3) $p \equiv 4$

$q \equiv 4$

$pq \equiv_5 1$

$1 + 1 + 1 \equiv 3 \pmod 5$

Противоречие

4) $p \equiv_5 0 \Rightarrow$

$p = 5$ (простое

$25 + 5q + q^2 = a^2$

~~mod~~

а) Смотрим по модулю 3

$25 \equiv_3 1$

$q^2 \equiv 1$ если $q^2 \equiv_3 0$

$\left[\begin{array}{l} 5q \equiv_3 2 \\ 5q \equiv 0 \\ 5q \equiv 1 \end{array}\right.$

если $q^2 \equiv_3 0 \Rightarrow$

$q = 3$

$5^2 + 5 \cdot 3 + 3^2 = a^2$

$49 = a^2$

$a = 7$ $p = 5$ $q = 3$

если $q^2 \equiv 1$

$\underset{1}{25} + \underset{1}{5q} + \underset{1}{q^2}$

$1 + 1 + 1 \equiv_3 0 \Rightarrow a^2$

Эти аналогично, получаем, что $p \vdots 5$, $q \vdots 3 \Rightarrow$

$p = 5$, $q = 3$, или же $q = 5$, $p = 3$,

$5^2 + 5 \cdot 3 + 3^2 = 49$ $49 = 7^2$ (И.)

Ответ: $p = 3$, $q = 5$, ~~$a = 7$~~

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

1	2	3	4	5	6	сумма
4	0	[illegible]	[illegible]	2	2	10

6063

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (8–9 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Санкт-Петербург

Дата 24.02.2019.

* *

8–9 класс. Первый вариант

1. Маша на свой день рождения принесла в школу конфеты, оставила несколько конфет себе, а остальные раздала шестерым своим подружкам. Оказалось, что у всех девочек разное число конфет и количество конфет у любых четырех девочек больше, чем у трех оставшихся. Какое наименьшее количество конфет Маша могла оставить себе?

2. При каких a квадратные трехчлены $x^2 + ax - 2$ и $2x^2 - 3x + 2a$ имеют общий корень?

3. На столе лежит 2019 камней. Петя и Вася играют в игру по следующим правилам. Ходят по очереди, начинает Петя. За один ход можно взять со стола 1 или 2 камня, но один и тот же игрок два раза подряд не может брать 2 камня. Проигрывает не имеющий хода. Кто из игроков сможет обеспечить себе победу вне зависимости от игры противника?

4. Для любых положительных чисел a, b и c докажите неравенство

$$\frac{a}{2a^2+b^2+c^2} + \frac{b}{a^2+2b^2+c^2} + \frac{c}{a^2+b^2+2c^2} \leqslant \frac{9}{4(a+b+c)}.$$

5. Внутри треугольника ABC выбрана такая точка D, что $\angle ABD = \angle ACD$ и $\angle ADB = 90^\circ$. Точки M и N середины сторон AB и BC соответственно. Найдите угол $\angle DNM$.

6. Найдите все пары простых чисел p и q, для которых $p^2 + pq + q^2$ является точным квадратом.

№1

Пусть $a_1, a_2, a_3, \dots, a_7$ - конфеты, которые Маша раздала себе и девочкам

Пусть $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 < a_7$.

По условию $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 > a_5 + a_6 + a_7$

Оценим правую и левую части

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \geq a_1 + a_1 + 1 + a_1 + 2 + a_1 + 3 = a_1 + 6$

т.к. $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 \Rightarrow$

$$\begin{cases} a_2 \geq a_1 + 1 \\ a_3 \geq a_1 + 2 \\ a_4 \geq a_1 + 3 \end{cases} \quad a_1, a_2, \dots, a_7 \in \mathbb{N}.$$

$a_5 + a_6 + a_7 \geq a_1 + 4 + a_1 + 5 + a_1 + 6 = 3a_1 + 15$

аналогично $\Rightarrow$

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \geq 3a_1 + 15$ (транз.)

~~Так как мы~~ Это если числа последовательные

Но так как числа (кол-во конфет) не обязательно последовательные. Обозначим сумму $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 4a_1 + k + 6$, но сумма $a_5 + a_6 + a_7 \geq 3a_1 + k + 15$, так как мы ищем минимальный ответ.

$4a_1 \cancel{+k} + 6 \geq \cancel{3a_1 + k} + 15$

$\cancel{a \geq 2}$

$4a_1 + k + 6 > 3a_1 + k + 15$

$a_1 > 9 \Rightarrow$

$a_1 = 10$

a_1 - min среди $a_1, a_2, \dots, a_7 \Rightarrow$

Ответ: 10.

