А0-21

СКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

80

1

5117

1	2	3	4	5	6	сумма
4	4	0	4	4	0	16

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Саранск

Дата 13.03.19

* *

10–11 класс. Второй вариант

1. Имеется 9 черных ладей и n белых. При каком наибольшем n их можно расставить на шахматной доске так, чтобы одноцветные ладьи не били друг друга? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Даны положительные числа x, y, z. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{xyz\,(x+y+z)}{x^4+y^4+z^4}.$$

3. Окружность ω единичного радиуса проходит через вершины B и C треугольника ABC и вторично пересекает его стороны AB и AC в точках K и L соответственно. На лучах BL и CK отмечены соответственно такие точки P и Q, что $BP = AC$ и $CQ = AB$. Найдите расстояние между центрами описанных окружностей треугольников APQ и KBC.

4. Шестнадцатиричная запись квадрата натурального числа x представляет собой два одинаковых соседних блока из n цифр. Может ли n равняться 2023?

5. В однокруговом турнире по настольному теннису участвует $2k$ спортсменов. В каждом туре все участники проводят по одному матчу. Какое наименьшее число туров надо сыграть, чтобы при любом расписании игр обязательно нашлось трое теннисистов, сыгравших друг с другом?

6. Имеется три одинаковых конуса с общей вершиной, касающихся друг друга внешним образом, а также два шара, касающихся внешним образом друг друга и всех конусов. Радиусы шаров относятся как $1 : 3$. Найдите угол при вершине конусов. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении).

$x^4+y^4+z^4$

6) $\begin{cases} A = \dfrac{xyz(x+y+z)}{x^4+y^4+z^4} \text{ - из условия} \\ 1 \geq \dfrac{xyz(x+y+z)}{x^4+y^4+z^4} \text{ - из п.5} \end{cases}$ => Максимальное значение A равно 1,

оно достигается при $x=y=z=1$; $\left(\dfrac{1\cdot 3}{1+1+1}=\dfrac{3}{3}=1\right)$

⇓

Максимальное значение A равно 1

Ответ: 1

N5

Лемма 1

В графе с $2n$ вершинами и хотя бы n^2+1 ребром всегда есть 3 вершины попарно соединённые ребром.

Доказательство:

1) По индукции:

База: $n=2$ => 4 вершины, 5 рёбер

Заметим, что в полном графе на 4 вершинах 6 рёбер. Очевидно, что какое бы мы ребро не убрали из полного графа, все равно останутся 3 вершины попарно соединённые ребрами. Но все

2) графы с 5 ребрами и 4 вершинами это полные графы без 1 ребра => в графе с 4 вершинами и 5 ребрами найдутся 3 вершины, попарно соединённые ребрами. (Далее будем говорить, что найдётся треугольник, подразумевая 3 вершины, попарно соединённых ребром.)

⇓

База доказана.

Переход: Пусть для $\forall n$ от 2 до k верно. Докажем для $k+1$

N 1

1) Докажем, что $n < 18$

□ От противного: пусть $n \geqslant 18$

• Тогда пусть x_1 — кол-во белых ладей в первой строке, x_2 — во второй, ..., x_i — в i-той, x_8 — в последней (восьмой) строке.

Значит, раз всего n ладей и всего 8 строк, то $n = \sum\limits_{i=1}^{8} x_i$

• Пусть y_i — кол-во черных ладей в i-той строке.

Заметим, что $y_i \geqslant x_i - 1$, при этом из условия: $9 = \sum\limits_{i=1}^{8} y_i$

[Док-во: Чтобы белые ладьи в одной и той же строке не били друг друга, между $\forall$ двумя соседними должна быть чёрная ладья, но если всего x_i белых, то „промежутков" между соседними $x_i - 1$ => чёрных хотя бы $x_i - 1$)

$$\begin{cases} n = \sum\limits_{i=1}^{8} x_i \\ 9 = \sum\limits_{i=1}^{8} y_i \\ y_i \geqslant x_i - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = \sum\limits_{i=1}^{8} x_i \\ 9 \geqslant \sum\limits_{i=1}^{8} (x_i - 1) \end{cases} \Rightarrow 9 \geqslant \sum\limits_{i=1}^{8} x_i - 8 = n - 8 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 9 \geqslant n - 8$, но $n \geqslant 18 \Rightarrow 9 \geqslant 10$, что неправда (неверно) $\Rightarrow$

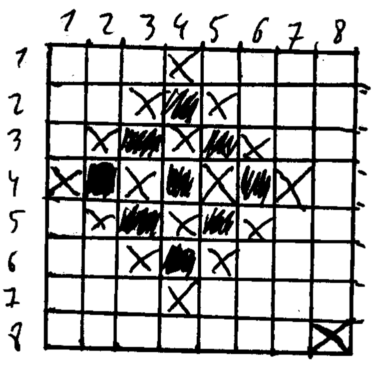
$\Rightarrow$ получили противоречие $\Rightarrow n < 18$

■

2) $n < 18 \Rightarrow$ максимальное n равно 17.

