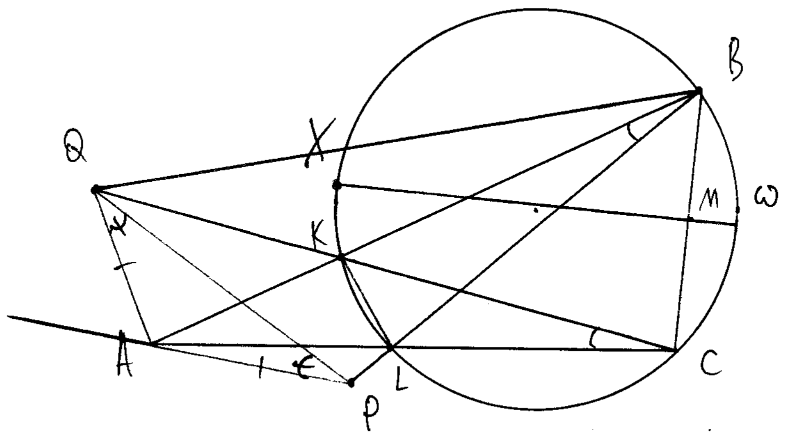
ЛИСТ 3

Задача №3.

Ответ: 1.



1) т.к. $KLCB$ — впис. четыр-к, то $\angle KBL = \angle KCL = \alpha$ — опираются на $\breve{KL}$.
т.к. $AB = CQ$, $AC = BP$ и $\angle KBL = \angle KCQ$, то $\triangle ABP = \triangle QCA \Rightarrow AP = AQ$ и $\triangle APQ$ — равнобедренный. (выше $\triangle ABP = \triangle QCA$)

~~2) Докажем, что O — центр опис. окр. $\triangle APQ$ лежит на ω. Пусть M — середина BC.~~

2) Пусть X — центр поворота, переводящего $\triangle ABP$ в $\triangle QCA$. Тогда X равноудалена от точек A, B и C ~~как вершины равных тр-ков $\Rightarrow$ лежит на сер. пер-ре к BC.~~

~~Докажем, что эти точки~~ Заметим, что X — центр описанной окр. $\triangle ABC$. Докажем, что точки Q и P лежат на опис. окр. $\triangle ABC$.

Для этого докажем, что $\angle AQP = \angle APQ = \alpha$, тогда $\angle AQP = \angle ABP = \alpha$ и опираются на AP $\Rightarrow Q$ лежит на опис. окр. $\triangle ABC$. Аналогично, $\angle APQ = \angle ACQ = \alpha$ и P лежит на опис. окр.

Тогда X будет равноудалена от Q, P, A и является искомым центром окр.

4933

СКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

I

60

1	2	3	4	5	6	сумма
[illegible]	[illegible]	0	–	[illegible]	0	[illegible]

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Краснодар

Дата 05.03.2019

* *

10–11 класс. Второй вариант

1. Имеется 9 черных ладей и n белых. При каком наибольшем n их можно расставить на шахматной доске так, чтобы одноцветные ладьи не били друг друга? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Даны положительные числа x, y, z. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{xyz\,(x+y+z)}{x^4+y^4+z^4}.$$

3. Окружность ω единичного радиуса проходит через вершины B и C треугольника ABC и вторично пересекает его стороны AB и AC в точках K и L соответственно. На лучах BL и CK отмечены соответственно такие точки P и Q, что $BP = AC$ и $CQ = AB$. Найдите расстояние между центрами описанных окружностей треугольников APQ и KBC.

4. Шестнадцатиричная запись квадрата натурального числа x представляет собой два одинаковых соседних блока из n цифр. Может ли n равняться 2023?

5. В однокруговом турнире по настольному теннису участвует $2k$ спортсменов. В каждом туре все участники проводят по одному матчу. Какое наименьшее число туров надо сыграть, чтобы при любом расписании игр обязательно нашлось трое теннисистов, сыгравших друг с другом?