Проверка. Возьмем числа

10, 11, 12, 13, 14, 15, 16.

$10 + 11 + 12 + 13 > 14 + 15 + 16$

$46 > 45$

Если мы ~~заменим~~ меняем местами числа из правой и левой части левая часть $\uparrow$, а правая $\downarrow$, а значит неравенство верно.

Ответ: 10 конфет.

№6

$p^2 + pq + q^2 = a^2$

p, q - простые

Р-м mod 5

$$\left[\begin{array}{l} x^2 \equiv 0 \pmod 5, \text{ если } x \equiv_5 0 \\ x^2 \equiv 1 \pmod 5, \text{ если } \left[\begin{array}{l} x \equiv_5 1 \\ x \equiv_5 4 \end{array}\right. \\ x^2 \equiv 4 \pmod 5, \text{ если } \left[\begin{array}{l} x \equiv_5 2 \\ x \equiv_5 3 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Р-м все варианты

$p^2 \equiv 1, \ q^2 \equiv 1$

1) $\cancel{pq}$ $p \equiv 1$, $q \equiv 1 \Rightarrow pq \equiv 1$

$p^2 + pq + q^2 \equiv 3 \pmod 5$

но $\left[\begin{array}{l} a^2 \equiv 1 \\ a^2 \equiv 4 \end{array}\right.$. Противоречие

2) $p \equiv_5 1$

$q \equiv_5 4$

$pq \equiv_5 4$

$p^2 + pq + q^2 \equiv 1 + 1 + 4 \equiv 1 \pmod 5$

~~Но~~ Но если $p \equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow$

$p \,\vdots\, 2$

$p = 5k + 1$

$q = 5k + 4$

и что?

№1

$$\frac{a}{2a^2+b^2+c^2}+\frac{b}{a^2+2b^2+c^2}+\frac{c}{a^2+b^2+2c^2}\le\frac{9}{4(a+b+c)}$$

Неравенство Коши

$$2a^2+b^2+c^2\ge 2ab+2ac$$

$$a^2+2b^2+c^2\ge 2ab+2bc$$

$$a^2+b^2+2c^2\ge 2ac+2bc$$

Но при этом идет слишком большое уменьшение

$$\frac{a}{ab+ac}+\frac{b}{ab+bc}+\frac{c}{ac+cb}\le\frac{9}{2(a+b+c)}$$

$$\cancel{a^2b+abc+}$$

$$\frac{a(ab+bc)(ac+cb)+b(ab+ac)(ac+cb)+c(ab+ac)(ab+bc)}{(ab+bc)(ac+cb)(ab+ac)}\le$$

$$\le\frac{9}{2(a+b+c)}$$

$$\frac{a^2b+abc+}{a^3bc+a^2b^2}$$

$$\frac{\cancel{a}}{\cancel{a}(b+c)}+\frac{\cancel{b}}{\cancel{b}(a+c)}+\frac{c}{c(a+b)}\le\frac{9}{2(a+b+c)}$$