Докажем, что $n = 17$ возможно. (т.е. $n = 17$ — ответ)

Пример.



● — черные

× — белые

9 черных

17 белых

ЧТД

$\boxed{\text{Ответ: } 17}$

№2

1) Заметим, что если x, y, z положительные, то $x^2+y^2+z^2 \geqslant xz+xy+yz$

(Доказательство: $(x-y)^2+(y-x)^2+(z-x)^2 = 2(x^2+y^2+z^2)-2(xz+xy+yz)$, но сумма квадратов всегда $\geqslant 0 \Rightarrow 2(x^2+y^2+z^2)-2(xz+xy+yz) = (x-y)^2+(y-x)^2+(z-x)^2 \geqslant 0$

$\Leftrightarrow 2(x^2+y^2+z^2)-2(xz+xy+yz) \geqslant 0 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 \geqslant xz+xy+yz$ $\forall$ +)

2) Пусть x, y, z - положительные, тогда заметим, что произведение квадратов всегда неотрицательное и сумма квадратов всегда неотрицательная

$\Downarrow$

$$x^2(y-z)^2+y^2(x-z)^2+z^2(x-y)^2 \geqslant 0$$

$\Downarrow$ раскроем скобки и сгруппируем

$$2(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2)-2xyz(x+y+z) \geqslant 0$$

$\Downarrow$

$$x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2 \geqslant xyz(x+y+z)$$

3) из п.1 следует, что $x^4+y^4+z^4 \geqslant x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2$

(вместо x, y, z подставили x^2, y^2, z^2)

4) из п. 2, 3 $\Rightarrow x^4+y^4+z^4 \geqslant x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2 \geqslant xyz(x+y+z)$

$\Rightarrow x^4+y^4+z^4 \geqslant xyz(x+y+z)$

5) Но $x, y, z > 0 \Rightarrow$ Раз $x^4+y^4+z^4 \geqslant xyz(x+y+z)$, то $1 \geqslant \dfrac{xyz(x+y+z)}{x^4+y^4+z^4}$

Чистовик

№5 (продолжение)

Доказ-во перехода:

• $n=k+1 \Rightarrow$ у нас $2(k+1)=2k+2$ вершины и $(k+1)^2+1$ ребро

• Выберем вершину ① и вершину ② так, чтобы между ① и ② было ребро, т.е. ① и ② соединены. (у нас $(k+1)^2+1$ ребро $\Rightarrow$ такие найдутся)

• Заметим, что если суммарно из вершин ① и ② выходит $\geq 2k+1$ ребро, не считая ребро ①$\Leftrightarrow$② (между ① и ②), то найдётся треугольник.

(Док-во: Помимо вершин ① и ② в графе ещё $2k$ вершин. $\Rightarrow$ Если из ① и ②, не считая ребро ①$\Leftrightarrow$②, выходит $\geq 2k+1$ ребро, то по принципу Дирихле будет такая вершина ③, что и ① и ③, и ① и ② соединены ребром (т.к. ребер $\geq 2k+1 > 2k$ - кол-во вершин), но тогда соединены ребром попарно ①, ②, ③ $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ есть треугольник ЧТД)

• Если из ① и ② выходит $\geq 2k+1$ ребро, не считая ①$\Leftrightarrow$②, то найдётся треугольник $\Rightarrow$ для $n=k+1$ будет доказано.

• Если же кол-во ребер $< 2k+1$, то их $\leq 2k$.

Тогда уберём из графа вершины ① и ② и все ребра, которые из них выходили, тогда в оставшемся графе $2k$ вершин. Убрали мы $\underbrace{\leq 2k}_{\text{не считая } 1 \Leftrightarrow 2} + \overbrace{1}^{\text{между } 1 \text{ и } 2}$ $\Rightarrow$ в графе осталось $\geq (k+1)^2+1-2k-1 = k^2+1$ ребро. $\Rightarrow$ У нас граф с $2k$ вершинами и хотя бы k^2+1 ребром $\Rightarrow$ по предположению индукции найдётся треугольник $\Rightarrow$ переход доказан.

