6530

65

K410

ргский государственный университет

1	2	3	4	5	6	сумма
4	3	3	0	3	0	13

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Воронеж

Дата 05.03.2019

* *

10–11 класс. Седьмой вариант

1. Имеется один черный ферзь и n белых. При каком наибольшем n эти фигуры можно расставить на шахматной доске так, чтобы белые ферзи не били друг друга? Ферзь не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Числа x, y, z — углы треугольника. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{\sin x \cdot \sin y \cdot \sin z}{\sin x + \sin y + \sin z}.$$

3. Дан остроугольный треугольник ABC. В него вписан прямоугольник $KLMN$ так, что точки M и N лежат соответственно на сторонах AB и AC, а точки K и L — на стороне BC. Пусть AD — медиана треугольника ABC, E — середина его высоты, опущенной из вершины A, O — точка пересечения диагоналей прямоугольника. Найдите угол DOE.

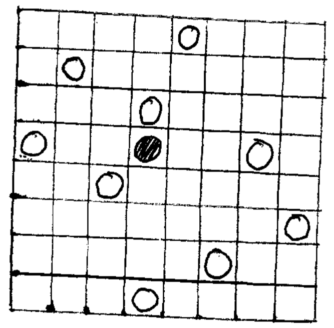
4. Даны натуральные числа x и y. В восьмеричной системе они $4n$-значные, причем в записи x цифры повторяются через одну, а в записи y — через три. Оказалось, что восьмеричная запись $x \cdot y$ состоит из последовательных блоков по 4 одинаковых цифры. При каких n это возможно?

5. В однокруговом турнире по настольному теннису участвовало n теннисистов с различными рейтингами ($n > 4$). Во всех партиях, кроме двух, победил участник с более высоким рейтингом, но теннисист с самым маленьким рейтингом выиграл у теннисиста с самым большим рейтингом, а теннисист с предпоследним рейтингом выиграл у теннисиста со вторым рейтингом. Сколькими способами можно расставить спортсменов в ряд так, что каждый (кроме самого правого) выиграл у своего соседа справа?

6. На столе лежат три конуса с общей вершиной, касаясь друг друга внешним образом. Оси симметрии первых двух конусов взаимно перпендикулярны. Два шара вписаны в третий конус и касаются друг друга внешним образом. Найдите максимальное отношение радиусов большего и меньшего шаров.

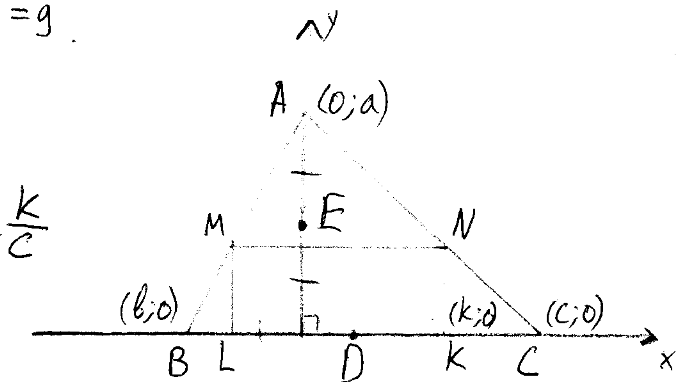
№1.

Чёрный ферзь, если стоит не ~~со~~ краю, увеличивает максимальное количество белых ферзей в этом ряду до 2 $\Rightarrow$ увеличивает максимальное количество белых ферзей на доске до 9. Осталось привести пример такой расстановки:



Ответ: $n=9$.

№3.



$A=(0;a)$
$B=(b;0)$
$C=(c;0)$
$k=(k;0)$
$N=(k;h)$
$M=(m;h)$

$N\in AC$

$\Downarrow$

$\frac{c-k}{c}=\frac{h}{a}$; $h=a\frac{c-k}{c}=a-a\frac{k}{c}$

$M\in AB$

$\Downarrow$

$\frac{b}{m}=\frac{a}{a-h}$; $m=\frac{a-h}{a}b=\frac{k}{c}b$

$\vec{O}=\frac{\vec{M}+\vec{K}}{2}=\left(\frac{\frac{k}{c}b+k}{2};\frac{a-a\frac{k}{c}}{2}\right)$; $O(k)$ ~~прямая~~ лежит на прямой, т.к. обе координаты линейно зависят от k

$O(0)=(0;\frac{a}{2})=E$

$O(c)=(\frac{b+c}{2};0)=D\Rightarrow O$ лежит на ~~одной~~ прямой ED

$0<\frac{a-a\frac{k}{c}}{2}<\frac{a}{2}\Rightarrow O$ лежит на отрезке ED

$\Downarrow$

$\angle DOE=180^\circ$

Ответ: 180°.

№5.

~~Пронумеруем~~

~~n-ный справа в правом~~

n-ный в правом конце

да $\swarrow$ $\searrow$ нет

n справа от n-1 — n-1 в правом конце

да $\swarrow$ $\searrow$ нет — да $\swarrow$ $\searrow$ нет

1 возрастающая (просто ~~[illegible]~~ последовательность)

2^{n-4} где-то расположена пара $(n-1)\,2$; 1 слева от пары. Каждый из оставшихся элементов либо справа от пары, либо слева; ~~4 слева~~

2^{n-3} где-то расположена пара $n,1$; аналогично $\Leftarrow$

~~[illegible]~~

n справа от n-1

да $\swarrow$ нет $\downarrow$

2^{n-3} где-то расположена тройка $n-1, n, 1$; $\Leftarrow$ аналогично

$2\cdot3^{n-4}$ где-то расположены пары $n,1$ и $n-1,2$. Каждый из оставшихся $(n-4)$ элементов в одной из трёх частей. $\times2$: пары можно переставить между собой.

$N=1+2^{n-4}+2\cdot2^{n-3}+2\cdot3^{n-4}$

~~$N=1+3\cdot2^{n-3}+2\cdot3^{n-4}$~~

Ответ: ~~$1+3\cdot2^{n-3}+2\cdot3^{n-4}$~~ $1+2^{n-4}+2\cdot2^{n-3}+2\cdot3^{n-4}$

№2.

Пусть a,b,c — стороны Δ с этими углами

$$A=\frac{\sin x\sin y\sin z\cdot(abc)^2}{(\sin x+\sin y+\sin z)(abc)^2}=\frac{(2S)^3}{abc\cdot2S\cdot(a+b+c)}=\frac{4S^2}{abc(a+b+c)}$$

R — радиус описанной окр., r — вписанной.

$S=\frac{r}{2}(a+b+c)$

$S=\frac{abc}{4R}$

$A=\frac{r}{2R}$

$\frac{r}{R}\leq\frac{1}{2}$ (отношение максимально в равностороннем треугольнике)

$\Downarrow$

$A\leq\frac{1}{4}$

Ответ: $\frac{1}{4}$.