САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

1752

73

1	2	3	4	5	6	сумма
4	4	2,5	1	3		14,5

73

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Москва.

Дата 10.03.2019

* *

10–11 класс. Десятый вариант

1. Какое наибольшее количество ладей можно расставить на шахматной доске так, чтобы каждую ладью било не более двух других? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Числа x, y, z — углы некоторого треугольника, один из которых не меньше $\frac{\pi}{2}$. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \cos x + \cos y + \cos z + \cos(x - y) + \cos(y - z) + \cos(z - x).$$

3. Дан четырехугольник $ABCD$, отличный от параллелограмма. На лучах AB, CB, CD и AD вне сторон четырехугольника $ABCD$ выбираются соответственно точки K, L, M и N так, что $KL \parallel MN \parallel AC$ и $LM \parallel KN \parallel BD$. Найдите геометрическое место точек пересечения диагоналей параллелограмма.

± **4.** Натуральное число x в восьмеричной системе 2018-значное, и его цифры повторяются через одну. Оказалось, что восьмеричная запись x^2 содержит только цифры 3 и 4, причем в равном количестве. Найдите x^2 (в восьмеричной системе).

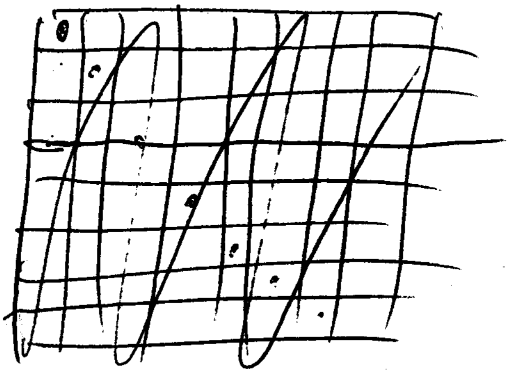
∓ **5.** В однокруговом турнире по настольному теннису участвовало n теннисистов ($n \geqslant 3$). Будем говорить, что игрок A *круче* игрока B, если A выиграл у B или найдется такой игрок C, что A выиграл у C, а C выиграл у B. При каких n по итогам турнира могло оказаться так, что каждый игрок круче всех остальных? Ничьих в теннисе не бывает.

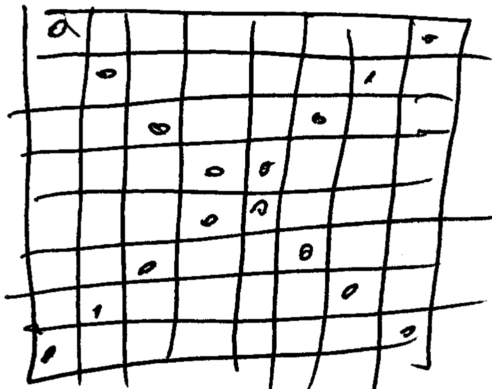
6. На столе лежат два конуса с общей вершиной O, касаясь друг друга внешним образом. Угол между их осями симметрии равен $\operatorname{arctg} \frac{12}{5}$. Найдите максимальный угол при вершине большего из двух конусов с вершиной O, которые лежат на столе и касаются внешним образом первых двух конусов. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении.)

шестовик

① ответ: 16

Приведу пример





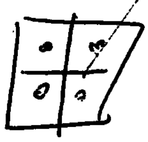
~~Докажем, что больше нельзя.~~

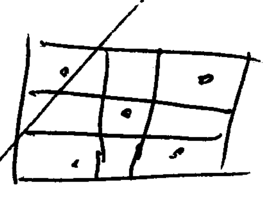
~~Предположим, что~~ Пусть получилось, что можно поставить больше 16 ладей. Тогда, по принципу Дирихле, у кого то в одном ряду или столбце

Докажем, что больше нельзя.

Докажем по индукции, что max число ладей для доски $n \times n = 2n$, если n-четное, и $2n-1$, если n-нечетное

~~Д~~ База индукции:

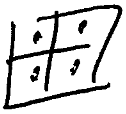
для 2: 

~~для~~ для 3: 

(на следующей странице)

Докажем по индукции, что для доски $2k \times 2k$ максимальное число ладей — $4k$.

