ꞌУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

1

2894

83

1	2	3	4	5	6	сумма
4	0,5	4	0,5	3,5	4	16,5

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Нижний Новгород

Дата 22.03.2019

* *

10–11 класс. Седьмой вариант

1. Имеется один черный ферзь и n белых. При каком наибольшем n эти фигуры можно расставить на шахматной доске так, чтобы белые ферзи не били друг друга? Ферзь не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Числа x, y, z — углы треугольника. Найдите максимальное значение выражения

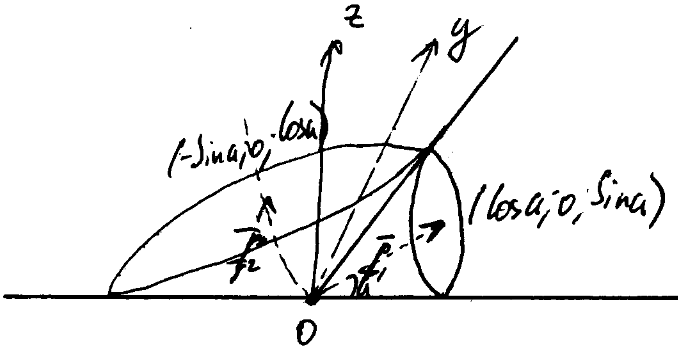
$$A = \frac{\sin x \cdot \sin y \cdot \sin z}{\sin x + \sin y + \sin z}.$$

3. Дан остроугольный треугольник ABC. В него вписан прямоугольник $KLMN$ так, что точки M и N лежат соответственно на сторонах AB и AC, а точки K и L — на стороне BC. Пусть AD — медиана треугольника ABC, E — середина его высоты, опущенной из вершины A, O — точка пересечения диагоналей прямоугольника. Найдите угол DOE.

4. Даны натуральные числа x и y. В восьмеричной системе они $4n$-значные, причем в записи x цифры повторяются через одну, а в записи y — через три. Оказалось, что восьмеричная запись $x \cdot y$ состоит из последовательных блоков по 4 одинаковых цифры. При каких n это возможно?

5. В однокруговом турнире по настольному теннису участвовало n теннисистов с различными рейтингами ($n > 4$). Во всех партиях, кроме двух, победил участник с более высоким рейтингом, но теннисист с самым маленьким рейтингом выиграл у теннисиста с самым большим рейтингом, а теннисист с предпоследним рейтингом выиграл у теннисиста со вторым рейтингом. Сколькими способами можно расставить спортсменов в ряд так, что каждый (кроме самого правого) выиграл у своего соседа справа?

6. На столе лежат три конуса с общей вершиной, касаясь друг друга внешним образом. Оси симметрии первых двух конусов взаимно перпендикулярны. Два шара вписаны в третий конус и касаются друг друга внешним образом. Найдите максимальное отношение радиусов большего и меньшего шаров.



Пусть $\bar{r}_1=(\cos a; 0; \sin a)$
$\bar{r}_2=(-\sin a; 0; \cos a)$,
$\bar{r}_3=(x y z)$.
Условием касания $3^{\text{его}}$ конуса плоскости xy такого $\bar{r}_3$ ~~о~~ образует угол c плоскостью xz. Условия касания $3^{\text{его}}$ цилиндра остальных: Углом между $\bar{r}_3$ и $\bar{r}_1$ является $a+c$, а между $\bar{r}_3$ и $\bar{r}_2 = b+c$, что также равно $90-a+c$.

