/РГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

6 868

50

1	2	3	4	5	6	сумма
4			2	4		10

50

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Москва

Дата 10 марта 2019

* *

10–11 класс. Десятый вариант

1. Какое наибольшее количество ладей можно расставить на шахматной доске так, чтобы каждую ладью било не более двух других? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Числа x, y, z — углы некоторого треугольника, один из которых не меньше $\frac{\pi}{2}$. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \cos x + \cos y + \cos z + \cos(x - y) + \cos(y - z) + \cos(z - x).$$

3. Дан четырехугольник $ABCD$, отличный от параллелограмма. На лучах AB, CB, CD и AD вне сторон четырехугольника $ABCD$ выбираются соответственно точки K, L, M и N так, что $KL \parallel MN \parallel AC$ и $LM \parallel KN \parallel BD$. Найдите геометрическое место точек пересечения диагоналей параллелограмма.

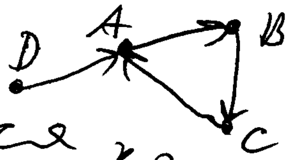
4. Натуральное число x в восьмеричной системе 2018-значное, и его цифры повторяются через одну. Оказалось, что восьмеричная запись x^2 содержит только цифры 3 и 4, причем в равном количестве. Найдите x^2 (в восьмеричной системе).

5. В однокруговом турнире по настольному теннису участвовало n теннисистов ($n \geqslant 3$). Будем говорить, что игрок A *круче* игрока B, если A выиграл у B или найдется такой игрок C, что A выиграл у C, а C выиграл у B. При каких n по итогам турнира могло оказаться так, что каждый игрок круче всех остальных? Ничьих в теннисе не бывает.

6. На столе лежат два конуса с общей вершиной O, касаясь друг друга внешним образом. Угол между их осями симметрии равен $\operatorname{arctg} \frac{12}{5}$. Найдите максимальный угол при вершине большего из двух конусов с вершиной O, которые лежат на столе и касаются внешним образом первых двух конусов. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении.)

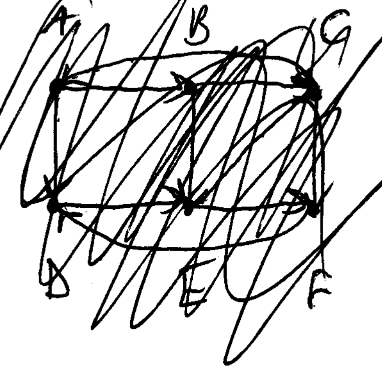
~~Для n=4 примера не существует. Рассмотрим двух игроков в каком-то турнире из 4 человек, пусть A — выигравший из них, B — проигравший. Тогда существу~~

~~Для~~ Предположим, существует ~~какой~~ пример для $n=4$. Рассмотрим двух игроков, пусть A — выигравший в ~~...~~ партии между ними, B — проигравший. Тогда существует игрок C, проигравший B и выигравший у A. Рассмотрим оставшегося игрока турнира D. Если он проиграл всем, то он не круче никого в турнире, ~~...~~ значит, он выиграл у кого-то. Так как игроки A, B и C выиграли друг у друга по циклу, без ограничения общности можно считать, что D выиграл у A.



Тогда чтобы A оказался круче D, надо, чтобы D проиграл B (т.к. A выиграл только у B). Тогда если D проиграл C, он не круче C, т.к. D выиграл только у A, а A проиграл C. Иначе C не круче D, т.к. C выиграл только у A, а A проиграл C.

Для $n=6$ пример существует:



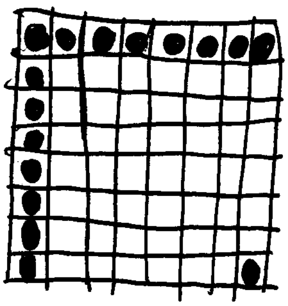
	A	B	C	D	E	F
A	–	+	–	+	–	–
B	–	–	+	–	+	–
C	+	–	–	–	–	+
D	–	+	+	–	–	+
E	+	–	+	+	–	–
F	+	+	–	–	+	–

(знак на пересечении строки a и столбца b — есть ли ребро из a в b)

№1

16.