База индукции:



Замечание: Мы можем переставлять строки и столбцы местами. От этого ~~число~~ ~~ладей~~ ничего не поменяется. Также можно отбрасывать столбцы и строки.

Тогда пусть для k — все доказано.

Пусть кто-то в таблице $2(k+1) \times 2(k+1)$ разместил (x) больше чем $4k$ ладей. Тогда, по признаку Дирихле, в каком-то столбце должно стоять 3 ладьи.

Тогда какая-то из этих ладей стоит между 2-мя $\Rightarrow$ тогда в её строке больше нет ладей.

аналогично есть строка, по признаку Дирихле, в которой 3 ладьи и ~~для~~ в столбце с центральной ладьей больше нет ладьи. ~~Перест~~ Отбросим этот столбец и эту строку. Тогда количество ладей уменьшилось не больше чем на 2.

По признаку Дирихле, мы опять можем найти столбец и строку, в которой стоит только одна ладья и ~~отбросить~~ ~~их~~ мы можем отбросить их.

Уже получилась теперь таблица $2k \times 2k$, но количество ладей стало

$x-4 \geq (2k+1)2+1-4 = 4k+1 > 4k$, но для $2k \times 2k$ максимальное число ладей — $4k$. Противоречие. Ч.т.д.

Ответ: 16 ладей.

чистовик

2) Ответ: $1+2\sqrt{2}$

пусть $z \in [\frac{\pi}{2}; \pi) \Rightarrow \frac{z}{2} \in [\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2})$

Найдем $\max \cos\frac{z}{2}$, т.к. $\frac{z}{2} \in [\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2})$, где $\cos(\frac{z}{2})$ убывает,

~~Т~~ то $\max \cos\frac{z}{2} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

1) т.к. $\cos z \in [\frac{\pi}{2}; 2\pi)$, где $\cos z$ убывает, то

$\max(\cos z) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$

2) т.к. $\cos x \in [-1; 1]$, то ~~$\max(\cos(x-y)$~~ $\max(\cos(x-y)) = 1$

3) $\cos x + \cos(z-x) = 2\cos\frac{z}{2} \cdot \cos(\frac{z}{2}-x) \leq 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 = \sqrt{2}$

4) $\cos y + \cos(y-z) = 2\cos\frac{z}{2} \cdot \cos(y-\frac{z}{2}) \leq 2\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 = \sqrt{2}$

$\Downarrow$

~~max(cos x + co~~ $\cos x + \cos y + \cos z + \cos(x-y) + \cos(y-z) + \cos(z-x) \leq$

$\leq 0 + 1 + \sqrt{2} + \sqrt{2} = 1 + 2\sqrt{2}$

Приведем пример:

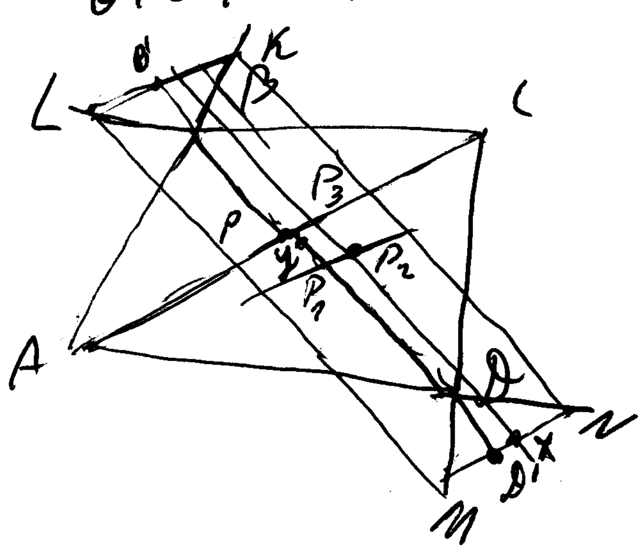
$x = \frac{\pi}{4}$

$y = \frac{\pi}{4}$

$z = \frac{\pi}{2}$ ✓

ч.т.д.