Теперь запишем это через скалярные произведения:
$\bar{r}_3\cdot(0;0;1)=\sin c$
$\bar{r}_3\cdot\bar{r}_1=\cos(a+c)$
$\bar{r}_3\cdot\bar{r}_2=\cos(b+c)=\sin(a-c)$. Таким образом: $z=\sin c$; $\cos(a+c)=x\cdot\cos a+z\cdot\sin a$.
$\sin(a-c)=-x\cdot\sin a+z\cos a$. Теперь домножим последнее равенство на $\cos a$, а предыдущее равенства на $\sin a$ и сложим их:
$\sin a\cdot\cos(a+c)+\cos a\cdot\sin(a-c)=z$, используя ф-лы косинуса суммы и синуса разности преобразуем левую часть в ~~с~~ следующее равенство:
$\sin a\cdot\cos(a+c)+\cos a\cdot\sin(a-c)=z$
$\sin a\cdot\cos a\cdot\cos c-\sin^2 a\cdot\sin c+\cos a\cdot\sin a\cdot\cos c-\cos^2 a\cdot\sin c=\cos c\cdot\sin 2a-\sin c$.
подставляем $z=\sin c$: $\cos c\cdot\sin 2a=2\sin c$; тогда $\operatorname{tg} c=\frac{\sin 2a}{2}$.
max. правой части является $0{,}5$ и достигается он при $\angle a=45^\circ\to$
$\to$ это значит, что первые 2 цилиндра одинаковые. Чтобы найти max c. нужно решить ур-ие: $\operatorname{tg} c=0{,}5\Rightarrow \operatorname{ctg} c=2\Rightarrow\frac{1}{\sin^2 c}=5\Rightarrow\sin c=\frac{1}{\sqrt5}$.

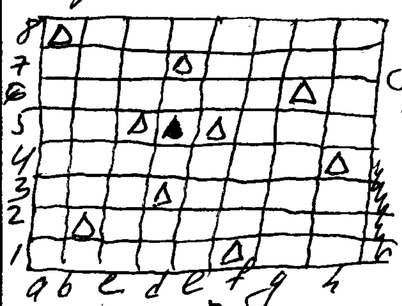
Тогда: $\frac{R}{r}=\frac{1+\sin c}{1-\sin c}=\frac{1+\frac{1}{\sqrt5}}{1-\frac{1}{\sqrt5}}=\frac{\sqrt5+1}{\sqrt5-1}^{(\sqrt5-1)}=\frac{4}{5+1-2\sqrt5}=\frac{2}{3-\sqrt5}$ ✓

по условию: $x=abab\ldots abab$; $y=cdef\ldots cdef$.
Допустим $ab=22$, а $cdef=4000$
Тогда при $n=1$: $x\cdot y=11110000$
$n=2$: $x\cdot y=1111\,2222\,1111\,0000$
$n=3$: $x\cdot y=1111\,2222\,3333\,2222\,1111\,0000\ldots$ и так до $n=7$:
...
$n=7$: $x\cdot y=1111\,2222\,3333\,4444\,5555\,6666\,7777\,6666\,5555\,4444\,3333\,2222\,1111\,0000$

$x=\underbrace{1010\ldots101}_{4n-1}\cdot 22$ $y=\underbrace{10001000\ldots10001}_{4n-3}\cdot 4000$

№1

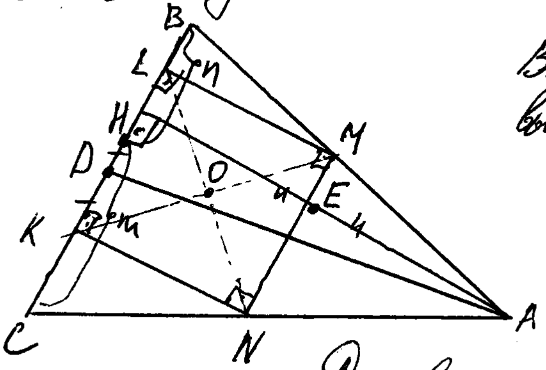
Пример:



Больше 9 белых ферзей не может быть, т.к. в 1 строке должно быть не больше 1 белого ферзя, не считая той, где будет стоять 1 чёрный ферзь, я там возможно поставить 2 белых ферзя. Пример:
белые: a8; b2; c5; d3; d7; e5; g6; h4
черный: d5

Ответ: $n = 9$.

