KL018

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

467

55

1

1	2	3	4	5	6	сумма
4	1	4	2	0	0	11

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Душанбе

Дата 11.02.2019

* *

10–11 класс. Первый вариант

1. Имеется 8 черных ладей и n белых. При каком наибольшем n их можно расставить на шахматной доске так, чтобы одноцветные ладьи не били друг друга? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Даны положительные числа x, y, z. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{xyz\,(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4 + (yz)^4 + (xz)^4}}\,.$$

3. Дан треугольник ABC с меньшей стороной AB. На сторонах AB и AC выбраны соответственно точки X и Y так, что $BX = CY$. Под каким углом прямая, проходящая через центры описанных окружностей треугольников ABC и AXY, пересекает прямую BC, если $\angle ABC = \beta$ и $\angle BCA = \gamma$?

4. Десятичная запись квадрата натурального числа x представляет собой два одинаковых соседних блока из n цифр. Может ли n равняться 20182019?

5. На однокруговой турнир по настольному теннису подало заявку 16 человек. Когда было сыграно n матчей, оказалось, что среди любых трех теннисистов найдутся двое, уже сыгравших между собой. При каком наименьшем n такое возможно?

6. Три конуса с общей вершиной, касающихся друг друга внешним образом, имеют высоту 2 и радиус основания $\sqrt{3}$. Два шара касаются внешним образом друг друга и всех конусов. Найдите отношения радиусов шаров (большего к меньшему).

Т. К $A, A', Y, X \to$ уикличные $\Rightarrow XA'Y = \angle XAY = \angle BAC =$
$= 180 - \beta - \cancel{\gamma}\alpha$, так как $A'X = A'Y \Rightarrow \angle A'XY = \dfrac{180 - \angle XA'Y}{2} = 90 - \dfrac{180 - \beta - \alpha}{2} = \dfrac{\beta + \alpha}{2}$, т. к. A, A', Y, X - уикличны то $\angle YAA' = \angle A'XY = \dfrac{\beta + \alpha}{2} \Rightarrow$ Пусть
$O_1O_2 \cap BC = W \Rightarrow \angle BWO_1 = 360° - ABW - \angle BAA' - 90 =$
$= 360 - \beta - (180 - \beta - \alpha) = 90 - \beta + \beta + \alpha - \dfrac{\beta + \alpha}{2} = 90° - \beta + \dfrac{\beta + \alpha}{2} = 90 - \dfrac{\beta - \alpha}{2}$.

Ответ $\angle BWO_1 = 90 - \dfrac{\beta - \alpha}{2}$.

√2

$$A = \frac{xyz(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4+(yz)^4+(xz)^4}}$$

$$((xy)^2+(yz)^2+(xz)^2)^2 \geq (xy)^2\cdot(xz)^2+(xy)^2\cdot(yz)^2+(xz\cdot yz)^2 =$$

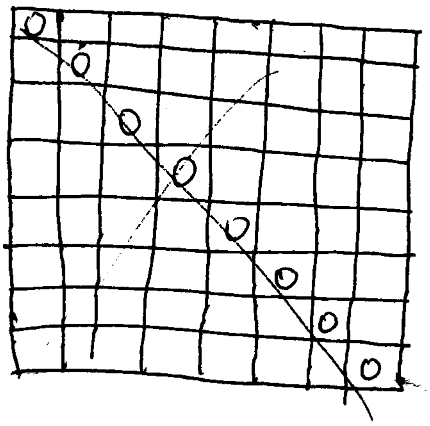
$$= x^2y^2z^2\cdot(x^2+y^2+z^2) \geq x^2y^2z^2\cdot\frac{(x+y+z)^2}{3};$$

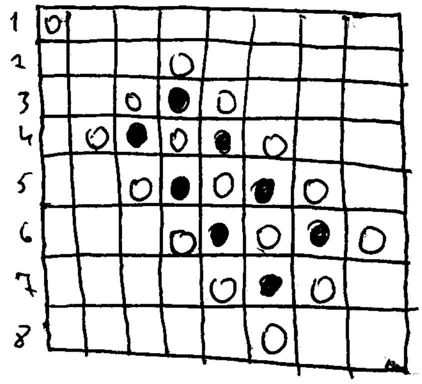
$A \leq \sqrt{3}$ то $\max A = \frac{3}{\sqrt{3}}$;

Ответ: макс. значение $\sqrt{3}$.

