п.4) Пусть число x в шестнадцатиричной системе исчисления имеет вид:

$$X = \left(\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots a_{2022} a_{2023} a_1 a_2 a_3 \ldots a_{2022} a_{2023}}\right)_{16} = \left(\left(a_1 + a_2\cdot 16^1 + a_3\cdot 16^2 + \ldots + a_{2023}\cdot 16^{2022}\right) + \left(a_1\cdot 16^{2023} + a_2\cdot 16^{2024} + \ldots + a_{2023}\cdot 16^{4055}\right)\right)_{10}$$

система исчисления скобок.

Пусть первая скобка последнего выражения равна m, тогда число x равно (далее все операции в десятичной системе исчисления):

$$x = m + 16^{2023} m = m(16^{2023} + 1).$$

Из условия, x – квадрат натурального числа, поэтому необходимо выяснить, существует ли число $m < 16^{2023}$ такое, что $m(16^{2023}+1)$ – квадрат натурального числа.

Заметим, что $2023 = 7\cdot 289 = 7\cdot 17^2$. По формуле разложения суммы двух степеней с нечётными показателями имеем:

$$x = m\,(16+1)(16^{2022} - 16^{2021} + 16^{2020} - \ldots + 16^0).$$

Отсюда уже понятно, что $x \,\vdots\, 17$, докажем, что и $(16^{2022} - 16^{2021} + \ldots + 1) \,\vdots\, 17$.

Заметим, что $16 \equiv -1 \pmod{17}$, откуда $16^2 \equiv 1 \pmod{17}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $16^3 \equiv 16 \pmod{17}$ или $16^3 \equiv -1 \pmod{17}$. Очевидно, что тогда при чётной степени числа 16 остаток при делении на 17 равен 1, а при нечётной — он (-1). Итого: имеем сравнение:

$$16^{2022} - 16^{2021} + 16^{2020} \ldots - 16 + 1 \equiv 1 - (-1) + 1 - (-1) + \ldots + 1 \pmod{17}.$$

Всего единиц 2023, а $2023 \,\vdots\, 17$, значит и $(16^{2022} - 16^{2021} + \ldots + 1) \,\vdots\, 17$.

Откуда число x можно представить как $x = m\cdot 17^2 k$, где $k \in \mathbb{N}$ и $k = \dfrac{16^{2023}+1}{17^2}$. Очевидно $k < 16^{2023}$, поэтому при $m = k$ имеем $x = (17k)^2$.

Ответ: да, может.

Продолжение на отдельном листе

№ 95

3264

КИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Ш

52

1	2	3	4	5	6	сумма
0	4	–	2	4	[illegible]	[illegible]

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Краснодар

Дата 05.03.2019

* *

10–11 класс. Второй вариант

1. Имеется 9 черных ладей и n белых. При каком наибольшем n их можно расставить на шахматной доске так, чтобы одноцветные ладьи не били друг друга? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Даны положительные числа x, y, z. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{xyz\,(x+y+z)}{x^4+y^4+z^4}.$$

3. Окружность ω единичного радиуса проходит через вершины B и C треугольника ABC и вторично пересекает его стороны AB и AC в точках K и L соответственно. На лучах BL и CK отмечены соответственно такие точки P и Q, что $BP = AC$ и $CQ = AB$. Найдите расстояние между центрами описанных окружностей треугольников APQ и KBC.

4. Шестнадцатиричная запись квадрата натурального числа x представляет собой два одинаковых соседних блока из n цифр. Может ли n равняться 2023?

5. В однокруговом турнире по настольному теннису участвует $2k$ спортсменов. В каждом туре все участники проводят по одному матчу. Какое наименьшее число туров надо сыграть, чтобы при любом расписании игр обязательно нашлось трое теннисистов, сыгравших друг с другом?

6. Имеется три одинаковых конуса с общей вершиной, касающихся друг друга внешним образом, а также два шара, касающихся внешним образом друг друга и всех конусов. Радиусы шаров относятся как 1 : 3. Найдите угол при вершине конусов. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении).

№2) $A = \dfrac{xyz(x+y+z)}{x^4+y^4+z^4}$.

Из неравенства Коши для трёх переменных: $\dfrac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$, для положительных x, y, z, отсюда $xyz \leq \dfrac{(x+y+z)^3}{27}$. Вернёмся к нашему A:

$$A \leq \frac{(x+y+z)}{x^4+y^4+z^4} \cdot \frac{(x+y+z)^3}{27} = \frac{(x+y+z)^4}{27(x^4+y^4+z^4)}$$

Для положительных x, y, z среднее их квадратическое не меньше среднего арифметического: $\sqrt{\dfrac{(x^2)^2+(y^2)^2+(z^2)^2}{3}} \geq \dfrac{x^2+y^2+z^2}{3} \Leftrightarrow x^4+y^4+z^4 \geq \frac{1}{3}(x^2+y^2+z^2)^2 \geq$

$\geq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}(x+y+z)^2\right)^2 = \frac{1}{27}(x+y+z)^4$. Тогда $A \leq \dfrac{(x+y+z)^4}{27(x^4+y^4+z^4)} \leq \dfrac{(x+y+z)^4}{27 \cdot \frac{1}{27}(x+y+z)^4} = 1$.