Чистовик.

№5 (продолжение)

Значит, доказали переход, => доказали лемму.

Лемма 2

В графе с $2n$ вершинами и $\leq n^2$ ребрами не обязательно будет треугольник. (Можно считать что ребер ровно n^2, т.к. добавление новых ребер не убирает треугольники, т.е. если треугольник был в графе, то он и будет)

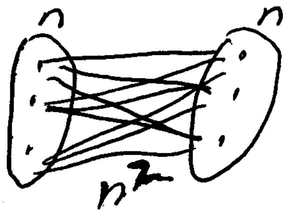
Доказательство:

Пример:

• Разобьём граф на 2 доли по n вершин.

• Пусть из каждой вершины одной доли идут ребра во все вершины другой доли => всего n^2 ребер.

• Граф имеет $2n$ вершин и n^2 ребер, но является двудольным, а $\forall$ двудольный граф не содержит циклов нечётной длины, в том числе треугольников (цикл длины 3) => в этом графе нет треугольников => лемма доказана.



Задачи:

1) У нас $2k$ спортсменов, в каждом туре по 1 матчу =>
=> за 1 тур было сыграно $\frac{2k}{2} = k$ игр.

2) Пусть каждый спортсмен — вершина нашего графа, а 2 вершины соединены ребром, если 2 спортсмена, соответствующие вершинам, играли в каком-то из туров между собой.

Чистовик

№5 (продолжение)

3) из п. 1 => каждый тур добавляет в граф по k ребер

4) Пусть было сыграно α ~~туров~~ туров и $\alpha \leq k$

Тогда из п. 3 => в графе $\alpha \cdot k \leq k^2$ ребер.

Значит, у нас $2k$ вершин и $\leq k^2$ ребер.

5) Заметим, что трое теннисистов сыгравших с друг другом образуют треугольник в нашем графе.

6) из п. 4 $2k$ вершин, $\leq k^2$ ребер. Но по лемме 2 в таком графе не обязательно найдется треугольник $\overset{\text{из п. 5}}{=>}$ не обязательно будут ~~...~~ 3 теннисиста. => $\alpha \leq k$ не подходит.

7) Докажем, что $\alpha = k+1$ подходит.

У нас $2k$ вершин и $\alpha \cdot k$ ребер, т.е. $k^2 + k \geq k^2 + 1$ ребро =>

=> по Лемме 1 найдется треугольник => Для $\alpha = k+1$ найдутся 3 теннисиста сыгравшие друг с другом.

=> $\alpha = k+1$ подходит.

8) из п. 6 $\alpha \leq k$ - не подходит

из п. 7 $\alpha = k+1$ - подходит => минимальное кол-во туров, чтобы обязательно нашлись 3 теннисиста равно $k+1$

Ответ: $k+1$

N 4

1) Заметим, что $16 \underset{17}{\equiv} -1$ (сравнение по модулю) => для натуральных k верно (и для $k=0$)

$$\begin{cases} 16^{2k+1} \equiv -1 \ (\mathrm{mod}\ (17)) \\ 16^{2k} \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 17) \end{cases}$$

Чистовик

№4 (продолжение)

Тогда верно, что 16^{2022-} ~~16~~ $16^{2022-1} + \ldots 16^{2022-i} + \ldots + 16^{2022-2022} = 16^{2022} + 16^{2021} + 16^{2020} + \ldots + 16 + 1 \underset{17}{\equiv} 1-1+1-1+1-1+\ldots+1-1 \underset{17}{\equiv} 0$ => эта сумма делится на 17

Т.е. $\sum_{i=0}^{2022} 16^i \,\vdots\, 17$

2) Пусть $Q = \frac{\sum_{i=0}^{2022} 16^i}{17}$ (обозначим так)

3) Пусть $x = \sum_{i=0}^{2022} 16^i$. Докажем, что x^2 в 16-ричной записи состоит из двух блоков по n цифр, где $n = 2023$.

4) Заметим, что ~~если~~ $\exists$ такие $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, что [redacted] $x^2 = \underbrace{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}_{n} \underbrace{\alpha_1 \ldots \alpha_n}_{n}$ в 16-ричной системе счисления, то мы доказали, что x^2 в 16-ричной системе счисления состоит из двух блоков по n цифр.

