Выпишем четыре последние цифры искомого числа.

$(2\cdot 8^0+5\cdot 8+2\cdot 8^2+5\cdot 8^3+\dots)^2 = 4+4\cdot 8+3\cdot 8^2+4\cdot 8^3+\dots$, следовательно

$x^2 = \dots 4344$

№3

Пусть P - середина диагонали BD, а F - середина диагонали AC. Пусть O - точка пересечения диагоналей параллелограмма. Заметим, что ~~в~~ ~~существует~~ есть такое число K, что AK:AB=CL:CB=AN:AD=CM:CD. (в соответствии с условием).

Например если K=1, то параллелограмм вырождается в отрезок BD и точка O - в точку P. Если K=0, то параллелограмм вырождается в отрезок AC и точка O - в точку F.

В любом случае точка O является серединой отрезка LN. Т.к. координаты точек L и N меняются в зависимости от K линейно, то и координаты O будут меняться линейно. Следовательно они образуют луч, ~~идущую~~ идущий от F через P. Если K будет отрицательным, то, скорее всего, он пойдет в другую сторону.

6302

1

90

1	2	3	4	5	6	сумма
3	4	4	3	4		18

90

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Москва

Дата 10.03.2019

* *

10–11 класс. Десятый вариант

1. Какое наибольшее количество ладей можно расставить на шахматной доске так, чтобы каждую ладью било не более двух других? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Числа x, y, z — углы некоторого треугольника, один из которых не меньше $\frac{\pi}{2}$. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \cos x + \cos y + \cos z + \cos(x-y) + \cos(y-z) + \cos(z-x).$$

3. Дан четырехугольник $ABCD$, отличный от параллелограмма. На лучах AB, CB, CD и AD вне сторон четырехугольника $ABCD$ выбираются соответственно точки K, L, M и N так, что $KL \parallel MN \parallel AC$ и $LM \parallel KN \parallel BD$. Найдите геометрическое место точек пересечения диагоналей параллелограмма.

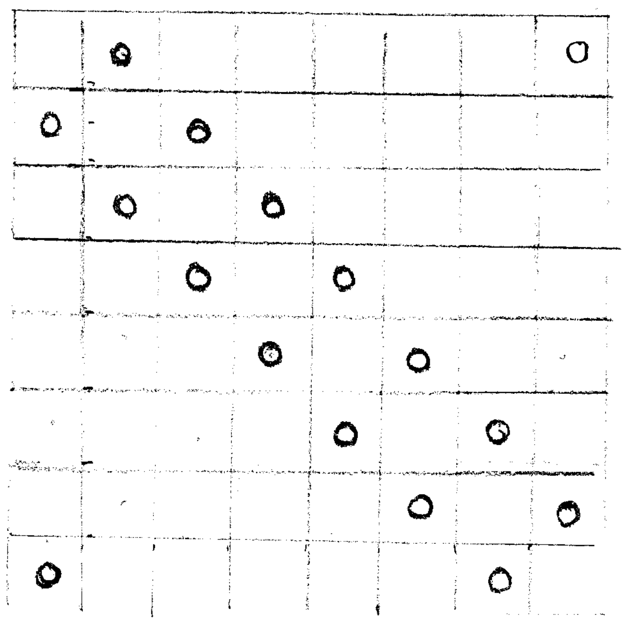
4. Натуральное число x в восьмеричной системе 2018-значное, и его цифры повторяются через одну. Оказалось, что восьмеричная запись x^2 содержит только цифры 3 и 4, причем в равном количестве. Найдите x^2 (в восьмеричной системе).

5. В однокруговом турнире по настольному теннису участвовало n теннисистов ($n \geqslant 3$). Будем говорить, что игрок A *круче* игрока B, если A выиграл у B или найдется такой игрок C, что A выиграл у C, а C выиграл у B. При каких n по итогам турнира могло оказаться так, что каждый игрок круче всех остальных? Ничьих в теннисе не бывает.

6. На столе лежат два конуса с общей вершиной O, касаясь друг друга внешним образом. Угол между их осями симметрии равен $\operatorname{arctg} \frac{12}{5}$. Найдите максимальный угол при вершине большего из двух конусов с вершиной O, которые лежат на столе и касаются внешним образом первых двух конусов. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении.)