Заметим, что равенство 1 выполняется для $x=y=z=1$.

Ответ: 1.

№1) Заметим несколько фактов:

1. В каждой строке или в каждом столбце стоит белых ладей не более, чем $k+1$, где k - кол-во чёрных. Если их больше, то есть две белых, между которыми не стоит чёрная ладья.

б	ч		б	ч	б

Итого: не более $7 \cdot 2 + 3 = 17$ ладей белого цвета

2. Из 1-ого пункта вытекает, что если чёрная ладья одна стоит „на строке", то она крает две; если не одна, то одну (считаем, что мы их крайней ~~переносим~~ переносим). Значит максимум 17 получится, если есть и крайние чёрные.

3. При крайнем расположении чёрной мы „теряем" одну белую ладью. Однако, если край не занят, то чёрная (ранее крайняя) перемещается в центральные, т.е крает одну, итого: перемещением не получим максимум больший.

			ч

одна белая

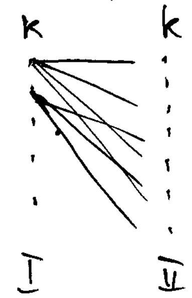
Из 2-3 пунктов: мы можем получить не более $17-2=15$.
Пример на $n=15$ приведен на следующей странице.

Ответ: 15.

					б		
	б						
			б				
б	ч	б	ч	б	ч	б	ч
ч	б	ч	б	ч	б	ч	б
		б	ч	б			
			б				
						б	

ч - чёрная ладья
б - белая

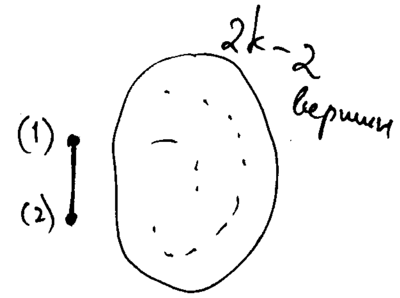
№5) Докажем, что если было сыграно не более k матчей, то возможно придумать расписание, при котором нет тройки теннисистов, сыгравших друг с другом. Случайным образом разобьём участников на две „команды". В дальнейшем ситуацию будем изображать графом, в котором вершина - игрок; ребро - сыгранный между ними матч.



Имеем двудольный граф:
Допустим было сыграно $n \leq k$ матчей, будем проводить матчи так, что играют всегда соперники с разных команд. Тогда нет игр среди участников одной команды, т.е. в графе нет цикла длины 3.

Значит, не обязательно найдётся три игрока при $n \leq k$.

Заметим, что $k+1$ матч достаточно.



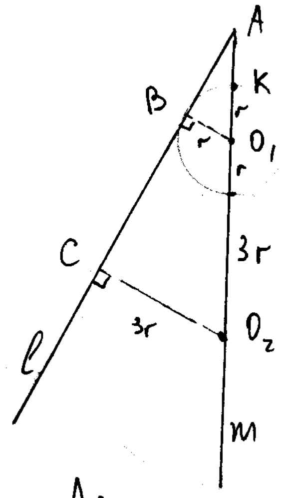
Рассмотрим некоторую пару игравших 1-2. Каждый из них ещё сыграет по k матчей, однако всего игроков $2k-2$, значит по принципу Дирихле есть игрок среди $2k-2$, который играл и с 1 и со 2. Имеем цикл длины 3 всегда, т.е. при любом расписании.

Ответ: $k+1$.

