У числа $\dfrac{10_{16}^{2023}+1_{16}}{121_{16}}$ — 2021 цифра, т.к. $10_{16}^{2023}+1_{16}$ — 2024 цифры, а $121_{16} > 100_{16}$.

$\Rightarrow$ у числа $\dfrac{10_{16}^{2023}+1_{16}}{121_{16}} \cdot 100_{16}$ — 2023 цифры.

Пусть $\bar{n}_{16} = 100_{16} \cdot t$, тогда у $\bar{n}_{16}$ — 2023 цифры, как и требовалось. Проверим:

$\Rightarrow x_{16}^2 = 100_{16} \cdot t \cdot t \cdot 121_{16} = 100_{16} \cdot 121_{16} \cdot t^2$ — является квадратом

$\Rightarrow \bar{n}_{16} = \dfrac{10_{16}^{2023}+1_{16}}{121_{16}} \cdot 100_{16}$ — подходит.

Ответ: да

№5.

Пусть A и B — спортсмены, сыгравшие друг с другом. Каждый из них должен был сыграть хотя бы $\frac{2K}{2} = K$ (не считая себя) туров, чтобы при любом расписании обязательно нашлось трое, сыгравших друг с другом. Следовательно, игрокам надо сыграть K туров из 2K-2 оставшихся.

Приведем контрпример, что k туров недостаточно:

Пронумеруем игроков от 1 до K и от $\frac{2K}{2}+1$ до 2K. Пусть в первой группе (с номерами от 1 до K) все сыграли с собой и во второй группе (с номерами от K+1 до 2K) все ~~сыгр~~ ~~сыгр~~ сыграли с собой $\Rightarrow$ было сыграно K туров. ~~Чтобы~~ Необходимо сыграть еще как минимум один тур, чтобы нашлась тройка команд (2 из одной группы и 1 из другой), которая сыграла друг с другом. Таким образом, K+1 тура будет достаточно для выполнения условия.

Ответ: K+1

4343

Ши

1

35

1	2	3	4	5	6	сумма
3	1	–	0	3	–	[illegible]

35

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Краснодар

Дата 05.03.2019

* *

10–11 класс. Второй вариант

1. Имеется 9 черных ладей и n белых. При каком наибольшем n их можно расставить на шахматной доске так, чтобы одноцветные ладьи не били друг друга? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Даны положительные числа x, y, z. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{xyz\,(x+y+z)}{x^4+y^4+z^4}.$$

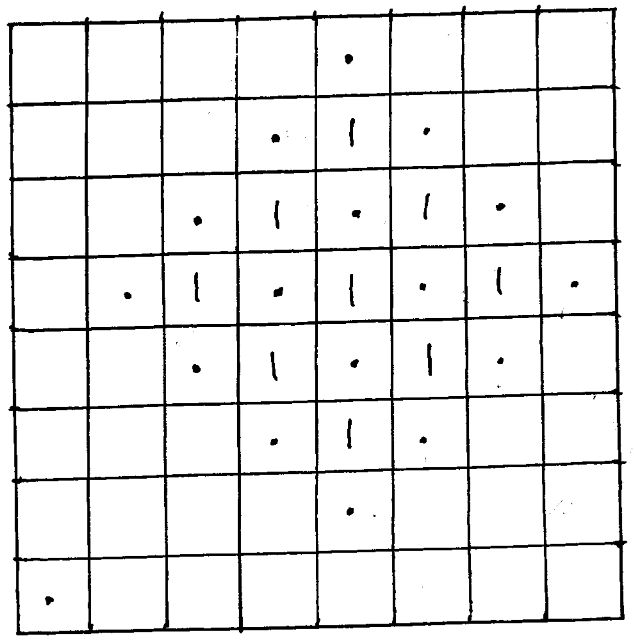
3. Окружность ω единичного радиуса проходит через вершины B и C треугольника ABC и вторично пересекает его стороны AB и AC в точках K и L соответственно. На лучах BL и CK отмечены соответственно такие точки P и Q, что $BP = AC$ и $CQ = AB$. Найдите расстояние между центрами описанных окружностей треугольников APQ и KBC.

4. Шестнадцатиричная запись квадрата натурального числа x представляет собой два одинаковых соседних блока из n цифр. Может ли n равняться 2023?

5. В однокруговом турнире по настольному теннису участвует $2k$ спортсменов. В каждом туре все участники проводят по одному матчу. Какое наименьшее число туров надо сыграть, чтобы при любом расписании игр обязательно нашлось трое теннисистов, сыгравших друг с другом?

6. Имеется три одинаковых конуса с общей вершиной, касающихся друг друга внешним образом, а также два шара, касающихся внешним образом друг друга и всех конусов. Радиусы шаров относятся как 1 : 3. Найдите угол при вершине конусов. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении).

№1.



Пусть | - черные ладьи

• - белые ладьи.

пример для $n=17$.

Докажем, что n не может быть > 17.

Чтобы поставить две белых ладьи на линию, нужно между ними поставить одну черную. Чтобы поставить 3 белых, нужно поставить 2 черных.

4 белых → 3 черных.