№1

~~16 ла~~



о – ладья

Ответ: 16 ладей

№2

Максимальное значение выражение примет при $z=\frac{\pi}{2}$, ~~потому что наименьшее значение~~ z наименьшем z, ~~изменяет~~ Первое, второе, ~~и~~ четвёртое слагаемые не зависят от z. ~~И~~ Третье будет ~~наибольшим~~ максимальным, при наименьшем z.

Рассмотрим 5 и 6 слагаемые.

$\cos(x-z)=\cos(z-x)$; $\cancel{\cos(z-y)}$ $\cos(y-z)=\cos(z-y)$.

~~Возможные значения „z−x", „z−x" и „z−y" могут~~ Разнос

Разности „$z-x$" и „$z-y$" могут принимать значения в интервале $(0;\pi)$, поэтому эти слагаемые будут наибольшими при наименьшем z, таким образом, можно считать, что $z=\frac{\pi}{2}$.

~~$z=\frac{\pi}{2}$, значит нам~~

При $z=\frac{\pi}{2}$, ~~выражение становится~~

$$A=\cos x+\cos y+\cos(x-y)+\sin x+\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}+\cos(x-y)+2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};$$

Так как $z=\frac{\pi}{2}$, то $x+y=\frac{\pi}{2}$, ~~так получ~~ потому что x, y, z – углы треугольника

$A=\sqrt{2}\cos\frac{x-y}{2}+\cos(x-y)+\sqrt{2}\cos\frac{x-y}{2}$; выражение будет максимальным при $x=y$, A

$A=\sqrt{2}\cdot1+1+\sqrt{2}\cdot1=1+2\sqrt{2}$

Ответ: $1+2\sqrt{2}$.

№5 Победу игрока A над игроком B обозначу как $\underline{A,B}=A$

Пусть $n=3$ и в турнире участвуют игроки A, B, C.

При $n=3$, возможен исход, когда каждый игрок ~~круче другого~~ любого из игроков.

Пример: $\underline{A,B}=A$; $\underline{B,C}=B$; $\underline{C,A}=C$;

Пусть $n=4$, игроки A, B, C, D.

Пример: Пусть $\underline{A,B}=A$, $\underline{A,C}=A$, если предположить, что каждый игрок круче другого игрока, то получим B и C – круче A, $\underline{B,D}=B$, $\underline{C,D}=C$ и $\underline{D,A}=D$, но тогда ~~не~~ получается, что ~~(B,C)~~ $\underline{B,C}=B$ или $\underline{B,C}=C$, ~~не~~ т.е. либо игрок B, ~~либо игрок~~ либо игрок C не круче другого, ~~поэт~~ поэтому ~~может быть~~ $n\neq4$.

Рассмотрим случай, когда $n=5$, игроки A, B, C, D, E.

Допустим, что $\underline{D,E}=D$, $\underline{D,A}=A$, $D,B=B$, $\underline{D,C}=C$, $\underline{E,A}=E$, $\underline{E,B}=E$, $\underline{E,C}=E$, получается, что каждый круче другого

Ответ: при $n\geq3$ и $n\neq4$.

№4.

Допустим, что число $x=(AB\ldots.AB)$, где скобками обозначено число в восьмеричной ~~системе~~ системе счисления. Число x^2 заканчивается цифрой $N=B \bmod 8$. Найдём значения N для различных допустимых значений B. ~~(0 ...)~~ При $B=0$, $N=0$; $B=1$, $N=1$; $B=2$, $N=4$; $B=3$, $N=1$; $B=4$, $N=0$; $B=5$, $N=1$; $B=6$, $N=4$; $B=7$, $N=1$.

Так как x^2 содержит только цифры 3 и 4, то подходит только $B=2$ и $B=6$. Заметим, что $x^2 \bmod 7=2018\cdot(3+4) \bmod 7=0$, поэтому $0=x \bmod 7=2018\cdot(A+B) \bmod 7=2(A+B) \bmod 7$, ? следовательно $A=7-B$.

Предположим, что $B=6$, то $A=1$. Однако две последние цифры числа $(16\ldots16)^2$ есть 04, так как $(16)^2=304$. Но тогда получаем число $x=(52\ldots.52)$. Найдём число x^2.