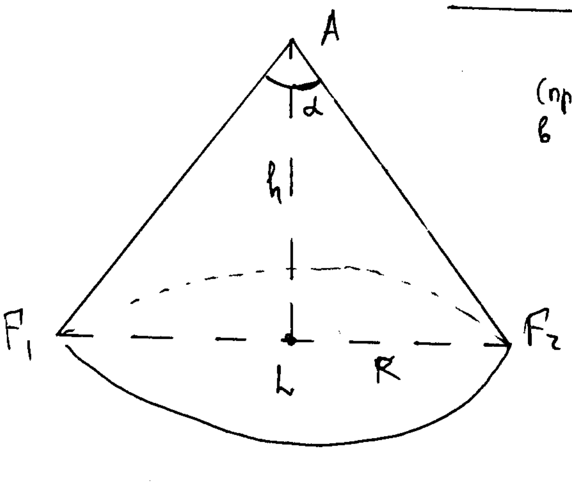
Продолжение на обороте

Чистовик

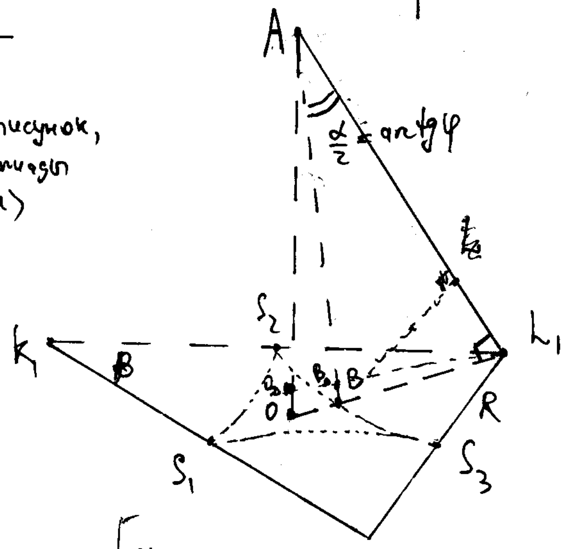
№6) Рассмотрим сечение комбинации этих тел, такое, что оно является осевым для шаров, а также проходит через образующую одного из конусов, касающуюся шаров.



Пусть радиусы шаров r и $3r$. Проведём радиусы шаров к их точкам касания на прямой l. Тогда вследствие общего угла BAO_1 имеем $\triangle ABO_1 \sim \triangle ACO_2$ как прямоугольные с общим углом, из подобия: $\frac{AK+KO_1}{AK+KO_2} = \frac{O_1B}{O_2C}$;
$\frac{AK+r}{AK+5r} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3AK+3r = AK+5r$; $AK = r$. Отсюда в прямоугольном $\triangle ABO_1$ имеем $\underline{tg\angle BAO_1 = \frac{O_1B}{AO_1} = \frac{1}{2}}$



(простите за рисунок, в конце олимпиады додумал)



AL_1 – ось конуса
AB – его образующая
– точки, лежащие на основании конуса, но не в сечении (ниже него)

Пусть для каждого из конусов h – высота, а R – радиус основания, тогда искомый угол при вершине конуса равен $\alpha = 2\operatorname{arctg}\frac{R}{h}$.

Вынем шары из нашей комбинации тел. Рассмотрим пирамиду $AK_1L_1M_1$, основание которой — сечение, перпендикулярное прямой m (проходящей через центры шаров), точки K_1; L_1 и M_1 лежат на осях конусов; S_1, S_2 и S_3 – точки касания конусов друг с другом. Связывая с прошлым сечением это понимаем, что $tg\angle BAO = \frac{1}{2}$, где B, в силу симметрии, середина дуги $\overset{\smile}{S_3S_2}$ (дуги $\overset{\smile}{S_1S_2}$; $\overset{\smile}{S_2S_3}$ и $\overset{\smile}{S_1S_3}$ выгнуты „вниз" рисунка).

Т.к. конусы равны, то пирамида правильная, откуда $K_1L_1M_1$ – правильный треугольник со стороной $2R$

~~Отметим точки O_β и B_β – проекции точек O и B на плоскость β, тогда~~

~~можно понять, что~~ $\cancel{\frac{L_1B}{L_1O} = \frac{1}{\sqrt{3}}}$, ~~откуда~~ $\cancel{BO = R(\sqrt{3}-1)}$

Отметим точки O_2 и B_2 в плоскости β так, что $O_2 \in M$, а $B_2L_1 = R$, тогда $L_1O_2 = \frac{\sqrt{3}\cdot 2R}{3}$, т.е. $O_2B_2 = R\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}-1\right)$, откуда $AO_2 = 2\cdot O_2B_2 = 2R\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}-1\right)$

Пусть $tg\angle L_1AB_2 = \varphi = tg\frac{\alpha}{2}$, тогда $tg\angle LAO_2 = tg(\angle L_1AB_2 + \angle O_2AB) = \frac{\frac{1}{2}+\varphi}{1-\frac{1}{2}\cdot\varphi}^{\cdot 2} = \frac{1+2\varphi}{2-\varphi}$.

С другой стороны $tg\angle LAO_2 = \frac{L_1O_2}{AO_2} = \frac{\sqrt{3}R}{2\cdot 2R\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}-1\right)} \sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{4\cdot(2\sqrt{3}-3)}$. Решим уравнение:

$$\frac{1+2\varphi}{2-\varphi} = \frac{3\sqrt{3}}{8\sqrt{3}-12}; \quad 8\sqrt{3}-12+16\sqrt{3}\varphi-24\varphi = 6\sqrt{3}-3\sqrt{3}\varphi;$$

$$\varphi(16\sqrt{3}-24+3\sqrt{3}) = 6\sqrt{3}-8\sqrt{3}+12$$

$$\varphi = \frac{12-2\sqrt{3}}{19\sqrt{3}-24}$$

В итоге, искомый угол $\alpha = 2arctg\,\varphi = 2arctg\frac{12-2\sqrt{3}}{19\sqrt{3}-24}$

Ответ: $2arctg\frac{12-2\sqrt{3}}{19\sqrt{3}-24}$