KL-007

3400

95

1

РГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

1	2	3	4	5	6	сумма
4	4	4	4	3		19

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада г. Душанбе

Дата 11. 03. 2019

* *

10–11 класс. Первый вариант

1. Имеется 8 черных ладей и n белых. При каком наибольшем n их можно расставить на шахматной доске так, чтобы одноцветные ладьи не били друг друга? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Даны положительные числа x, y, z. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{xyz\,(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4+(yz)^4+(xz)^4}}\,.$$

3. Дан треугольник ABC с меньшей стороной AB. На сторонах AB и AC выбраны соответственно точки X и Y так, что $BX = CY$. Под каким углом прямая, проходящая через центры описанных окружностей треугольников ABC и AXY, пересекает прямую BC, если $\angle ABC = \beta$ и $\angle BCA = \gamma$?

4. Десятичная запись квадрата натурального числа x представляет собой два одинаковых соседних блока из n цифр. Может ли n равняться 20182019?

5. На однокруговой турнир по настольному теннису подало заявку 16 человек. Когда было сыграно n матчей, оказалось, что среди любых трех теннисистов найдутся двое, уже сыгравших между собой. При каком наименьшем n такое возможно?

6. Три конуса с общей вершиной, касающихся друг друга внешним образом, имеют высоту 2 и радиус основания $\sqrt{3}$. Два шара касаются внешним образом друг друга и всех конусов. Найдите отношения радиусов шаров (большего к меньшему).

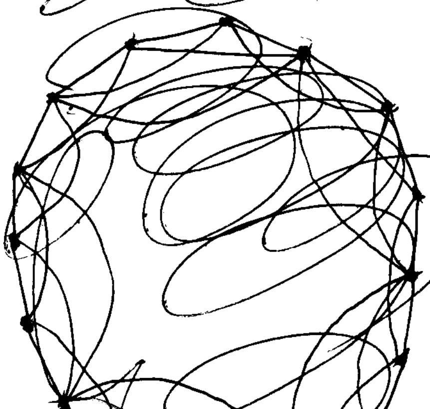
№5.

Решим задачу с помощью графов. Пусть игроки это вершины графа, а если два игрока сыграли между собой матч, мы соединим соответсвующие вершины графа. Так как всего сыграно n-матчей ⇒ кол-во рёбер = n. ~~Пусть~~ ~~Тог~~ Всего у нас C_{16}^3 → троек, и в каждой тройке ≥ 1 ребро, но каждое ребро в свою очередь может входить ровно в $16-2=14$ троек ⇒

$$n \geq \frac{C_{16}^3 \cdot 1}{14} = \frac{\frac{16!}{13! \cdot 3!}}{14} = \frac{16 \cdot 15 \cdot \cancel{14}}{6 \cdot \cancel{14}} = 8 \cdot 5 = 40.$$

~~По теореме Турана без 3-полный граф. у нас получается что:~~ ~~$n \geq \frac{(3-1) \cdot 16^2}{2 \cdot 2} = 64$~~

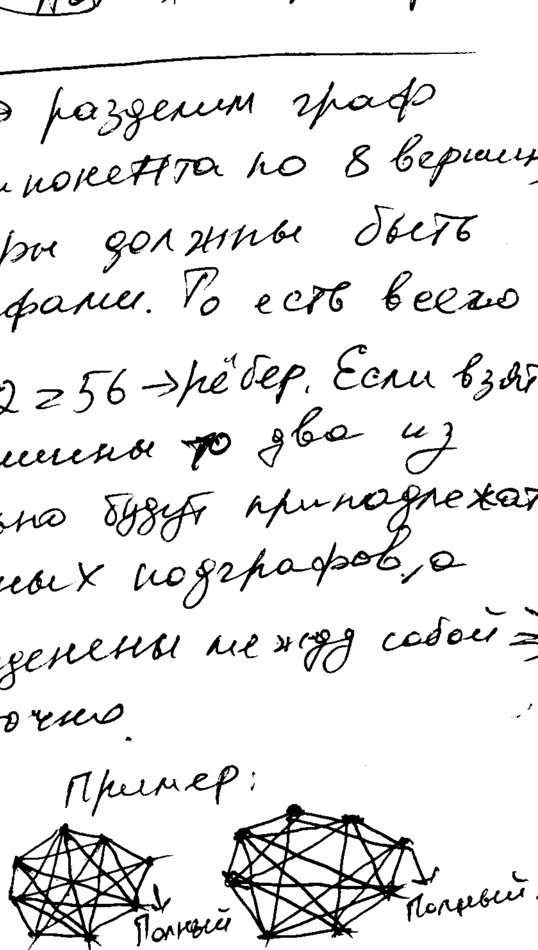
~~Формулировка теоремы Турана (пусть в графе n-вершин и E-рёбер и в нём нет (k+1)-полного подграфа ⇒~~ $\boxed{E \geq \frac{(k-1) n^2}{2k}}$) ~~Покажем пример для n=64 рёбер.~~



