нам пары(найдутся К вершины соединенной с ней
По принципу Дирихле у нас будет одна соединена с ~~о~~ обоями из взятых нами т.е. треугольник. ~~Тогда~~

Покажем что меньше нельзя
~~Где~~ Предположим ~~нам~~ можно к ~~игр~~ туров
Тогда каждый сыграл К игр. Пронумеруем игроков
Сделаем турнир так, чтоб каждый ~~игр~~ четный сыграл с каждым нечетным (1 с 2, 4, 6, 8 ... 2K)(3 с 2; 4; 6, 8, 2K)
(5 с 2, 4, 6, 8, 2K) и т.д. Каждый четный сыграл со всеми нечетными и каждый нечетный со всеми четными
Имеем у каждого по К игр; но т.к. четные с четными играть не будут; то ни одного треугольника не будет;
~~Тогда~~
~~Право~~

Ответ: K + 1

65

РГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

2

1	2	3	4	5	6	сумма
4	4	1	0	4	0	13

1311

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада ~~Вла~~ Владимир

Дата 16 Марта

* *

10–11 класс. Второй вариант

1. Имеется 9 черных ладей и n белых. При каком наибольшем n их можно расставить на шахматной доске так, чтобы одноцветные ладьи не били друг друга? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Даны положительные числа x, y, z. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{xyz\,(x+y+z)}{x^4+y^4+z^4}.$$

3. Окружность ω единичного радиуса проходит через вершины B и C треугольника ABC и вторично пересекает его стороны AB и AC в точках K и L соответственно. На лучах BL и CK отмечены соответственно такие точки P и Q, что $BP = AC$ и $CQ = AB$. Найдите расстояние между центрами описанных окружностей треугольников APQ и KBC.

4. Шестнадцатиричная запись квадрата натурального числа x представляет собой два одинаковых соседних блока из n цифр. Может ли n равняться 2023?

5. В однокруговом турнире по настольному теннису участвует $2k$ спортсменов. В каждом туре все участники проводят по одному матчу. Какое наименьшее число туров надо сыграть, чтобы при любом расписании игр обязательно нашлось трое теннисистов, сыгравших друг с другом?

6. Имеется три одинаковых конуса с общей вершиной, касающихся друг друга внешним образом, а также два шара, касающихся внешним образом друг друга и всех конусов. Радиусы шаров относятся как 1 : 3. Найдите угол при вершине конусов. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении).

№1

Если в строке стоит а черных ладей то мы можем поставить а+1 белую — ставим через 1

б	ч	б	ч	б	ч	б	ч	б

Тогда для 9 оценка — 17

Ставим по одной везде ~~кроме одной строки~~ во всех строках кроме одной и там ставим 2, тогда у нас $2\cdot7+3=17$ — оценка

Пример на 17

	A	B	C	D	E	F	G	H	
1				б					1
2			б	ч		б			2
3		б	ч	б					2
4	б	ч	б	ч	б	ч	б		4
5		б	ч	б	ч	б	ч	б	4
6			б	ч	б				2
7							б		1
8				б					1

17 белых

Оценка доказана

№2 $\boxed{\text{По неравенству Коши}}$

$$x^4+y^4\geq 2x^2y^2 \quad \text{т.к. по Коши } \frac{x^4+y^4}{2}\geq\sqrt{x^4y^4}$$

$$z^4+y^4\geq 2z^2y^2$$

$$x^4+z^4\geq 2x^2z^2$$

Сложим и поделим на 2

$$x^4+y^4+z^4\geq x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2$$

$$x^2y^2+z^2y^2\geq 2y^2xz \quad \text{т.к. по Коши } \frac{x^2y^2+z^2y^2}{2}\geq\sqrt[2]{y^4x^2z^2}$$

$$x^2y^2+x^2z^2\geq 2x^2zy$$

$$x^2z^2+z^2y^2\geq 2z^2xy$$

Сложим и поделим на два

в итоге имеем

$$x^4+y^4+z^4\geq x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2\geq z^2xy+x^2yz+y^2zx = xyz(x+y+z)$$

$$\max(xyz(x+y+z)) = x^4+y^4+z^4 \quad \text{т.е } x=y=z$$

Тогда $\max = 1$

Ответ: 1

№5

Назовем ребрами графа — игры, а вершинами — участников

Ответ $k+1$

Доказательство:

