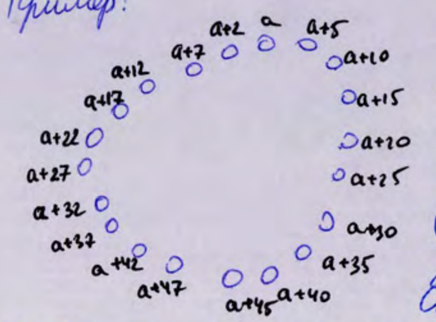
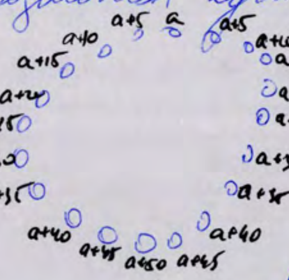
№1.

Пример:



Несложно заметить, что все числа различные, а также, что разность между любыми дв. соседними 2 или 5. Тогда наибольшая разница составляет $(a+47)-a=47$. Докажем, почему не может быть больше.

Если она хотя бы 49, то для её получения потребуется хотя бы на 1 промежуток больше (1 промежуток = расстоянию между двумя соседними числами), а значит, число $a+49$ будет находиться на расстоянии не менее 11 промежутков с одной стороны, и не более чем на расстоянии 9 промежутков с другой стороны. С большей стороны суммарно мы прошли 49, а вот с меньшей удастся только (максимум!) 40, т.е. число, стоящее рядом с a будет $a+9$, а нужно $a+2$ или $a+5$ — противоречие. Если же разность равна 50, её можно достичь либо за 10 промежутков (с другой стороны тоже 10), либо за число, большее чем 11, а раз когда с одной стороны 11 промежутков, у нас уже не подходит (из-за слишком большой разницы соседнего числа и a), то и с X $(X>11)$ промежутков это не выйдет. Когда у нас 10 промежутков, возможен единственный вариант (т.к. по-другому, кроме как взять 10 раз по 5, получить 50 за 10 шагов нельзя):



Но в таком случае, все числа кроме a и $a+50$ имеют равное ему число, что противоречит условиям задачи. Чем большие числа мы будем дальше брать, тем больше разница будет между a и конечным числом => наибольшая возможная нужная нам разница это 47.

Ответ: 47.

55

0-32

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

1

101

1	2	3	4	5	6	сумма
4	3	4	0	0	0	11

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (8–9 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Архангельск

Дата 23 марта 2019

* *

8–9 КЛАСС. ТРЕТИЙ ВАРИАНТ

1. По кругу написаны 20 различных натуральных чисел, так что любые два соседних числа отличаются на 2 или на 5. Найдите наибольшую возможную разность между двумя из написанных чисел.

2. Найдите все квадратные трехчлены $f(x) = x^2 + ax + b$, для которых $f(f(-1)) = f(f(0)) = f(f(1))$.

3. На столе лежит 2019 камней. Петя и Вася играют в игру по следующим правилам. Ходят по очереди, начинает Петя. За один ход можно взять со стола 1 или 2 камня, но один и тот же игрок два раза подряд не может брать 1 камень. Проигрывает не имеющий хода. Кто из игроков сможет обеспечить себе победу вне зависимости от игры противника?

4. Для положительных чисел a, b и c докажите неравенство

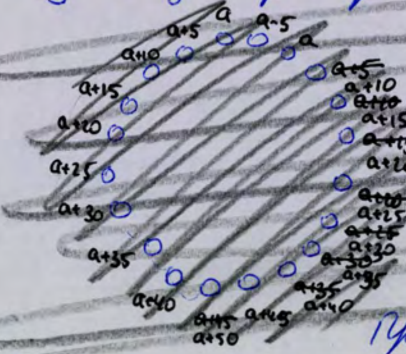
$$\frac{a^5}{b^3} + \frac{b^5}{c^3} + \frac{c^5}{a^3} \geqslant \frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a}.$$

5. В остроугольном треугольнике ABC опущены высоты BD и CE. Внутри треугольника взята точка X. Пусть X_1 — точка, симметричная X относительно прямой AB, X_2 — точка, симметричная X_1 относительно прямой BC, а X_3 — точка, симметричная X_2 относительно прямой CA. Точка M — середина отрезка XX_3. Докажите, что точки D, E и M лежат на одной прямой.