√1

● - черный
о - белый





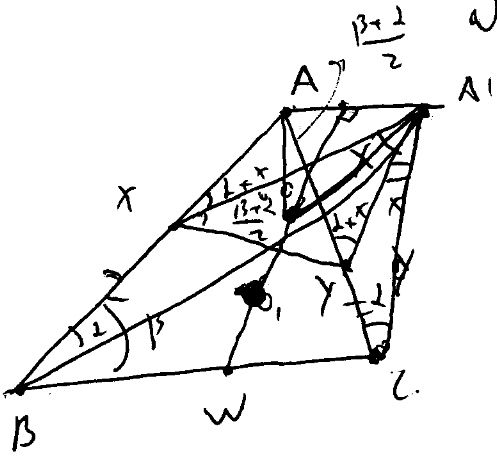
Допустим некоторая строка имеет x черных ладей. Т.к. белая ладья не должна бить белую ладью, то справа и слева от черных ладей может быть белая ладья, а по условии не может быть двух подряд идущих (до) ладьи, значит в этой строке может быть $\leq x+1$ (~~ладей~~ белых ладей.

Пусть в каждой из строк по x (ладей

черных ладей т.о. N - количество белых ладей т.о

$(x_1+1)+(x_2+1)+(x_3+1)\dots(x_8+1)=x_1+x_2\dots+x_8+8=16$

при $N=16$ → пример приведено в рисунке.



O_1 - цент. окр. ΔABC

O_2 - цент. окр. ΔAXY

т.к. $AB<AC$ и $BX=CY$ то XY не может быть

параллельном с BC: у окружности треугольников есть второе пересечение (кроме как A) → пусть это точка A'!

Пусть $\angle XBA'=\alpha$. т.к. A, A', C, B → цикличные то $\alpha=\angle ABA'=\angle ACA'$, Пусть $\angle YA'C=x$ → $\angle AYA'=\angle YA'C+\angle A'CY=\alpha+x$ ⇒ $\angle XA'B=\angle AXA'-\angle XBA'=(\alpha+x)-\alpha=x$ ⇒ $XA'B=x=\angle YA'C$ и $\angle YCA'=\angle XBA'$ ⇒ $\Delta XBA'$ подо-

бен $\Delta YCA'$ ⇒ $\frac{BX}{CY}=\frac{A'X}{A'Y}$ ⇒ $\frac{A'X}{A'Y}=\frac{BX}{CY}=1$ ⇒ $\boxed{A'X=A'Y}$

$AO_2=A'O_2$ и $AO_1=A'O_1$ ⇒ O_1O_2 - биссектрисса $\Delta AO_2A'$ и $\Delta AO_1A'$ ⇒ $O_1O_2\perp AA'$.

Черновик

Чистовик

№4

$П = \overline{a_1 a_2 \ldots a_n}$. Докажем, что число $x = \left(\frac{10^n+1}{11}\cdot 10\right)^2 \to$

$\to$ подходит к нашему условию (где $n = 2018 \cdot 2019$).

$x^2 = \overline{a_1 a_2 \ldots a_n a_1 a_2 \ldots a_n} = \overline{a_1 a_2 \ldots a_n} \cdot 10^n + \overline{a_1 a_2 \ldots a_n} = \overline{a_1 a_2 \ldots a_n}\cdot(10^n+1)$.

Возьмем $\overline{a_1 a_2 \ldots a_n} = \frac{10^n+1}{11^2}\cdot 10^2$,

~~где~~ $n = 10^{11}+1 = 100000000001 =$

$= 121 \cdot 826446281 \Rightarrow 10^{11}+1 \,\vdots\, 121 \Rightarrow \cancel{10^{2018}}$

$\Rightarrow 10^{2018\cdot 2019} + 1 = (10^{11})^{1834229} + 1 \,\vdots\, 10^{11}+1 \,\vdots\, 121$

$\Rightarrow 10^n+1 \,\vdots\, 121 \Rightarrow П = \frac{10^n+1}{11^2}\cdot 10^2 \in \mathbb{N}$.

n-значное число, достаточно доказать, что: $10^{n-1} \le П < 10^n$

(!) $10^{n-1} \le \frac{10^n+1}{11^2}\cdot 10^2 < 10^n \Rightarrow$ (!) $10^{n-3} \le \frac{10^n+1}{11^2} < 10^{n-2} \Rightarrow$ (!) $10^{n-3}(10^2+21) \le 10^n+1 < (10^2+21)\cdot 10^{n-2} \Rightarrow$

1) $10^{n-3}(10^2+2\cdot 10+1) = 10^{n-1} + 10^{n-2}\cdot 2 + 10^{n-3} < 10^{n-1}\cdot 3 < 10^n < 10^n+1 \Rightarrow 4$

Чистовик Чистовик

2) $(10^2+21)\cdot 10^{n-2} = 10^n + 21\cdot 10^{n-2} > 10^n + 1 = k$

Получили, что T удовлетворяет всем условиям ⇒

⇒ $x = \left(\frac{10^n+1}{11}\cdot 10\right)^2 = \overline{a_1\ldots a_n a\ldots a_4}$ ч. т. д.

Ответ: при $n = 2018\ 2019$ ⇒ ∃ такое число n,

что если n → может равняться $\boxed{2018\ 2019}$

$\boxed{\text{может}}$