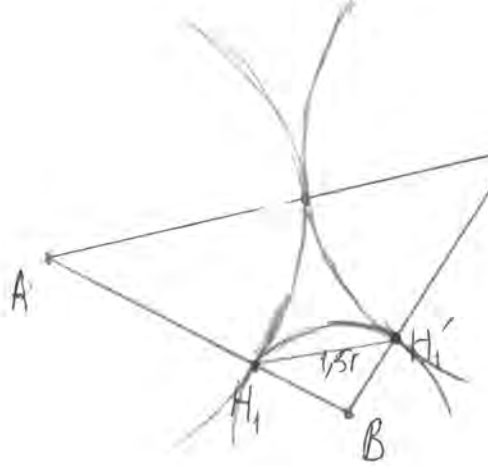
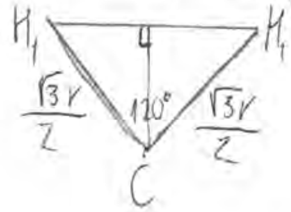


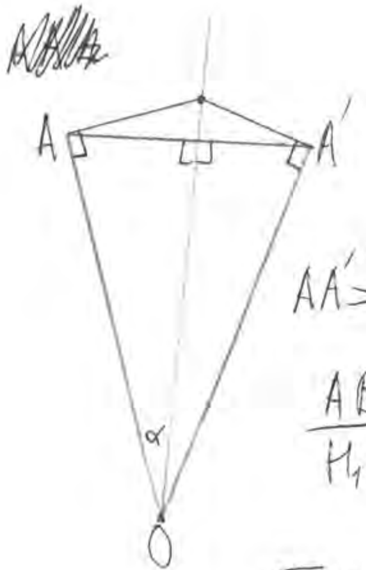
~~[зачёркнуто]~~

OA' – ось другого конуса

H_1' – точка касания w_1 и другого конуса

$H_1H_1' = 2CH_1\sin 60^\circ = 2\cdot\frac{3r}{4} = 1{,}5r$





$AA' = 2AO\sin\alpha = 2\sqrt{3}r\sin\alpha\cos\alpha$

$\frac{AB}{H_1B} = \frac{AA'}{H_1H_1'}$ $\quad AH_1 = \sqrt{3}r\sin\alpha$

$H_1B = \frac{\sqrt{3}r}{\sqrt{3}\cos\alpha - \sin\alpha}$

$$\frac{\sqrt{3}r\sin\alpha + \frac{\sqrt{3}r}{\sqrt{3}\cos\alpha - \sin\alpha}}{\frac{\sqrt{3}r}{\sqrt{3}\cos\alpha - \sin\alpha}} = \frac{2\sqrt{3}r\sin\alpha\cos\alpha}{1{,}5r}$$

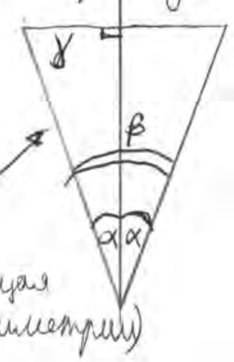
$$\sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha - \sin^2\alpha + 1 = \frac{2\sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha}{1{,}5}$$

$$\sqrt{3}\cdot 1{,}5\sin\alpha\cos\alpha - 1{,}5\sin^2\alpha + 1{,}5 = 2\sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha$$

$$3\sin^2\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha - 1{,}5 = 0$$

Т.к. $\alpha \in (0^\circ; 180^\circ)$, решение единственное $\alpha = 30^\circ$ (легко проверяется подстановкой).

Т.к из условия не понятно, про какой именно угол идет речь, $\boxed{\alpha = 30^\circ,\ \beta = 60^\circ,\ \gamma = 60^\circ}$ чему соответствуют α, β, γ ясно из рисунка.



сечение конуса (плоскость проходящая через его ось симметрии)

Я больше склоняюсь к тому, что в условии имелось в виду $\beta = 2\alpha = 60^\circ$.

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Шифр:

3278

1	2	3	4	5	6	сумма
4				5	[illegible]	10

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Санкт-Петербург

Дата 24.02.2019

* *

10–11 класс. Второй вариант

1. Имеется 9 черных ладей и n белых. При каком наибольшем n их можно расставить на шахматной доске так, чтобы одноцветные ладьи не били друг друга? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Даны положительные числа x, y, z. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{xyz\,(x+y+z)}{x^4+y^4+z^4}.$$

3. Окружность ω единичного радиуса проходит через вершины B и C треугольника ABC и вторично пересекает его стороны AB и AC в точках K и L соответственно. На лучах BL и CK отмечены соответственно такие точки P и Q, что $BP = AC$ и $CQ = AB$. Найдите расстояние между центрами описанных окружностей треугольников APQ и KBC.