$(2a^2+b^2+c^2)(a^2+2b^2+c^2)(a^2+b^2+2c^2)=$

$=(2a^4+2a^2b^2+2a^2c^2+a^2b^2+2b^4+b^2c^2+a^2c^2+2b^2c^2+c^4)\cdot$

$\cdot(a^2+b^2+2c^2)=(2a^4+2b^4+c^4+3a^2c^2+3b^2c^2+3a^2b^2)(a^2+b^2+2c^2)=$

$=2a^6+2a^4b^2+4a^4c^2+2b^4a^2+2b^6+2b^4c^2+c^4a^2+$

$+c^4b^2+2c^6+3a^4c^2+3a^2b^2c^2+3a^2c^4+3a^2b^2c^2+3b^4c^2+$

$+3b^2c^4+3a^4b^2+3a^2b^4+6a^2b^2c^2)=$

$=2a^6+2b^6+2c^6+6a^2b^2c^2+5a^2b^4+5a^4b^2+$

$+5b^4c^2+5c^4b^2+5a^4c^2+5c^4a^2)\geq$

Каждая в 20 степени

$\geq 10\sqrt[10]{a^{20}b^{20}c^{20}\cdot 8\cdot 6\cdot 5^6}=$

$=10a^2b^2c^2\sqrt[10]{48\cdot 5^6}$

$x^2 + ax - 2$ №2

$2x^2 - 3x + 2a$ $(D = b^2 - 4ac)$

1) $x^2 + ax - 2$

$D = a^2 - 4 \cdot (-2) = a^2 + 8$

$x_{1,2} = \dfrac{-a \pm \sqrt{a^2+8}}{2}$

2) $2x^2 - 3x + 2a$

$D = 9 - 4 \cdot 2 \cdot 2a = 9 - 16a$

$x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-16a}}{4}$

Р-м случаи

4) $\dfrac{-a + \sqrt{a^2+8}}{2} = \dfrac{3 + \sqrt{9-16a}}{4} \quad | \cdot 4$

$-2a + 2\sqrt{a^2+8} = 3 + \sqrt{9-16a}$

$a^2 \geq -8$ $\qquad 9 - 16a \geq 0$

$\cancel{a \in [\sqrt{8}; +\infty) \cup [-\sqrt{8}; -\infty)}$ $\qquad 16a \leq 9$

$a \leq \frac{9}{16}$

$\Leftrightarrow$

$0 \leq a \leq \frac{9}{16}$

$\left(\frac{9}{16}\right)^2 = \frac{81}{4^4} = \frac{81}{256}$

$\sqrt{\frac{81}{256} + 8} = \sqrt{\frac{2^3 \cdot 2^8 + 81}{256}} = \sqrt{\frac{2^{11} + 81}{256}} = \sqrt{\frac{2048+81}{256}} =$

$= \sqrt{\frac{2129}{256}} \geq 8$

$-\frac{81}{256} + 8 = 3 + \sqrt{9 - 9}$

Противоречие

$\varnothing$

2)

$$\frac{-a+\sqrt{a^2-8}}{2} = \frac{3\cancel{+}-\sqrt{9-16a}}{4}$$

$$\underbrace{-2a+\underbrace{2\sqrt{a^2+8}}_{\geq 0 \;\geq 2\sqrt{8}}}_{\geq} = \underbrace{3-\sqrt{9-16a}}_{\leq 0 \;\leq 3}$$

$$\underbrace{-2a}_{\geq 0}+\underbrace{2\sqrt{a^2+8}}_{\geq 0}=0 \qquad a^2+8\geq 8$$

т.к $a^2 \geq 0$

$$\cancel{-}2a = \cancel{-}2\sqrt{a^2-8} \qquad \sqrt{8} =$$

$$a = \sqrt{a^2+8}$$

$$a^2 = a^2+8 \qquad \frac{9}{16} \geq a \geq 0$$

$\varnothing$

$$-2\cdot\frac{9}{16}+2\sqrt{8} = \frac{-9}{8}+2\sqrt{8} = -1\frac{1}{8}+2\sqrt{8}$$

$\varnothing$

3) $$\frac{-a-\sqrt{a^2+8}}{2} = \frac{3+\sqrt{9-16a}}{4}$$

$\varnothing$

4) $$\frac{-a-\sqrt{a^2-8}}{2} = \frac{3+\sqrt{9-16a}}{4}$$

Ответ: решений нет.

№3

Осознаем, какие позиции являются выигрышными, а какие проигрышными.

Если перед тобой оказалось 3 камня, и тебе надо сделать ход, ты выиграешь только, если ~~ед~~ возьмешь 1 камень, а твой соперник не сможет ~~взять~~ взять 2

Если перед тобой 4 камня, ты возьмешь 1, у твоего соперника 3, и ты сможешь взять 2 => Итог победа.

Если 5 камней => сходишь 2, ~~проигрыш~~ проигрыш, 1 - проигрыш

Если 6 камней => Возьмешь 1 => победа твоя

Если 7 камней - возьмешь 2, победа твоя, 1 - проигрыш

Если 8 камней - Возьмешь 1, проигрыш, возьмешь 2 - проигрыш

Если 9 камней - сходишь 1 - ~~победа~~ проигрыш, 2 - проигрыш

Если 10 камней - сходишь 1 - проигрыш, 2 - победа

~~Мы видим закономерность Если число камней больше 4~~

Если 11 камней - ~~в любом случае проигрыш~~ 2 - победа, 1 - проигрыш

и т.д.

Мы видим закономерности. Если число камней >4, если $\equiv 1$, проигрыш, $\equiv 2$, победа $\equiv 3$ - проигрыш, $\equiv 4$, $\equiv 0$ проигрыш. То если при правильной игре Пети, ~~у него если~~ он может победить независимо от ходов соперника

Если действовать по стратегии. Так как первоначально, у него хорошая позиция. $2019 \underset{4}{\equiv} 3$

Ответ: Петя

№5