③ Ответ: прямая



Как известно, точка пересечения диагоналей в параллелограмме — точка пересечения средних линий

Т.к. $LK \parallel AC$, то $\angle LKA = \angle KAC$ и $\angle LCA = \angle CLK \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle KBL$

Т.к. $MN \parallel AC$, то $\angle ACM = \angle DMN$, а $\angle ANM = \angle DAC \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle ACD \sim \triangle NMD$

Пусть k — коэффициент подобия $\triangle LKB$ и $\triangle CAB$,

тогда $k = \frac{LK}{AC}$ т.к. $LK = MN$, то k = коэффициент подобия $\triangle NMD$ и $\triangle ACD$

Пусть $AC \cap BD = P$, а $BD \cap LK = B'$, а $BD \cap MN = D'$

пусть L_1 — средняя линия $LKMN$ и $L_1 \parallel AC$, а $L_2 \parallel BD$ и L_2 — средняя линия $LKMN$.

$P_1 - L_1 \cap BD$; $P_2 - L_1 \cap L_2$; $P_3 - AC \cap L_2$

Т.к. $L_1 \cap AC \Rightarrow P_1P_2 \cap PP_3$, а т.к. $L_2 \parallel BD \Rightarrow P_2P_3 \cap BD \Rightarrow$

$\Rightarrow PP_3P_2P_1$ — параллелограмм $\Rightarrow \angle PP_1P_2 = 180 - \angle P_3PP_1$

~~B'~~ P_1 — середина $B'D'$, т.к. L_1 — средняя линия

$$B'D' = \underbrace{BP + BP\cdot k}_{\text{т.к. } \triangle ABC \sim \triangle KBL} + \underbrace{PD + PD\cdot k}_{\text{т.к. } \triangle ACD \sim \triangle NMD} = BP + PD + k(BP+PD)$$

$$PP_1 = |B'P_1 - B'P| = \left|\frac{B'D'}{2} - (BP + kBP)\right| =$$

$= \left| \frac{(PB+PD)(k+1)}{2} - PB(k+1) \right| = \frac{|PD-PB|(k+1)}{2}$ штрихи

Пусть $X = L_1 \cap MN$ т.к. $P_1P_2 \parallel MN$, то и $P_3X \parallel PD'$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow D'X = P_1P_2$ (т.к. P_1P_2XD' — параллелограмм)

X — середина MN, т.к. L_2 — средняя линия

$D'X = |MX - MD| = \left|\frac{k \cdot AC}{2} - CP \cdot k\right| = k \cdot \left|\frac{AC}{2} - CP\right| = P_1P_2$

пусть y такая, что $Py = \frac{PD-PB}{2}$ (если $\frac{PD-PB}{2} < 0$, то y ~~межд~~ между B и P)

тогда $P_1y = PP_1 - Py = \left|\frac{(PD-PB)(k+1)}{2} - \frac{(PD-PB)}{2}\right| = \frac{k|PD-PB|}{2}$

Рассмотрим $\triangle yP_1P_2$

т.к. $\angle yP_1P_2$ — неизменен, а $\frac{yP_1}{P_1P_2} = \left|\frac{PD-PB}{AC-2CP}\right| = const$, *

тогда все эти треугольники подобны.

Значит $\angle P_2yP_1$ — неизменен $\Rightarrow$ все точки P_2 пересечения диагоналей лежат на ~~одн~~ прямой yP_2

это мое включение

ч.т.д.

* Если ~~$PD +$~~ $AC - 2CP = 0$, то $\frac{P_1P_2}{yP_1} = 0$. Дальше рассуждения те же.

$\begin{cases} PD - PB = 0 \\ AC - 2CP = 0 \end{cases}$ — невозможно

чистовик

(4) x^2 — ~~всё~~ имеет четное число знаков, что бы 3-ка и 4-ка встречались одинаковое число раз.

Признака для $x^2 \vdots 7$, т.к. сумма символов $\vdots 7$ (признак делимости на 7 в восьмеричной системе счисления)

Рассмотрим остатки при делении на 8 у x^2.

x	x^2
1	1
2	4
3	1
4	0
5	1
6	4
7	1

значит x^2 не может оканчиваться на 3, значит оно оканчивается на 4, значит x либо оканчивается на 2, либо на 6

~~сумма~~ сумма цифр числа $x = a \cdot 1009 \vdots 7$ (по признаку делимости на 7) $\Rightarrow a \vdots 7$, где a — сумма предыдущих цифр.

$a =$

если x оканчивается на 6, то $a = 1+6$, но тогда

$x < 17\cdot 10^{2018}$ (все в восьмеричной) $\Rightarrow x^2 < (17\cdot 10^{2018})^2 =$

$= 341\cdot 10^{4034}$ — нечетное число знаков.