6. Имеется три одинаковых конуса с общей вершиной, касающихся друг друга внешним образом, а также два шара, касающихся внешним образом друг друга и всех конусов. Радиусы шаров относятся как 1 : 3. Найдите угол при вершине конусов. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении).

ЛИСТ 1.

Задача №2. (Ответ: 1).

$$A=\frac{xyz(x+y+z)}{x^4+y^4+z^4}=\frac{xy\cdot xz+xy\cdot yz+xz\cdot yz}{x^4+y^4+z^4}$$, где x, y, z - положительные

Без ограничения общности можем считать, что $x \geq y \geq z$ (т.к. при цикл. перестановке перем. ничего не изменится), тогда $xy \geq xz \geq yz$ ($xy \geq xz$, т.к. $y \geq z$ и $x>0$; $xz \geq yz$, т.к. $x \geq y$ и $z>0$), а также $x^2 \geq y^2 \geq z^2$.

По транснер-ву имеем: $xy\cdot xz+xy\cdot yz+xz\cdot yz \leq x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2$ (для набора $xy \geq xz \geq yz$).

По транснер-ву для набора $x^2 \geq y^2 \geq z^2$ имеем: $x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2 \leq x^4+y^4+z^4$.

Сл-но, $0<xyz(x+y+z) \leq x^4+y^4+z^4 \Longrightarrow A \leq 1$ и равенство достигается при $x=y=z=1$. $\Rightarrow$ Максимальное значение выражения A равно 1.

Ответ: 1.

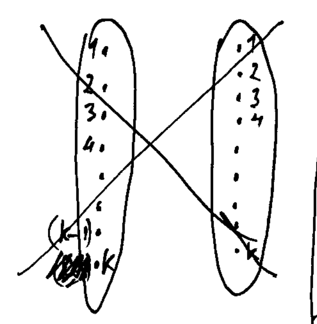
Задача №5.

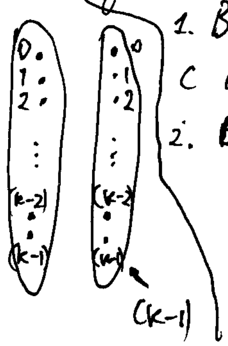
Ответ: $k+1$ тур.

Переведём задачу на язык графов: теннисисты-вершины, ребро между двумя ~~теннисистами~~ ~~(вершинами)~~ (теннисистами) означает, что эти два теннисиста сыграли между собой. Заметим, что в каждом туре мы делим вершины на k пар и проводим ребро ~~между~~ в ~~каж~~ каждой паре. $\Rightarrow$ степень каждой вершины увел. на 1 за один тур.

1) Докажем, что найдётся расписание игр такое, что за k туров не найдётся треугольника в нашем графе (3-х теннисистов, сыгравших с друг другом). Приведём пример такого расписания:

Рассмотрим двудольный граф, в каждой доле которого k вершин, пронумерованных от 0 до $(k-1)$. (разделим наш граф на две доли по k вершин)





~~В первом~~ В каждом туре будем выбирать вершины из разных долей следующим образом:

1. В первом туре вершина с номером x из левой доли соединена с вершиной x из правой. (обозначим $x \to x$) для каждого целого x из $[0; k-1]$.
2. Во втором x из левой с $(x+1) \bmod k$, т.е. $x \to (x+1) \bmod k$ (таким образом, $k-1 \to 0$, а $k-2 \to k-1$)

И так далее, в туре с номером a $x \to (x+a-1) \bmod k$

Продолжение на листе 2.

Продолжение задачи 5. ЛИСТ 2.

Таким образом, после k-го тура у ~~нас~~ каждой вершины двудольного графа будет степень k, а т.к. все рёбра соединяют вершины из разных долей, то треугольников нет.