Пример:

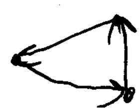


(Легко проверить, что в нём каждую ладью бьют ровно 2 другие)

Оценка: Назовём ладью крайней в своей строке, если в ней стоит больше одной ладьи, и либо слева, либо справа от этой ладьи в её строке больше ничего не стоит, не-крайней, если и слева, и справа в её строке стоит хотя бы одна ладья. Пусть на доске корректно расставлены ладьи, и среди них x единственных в своей строке, t не-крайних и y крайних. Очевидно, каждая ладья относится ровно к одной из этих групп, и их общее количество равно $x+y+t$. Заметим, что в столбцах с не-крайними ладьями не может стоять других ладей, так как их уже бьют две ладьи, стоящие слева и справа, а в столбцах с крайними ладьями не может стоять больше одной другой ладьи, так как их бьёт по одной ладье, стоящей в их строках. ~~Рассмотрим два случая.~~ Заметим, что крайних ладей в каждой строке, в которой стоит больше одной ладьи, ровно две, то есть, $y=2(8-x)$, и $x+y+t = x+2(8-x)+t = 16+t-x$. Также заметим, что столбцов, в которых не стоят не-крайние ладьи, $8-t$, в каждом из них может стоять не больше двух крайних ладей (а в остальных они стоять не могут), поэтому $y \le 2(8-t)$, и $x+y+t \le x+2(8-t)+t = 16+x-t$. $16+t-x \le 16+x-t$, значит, $t \le x$, и $x+y+t = 16+t-x \le 16+x-x = 16$, то есть ладей на доске не больше 16. ч.т.д.

№5

Для всех n кроме 4. Сначала заметим что если существует пример для n, существует и пример для $n+2$: добавим к корректному примеру для n двух игроков A и B таких, что A проиграл всем игрокам кроме B, а B выиграл для всех игроков кроме A (A выиграл у B). Тогда каждый игрок кроме A и B круче любого игрока кроме A и B по предположению о том что мы рассмотрели корректный пример для n игроков, круче A, т.к. A проиграл всем игрокам кроме B, и круче B, т.к. A при этом выиграл у B. B круче всех игроков кроме A, т.к. выиграл у них, и круче A, т.к. любой игрок кроме A и B проиграл B и выиграл у A. A круче B, т.к. выиграл у него, и круче остальных игроков, т.к. B выиграл у них.

Для $n=3$ существует пример  (будем изображать примеры в виде полных ориентированных графов, на n вершинах, где n — кол-во игроков, вершины соотв. игрокам, а ребро из A в B означает, что A выиграл у B), значит, существуют примеры и для всех нечётных n.

Чистовик

Санкт-Петербургский
государственный
университет

Приведём для каждой упорядоченной пары игроков A и B игрока C, такого, что A выиграл у C, а C выиграл у B, или укажем, что A выиграл у B:

	A	B	C	D	E	F
A	—	—	B	—	B	D
B	C	—	—	E	—	C
C	—	A	—	A	F	—
D	C	—	—	—	F	—
E	—	A	—	—	—	D
F	—	—	E	E	—	—

2

(по строке — первый игрок пары, по столбцу — второй)

Значит, для всех чётных n, не меньших 6, тоже существует пример. ✓

№4

Заметим, что последние k цифр x^2 совпадают с последними k цифрами квадрата числа, составленного из последних k цифр числа x (в том же порядке).

