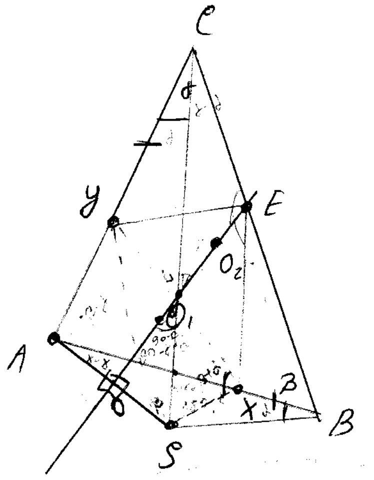
II Случай. Окружности пересекаются $\Rightarrow O_1O_2 \perp ED$



Т.к. опираются на 1 дугу

$\angle CSA = \angle\beta = \beta$

$\angle ACS = \angle ABS = \alpha$

$\angle ASB = 180 - \gamma$

$\angle CSB = 180 - \beta - \gamma$

$\angle SCB = \gamma - \alpha$

$\gamma + \alpha + 180 - \beta - \gamma + \beta + \alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 0$

Тогда $\angle OE\beta = 180 - \beta - (90 - \gamma + \alpha) =$

$= 90 - \beta - \alpha + \gamma = 90 - \beta + \gamma \Rightarrow$

Пересечение невозможно, а угол равен $90 - \beta + \gamma$

Ответ: $\cancel{90-\beta+\gamma}$

AD-13

Задача 5

~~Всего способов выбрать трех игроков $C_{16}^3 = \frac{16!}{13!\cdot 3!} = 35\cdot 16$ - число пар сыгравших между собой. (они могут повторяться) $\frac{35\cdot 16}{14} = 5\cdot 8$ (т.к. к каждой сыгравшей паре может добавиться 14 ч-к.) число матчей, которые нужно сыграть Ответ. 40.~~

Когда в любой тройке были сыгравшие игроки, то не более 2 людей не играли между собой, а все остальные 14 все играли друг с другом. Тогда матчей сыграно $\cancel{\frac{14\cdot 13}{2}}$ $\frac{14\cdot 13}{2} = 91$ Ответ: 91 матч

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

50 1 2859

1	2	3	4	5	6	сумма
4	4	2		0		10

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Пермь

Дата 16.03.2019

* *

10–11 класс. Первый вариант

1. Имеется 8 черных ладей и n белых. При каком наибольшем n их можно расставить на шахматной доске так, чтобы одноцветные ладьи не били друг друга? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Даны положительные числа x, y, z. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{xyz\,(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4 + (yz)^4 + (xz)^4}}.$$

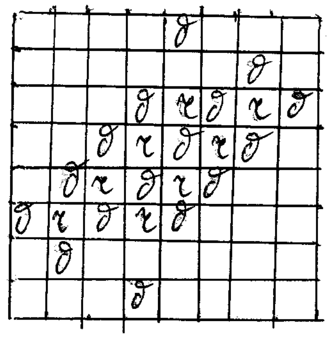
3. Дан треугольник ABC с меньшей стороной AB. На сторонах AB и AC выбраны соответственно точки X и Y так, что $BX = CY$. Под каким углом прямая, проходящая через центры описанных окружностей треугольников ABC и AXY, пересекает прямую BC, если $\angle ABC = \beta$ и $\angle BCA = \gamma$?

4. Десятичная запись квадрата натурального числа x представляет собой два одинаковых соседних блока из n цифр. Может ли n равняться 20182019?

5. На однокруговой турнир по настольному теннису подало заявку 16 человек. Когда было сыграно n матчей, оказалось, что среди любых трех теннисистов найдутся двое, уже сыгравших между собой. При каком наименьшем n такое возможно?

6. Три конуса с общей вершиной, касающихся друг друга внешним образом, имеют высоту 2 и радиус основания $\sqrt{3}$. Два шара касаются внешним образом друг друга и всех конусов. Найдите отношения радиусов шаров (большего к меньшему).

Задача 1



д - белая ладья
ч - черная ладья.

1) Приведем пример, доказывающий, что возможно расставить 16 белых ладей.

2) Докажем, что более 16 ладей расставить невозможно.

1. Предположим что это возможно.

2. ~~Значит~~, Заметим, что если в строке (столбце) n белых ладей, то в ней должно быть минимум $n-1$ черная ладья, т.к между двумя белыми должна стоять черная. Тогда пусть в каждом столбце n_k ладей $\sum_{k=1}^{8} n_k = a > 16$. Тогда сумма черных ладей $\sum_{k=1}^{8}(n_k-1) = b > 8$, что противоречит условию задачи.

Ответ: $n=16$

Задача 2

Заметим, что для положительных a, b, c выполняется неравенство Коши:

$$\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \le \sqrt[3]{abc} \le \frac{a+b+c}{3} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$$

$$A = \frac{xyz(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4+(yz)^4+(xz)^4}}$$

По неравенству Коши: $\sqrt[3]{xyz} \le \frac{x+y+z}{3}$

$$xyz \le \frac{(x+y+z)^3}{27}.$$

$$\sqrt{\frac{((xy)^2)^2+(yz)^4+(xz)^4}{3}} \ge \frac{(xy)^2+(yz)^2+(xz)^2}{3} \ge (xyz)^{\frac{4}{3}}$$

$$\sqrt{(xy)^4+(yz)^4+(xz)^4} \ge \frac{(xy)^2+(yz)^2+(xz)^2}{\sqrt{3}} \ge \frac{(xyz)^{\frac{4}{3}}}{\sqrt{3}}$$

~~$x+y+z$~~

Тогда $A = \frac{xyz(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4+(yz)^4+(zx)^4}} \le \cancel{(x+y+z)^4} \frac{xyz(x+y+z)\cdot\sqrt{3}}{(xyz)^{\frac{4}{3}}}$

Т.к $xyz \le \frac{(x+y+z)^3}{27}$, то ~~$x+y+z$~~ $(xyz)^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{xyz}\cdot xyz \le$

~~$\frac{xyz(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4+(yz)^4+(zx)^4}} \le \frac{(x+y+z)^4\cdot\sqrt{3}}{27((xy)^2+(yz)^2+(xz)^2)}$~~

$$\sqrt{\frac{(xy)^4+(xz)^4+(yz)^4}{3}} \ge \frac{3}{\frac{1}{x^2y^2}+\frac{1}{x^2z^2}+\frac{1}{y^2z^2}} = \frac{3x^4y^4z^4}{x^4y^2z^2+z^4y^2x^2+y^4x^2z^2} =$$

$$= \frac{3x^2y^2z^2}{x^2+y^2+z^2} \ge \frac{3(x^2y^2z^2)(x^2+y^2+z^2)}{3(x^2+y^2+z^2)} \ge xyz(x+y+z)$$

Тогда $\frac{xyz(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4+(yz)^4+(zx)^4}} \le \frac{xyz(x+y+z)\cdot\sqrt{3}}{xyz(x+y+z)} \le \sqrt{3}$ равенство достигается при $x=y=z$

Ответ: $\sqrt{3}$.

Задача 3

I случай: окружности касаются.

1 Окружности внутренне касаются => прямая, соединяющая их центры $\perp$ их общей ~~хорде~~ касательной.

$\angle ACB = \angle BAE = \frac{1}{2}\cup AE$, $\angle FAC = \frac{1}{2}\cup AC = \angle CBA$.

Тогда $\angle OAB = 90-\gamma$. Тогда $\angle AOB = 180-\beta-(90-\gamma) = 90+\gamma-\beta$.