№3



Введем дополнительные обозначения: H – основание высоты из A; $k = \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$; $\frac{CH}{HB} = \frac{m}{n}$.

Докажем, ~~что~~ $\angle DOE = 180°$, для этого необходимо доказать, что т. O лежит на отрезке DE. Чтобы это сделать, необходимо доказать, что $\overline{DO}$ коллин. $\overline{DE}$.
Введём векторы: $\bar a = \overline{BC}$; $\bar h = \overline{HA}$

Док-во:

$\overline{DK} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{k+1}\cdot\frac{m}{m+n}\right)\cdot\bar a$; $\overline{DM} = \left(\frac{1}{k+1}\cdot\frac{n}{m+n} - \frac{1}{2}\right)\cdot\bar a + \frac{1}{k+1}\cdot\bar h$

$\overline{DO} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{k+1}\right)\cdot\left(\frac{n-m}{m+n}\cdot\bar a + \bar h\right)$

$\overline{DE} = \left(-\frac{1}{2} + \frac{m}{m+n}\right)\bar a + \frac{\bar h}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{n-m}{m+n}\cdot\bar a + \bar h\right)$

$\}$ $\overline{DO}$ коллин. $\overline{DE}$, т.к. они пропорциональны с коэф. $\frac{1}{k+1}$: $\overline{DO} = \frac{1}{k+1}\overline{DE}$

$\Downarrow$

т. O лежит на DE

$\Downarrow$

$\angle DOE$ – развернутый.

Ответ: $\angle DOE = 180°$

№5

Для того, чтобы начать выполнение задачу, необходимо выставить игроков согласно их рейтингу: от 1 до n (относительно к слабому). Рассмотрим все возможные случаи расстановки. 1) когда 1 находится справа: ...1 и тогда слева становится самый сильный (n): n...1. 2) Рассмотрим случай, когда они стоят по порядку убывания силы: n, n-1, ..., 3, 2, 1. В этом случае, если перед 1 стоит не 2, тогда 2 должен стоять перед n-1, тогда: n...2; n-1...1 (числа стоят по возр.). Тогда нужно разбить все числа от 3 до n-2 на 2 мн-ва. Получаем 2^{n-4} способ.

3) В случае, если в конце стоит не 1, тогда мы ставим 1 перед n: ...1; n; ... Рассмотрим варианты с 2 на конце: ...1; n...2, тогда опять числа нужно разбить от 3 до n-1 на 2 подмножества. Получаем 2^{n-3} способа с учётом того, что нам не подходит вариант: ... 1; n; n; n-1; 2. Итого: $2^{n-3}-1$ способ.

4) Затем рассмотрим случай, когда в конце и не 1 и не 2. Тогда 2 стоит перед 1 или перед n-1. Начнём с варианта: ...2; 1; n... Опять же разбиваем от 3 до n-1 на 2 мн-ва, при условии, что левое не может состоять исключительно из n-1. Итого: $2^{n-3}-1$ возможность.

5) Последним вариантом является случай, когда в конце не 1 и не 2 и ~~стоят~~ они стоят перед n-1: ...2; n-1; ... 1; n или ...1; n...2; n-1...

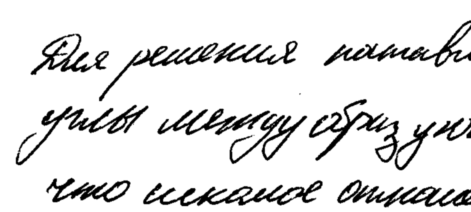
числа от 3 до $n-2$ надо разбить на 3 подмножества без ограничений:
Получаем $3^{n-4}\cdot 2$. Итого: $2^{n-4}+(2^{n-3}-1)\cdot 2+3^{n-4}\cdot 2+1=2\cdot 3^{n-4}+5\cdot 2^{n-4}-1$

№2.