Посмотрим, какой могла быть последняя цифра числа x:

b	0	1	2	3	4	5	6	7
b^2	0	1	4	1	0	1	4	1

(по модулю 8)

Если последняя цифра x не 2 и не 6, то x^2 заканчивается не на 3 и не на 4. Значит, x имеет вид либо $\overline{\underbrace{a2\ldots a2}_{1009}}_8$, либо $\overline{\underbrace{a6\ldots a6}_{1009}}_8$, где a — цифра от 1 до 7 (число не может начинаться с нуля)

Переберём, чему могло быть равно a.

(все вычисления проводятся в восьмеричной системе)

$a=1$

$$\begin{array}{r} 212\\ \times\ 212\\ \hline 424\\ +\ 212\\ 424\\ \hline 45\boxed{144} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 616\\ \times\ 616\\ \hline 4524\\ +\ 616\\ 4524\\ \hline 465\boxed{204} \end{array}$$

$a=2$

$$\begin{array}{r} 22\\ \times\ 22\\ \hline 44\\ +\ 44\\ \hline 5\boxed{04} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 626\\ \times\ 626\\ \hline 604\\ +\ 1454\\ 604\\ \hline 75\boxed{744} \end{array}$$

$a=3$

$$\begin{array}{r} 232\\ \times\ 232\\ \hline 464\\ +\ 716\\ 464\\ \hline 56\boxed{244} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 36\\ \times\ 36\\ \hline 264\\ +\ 132\\ \hline 16\boxed{04} \end{array}$$

$a=4$

$$\begin{array}{r} 42\\ \times\ 42\\ \hline 104\\ +\ 210\\ \hline 22\boxed{04} \end{array} \qquad \cancel{\begin{array}{r} 46\\ \times\ 46\\ \hline 344\\ +\ 230\\ \hline 4 \end{array}} \qquad \begin{array}{r} 646\\ \times\ 646\\ \hline 4744\\ +\ 3230\\ 4744\\ \hline 533\boxed{644} \end{array}$$

$a=5$

$$\begin{array}{r} 56\\ \times\ 56\\ \hline 424\\ +\ 346\\ \hline 41\boxed{04} \end{array}$$

$a=6$

$$\begin{array}{r} 62\\ \times\ 62\\ \hline 144\\ +\ 454\\ \hline 47\boxed{04} \end{array} \qquad \cancel{\begin{array}{r} 666\\ \times\ 666\\ \hline 104\\ +\ 104\\ 104\\ \hline 01\boxed{544} \end{array}} \qquad \begin{array}{r} 666\\ \times\ 666\\ \hline 5104\\ +\ 5104\\ 5104\\ \hline 565\boxed{544} \end{array}$$

$a=7$

$$\begin{array}{r} 7272\\ \times\ 7272\\ \hline 16564\\ +\ 63426\\ 16564\\ 63426\\ \hline \ldots\boxed{7444} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 76\\ \times\ 76\\ \hline 564\\ +\ 662\\ \hline \ldots\boxed{04} \end{array}$$

Значит, единственный подходящий вариант — $a=5$, а последняя цифра 2, и $n = \underbrace{\boxed{52}\ldots\boxed{52}}_{1009}{}_8 =$ (в десятичной системе) $= 2(8^0+8^2+\ldots+8^{2016}) + 5(8^1+8^3+\ldots+8^{2017}) = (2+5\cdot 8)\cdot\frac{8^{2017}-1}{8-1} = 42\cdot\frac{8^{2017}-1}{8-1} = 6\cdot(8^{2017}-1)$, $n^2 = 36\cdot(8^{4034}-2\cdot 8^{2017}+1) = 36\cdot(7\cdot(8^{4033}+\ldots+8^{2018}) + 6\cdot 8^{2017}+1) = (8\cdot 4+4)(7(8^{4033}+\ldots+8^{2018})+6\cdot 8^{2017}+1) = (7\cdot 4\cdot 8^{4034}+2\cdot 7\cdot 4\cdot(8^{4033}+\ldots+8^{2019})+(7\cdot 4+6\cdot 4)\cdot 8^{2018}+6\cdot 4\cdot 8^{2018}+8\cdot 4+4)$

и что?