внешним образом. Найдите отношение радиусов шаров (большего к меньшему).

образом $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$ $k \geq 2$ (исчерпывающе) не м/б. Док-м, что при $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$ их можно расстав. Пусть (шаг 1)

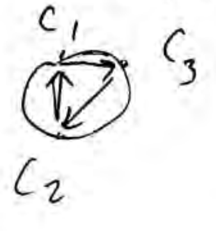


$C_1 \to A_1$, тогда т.к стрел у сосед к определ верш черед то $C_{2k+1} \to A$, $C_{2k} \leftarrow A$
т.к. $C_{2n+1} \to A$, то $B \leftarrow A$.
Теперь $C_1 \to B$ не м/б, иначе против, следов $C_1 \leftarrow B$, тогда $C_2 \to B$ и т.д. получ
$C_{2k+1} \leftarrow B$, $C_{2k} \to B$.

Усл-е для пары AB вып: каждый C_i проигр одному и выигр другого. Для каждой пары C_i, C_{i+1} усл-е тоже вып. Каждый из A, B проиграл ровно одному из C_i, C_{i+1}. Рассмотрим C_1ABC_{2n+1}. Если $C_{2n+1} \to C_1$, то из одной верш 2 стрел в одну стор, чего не м/б, следов, $C_1 \to C_{2n+1}$. Теперь если можно убрать ~~убрать~~ пару AB т.к. для нее все усл-я вып, а без нее у нас пустой граф с одним ребром $C_1 \to C_{2n+1}$ как на Шаге 1, т.е. теперь мы можем ~~про~~ переим C_{2n+1} в A, C_{2n} в B и проделать то же самое, убрав затем A и B. Т.к. к ол-во верш конечно и н-четн., ~~то~~ ~~убир~~ расстави стрелки и убир верш двиг по час. стр., то на $n-1$ удалении пар вершин, получим:



Здесь стрелки расставл $C_3 \to C_2$, $C_2 \to C_1$. Для каждых соседей, состав верш проиграла одному из них.



Ответ: для $n = 2k+1$, где $k \geq 1$

чистовик

1. Т.к ферзи бьют по верт, гор и диаг., то два ферзя одного цвета не могут стоять в одном ровно столбце/строке. Два чёрных ферзя не могут находиться в одном столбце и в одной строке одновременно. значит отн 2 будет или столб или стр. Допустим, мы умалении общности, что 2 чер ферзя наход в разных столбцах. Тогда вместе с ~~ними в~~ чер. ферзём в столбце ~~стоит~~ может стоять не более 2 белых, иначе 2 ферзя окажутся в одной части столба, относ чер, и будут бить друг друга. В столбце без ~~бел~~ чер ферзя может стоять не более 1 бел ферзя. Тогда в столбцах с черфер не более 4 бел и в остав 6 столб не более 6 бел. Итого $n \le 10$. Пример на $n=10$

x – бел ферзи O – чер ферзи

				X			
	X						
					X		
X	O	X					
						X	
	X	O	X				
							X
		X					

2. $x+y+z=\pi$

$$A=\frac{\cos x\cdot\cos y\cdot\sin z}{\cos x+\cos y+\sin z} \le \frac{\cos x\cdot\cos y\cdot\sin z}{3\sqrt[3]{\cos x\cdot\cos y\cdot\sin z}},\ \text{т.к.}$$

по нер-ву о сред $\frac{\cos x+\cos y+\sin z}{3} \ge \sqrt[3]{\cos x\cos y\sin z}$

т.е. $A \le \frac{\sqrt[3]{\cos^2 x\cdot\cos^2 y\cdot\sin^2 z}}{3}=M$. Причём ~~верх~~ M достиг ~~тол~~ при усл-ви $\cos x=\cos y=\sin z$. Т.к. $x+y<\pi$, то $0<x\le\frac{\pi}{2}$, $0<y\le\frac{\pi}{2}$ и $\cos x=\cos y \Rightarrow x=y$, тогда $z=\pi-2x$, т.е. $\sin(\pi-2x)=\sin 2x$

$$\sin 2x=\cos x \Leftrightarrow 2\sin x\cos x=\cos x,$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos x=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}\\ \sin x=\frac{1}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}\\ x=\frac{5\pi}{6}\end{array}\right.\end{array}\right.$$