4. Шестнадцатиричная запись квадрата натурального числа x представляет собой два одинаковых соседних блока из n цифр. Может ли n равняться 2023?

5. В однокруговом турнире по настольному теннису участвует $2k$ спортсменов. В каждом туре все участники проводят по одному матчу. Какое наименьшее число туров надо сыграть, чтобы при любом расписании игр обязательно нашлось трое теннисистов, сыгравших друг с другом?

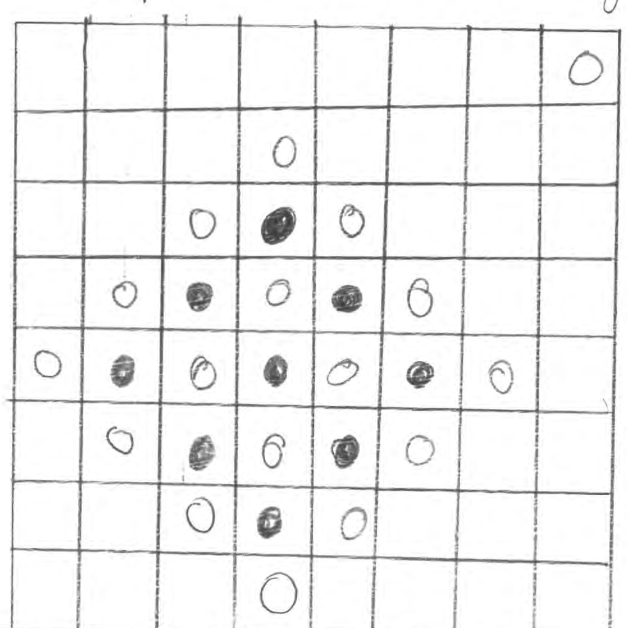
6. Имеется три одинаковых конуса с общей вершиной, касающихся друг друга внешним образом, а также два шара, касающихся внешним образом друг друга и всех конусов. Радиусы шаров относятся как 1 : 3. Найдите угол при вершине конусов. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении).

1

Заметим, что 8 ладей можно расставить без всяких проблем: каждая ладья блокирует ровно 1 столбец и ровно 1 строку. Чтобы поставить 8 ладей, достаточно каждый раз ставить ладью на пересечения свободных столбца и строки (любых).

Если мы поставим черную ладью на пересечении занятых столбца и строки, часть ~~этой~~ строки и столбца станет свободной. Тогда на пересечение освободившихся частей строки и столбца. Каждая белая ладья занимает 1 свободную часть строки и 1 свободную часть столбца. Каждая черная ладья освобождает не больше 1 части столбца и не больше 1 части строки. (не больше 1, т.к. если поставить черную ладью в верхнюю строку, то ни одна часть столбца не освободится). Полная строка/столбец тоже является частью строки/столбца, так что изначально у нас по 8 свободных частей строк и столбцов, освободить мы можем не больше 9 частей строк/столбцов, тогда мы не можем поставить больше, чем $8+9=17$ белых ладей. (оценка на 17)

Пример на 17 белых ладей:

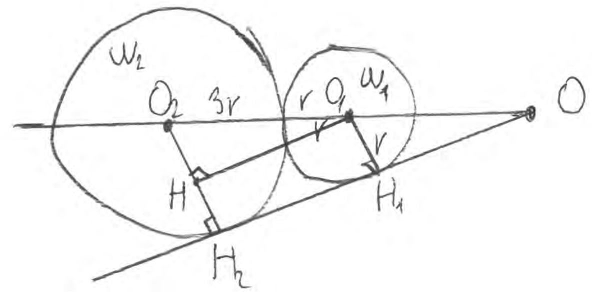


○ – белая ладья

● – черная ладья

6

Для начала рассмотрим плоскость, проходящую через центры обоих шаров и через одну из точек касания шара и конуса.



O_1, O_2 – центры шаров ω_1 и ω_2

O – вершина 3-х конусов (очевидно, что $O \in (O_1O_2)$)

H_2 и H_1 – точки касания шаров и одного из конусов. (очевидно, что плоскости $O_1O_2H_1$ и $O_1O_2H_2$ совпадают).

