KL 151

ГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

60

7369

1	2	3	4	5	6	сумма
4	4	1	0	3	0	12

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (6–7 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Иркутск

Дата 10.03.19.

* *

6–7 класс. Первый вариант

1. Костя расставляет в клетках листа бумаги последовательные натуральные числа, двигаясь по спирали так, как показано на рисунке. Какое число будет написано в клетке справа от числа 2019?

	5	6	7
	4	1	8
14	3	2	9
13	12	11	10

2. Говоря о рыбе, каждый рыбак всегда называет больший вес, чем на самом деле. При этом все рыбаки вес чужой рыбы завышают не более чем в 2 раза, а вес своей рыбы — не менее чем в 7 раз. Беседуют два рыбака А и Б.

   А. Эта твоя рыбина весит 30 кг.

   Б. Ошибаешься, она весит 150 кг!

   А. Может я немного ошибся, но тогда она весит 31 кг.

   Б. Я тоже мог быть неточным, но уверен, что она весит 149 кг.

   А. Она весит 32 кг!

   Б. Нет, 148 кг.

   Какое наибольшее число реплик может содержать такая беседа и какой вес будет упомянут в последней реплике? (Оба собеседника знают настоящий вес рыбы.)

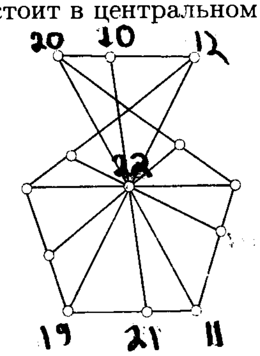
3. В остроугольном треугольнике ABC на стороне AB взяты точки D и E (точка D лежит на отрезке AE), при этом $AD = BE$, $DE < AD$. На стороне BC выбрана такая точка G, что прямая EG параллельна биссектрисе угла BAC. Точка F — основание перпендикуляра, опущенного на сторону AC из точки D. Докажите, что $FD + EG > DE$.

4. При сложении двух чисел в столбик Костя сначала складывает цифры, не делая переносов, но запоминает, в каких разрядах они возникли. Затем он прибавляет переносы к результату. При этом иногда по ошибке он может прибавить переносимую единицу не к соседнему старшему разряду, а к соседнему младшему. Так, в примере справа разряды, где есть перенос, помечены звездочками. Перенос единицы из разряда единиц Костя сделал правильно, а перенос единицы из разряда десятков — неправильно (он прибавил переносимую единицу не к разряду сотен, а к разряду единиц). Если при учете переносов у Кости возникает потребность сделать еще переносы, то их он уже делает без ошибки.

1	9	5
2	7	6
3	6	1
	*	*
3	7	2

Как-то раз Костя подсчитал сумму всех трехзначных чисел от 200 до 400 включительно. Мог ли он получить ответ 41 400?

5. В кружочках выписаны числа от 10 до 22 так, что сумма чисел на любом отрезке, содержащем 3 кружочка, одна и та же. Какое число стоит в центральном кружочке?



21

53

43

6. На очень длинной линии метро находится 300 станций. Стены каждой станции покрашены в один определенный цвет, причем в этот же цвет могут могут быть покрашены и какие-то другие станции. Известно, что на любом отрезке линии, где есть хотя бы одна станция, можно указать станцию «уникального» цвета (то есть цвета, который у других станций на этом отрезке не встречается). В какое наименьшее число цветов могут быть окрашены станции этой линии метро?

В спирали от 1 до 2^2 (рис. 1) последнее число – 2^2 (4) стоит в левом верхнем углу.

4	1
3	2

рис. 1

В спирали от 1 до 3^2 (рис. 2) последнее число стоит в правом нижнем углу.

Заметим, что ~~все~~ квадрат нечетного числа стоит в правом нижнем углу, а квадрат чётного числа стоит в левом верхнем углу.

5	6	7
4	1	8
3	2	9

рис. 2.

