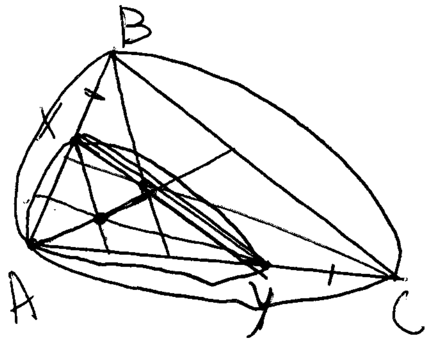
чистовик

$x^2 = (10^{2018219}+1) \cdot 100 \cdot \frac{10^{2018219}+1}{121}$

Так как $100 \cdot \frac{10^{2018219}+1}{121}$ целое и записывается 2018219 цифрами, десятичная запись x^2 будет представлять из себя два одинаковых блока из n цифр. Следовательно, n может равняться 2018219.

Ответ: n может равняться 2018219.

N 3



Дано:

$\triangle ABC$

$\triangle AXY$

$BX = CY$

$\angle ABC = \beta$

$\angle BCA = \gamma$

Найти:

$\angle$ прямой, проходящей через центры описан. окр.

(80)

Выход 11[45] – 11[50]

РГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

6327

1	2	3	4	5	6	сумма
4	4	—	4	4	—	16

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Владимир

Дата 16.03.19

* *

10–11 класс. Первый вариант

1. Имеется 8 черных ладей и n белых. При каком наибольшем n их можно расставить на шахматной доске так, чтобы одноцветные ладьи не били друг друга? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Даны положительные числа x, y, z. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{xyz\,(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4+(yz)^4+(xz)^4}}.$$

3. Дан треугольник ABC с меньшей стороной AB. На сторонах AB и AC выбраны соответственно точки X и Y так, что $BX = CY$. Под каким углом прямая, проходящая через центры описанных окружностей треугольников ABC и AXY, пересекает прямую BC, если $\angle ABC = \beta$ и $\angle BCA = \gamma$?

4. Десятичная запись квадрата натурального числа x представляет собой два одинаковых соседних блока из n цифр. Может ли n равняться 20182019?

5. На однокруговой турнир по настольному теннису подало заявку 16 человек. Когда было сыграно n матчей, оказалось, что среди любых трех теннисистов найдутся двое, уже сыгравших между собой. При каком наименьшем n такое возможно?

6. Три конуса с общей вершиной, касающихся друг друга внешним образом, имеют высоту 2 и радиус основания $\sqrt{3}$. Два шара касаются внешним образом друг друга и всех конусов. Найдите отношения радиусов шаров (большего к меньшему).

N5

чистовик

Среди теннисистов найдем того, который сыграл меньше всего матчей. Назовем его М. Пусть он сыграл m матчей. Тогда каждый из оставшихся теннисистов сыграл не менее m матчей.

Теперь возьмем множество игроков, которые не играли с М. Все теннисисты из этого множества сыграли между собой. Иначе имеем противоречие с условием: найдутся трое участников турнира, между которыми не было сыграно ни одного матча.

Теперь посчитаем минимальное удвоенное количество матчей в таком описанном случае:

1. Каждый из m игроков, сыгравших с М, а также сам М — сыграл как минимум m матчей.
2. Все игроки, не игравших с М, обязательно должны были играть друг с другом.

Получаем:

$\cancel{m\cdot(m+1)+(16-1-m)\cdot(m+1)+(16-1-m)\cdot(16-2-m)}$ $\cancel{m\cdot(m+1)+(16-1-m)\cdot(m+1)+(16-1-m)\cdot(16-2-m)}$

$\cancel{m^2-28m+210}$

$\cancel{2\cdot((m-7)^2+56)}$

$$m\cdot(m+1)+(16-1-m)\cdot(m+1)+(16-1-m)\cdot(16-2-m)$$
$$m^2-28m+210$$
$$2\cdot((m-7)^2+56)$$

Получаем, что минимальная m будет равно 56.

Приведем пример, что такое возможно. Поделим 16 игроков на 2 группы по 8 человек. Пусть внутри каждой группы каждый сыграл с каждым. В таком случае, условие задачи выполняется, а также количество сыгранных матчей будет равно 56.

Ответ: 56.

N2

$$A=\frac{xyz(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4+(yz)^4+(xz)^4}}\ ;\ xyz>0$$

$$A=\frac{x^2yz+xy^2z+xyz^2}{\sqrt{(xy)^4+(yz)^4+(xz)^4}}$$

Сделаем замену переменных:

$x\cdot y=A>0$

$y\cdot z=B>0$

$x\cdot z=C>0$

Тогда $A=\dfrac{A\cdot C+A\cdot B+B\cdot C}{\sqrt{A^4+B^4+C^4}}$

Применим неравенство средних

$$\sqrt{A^4+B^4+C^4}\geq\sqrt{3}\cdot\frac{A^2+B^2+C^2}{3}=\frac{A^2+B^2+C^2}{\sqrt{3}}$$

Тогда $A=\dfrac{AC+AB+BC}{\sqrt{A^4+B^4+C^4}}\leq\sqrt{3}\cdot\dfrac{AB+AC+BC}{A^2+B^2+C^2}$

чистовик

Но известно, что по неравенству Коши-~~Б~~уняковского — Шварца

$A^2+B^2+C^2\geq A\cdot B+A\cdot C+B\cdot C$

Таким образом получаем

$A\leq\sqrt{3}$

Максимальное значение A не превосходит $\sqrt{3}$

Равенство достигается при $x=y=z$

$$A=\frac{x^3\cdot 3x}{\sqrt{3\cdot x^8}}=\sqrt{3}$$

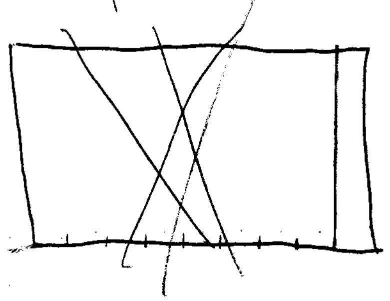
Ответ: $\sqrt{3}$

2

N1

O – белые

B – черные



	1	2	3	4	5	6	7	8
1					O			
2				O	B	O		
3			O	B	O	B	O	
4		O	B	O	B	O		
5	O	B	O	B	O			
6		O	B	O				
7			O					
8								O

В каждой строке и в каждом столбце может стоять не больше чем на 1 белую ладью, больше чем черных, поэтому просуммировав по всем строкам и столбцам количество белых получим $16+16=32$ (все черные по 2 раза и +1 на каждую строку и каждый столбец). При этом каждую ладью посчитали 2 раза, значит может быть не больше чем 16 белых ладей.

Ответ: 16

N4

Заметим, что 2018 2019 делится на 11 по признаку делимости на 11.

Тогда $10^{2018 2019}+1=(10+1)\cdot(10^{2018 2018}-10^{2018 2017}+\ldots-10^1+1)$.

Заметим, что каждое слагаемое во 2-ой скобке сравнимо с 1 по модулю 11.

Так как слагаемых 2018 2019 и это число делится на 11, вторая скобка делится на 11. Значит $10^{2018 2019}+1$ делится на 121.

Если $x=\dfrac{10^{2018 2019}+1}{11}$, то $x^2=(10^{2018 2019}+1)\cdot\dfrac{10^{2018 2019}+1}{121}$

Однако мы еще не нашли искомое число, потому что $\dfrac{10^{2018 2019}+1}{121}<10^{2018 2018}$

Домножим x на 10. Тогда:

$x=(10^{2018 2019}+1)\cdot\dfrac{10}{11}$;