При n=56 → разделим граф на два компонента по 8 вершин, а эти подграфы должны быть полными графами. То есть всего будет: $C_8^2 \cdot 2 = 56$ → рёбер. Если взять любые три вершины ~~то~~ два из них обязательно будут принадлежать одному из полных подграфов, а так как они соединены между собой ⇒ в треугольнике будет одно ребро точно.

$\boxed{\text{Ответ: } n=56.}$

Пример:



№ 1

1	б							
2				б				
3			б	ч	б			
4		б	ч	б	ч	б		
5			б	ч	б	ч	б	
6				б	ч	б	ч	б
7					б	ч	б	
8						б		

Рассмотрим какую нибудь строку где x чёрных ладей., так как белая ладья не должна бить белую ладью $\Rightarrow$ справа и слева от каждой чёрной ладьи может идти максимум одна белая ладья, а так же не может быть двух подряд идущих чёрных ладей. $\Rightarrow$ в этой строке может быть $\leq X+1$ белых ладей. Пусть в i строке $\to$ X_i чёрных ладей.

Пусть N — это кол-во белых ладей. $\Rightarrow$

$N \leq (x_1+1)+(x_2+1)+\ldots+(x_8+1) = (x_1+\ldots+x_8)+8 = 16$, при равенстве $N=16 \to$ я привёл пример в рисунке.

Ответ: $N=16$. белых. ладьи.

№ 2

$x, y, z > 0$. $A = \dfrac{xyz(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4+(xz)^4+(yz)^4}}$. $\max(A)$ — ?

$$S = (xy)^4+(xz)^4+(yz)^4 = \frac{((xy)^2-(xz)^2)^2}{2} + \frac{((xy)^2-(zy)^2)^2}{2} + \frac{((xz)^2-(zy)^2)^2}{2} + (x^2yz)^2+(xy^2z)^2+(xyz^2)^2$$

$$\geq (x^2yz)^2+(xy^2z)^2+(xyz^2)^2 = x^2y^2z^2(x^2+y^2+z^2)$$

(!) $x^2+y^2+z^2 \geq \dfrac{(x+y+z)^2}{3} \Rightarrow$ (!) $3(x^2+y^2+z^2) \geq (x+y+z)^2 \Rightarrow$