Берем две соединенные вершины и смотрим на все кроме них

Таких будет $2k-2$ ~~для каждой из взятой~~ среди них для каждой из взятой

Чистовик

Санкт-Петербургский
государственный
университет

1

№4

x^2 это два ~~бл~~ блока по n цифр

Тогда x^2 делится на $\left(1\underbrace{00\ldots000}_{2023}+1\right)$

лемма 1

~~верно~~

если a имеет длину записи $в$

то a^2 либо $2в$ либо $2в-1$

$$1\underbrace{000\ldots00}_{в-1} \le a < 1\underbrace{00\ldots0}_{в}$$

$$1\underbrace{000\ldots0}_{2в-2} \le a^2 < 1\underbrace{000\ldots0}_{2в}$$

a^2 или $2в-1$ или $2в$ — доказано

длина x равна 2023

Тогда первые три цифры ≥ 4 иначе

$x^2 < 1\underbrace{000\ldots0}_{4055}$ и не выполнен два ~~бл~~ блока

т.к. $a = \underbrace{1000\ldots01}_{2024} > x$, то $a = kx$ т.к. a -
k-целое
делится x^2

если $k \geq 5$ то $\frac{a}{k}$ имеет длинну меньше чем 2023

значит $k < 5$

$a = 16^{2023} + 1$

$\boxed{16^{2023} + 1}$ на 2 и на 4 не делится не

$16^{2023} = 4^{4046} \equiv 1 \pmod{3}$

Тогда $4^{4046} + 1 \equiv 2 \pmod{3}$

k не равно ничему - Противоречие

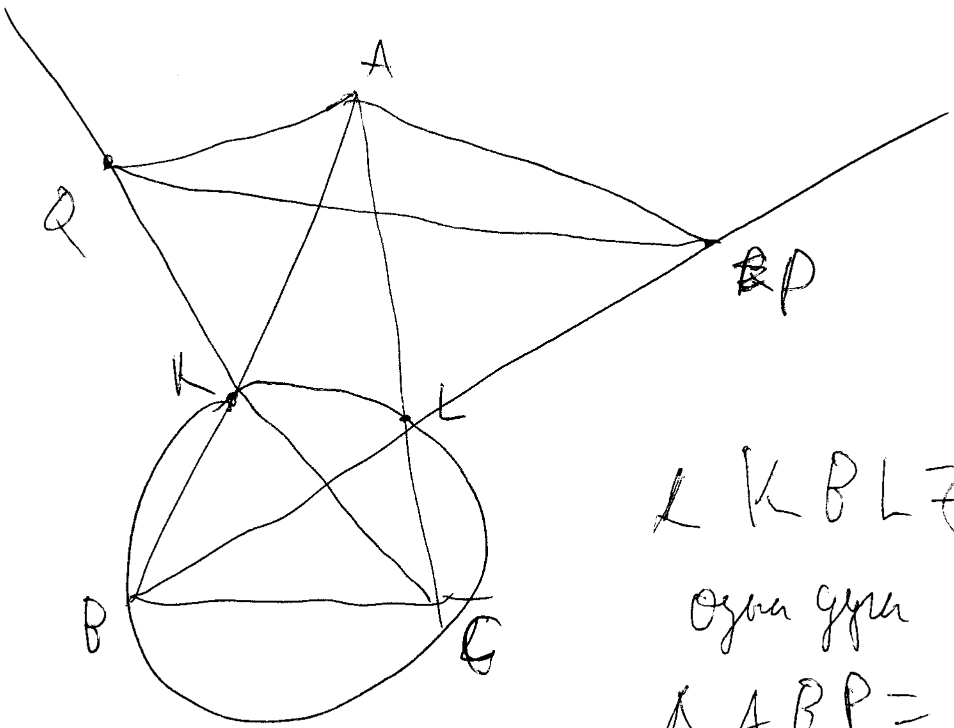
~~Такого числа n - Нет!~~

n не может быть равно 2023

Ответ: НЕТ.

Чистовик

Санкт-Петербургский
государственный
университет



?

$\angle KBL = \angle KCL$ т.к.

опир. дуги

$\Delta ABP = \Delta QCA$

$QC = AB$

$PB = AC$

~~$QC = AB$~~

$\angle AQP = \gamma$

$\angle QPL = \beta$

$\angle QAC = \gamma + \beta$

$\angle QAP = 180 - 2\gamma$

$\angle LAP = 180 - 3\gamma - \beta$

$\angle ALP = (180 - 3\gamma - \beta) - (\gamma + \beta) = 2\alpha$

$\angle ALP = \angle BLC$ – вертик

$\angle QKA = \angle BKC$ – вертик

$\angle BLC = \angle PKC$

$\angle QKA = 2\gamma$?

Построим окружность для $\triangle ALP$

Пусть она пересекает CQ в точке R (R не совпадает с L)

$\angle ARP = \angle ALP = 2\alpha$

$\angle RPL = \angle PCL$

$\triangle BR = \triangle CRP$

$BR = CR$

$QC = AB$

$\angle KBR = KCR$

$QR = RP +$

$AR = RR$

R — равноудалена от Q, A, P

значит R — центр описанной окружности значит расстояние равно 1

Ответ 1