Тогда для K ~~белых~~ черных ~~расположенных~~ можно поставить не больше чем $K+1$ ~~черных~~ ~~белых~~ белых ладей на одной линии, ~~...~~ кол-во линий. ~~...~~ Без черных можно поставить 8 белых. На каждой линии белых ладей на одну больше, чем черных ⇒

Следовательно, кол-во белых максимальное = кол-во черных + кол-во линий.

Предположим, $n = 18 > 9+8 = 17$. Тогда, на одной из линий для ~~k~~ $K+1$ белых будет стоять $K+1$ черных ⇒ ~~черные~~ белые ладьи будут бить друг друга, что противоречит условию ⇒ $n_{max} = 17$.

Ответ: $n = 17$

№2.

$$A = \frac{xyz(x+y+z)}{x^4+y^4+z^4}$$

Из неравенства Коши: $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ (между средним арифметическим и средним геометрическим) для $a,b,c>0$

$x,y,z>0$

Применим неравенство Коши для знаменателя:

$$x^4+y^4+z^4 \geq 3\sqrt[3]{x^4y^4z^4} = 3xyz\sqrt[3]{xyz}$$

$$\Rightarrow A \leq \frac{\cancel{xyz}(x+y+z)}{3\cancel{xyz}\sqrt[3]{xyz}} = \frac{x+y+z}{3\sqrt[3]{xyz}}$$

Пусть $f(x,y,z) = \frac{xyz(x+y+z)}{x^4+y^4+z^4}$

$g(x,y,z) = \frac{x+y+z}{3\sqrt[3]{xyz}}$

~~...~~

$f(x,y,z) \leq g(x,y,z)$.

Если $g(x_0,y_0,z_0) = f(x_0,y_0,z_0)$, то $f(x_0,y_0,z_0)$ - максимум $f(x,y,z)$, т.к. $f(x,y,z) \leq g(x,y,z)$.

Оценим $g(x,y,z) = \frac{x+y+z}{3\sqrt[3]{xyz}}$. По неравенству Коши $x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$

$\Rightarrow g(x,y,z) \geq \frac{3\sqrt[3]{xyz}}{3\sqrt[3]{xyz}} = 1$, причем равенство выполняется при $x=y=z=1$.

$g(x_0,y_0,z_0) = g(1,1,1) = \frac{1+1+1}{3\cdot 1} = 1$.

Подставим в $f(x,y,z) = \frac{1(1+1+1)}{1+1+1} = 1 = f(1,1,1)$.

$\Rightarrow f(x_0,y_0,z_0) = f(1,1,1) = g(x_0,y_0,z_0) = g(1,1,1) = 1$

$\Rightarrow f(1,1,1)$ - максимум $f(x,y,z)$

Ответ: 1

№4

$$x^2_{16} = \overline{nn}_{16} = \overline{n}_{16}\cdot 10^{2023}_{16} + \overline{n}_{16} = \overline{n}_{16}(10^{2023}_{16} + 1_{16}).$$

По признаку делимости на 11: $10^{2023}_{16}+1_{16} \vdots 11_{16}$

У $10^{2023}_{16}+1_{16}$ 2024 цифры, на первой и последней 1. ($100\ldots\ldots01_{16}$)

$1-0+0-0\ldots\ldots-1=0 \vdots 11_{16} \Rightarrow 10^{2023}_{16}+1_{16} \vdots 11_{16}$

$$\begin{array}{l|l} 10000\ldots\ldots1_{16} & 11_{16} \\ -FF & F0F0F\ldots0F1_{16} \\ \quad 10 & \\ \quad -0 & \\ \quad 100 & \\ \quad -FF & \\ \quad\quad 10 \ldots & \\ \quad\quad\quad 11 & \\ \quad\quad\quad -11 & \\ \quad\quad\quad\quad 0 & \end{array}$$

В числе $F0F0F\ldots1$ 2022 цифры, т.к. $10^{2023}_{16}+1_{16} \,/\, 10_{16} > 10^{2022}_{16}$ (деление), но $10^{2021}_{16} < 10^{2023}_{16}+1_{16} \,/\, 11_{16} < 10^{2022}_{16}$

2022 цифры ⇒ 1011 символов „F" ($=\frac{1}{2}\cdot 2022$)

Докажем, что $F0F0\ldots0F1_{16} \vdots 11_{16}$.

По признаку делимости на 11 (нечетные цифры берем с „+", четные с „-").

$$1011_{10}\cdot F_{16} - 1_{16} = 1003\cdot F_{16} + 8\cdot F_{16} - 1 = \underbrace{1003\cdot F_{16}}_{a} + \underbrace{8\cdot 15-1}_{b}.$$

$a = 1003\cdot F_{16}$.

$1003 = 17\cdot 59$, $17_{10} = 11_{16} \Rightarrow a \vdots 11_{16}$.

$b = 8\cdot 15 - 1 = 119 = 17\cdot 7$, $17_{10} = 11_{16} \Rightarrow b \vdots 11_{16}$ $\Rightarrow F0F0F\ldots1_{16} \vdots 11_{16}$

$\Rightarrow 10^{2023}_{16} + 1_{16} \vdots 121_{16}$.

Пусть $t = \frac{10^{2023}_{16}+1_{16}}{121_{16}}$, тогда $x^2_{16} = \overline{n}\cdot 121_{16}\cdot t$