$r_1 = r$

$r_2 = 3r$.

$O_1O_2 = r_1 + r_2 = 4r$.

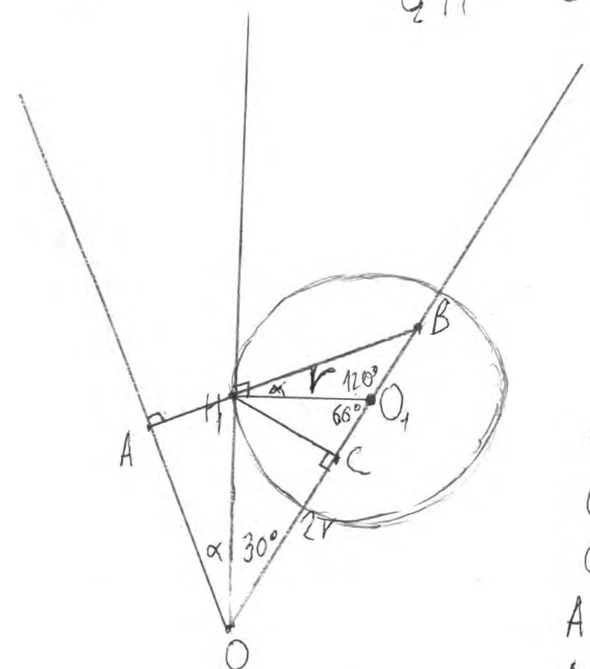
Опустим высоту O_1H на O_2H_2 из O_1.

$O_1H \parallel H_1H_2 \Rightarrow HH_2 = O_1H_1$

$O_2H = \underset{3r}{O_2H_2} - \underset{r}{O_1H_1} = 2r$

Тогда $\sin O_2O_1H = \frac{O_2O_1}{O_2H} = \frac{1}{2}$; $\angle O_2O_1H = 30^\circ$

$\angle O_2OH_2 = O_2O_1H = 30^\circ$.



OA – ось симметрии конуса

$H_1AO = 90^\circ$.

$B = OO_1 \cap A_1H_1$

C – основание перпендикуляра из H_1 на OO_1.

$\angle H_1OA = \alpha$

$O_1H_1 = r$

$OO_1 = 2O_1H_1 = 2r$

$OH_1 = 2r\cos 30^\circ = \sqrt{3}r$

$AO = OH_1\cos\alpha = \sqrt{3}r\cos\alpha$

$AH_1 = OH_1\sin\alpha = \sqrt{3}r\sin\alpha$

$H_1C = OH_1 \sin 30 = \frac{\sqrt{3}r}{2}$

$\angle BH_1O_1 = \alpha$ (т.к. $AH_1O = \overset{90^\circ-\alpha}{} \ OH_1O_1 = 90^\circ$)

тогда $\angle H_1BO_1 = 60^\circ - \alpha$

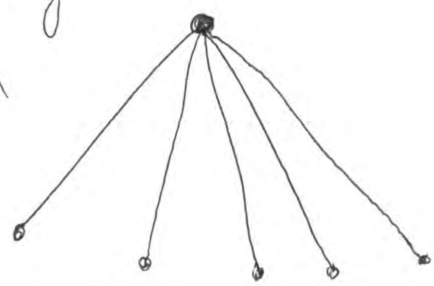
$H_1B = \frac{H_1C}{\sin(60^\circ-\alpha)} = \frac{\sqrt{3}r}{2\sin(60^\circ-\alpha)} = \frac{\sqrt{3}r}{\sqrt{3}\cos\alpha - \sin\alpha}$

Чистовик.

(5) Заметим, что после проведения n-го тура каждый из спортсменов сыграл с n различными соперниками.

Пусть спортсмены — вершины графа, сыгранные партии — его ребра.

Тогда на n-м туре степень каждой вершины равна n.
Рассмотрим любую вершину.



С ее участием существует цикл длины 3 тогда и только тогда, когда соединены какие-то 2 вершины из тех, с которыми у нее есть общее ребро.
~~Заметим, что~~ Давайте поймем, когда это гарантированно случится. Из каждой из соседей нашей вершины могут идти ребра только в вершины, соединенные с ней. Это перестанет быть возможным при $n > k$ $\Rightarrow$ $k+1$ — минимальное такое n

Ответ: $k+1$