2) Докажем, что за $(k+1)$ тур гарантированно найдётся треугольник в нашем графе (уже не двудольном).

Очевидно, в каждом туре степень каждой вершины увеличивается на 1 $\Rightarrow$ после $(k+1)$ тура степень каждой вершины будет равна $k+1$.

Докажем, что в графе на $2k$ вершинах, где степень каждой вершины равна $k+1$, обязательно найдётся треугольник.

Рассмотрим вершины A и B, соединённые ребром. ~~но~~ Помимо этого ребра из A выходит k рёбер в остальные $2k-2$ вершины. Аналогично, из B выходит k рёбер в эти же $2k-2$ вершины. Тогда т.к. $2k > 2k-2$, найдётся вершина C среди наших $2k-2$, отличных от A и B, такая, что C соединена и с A, и с B $\Rightarrow$ ABC - треугольник, ч.т.д.

Задача №1.

Ответ: 17.

Пример: Б - белая ладья, Ч - чёрная.

							Б
			Б				
		Б	Ч	Б			
	Б	Ч	Б	Ч	Б		
Б	Ч	Б	Ч	Б	Ч	Б	
	Б	Ч	Б	Ч	Б		
		Б	Ч	Б			
			Б				

Очевидно, одноцветные ладьи не бьют друг друга.

Оценка: Докажем, что белых ладей в таблице, удовлетворяющих условию, не больше 17.

Заметим, что в ~~i~~ i-ой строке шахматной доски W_i - кол-во белых ладей в этой строке, B_i - кол-во чёрных таковы, что $W_i \leq B_i+1$, иначе найдутся две белые ладьи в этой строке, между которыми нет чёрной, что не удовл. условию (тут иначе $\Rightarrow$ $W_i > B_i+1$).

Тогда, просуммировав такие нер-ва по всем строкам, получим $\sum_{i=1}^{8} W_i \leq \sum_{i=1}^{8} B_i+8$, где $\sum_{i=1}^{8} B_i$ равна 9 $\Rightarrow$ всего в таблице ≤ 17 белых ладей.

ЛИСТ 4

Чистовик

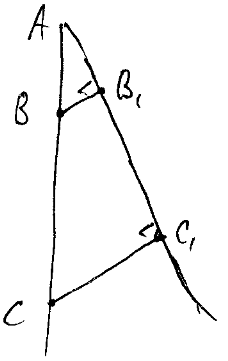
Задача №6.

Санкт-Петербургский
государственный
университет

Пусть B - центр меньшего шара, C - центр большего.

Очевидно, A, B и C лежат на одной прямой $\Rightarrow$ ~~рассмотрим сечение нашей конструкции плоскостью, проходящей через B, перпендикулярно AB, тогда оси конусов пересекают эту плоскость по в вершинах правильного тр-ка, центром которого является B, т.к. расстояния от B до осей конусов равны~~

Рассмотрим ~~сечение~~ плоскость, проходящую через прямую AB и ось одного из конусов:



Пусть BB_1 и CC_1 - радиусы шаров, где B_1 и C_1 лежат на образующей конуса (A, B_1, C_1 лежат на образующей)

Тогда $BC = 4$, $BB_1 = 1$, $CC_1 = 3$

$\Rightarrow B_1C_1 = \sqrt{BC^2 - (CC_1 - BB_1)^2} = 2\sqrt{3}$

Из подобия тр-ков AB_1B и AC_1C коэф. $1:3$:

~~AB_1~~ $\frac{AB}{AC} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{AB}{AB+BC} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{AB}{AB+4} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow AB = 2$

Тогда по т. Пифагора для $\triangle AB_1B$: $AB_1 = \sqrt{AB^2 - BB_1^2} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow AC = 6$; $AC_1 = 3\sqrt{3}$ и $CC_1 = 3$.

Тогда $\angle C_1AC = 30^\circ$, т.к. гипотенуза AC в 2 раза больше катета CC_1.