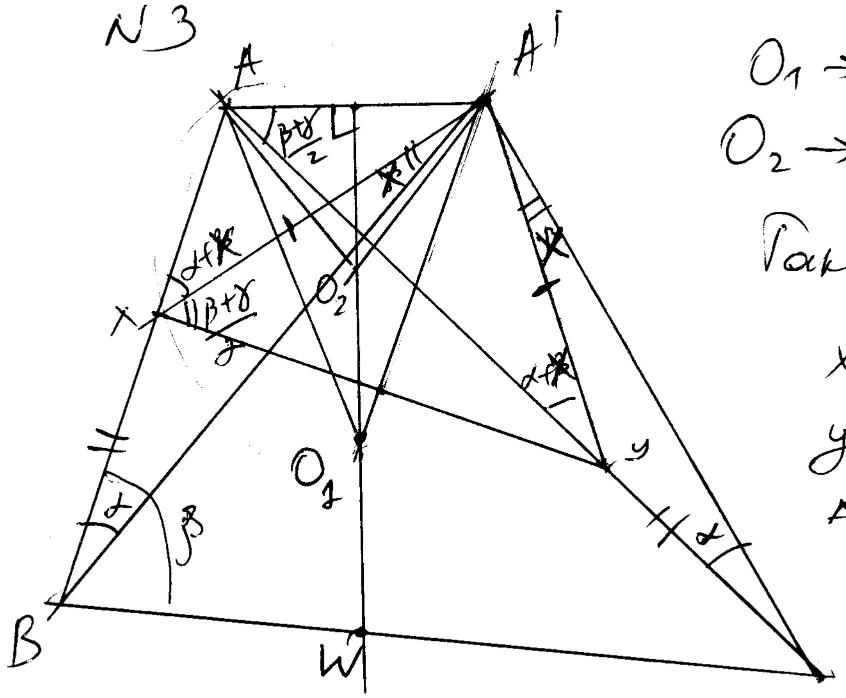
(!) $2(x^2+y^2+z^2) \geq 2xy+2xz+2yz \Rightarrow$ (!) $\underbrace{(x-y)^2}_{\geq 0}+\underbrace{(x-z)^2}_{\geq 0}+\underbrace{(y-z)^2}_{\geq 0} \geq 0 \to$ это верно

$\Rightarrow S \geq x^2y^2z^2(x^2+y^2+z^2) \geq \dfrac{x^2y^2z^2(x+y+z)^2}{3} \Rightarrow A = \dfrac{xyz(x+y+z)}{\sqrt{S}} \leq \dfrac{xyz(x+y+z)}{\sqrt{\dfrac{x^2y^2z^2(x+y+z)^2}{3}}} =$

$= \sqrt{3}$. $\Rightarrow A \leq \sqrt{3}$. при $x=y=z \Rightarrow A = \sqrt{3}$. $\Rightarrow \max(A) = \sqrt{3}$.

Ответ: $\max(A) = \sqrt{3}$; $\boxed{x=y=z}$

N 3



$O_1 \to$ центр. описанн. окруж. $\triangle ABC$

$O_2 \to$ центр. описанн. окруж. $\triangle AXY$.

Так как $AB < AC$ и $BX = CY \Rightarrow$ XY не может быть $\parallel BC \Rightarrow$ у описанных окружностей $\triangle ABC$ и $\triangle AXY \to$ есть второе пересечение (кроме как A). $\to$ пусть эта точка A'.

Пусть $\angle XBA' = \alpha$, так как $A, A', C, B \to$ цикличны $\Rightarrow$ $\alpha = \angle ABA' = \angle ACA'$. Пусть $\angle YA'C = \varphi \Rightarrow \angle AYA' = \angle YA'C + \angle A'CY = \alpha + \varphi$, так как $A, A', Y, X \to$ цикличны $\Rightarrow \angle AXA' = \angle AYA' = \alpha + \varphi \Rightarrow$ $\angle XA'B = \angle AXA' - \angle XBA' = (\alpha+\varphi) - \alpha = \varphi \Rightarrow$ $\angle YCA' = \angle XBA' \Rightarrow$ $\angle XA'B = \varphi = \angle YA'C$ и $\triangle XBA'$ подобен $\triangle YCA' \Rightarrow \frac{BX}{CY} = \frac{A'X}{A'Y} \Rightarrow$ $\frac{A'X}{A'Y} = \frac{BX}{CY} = 1 \Rightarrow \boxed{A'X = A'Y}$ $AO_2 = A'O_2$ и $AO_1 = A'O_1 \Rightarrow$ $O_1O_2 \to$ биссектриса $\triangle AO_2A'$ и $\triangle AO_1A' \Rightarrow \boxed{O_1O_2 \perp AA'}$