6. Существуют ли такие простые числа p, q и r, для которых число $(p^2-7)(q^2-7)(r^2-7)$ является точным квадратом?

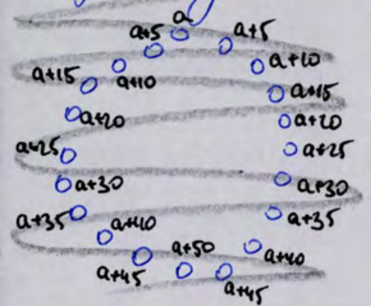
~~№1~~

~~Рассмотрим пример, и докажем, почему получить большую разницу нельзя. Пример:~~



~~разница ~~45~~ 50 – наибольшая, которую можно получить благодаря изменению 10 раз (ну т.е. наибольшая разность 2х чисел, находящихся в 10 промежутках друг от друга, где промежуток – расстояние между 2мя соседними числами), потому что в каждом из этих раз мы прибавим по 5, а больше 5 прибавить нельзя~~

~~Предположим, что можно получить большую разность, но уже тогда хотя бы на 11 промежутках. Она не больше 55.~~



№2.

$f(x)=x^2+ax+b$

Запишем условие задачи:

$f(f(-1))=f((-1)^2-a+b)=f(1-a+b)$

$f(f(0))=f(0^2+b)=f(b)$

$f(f(1))=f(1^2+a+b)=f(1+a+b)$

$\Rightarrow f(1-a+b)=f(1+a+b)=f(b)$

Запишем и эти функции:

$f(1-a+b)=(1-a+b)^2+a(1-a+b)+b=1-a+b-a+a^2-ab+b-ab+b^2+a-a^2+ab+b=1-a+3b-ab+b^2$

$f(b)=b^2+ab+b$

$f(1+a+b)=(1+a+b)^2+a(1+a+b)+b=1+3a+3b+3ab+a^2+b^2+a+a^2+ab+b=1+4a+4b+4ab+2a^2+b^2$

$f(1-a+b)=f(1+a+b)\Rightarrow \cancel{1}-a+\cancel{3b}-ab+\cancel{b^2}=\cancel{1}+4a+4b+4ab+2a^2+\cancel{b^2}$

$2a^2+5a+5ab=0$

$2a^2+a(5+5b)+0=0\,/:2$

$\cancel{a_{1,2}=\frac{-5-5b\pm\sqrt{(5+5b)^2}}{4}}$

$a^2+a(2{,}5+2{,}5b)+0=0$

$a_{1,2}=\frac{-2{,}5-2{,}5b\pm\sqrt{(2{,}5+2{,}5b)^2-4\cdot1\cdot0}}{2}$

$a_{1,2}=\frac{-2{,}5-2{,}5b\pm(2{,}5+2{,}5b)}{2}$

$a_1=0;\ a_2=-2{,}5-2{,}5b$

Подставим значение a и приравняем к $f(b)$:

если $a=0$, то:

$f(1+b)=f(b)$

$(1+b)^2+a(1+b)+b=b^2+ab+b$

$1+2b+\cancel{b^2}+a+\cancel{ab}+\cancel{b}=\cancel{b^2}+\cancel{ab}+\cancel{b}$

$1+2b+\underset{0}{a}=0$

$1+2b=0\Rightarrow b=-0{,}5$

если $a=-2{,}5-2{,}5b$, то:

$f(1+2{,}5+3{,}5b)=f(b)$

$f(3{,}5+3{,}5b)=f(b)$

$\cancel{(3{,}5+3{,}5b)^2+-2{,}5(1+b)(3{,}5+3{,}5b)+b=b^2+c}$

$(3{,}5+3{,}5b)^2+a(3{,}5+3{,}5b)+b=b^2+ab+b$

$12{,}25+24{,}5b+\overset{11{,}25}{\cancel{12{,}25}}b^2+3{,}5a+\overset{2{,}5ab}{\cancel{3{,}5ab}}+\cancel{b}=\cancel{b^2}+\cancel{ab}+\cancel{b}$

