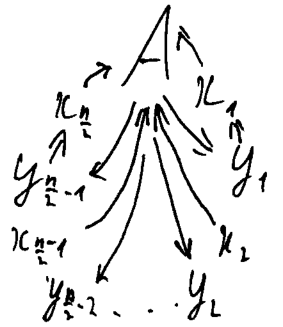


x_i – проигравшие A (стрелочка означает поражение)
y_i – победившие A

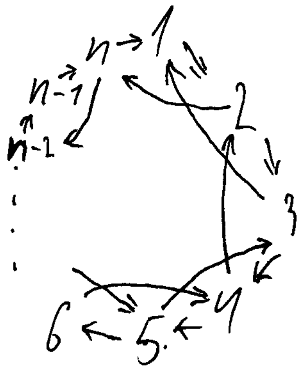
Заметим, что т.к. кол-во $x > y$, ~~то оба соседа A проиграли ему. Но тогда, если $x_{\frac{n}{2}}$ победил x_1~~ на 1 каждого, иначе найдутся два соседа, оба проигравших $A \Rightarrow N = \frac{n}{2}$, кол-во $x = \frac{n}{2}$, $y = \frac{n}{2} - 1 \Rightarrow$ ~~на 1 побед у~~

Также, каждый y_i обязан проиграть $x_{\frac{n}{2}}$ и x_1, т.к. иначе он не проиграет никому из пары $A - x_{\frac{n}{2}}$, $A - x_1 \Rightarrow$ у $x_{\frac{n}{2}}$ и x_1 ~~также~~ $\geqslant \frac{n}{2} - 1$ побед, но x_1 и $x_{\frac{n}{2}}$ тоже играли, поэтому скажем, что x_1 обыграл $x_{\frac{n}{2}}$ и имеет $\frac{n}{2}$ побед. Но тогда x_1 обыграл и $x_{\frac{n}{2}}$ и $y_{\frac{n}{2}-1}$, которые являются соседями $\Rightarrow$ ~~такое~~ условие при чётных n не выполняется.

II если n – нечёт

Сделаем так, что у каждого спортсмена поровну побед и поражений. Мы можем это сделать т.к. каждый сыграл $n-1$ игр, n-нечёт $\Rightarrow$ $(n-1) \vdots 2$

Пронумеруем спортсменов от 1 до n:



Построим схему их игр так: будем обходить их, соединяя стрелочками сначала по часовой стрелке, потом через одного, через двух и т.д., меняя направление стрелок через цикл. Если ~~[illegible]~~ $n \vdots p$, где p длина очередного цикла, то проведём этот цикл ещё раз, начиная уже не с i-ого, а с $i+1$-ого спортсмена. ~~Так~~ и будем считать совокупность одинаковых

М 162

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Ш

5315

60

1	2	3	4	5	6	сумма
4	-	4	-	4	-	12

60

НАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Владивосток

Дата 01.03.2019

* *

10–11 класс. Восьмой вариант

1. Имеется два черных ферзя и n белых. При каком наибольшем n эти фигуры можно расставить на шахматной доске так, чтобы одноцветные ферзи не били друг друга? Ферзь не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Числа x, y, z — углы треугольника. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{\cos x \cdot \cos y \cdot \sin z}{\cos x + \cos y + \sin z}.$$

3. Дан остроугольный треугольник ABC. У прямоугольника $KLMN$ вершины M и N лежат соответственно на на продолжениях сторон AB и AC за точку A, а K и L — на стороне BC. Пусть AD — медиана треугольника ABC, E — середина его высоты, опущенной из вершины A, O — точка пересечения диагоналей прямоугольника. Найдите угол DEO.

4. Даны натуральные числа x и y. В десятичной системе они $4n$-значные, причем в записи x цифры повторяются через одну, а в записи y — через три. Оказалось, что десятичная запись $x \cdot y$ состоит из последовательных блоков по 4 одинаковых цифры. При каких n это возможно?

5. В однокруговом турнире по настольному теннису участвовало n спортсменов ($n \geqslant 3$). По итогам турнира оказалось, что всех участников можно рассадить за круглым столом так, что для произвольной пары соседей A и B любой теннисист, отличный от A и B, проиграл хотя бы одному из теннисистов A и B. При каких n такое возможно?

6. На столе лежат три конуса с общей вершиной, касаясь друг друга внешним образом. Оси симметрии первых двух конусов взаимно перпендикулярны. Угол при вершине первого конуса равен $\arcsin \frac{5}{6}$. Два шара вписаны в третий конус и касаются друг друга внешним образом. Найдите отношение радиусов шаров (большего к меньшему).