Число 2019 стоит между 44^2 (1936) и 45^2 (2025). На правой ~~стороне~~ стороне спирали от 1 до 45^2 стоят 45 чисел ($\sqrt{45^2}$), 2025 самое нижнее число, т.е. сверху от него стоят ещё 44 числа. 2019 меньше 2025 на 6, а $6 < 44 \Rightarrow$ 2019 стоит на правой стороне в спирали от 1 до 45^2.

Теперь продолжим спираль, чтобы узнать какое число стоит справа от 2019, до 47^2 (2209). 47^2 находится на 1-у позицию ниже, и на 1-у позицию справа от 45^2. Т.е. справа от 2025 стоит число $2209-1=2208 \Rightarrow$ от $2025-1$ (2024) справа стоит $2208-1$, и т.д. справа от $2025-6$ (2019) стоит $2208-6=2202$, т.е. справа от 2019 стоит 2202.

Ответ: 2202.

№2.

Для начала заметим, что сумма веса, который говорит А, и веса, который говорит В, всегда равна 180 (например А: 30, В: 150, (30+150=180), и веса в диалоге из 2-ух реплик, 1-ая из которых принадлежит А).

т.к. А каждый раз увеличивает вес на 1, а В наоборот уменьшает на 1, A+1+B-1=A+B

Обозначим за вес рыбки – x. Тогда:

$$\left.\begin{array}{l} 32 \le 2x \mid :2 \ \to \ 16 \le x \\ 7x \le 148 \mid :7 \ \to \ x \le 21\frac{1}{7} \end{array}\right\} \Rightarrow 16 \le x \le 21\frac{1}{7}$$

Варианты значения x: 16, 17, 18, 19, 20, 21.

А всегда говорит вес рыбки от 30 до 2x, а В от 150 до 7x, иначе: в случае с А (вес будет больше 2x, а для него x – вес чужой рыбы; в случае с В вес будет меньше 7x, а для него x – вес своей рыбы

продолжение на стр 3.

Теперь рассмотрим ва случаи:

1. При $x=16$:

А говорит от 30 до 32, а В от 150 до 112.

Построим таблицу:

N диалога из 2-ух реплик	1	2	3	4
вес, который говорит А	30	31	32	X
вес, который говорит В	150	149	148	147
количество реплик	2	4	6	X
вес в последней реплике	150	149	148	X

Наибольший вариант количества реплик - 6, а вес в последней реплике - 148.

2. При $x=17$:

А говорит от 30 до 34, а В от 150 до 119.

N диалога из 2-ух реплик	1	2	3	4	5	6
вес, который говорит А	30	31	32	33	34	x
вес, который говорит В	150	149	148	147	146	145
количество реплик	2	4	6	8	10	X
вес в последней реплике	150	149	148	147	146	x

Наибольший вариант кол-ва реплик - 10, вес в последней реплике - 146

3. При $x=18$:

А говорит от 30 до 36, а В от 150 до 126

N диалога из 2-ух реплик	1	2	3	4	5	6	7
вес, который сказал А	30	31	32	33	34	35	36
вес который сказал В	150	149	148	147	146	145	144
количество реплик	2	4	6	8	10	12	14
вес в последней реплике	150	149	148	147	146	145	144

Наибольший вариант кол-ва реплик - 14, вес в последней реплике - 144

4. При $x=19$:

А говорит от 30 до 38, а В от 150 до 133

N диалога из 2-ух реплик	1	2	3	4	5	6	7	8	9
вес, который сказал А	30	31	32	33	34	35	36	37	38
вес, который сказал В	150	149	148	147	146	145	144	143	142
количество реплик	2	4	6	8	10	12	14	16	18
вес в последней реплике	150	149	148	147	146	145	144	143	142

Наибольший вариант кол-ва реплик - 18, вес в последней реплике - 142

5. При $x=20$:

А говорит от 30 до 40, а В от 150 до 140

N диалога из 2-ух репл.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
вес, который сказал А	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
вес, который сказал В	150	149	148	147	146	145	144	143	142	141	140
количество реплик	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
вес в последней реплике	150	149	148	147	146	145	144	143	142	141	140

Наибольший вариант кол-ва реплик - 22, вес в последней реплике - 140

ЧИСТОВИК продолжение на стр. 4.