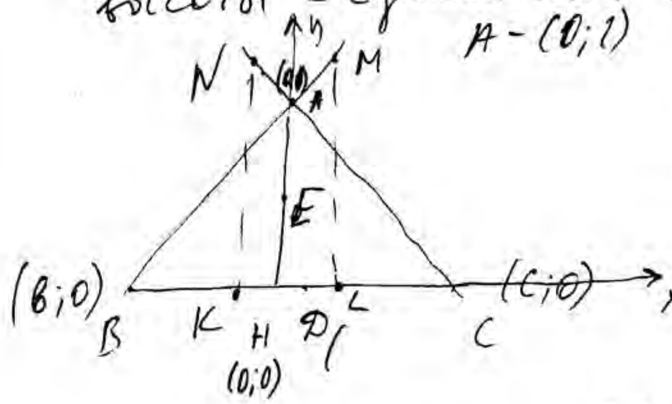
Если $x=\frac{\pi}{2}$, то $x+y=\pi$ чего не м/б. Если $x=\frac{5\pi}{6}$, то $x+y>\pi$ – не уд. Если $x=\frac{\pi}{6} \Rightarrow y=\frac{\pi}{6}$, $z=\frac{2\pi}{3}$

$$M=\frac{\cos^2 x}{3}=\frac{3}{4\cdot 3}=\frac{1}{4}$$

Наиб зн 0,25 достиг при $x=\frac{\pi}{6}$, $y=\frac{\pi}{6}$, $z=\frac{2\pi}{3}$

чистовик

3. Введём сист коорд, т.ч. ~~на~~ началом коорд явл основание высоты из т. A на BC, а длина высоты — единичной отрезок. Тогда H имеет коорд (0;0) A − (0;1). Пусть B − (b;0), C − (c;0). Тогда D − $(\frac{b+c}{2};0)$. ~~Не умаляя общ. пусть D − (0;0)~~



E имеет коорд (0; 0,5)

$M \in AB$ AB: $\frac{x}{b} = 1-y$

$N \in AC$ AC: $\frac{x}{c} = 1-y$

~~Абсц коор~~ Ординаты M и N совп, т.к. MN ∥ BC, пусть они равны y_1, тогда

$M = (b(1-y_1); y_1)$ $N = (c(1-y_1); y_1)$, тогда

~~OK~~: $K = (c(1-y_1); 0)$ $L = (b(1-y_1); 0)$

$$O = \left(\frac{b(1-y_1)+c(1-y_1)}{2}; \frac{y_1}{2}\right) \qquad ED: \frac{x}{\frac{b+c}{2}} = \frac{\frac{1}{2}-y}{\frac{1}{2}}$$

Заметим, что $O \in ED$, т.к. $\frac{(b+c)(1-y_1)}{\cancel{2} \cdot \frac{(b+c)}{\cancel{2}}} = \frac{\frac{1}{2}-\frac{y_1}{2}}{\frac{1}{2}}$,

Следов, $\angle DEO = \pi$.

Ответ: $\angle DEO = 180$

5. Заметим, что не м/б сит, когда игрок выиграл двух соседей. Рассадим тен-ов за стол. Также для $n>3$ не м/б сит, когда оба соседа A, B выигр проигр. теннисистаC. Иначе тен. D, явл соседом C должен будет выигр и A и B, что уже приводит к сит, невозм по усл-ю и опис выше.

Док-м, n − чёт. Тогда $A \to B$ означ A выиграл B.

Не умаляя общ., пусть $C_3 \to C_2$, тогда $C_4 \leftarrow C_2 \Rightarrow C_5 \to C_2$ и т.д. $C_{2k+1} \to C_2$ (по опис выше приг стрелочки у соседей к кажд верш будут чередоваться)

Тогда в какую бы стор не была напр C_3C_1, ~~будет она~~ приведет против усл-ю. Будет либо из ~~C_3 к двум сосед в~~ C_3 побед C_2 и C_1, либо C_1 выигр C_2 и C_3. Таким