Задание 4.

Как мы видим, 2023 можно поделить на 17, $\Rightarrow$,

$16^{2023}+1 = (16+1)\cdot(16^{2022}-16^{2021}+\ldots-16^{1}+1)$. Каждое слагаемое во 2 скобке можно сравнить с 1 по модулю числа 17. Поскольку слагаемых 2023 и оно делится на 17, то вторую скобку можно поделить на 17, поэтому $(16^{2023}+1)$ делится на 289.

Поскольку $x = \frac{16^{2023}+1}{17}$, то если возвести в квадрат получим

$x^2 = \cancel{\left(16^{2023}+1\right)\left(\frac{16^{2023}+1}{289}\right)} = (16^{2023}+1)\left(\frac{16^{2023}+1}{289}\right)$

но т.к. $\frac{16^{2023}+1}{289} < 16^{2022}$, то мы не нашли искомое.

Для этого умножим X на 16:

$X = (16^{2023}+1)\cdot\frac{16}{17}$;

$X^2 = (16^{2023}+1)\left(256\cdot\frac{(16^{2023}+1)}{289}\right)$. Поскольку $\left(256\cdot\frac{16^{2023}+1}{289}\right)$ целое и в восьмеричной системе счисл. записывается 2023, восьмеричная запись x^2 будет в виде 2-ух одинаковых n цифр. Таким образом, n может равняться 2023.

75

Выход: $11^{40} - 11^{50}$

$12^{25} - 12^{30}$

СКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

6850

1	2	3	4	5	6	сумма
4	4	0	3	4	0	15

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Владимир

Дата 16. 03. 2019

* *

10–11 класс. Второй вариант

1. Имеется 9 черных ладей и n белых. При каком наибольшем n их можно расставить на шахматной доске так, чтобы одноцветные ладьи не били друг друга? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Даны положительные числа x, y, z. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{xyz\,(x+y+z)}{x^4+y^4+z^4}.$$

3. Окружность ω единичного радиуса проходит через вершины B и C треугольника ABC и вторично пересекает его стороны AB и AC в точках K и L соответственно. На лучах BL и CK отмечены соответственно такие точки P и Q, что $BP = AC$ и $CQ = AB$. Найдите расстояние между центрами описанных окружностей треугольников APQ и KBC.

4. Шестнадцатиричная запись квадрата натурального числа x представляет собой два одинаковых соседних блока из n цифр. Может ли n равняться 2023?

5. В однокруговом турнире по настольному теннису участвует $2k$ спортсменов. В каждом туре все участники проводят по одному матчу. Какое наименьшее число туров надо сыграть, чтобы при любом расписании игр обязательно нашлось трое теннисистов, сыгравших друг с другом?

6. Имеется три одинаковых конуса с общей вершиной, касающихся друг друга внешним образом, а также два шара, касающихся внешним образом друг друга и всех конусов. Радиусы шаров относятся как 1 : 3. Найдите угол при вершине конусов. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении).

Задание 2

$A = \frac{xyz(x+y+z)}{x^4+y^4+z^4}$; $x, y, z > 0$

1) Запишем неравенство Коши-Буняковского-Шварца для трех переменных a, b, c:

$$(a^2+b^2+c^2)\cdot(b^2+c^2+a^2) \geq (ab+bc+ac)^2$$

Извлечем квадратный корень:

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ac$$

Это неравенство будем использ. в дальнейшем.

2) Заметим, что:

$$x^4+y^4+z^4 \geq x^2y^2+y^2\cdot z^2+x^2\cdot z^2$$

Это следует из неравенства 3.
Если $a=x^2$, $b=y^2$, $c=z^2$, тогда

$$A = \frac{xyz\cdot(x+y+z)}{x^4+y^4+z^4} \leq \frac{xyz(x+y+z)}{(xy)^2+(yz)^2+(xz)^2} = \frac{x^2yz+xy^2z+xyz^2}{(xy)^2+(yz)^2+(xz)^2}$$

3) Сделаем еще одну замену:

$xy = a > 0$, $yz = b > 0$, $xz = c > 0$

$$A \leq \frac{ab+bc+ac}{a^2+b^2+c^2}$$

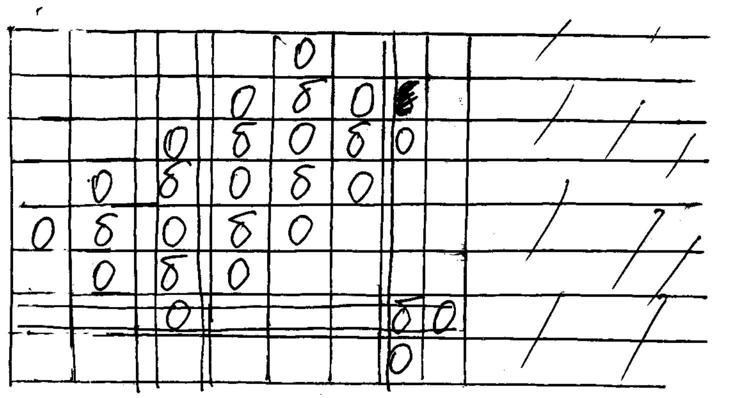
По тому же самому неравенству 3, мы получаем, что $A \leq 1$.

Максимальное значение A не превосходит 1.
Равенство достигается при $x=y=z$.

$$A = \frac{x^3\cdot 3x}{3x^4} = 1.$$

Ответ: 1.

Задание 1.



0 - белые
б - черные

продолжение №1 →

Задание №1. (продолжение)

В каждой строке и каждом столбце может стоять не больше, чем на 1 белую ладью больше, чем черных, поэтому просуммировав по всем строкам и столбцам, кол-во белых получим 18+16 = 34. (все черные по 2 раза и + один за каждую строку и каждый столбец), при этом каждую ладью нужно посчитать 2 раза, =>, может быть не более, чем 17 белых ладей.

Ответ: 17.

Задание 5

Утверждение $(k+1)$ туров достаточно, чтобы нашлись такие 3 игрока, которые сыграли каждый с каждым. Докажем это.

Если было проведено $(k+1)$ туров, то каждый игрок сыграл $(k+1)$ матч. Выберем случайного игрока, назовем его α; среди тех $(k+1)$ игроков, с которыми он играл, выберем случайного и назовем его β. Игроков, с которыми не играл α будет ровно $(k-2)$. Игрок β также провел $(k+1)$ матч. Поэтому всегда найдется такой человек, который сыграл и с α, и с β.

Получается, что после проведения $(k+1)$ туров условие будет всегда выполняться. Найдутся 3-е игроков, игравших друг с другом.

Теперь приведем пример, когда прошло k туров, а условие не выполнилось. Для этого выберем случайного игрока и назовем его M.

M сыграл с k человек — назовем это множество Г.

M не играл с $(k-1)$ чел. - назовем это множество K, тогда пусть каждый игрок из множества Г сыграл с каждым игроком из множества K. В таком случае получаем, что каждый игрок сыграл k матчей (т.е. было проведено k турниров). И не нашлось таких 3-ех, которые играли между собой.

Знаит, минимальное достаточное кол-во турниров будет $(k+1)$.

Ответ: $k+1$