Значит

$a = 5+2 \Rightarrow x$ должен $= \underbrace{52\ldots 52_8}_{\cancel{1009}\ 2018}$

Ответ: $x^2 = (52\ldots52_8)^2 = ?$

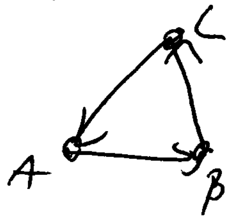
чистовик

5 ~~При Ответ: При простом~~ нечетном ~~при любом $n \neq 4$~~ ~~n~~

при всех нечетных n

Докажем ~~для~~ по индукции

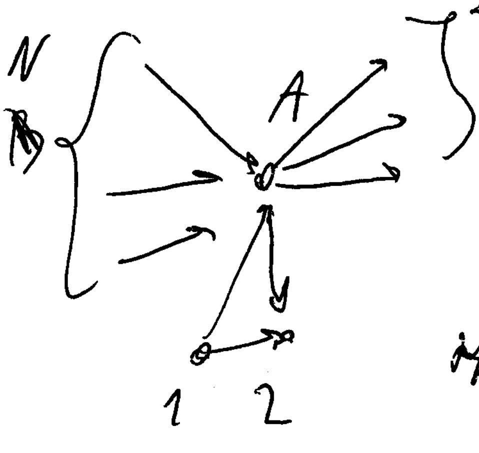
База индукции:



~~При добавлении 2-ух точек~~

Шаг индукции. Покажем, как добавить 2-ух ~~ст~~ игроков

~~A~~ Пусть M — множество игроков, которые выиграли у игрока A, а N — множество игроков, которым проиграл ~~B~~



Пусть первый игрок выиграет у игрока A и второго (первый — один из добавленных, второй — второй добавленный), а всем остальным ~~проиграет~~ проиграет, а 2-ой проиграет A, но выиграет всех остальных.

Тогда 2-ой круче M и N. Он так же круче 1-го, т.к. он выиграл $C \in N$, а C выиграл 1-го, также ~~A от 2-о~~ -ой круче чем A, т.к. ~~A выиграл $C' \in M$~~, а A проиграл C, а C проиграл 2-ому.

Так же A круче 2-го, т.к. выиграл, 1-ый круче 2-го, т.к. выиграл у него, а любой другой игрок выиграл у 1-го, а ~~и~~ 1-ый у второго, значит любой другой игрок круче 2-го

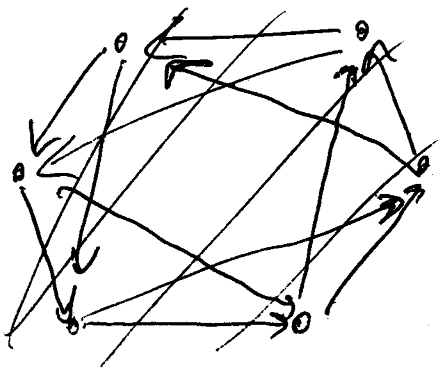
1-вый ~~Игр~~ Игрок круче чем 2-ой и чем A, т.к. тот у него выиграл. Так же тот круче всех остальных, т.к. все остальные проиграли 2-ому, а второй проиграл 1-ому.

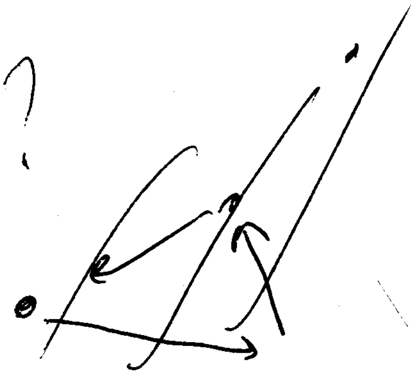
A круче чем 1-вый, т.к. он выиграл $i' \in M$, а i' выиграл 1-го. Все остальные (кроме 1-го) круче второго, т.к. они его выиграли. ~~Значит все~~

Значит мы сможем добиться того, чтобы каждый был опять круче каждого.

~~Докажем~~, что ~~для~~ для 2 ~~четных нельзя~~.

Приведем базу индукции для четного n





?