№3 Дано: △ABC

AD - медиана, AH - высота

AE = EH

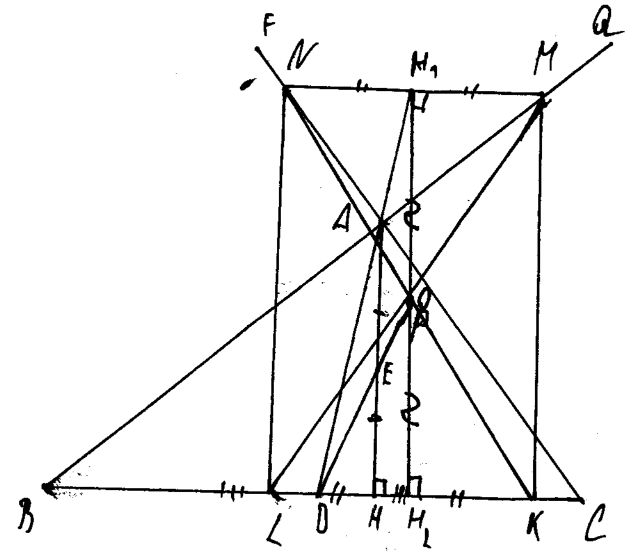
KLMN - прямоугольник

т.K, т.L ⊂ BC

т.N ∈ CF; т.M ∈ BQ

т.O - т. пересеч. диагоналей

∠DEO - ?



Решение:

△NAM ~ △ABC (по двум углам)

1) ∠NAM = ∠BAC (верт.)

2) ∠NMA = ∠ABC (накрест леж.)

AD - медиана

⇒ продолжим AD за точку A ⇒ $AD \cap NM$ = т.H_1, AH_1 - медиана △NAM ⇒ ⇒ $NH_1 = H_1M$.

Проведём H_1H_2 - высоту KLNM

т.к. KLMN - прямоугольник, $NH_1 = H_1M$, т.O - центр. пересеч. диагоналей ⇒ ⇒ т.O ∈ H_1H_2; $OH_1 = OH_2$. (I)

△DAH ~ △DH_1H_2 (по двум углам)

1) ∠ADH - общий

2) ∠AHD = ∠H_1H_2D = 90°

AE = EH

DE - медиана △ADH ⇒ продолжим DE за т.E; $DE \cap H_1H_2$ = т.P

DP - медиана DH_1H_2, $H_1P = PH_2$, P ∈ H_1H_2 ⇒ из (I) ⇒ т.P = т.O ⇒

⇒ {т.D, т.E, т.O} ⊂ DO ⇒ ∠DEO = 180°.

Ответ: ∠DEO = 180°.

№1.

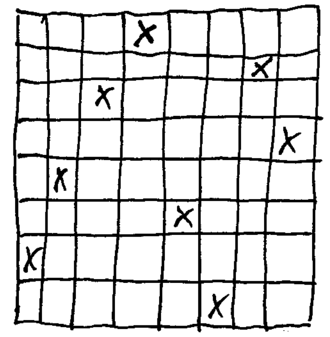


рис. 1.

Без чёрных ферзей, максимум на доску можно поставить 8 белых ферзей, т.к. при n > 8 хотя бы два ферзя попадут на один столбец. Пример с 8 ферзями показан на рис. 1.

Заметим, что каждая свободная клетка бьётся минимум двумя ферзями. Наша задача - добавить как можно больше белых ферзей, "защитив" их двумя чёрными. Ещё три белых ферзя мы поставить не сможем, т.к. на защиту каждого нового белого ферзя должны быть потрачены оба чёрных ферзя, а если мы добавим три белых ферзя, то хотя бы два из них будут находиться в разных строках или столбцах, а т.к. каждую клетку бьёт два ферзя, "защитить" всех трёх мы не сможем ⇒ ⇒ n = 10 - максимальное число белых ферзей (рис. 2. x - бел., V чёр.).

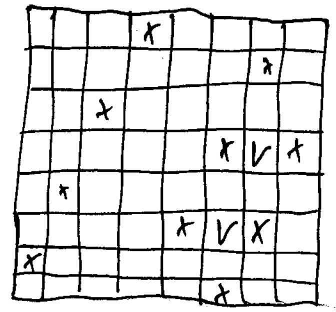


рис. 2.

Ответ: 10.

№5. $n \geq 3$

I если n - чёт

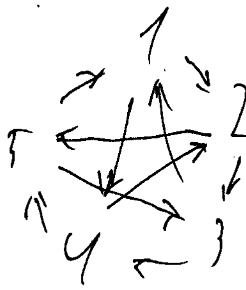
рассмотрим спортсмена(ов) A с наибольшим кол-вом побед N

т.к. общее кол-во побед = общему кол-ву поражений, то $N \geq \frac{n}{2}$, т.к. иначе если $N < \frac{n}{2}$, то и у всех ост. спортсменов кол-во побед $< \frac{n}{2}$ ⇒ ⇒ общее число поражений > общего числа побед.

A обыграл минимум $\frac{n}{2}$ других спортсменов ⇒ ни один из этих спортсменов не может сидеть рядом с другим.

Чистовик

по длине циклов одним единым циклом. Так, за $\frac{n-1}{2}$ циклов мы построим схему всех игр, где каждый из спортсменов проиграет соседу слева и далее каждому через один от него. Такая схема удовлетворит условию, т.к. ~~вход~~ оба человека в паре в совокупности обыграют всех остальных.



Пример для $n=5$

Ответ: при n - нечёт ($n=2k+1$, $k\geq 1$, $k\in \mathbb{Z}$).