$12{,}25+24{,}5b+11{,}25b^2+3{,}5(-2{,}5-2{,}5b)+2{,}5(-2{,}5-2{,}5b)b=0\,|\cdot\overset{4}{\cancel{100}}$

$49+98b+45b^2-14\cdot2{,}5(1+b)+\cancel{25}b(1+b)=0$

$49+98b+45b^2-35-35b-25b-25b^2=0$

$14+38b+20b^2=0\,|:2$

$10b^2+19b+7=0\,|:10$

$b^2+1{,}9b+0{,}7=0$

$b_{1,2}=\frac{-1{,}9\pm\sqrt{1{,}9^2-2{,}8}}{2}$

$b_{1,2}=\frac{-1{,}9\pm\sqrt{3{,}61-2{,}8}}{2}$

$b_{1,2}=\frac{-1{,}9\pm0{,}9}{2}$

$b_1=-1{,}4\ ;\ b_2=-0{,}5$

Отсюда получаются возможные многочлены.

При $a=0$, $b=-0{,}5$:

$f(x)=x^2-0{,}5$

При $b=-1{,}4$; $a=-2{,}5(1+b)$:

$\cancel{f(x)=x^2+Bx-1{,}4}$

$f(x)=x^2+x-1{,}4$

При $b=-0{,}5$; $a=-2{,}5(\overset{1+b}{\cancel{0{,}5}})$

$f(x)=x^2-1{,}25x-0{,}5$

Ответ: их 3:

$f(x)=x^2-0{,}5$; $f(x)=x^2+x-1{,}4$; $f(x)=x^2-1{,}25x-0{,}5$

№6.

Предположим, что такие числа бывают. Тогда, либо все 3 числа (p,q,r) равны $\Rightarrow$ каждая скобка является квадратом $\Rightarrow p^2-7=a$ (где a – квадрат) $\Rightarrow p^2-7=l^2$

$7=(p-l)(p+l)\Rightarrow p=4,\ l=3$ (т.к. $p\in N$ и $l\in N$), то 4 – не простое. Аналогично и в случае когда 2 из 3х чисел (p,q,r) равны, т.к. тогда оставшаяся скобка – точный квадрат, ведь произведение их равных чисел – точный квадрат. Но тогда оставшееся число является 4, и 4 – не простое. А значит все 3 числа различны. Но и в этом случае это невозможно.

Ответ: нет, таких простых p,q,r не существует.

Чистовик

№3.

Рассмотрим нашу игру на примере 1, 2, 3, 4... ~~камней~~ и запишем результат в полоску:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	...	2019
П	П	В	П	П	В	В	П	П	...	В

При 1к камнях всегда побеждает Петя

При 3 всегда Вася (после Пети 1 или 2 камня остается)

При 4к, если Петя берет 1 камень первым ходом, то он попадает в позицию 3 камня, в которой побеждает второй игрок. Т.к. первым в этой позиции ходит Вася => Петя стал вторым игроком => победа за ним. Аналогично и с клеткой 5.

Из клетки 6 у нас для Пети есть только 2 варианта: в клетку 5 или 4, но обе проигрышные для него, т.к. из них побеждает первый игрок, т.е. в данном случае Вася.

Но вот клетка 7 проигрышна для Пети, т.к. выигрышная из неё (за 1 ход) это 6, но если Вася сходит в клетку 8, Петя проиграл. Аналогично рассуждаем и для клетки 8, только в отношении Васи. Пете достаточно сходить в клетку 7, и он выиграет в любом случае. В случае 9 Петя ходит 2 в первый раз, и 100% выигрывает. Таким образом продолжаем заполнять эту таблицу до 2019.

В клетке 2019 будет $\frac{2019-3}{2} = 1008$ - четн. => Второй игрок.

Тактика - попадать в нужные клетки в нашей полоске.

Ответ: победит Вася.