6. При $x=21$:

А говорит от 30 до 42, В говорит от 150 до 147.

№ диалога из 2-ух реплик	1	2	3	4	x	x
вес, который говорит А	30	31	32	33	34	35
вес, который говорит В	150	149	148	147	~~146~~	~~145~~
количество реплик	2	4	6	8	x	x
вес в последней реплике	150	149	148	147	x	x

Наибольший вариант кол-ва реплик - 8, вес в последней реплике - 147.

Сравнив все варианты наибольшего кол-ва реплик во всех случаях, получаем что самое наибольшее кол-во реплик - 22, а вес в последней реплике - 140, при весе рыбки 20 кг.

Ответ: 22 реплики, и 140 кг - вес в последней реплике

№5.

Рассмотрим тройки, в которые входит центральный кружок. Пусть в центральной клетке число x. Пусть сумма в каждой такой тройке $x+n+y$. В какой-то клетке будет n, а в противоположной (с которой n и x образуют 3-ку) будет y. Но есть число $n+1$ (или $y+1$, но это не имеет значения), соответственно есть $y-1$. Таким образом есть числа $\underbrace{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5}_{\text{6 последовательных чисел}}$, $\underbrace{y-5, y-4, y-3, y-2, y-1, y}_{\text{6 последовательных чисел}}$ (по крайней мере мы всегда сможем их так переименовать).

Тогда x (если осталось 2 шестёрки последовательных чисел) $=16$ или $=10$ или $=22$.

Если $x=10$:

208 - сумма всех чисел от 10 до 22, $208-10=198$. $198:6=33$ - сумма числа и противоположного ему. Тогда сумма каждой - 43. Рассмотрим ещё одну тройку с 22. (с каждым числом можно составить как минимум 2 тройки). Сумма 2-ух оставшихся чисел - 21. Но единствен-

ный возможный вариант – 10 и 11 (самые наименьшие числа => их мы можем только увеличивать, но тогда сумма увеличится => единственный вариант). Но тройки 2, а вариант 1 => => 10 и 11 будут повторяться, но это невозможно => $x \neq 10$.

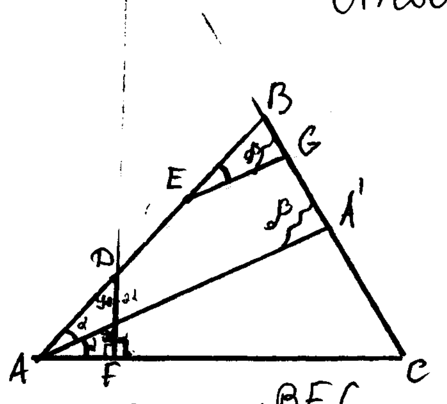
При $x = 16$:

$208-16=192$ $192:6=32$ => сумма тройки – 48. Числа 22, 21, 20, 19, 18, 17 не могут быть в одной тройке с 16-тью. => ~~хотя бы~~ не больше 3 из них состоят в 3-ёх тройках (т.к. всего 6 мест, где числа состоят в 2-ух тройках и они попарно в одной тройке с 16-тью => $6:2=3$ ~~–~~ максимальное кол-во), но такое невозможно, т.к. им не хватит пар чисел для создания троек.
=> $x \neq 16$.

$$\left.\begin{matrix} x \neq 10 \\ x \neq 16 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = 22$$

Ответ: 22.

№3.



Дано: $AD = BE$
$DE > AD$
$EG \parallel AA'$
$\angle DFC = 90^\circ$

Док-ть: $FD + EG > DE$

Док-во: $\angle BEG$ и $\angle BAA'$ – соответственные => они равны.