Так как $A, A', Y, X \to$ цикличны $\Rightarrow \angle XA'Y = \angle XAY = \angle BAC = 180^\circ - \beta - \gamma$., так как $A'X = A'Y \Rightarrow \angle A'XY = \frac{180^\circ - \angle XA'Y}{2} = 90 - \frac{180^\circ - \beta - \gamma}{2} = \frac{\beta+\gamma}{2}$, так как $A, A', Y, X \to$ цикличны $\Rightarrow$ $\angle YAA' = \angle A'XY = \frac{\beta+\gamma}{2} \Rightarrow$ Пусть $O_1O_2 \cap BC = W$. $\Rightarrow$

$\angle BWO_1 = 360^\circ - \angle ABW - \angle BAA' - 90^\circ = 360^\circ - \beta - (180^\circ - \beta - \gamma) - \frac{\beta+\gamma}{2} - 90^\circ =$
$= 90^\circ - \beta + \beta + \gamma - \frac{\beta+\gamma}{2} = 90^\circ - \beta + \frac{\beta+\gamma}{2} = 90^\circ - \frac{\beta-\gamma}{2}$.

$\boxed{\text{Ответ: } \angle BWO_1 = 90^\circ - \frac{\beta-\gamma}{2}}$

Чистовик.

№4 ~~Выпишем~~ эти два блока из n-цифр:

$T = \overline{a_1 a_2 \ldots a_n}$. Докажем что число: $x^2 = \left(\frac{10^n+1}{11} \cdot 10\right)^2 \to$ подходит нашему условию. (где $n = 2018 \cdot 2019$).

$x^2 = \overline{a_1 a_2 \ldots a_n a_1 a_2 \ldots a_n} = \overline{a_1 a_2 \ldots a_n} \cdot 10^n + \overline{a_1 a_2 \ldots a_n} =$

$= \overline{a_1 a_2 \ldots a_n} \cdot (10^n + 1)$. Возьмём $\overline{a_1 a_2 \ldots a_n} = \frac{10^n+1}{11^2} \cdot 10^2$,

где $n = 2018 \cdot 2019$. Докажем что $T = \overline{a_1 \ldots a_n} = \frac{10^n+1}{11^2} \cdot 10^2 \in N$

$10^{11} + 1 = 100000000001 = 121 \cdot 826446281 \Rightarrow$

$10^{11} + 1 \vdots 121 \Rightarrow 10^{2018 \cdot 2018} + 1 = (10^{11})^{183472 9} + 1 \vdots 10^{11} + 1 \vdots 121 \Rightarrow$

$10^n + 1 \vdots 121 \Rightarrow T = \frac{10^n+1}{11^2} \cdot 10^2 \in N$. Докажем что T - n-значное число, достаточно доказать что: $10^{n-1} \leq T < 10^n$

$\Rightarrow (!)\ 10^{n-1} \leq \frac{10^n+1}{11^2} \cdot 10^2 < 10^n \Rightarrow (!)\ 10^{n-3} \leq \frac{10^n+1}{11^2} < 10^{n-2} \Rightarrow$

$(!)\ 10^{n-3} \cdot (10^2 + 21) \leq 10^n + 1 < (10^2 + 21) \cdot 10^{n-2} \Rightarrow$

1) $10^{n-3}(10^2 + 21) = 10^{n-1} + 10^{n-2} \cdot 2 + 10^{n-3} < 10^{n-1} \cdot 3 < 10^n \leq 10^n + 1 \Rightarrow$ ✓

2) $(10^2 + 21) \cdot 10^{n-2} = 10^n + 21 \cdot 10^{n-2} > 10^n + 1 \Rightarrow$ ✓. Значит мы получили что $T \to$ удовлетворяет всем условиям. $\Rightarrow$

$x^2 = \left(\frac{10^n+1}{11} \cdot 10\right)^2 = \overline{a_1 \ldots a_n a_1 \ldots a_n}$ — ч.т.д.

Ответ: при $n = 2018 \cdot 2019 \to \exists$ такое число x, $x = \frac{10^n+1}{11} \cdot 10$ то есть n может равняться $2018 \cdot 2019$.