~~При условии~~ Предположим, что все углы $=60^\circ$, тогда ~~под~~ выражение $A=0{,}25$. Необходимо доказать, что больше выражение не может быть. Поменяю переворачиваем искомое выражение и делим 3 на то, что мы получили, это будет равно утроенному искомому выражению:
$$\frac{3}{\frac{1}{\sin x\sin y}+\frac{1}{\sin x\cdot\sin z}+\frac{1}{\sin y\sin z}}.$$
Это является средним гармоническим $\sin x\cdot\sin y$; $\sin y\cdot\sin z$; $\sin x\cdot\sin z$. Используя нер-во о среднем гармоническом получим следующее неравенство:
$$\frac{3}{\frac{1}{\sin x\cdot\sin y}+\frac{1}{\sin x\cdot\sin z}+\frac{1}{\sin y\cdot\sin z}}\le\sqrt[3]{(\sin x\cdot\sin y\cdot\sin z)^2}.$$
Для того, чтобы доказать, что max. значение равно 0,25, нам необходимо доказать, что правая часть не превосходит 0,75. Найдём max. $\sin x\cdot\sin y\cdot\sin z$.
пусть $\frac{x+y}{2}=p$ $\frac{x-y}{2}=\Delta$: $\sin x\cdot\sin y=\sin(p+\Delta)\cdot\sin(p-y)=(\sin p\cdot\cos\Delta+\sin\Delta\cos p)\cdot$
$\cdot(\sin p\cdot\cos\Delta-\sin p\cdot\cos\Delta)=\sin^2 p\cdot\cos^2\Delta-\sin^2\Delta\cdot\cos^2 p=\sin^2 p-\sin^2\Delta\le\sin^2 p.$?
Таким образом, если какие-либо $\lfloor 1-\sin^2 p\rfloor$ два угла не равны, заменяв их на их полусумму мы увеличим результат => max. возможен только при $\angle x=\angle y=\angle z=60^\circ$. Ответ: $\angle x=\angle y=\angle z=60^\circ$. ?

№6.

Для решения поставленной задачи введём новые обозначения. Пусть углы между образующими и осями цилиндров $=a;b;c$. Докажем, что искомое отношение зависит только от c, причём максимальное значение оно будет принимать при max. c. и выведем ф-лу пересечения. Нарисуем $3^{ий}$ конус в осевом сечении:



$$\sin c=\frac{BC}{AB}=\frac{R-r}{R+r}=\left(\frac{\frac{R}{r}-1}{\frac{R}{r}+1}\right),\ \text{тогда}\ \frac{R}{r}=\frac{1+\sin c}{1-\sin c}.$$
Очевидно, что $\frac{R}{r}$ растёт при росте c, также необходимо отметить, что с ростом $\angle c$, $\sin c$ также растёт. Перейдём к конусам. Рассмотрим плоскость, проходящую через оси первых 2 конусов. Т.к. угол между конусами равен 90° => в сечении 2 смежных угла. Решим задачу, введя систему координат: началом будет являться вершина конусов. Ось X будет проходить вдоль образующей 1 конуса, которой он касается плоскости. В обратном направлении от оси 2 конус касается плоскости. Тогда плоскость касания - xy, ну а ось z - $\perp$ плоскости, находящаяся вверх.

Чистовик. 1

Продолжение (№4)

1 Так как в восьмеричной системе счисления не может быть цифры 8, то сразу будет наблюдаться искажение полученной записи. Например:

при $n=8$: $x \cdot y = 10102020\,3030\,4040\,5050\,6060\,7071010070\,70606\ldots0101 \cdot$

$ab \cdot cdef$. Так как это число к необходимому виду привести невозможно, что будет наблюдаться и при $n \geq 8 \Rightarrow n < 8$.

Ответ: $n \in \{1, 2, \ldots 7\}$.