5) Найдём подходящие $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

6) Заметим, что $\sum_{i=0}^{2022} 16^i$ состоит из n цифр (т.к. $n = 2023$) если записать значение суммы в 16-й системе (это значение равно $\underbrace{1111\ldots1}_{n}$)

7) Заметим, что если в записи в 16-й системе числа Q меньше, чем n цифр, то, раз $17 \underset{16}{\equiv} 1$, $17 \cdot Q$ тоже записывается меньше чем из n цифр, но $17 \cdot Q = \sum_{i=0}^{2022} 16^i$ по определению Q => $17 \cdot Q$ по п.6 состоит из n-цифр => Q не может состоять $<$ чем из n цифр.

Чистовик

№ 4 (продолжение)

Тогда верно, что $16^{2022} - 16^{2021} + 16^{2020} - \dots 16^{2k+1} + 16^{2k} - \dots - 16 + 1 \underset{17}{\equiv} \underbrace{1+1+1+\dots+1}_{2023} \underset{17}{\equiv} 2023 \underset{17}{\equiv} 17\cdot 119 \underset{17}{\equiv} 0$

Значит, $\sum\limits_{i=0}^{i=2022} (-1)^i \cdot 16^i$ делится на 17. (Далее будем обозначать эту сумму за S)

2) Заметим, что если x^2 в 16 ричной системе имеет вид $\underbrace{\alpha_1\dots\alpha_n}\underbrace{\alpha_1\dots\alpha_n}$, то $x^2 = (\alpha_1\cdot 16^{n-1} + \alpha_2\cdot 16^{n-2} + \dots \alpha_n)(16^n+1)$

3) Заметим, что $16^n + 1 = 16^{2023} + 1 = (16+1)\cdot S = 17\cdot S$

4) Обозначим $\alpha_1\cdot 16^{n-1} + \dots + \alpha_n$ за Q.

5) Тогда $x^2 = Q\cdot 17\cdot S$, но $S \vdots 17$ по п. 1 $\Rightarrow x^2 = 17^2\cdot Q\cdot S'$, где $S' = \frac{S}{17}$

6) Заметим, что Q в 16-ричной системе записывается n цифрами $\Rightarrow \forall$ число записанное $n+1$ цифрой строго больше Q, а $\forall$ с $n-1$ цифрой строго меньше $Q \Rightarrow Q$ может принимать только значения ~~[illegible]~~ от 16^{n-1} до 16^{n+1} невключительно (все промежуточные можно получить при выборе $\alpha_1, \dots, \alpha_n$)

$\Downarrow$

$17^2\cdot Q\cdot S'$ может принимать все значения от $(16^{n-1})\cdot S'\cdot 17^2$ до $16^{n+1}\cdot S'\cdot 17^2$ невключительно, причём только те, которые кратны 17^2 и S'.

Аналогично.

7) Докажем, что среди чисел $S'\cdot 17^2\cdot m$, где m от $16^{n}-1$ до 16^{n+1} существует квадрат.

~~• Заметим, что~~ $m = 16^{n-1}+k$, где $k\in\{1,2,\dots,16^{n+1}-16^{n-1}\}$

$S'\cdot 17^2\cdot m = 17^2\cdot S'\cdot(16^{n-1}+k) = 16^{n-1}\cdot 17^2\cdot S' + 17^2\cdot S'\cdot k$

~~• Заметим, что S' содержит~~

• Заметим, что $m = 16^n - 1 + k$, где $k \in \{1,2,\dots,16^{n+1}-16^n\}$

$17^2\cdot S' = 16^{2023}+1$ по п. 2, 3, 4

• т.е. $x^2 = (16^{2022}-1+k)(16^{2023}+1) = 16^{4045} - 16^{2023} + k\cdot 16^{2023} - 1 + k + 16^{2022}$

– линейная функция относительно k => найдётся x^2

Но если найдётся x^2, то за $a_1,\dots,a_n$ возьмём разложение числа m в 16-й системе => $n=2023$ можно

Ответ: можно

№ 3

1) Заметим, что $\angle LCK = \angle LBK$ – вписанные

и $AC = BP$, $CQ = AB$ => по 1-му признаку $\triangle PBA = \triangle ACQ$ =>

=> $\angle AQC = \angle PAB$, $\angle QAC = \angle APB$

№ 4

Если ведущие нули считаются, т.е. число может начинаться с 0 в записи, то за Q берём $\frac{S}{17}$ – нат. число, т.к. $S \vdots 17$.

Тогда $Q\cdot 17\cdot S = S^2$, а $a_1,\dots,a_n$ берём из разложения числа Q. (первые a будут нулями.)