УРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

7674

1

70

1	2	3	4	5	6	сумма
4	2	4		4		14

70

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Москва

Дата 10.03.2019

* *

10–11 класс. Десятый вариант

1. Какое наибольшее количество ладей можно расставить на шахматной доске так, чтобы каждую ладью било не более двух других? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Числа x, y, z — углы некоторого треугольника, один из которых не меньше $\frac{\pi}{2}$. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \cos x + \cos y + \cos z + \cos(x-y) + \cos(y-z) + \cos(z-x).$$

3. Дан четырехугольник $ABCD$, отличный от параллелограмма. На лучах AB, CB, CD и AD вне сторон четырехугольника $ABCD$ выбираются соответственно точки K, L, M и N так, что $KL \parallel MN \parallel AC$ и $LM \parallel KN \parallel BD$. Найдите геометрическое место точек пересечения диагоналей параллелограмма.

4. Натуральное число x в восьмеричной системе 2018-значное, и его цифры повторяются через одну. Оказалось, что восьмеричная запись x^2 содержит только цифры 3 и 4, причем в равном количестве. Найдите x^2 (в восьмеричной системе).

5. В однокруговом турнире по настольному теннису участвовало n теннисистов ($n \geqslant 3$). Будем говорить, что игрок A *круче* игрока B, если A выиграл у B или найдется такой игрок C, что A выиграл у C, а C выиграл у B. При каких n по итогам турнира могло оказаться так, что каждый игрок круче всех остальных? Ничьих в теннисе не бывает.

6. На столе лежат два конуса с общей вершиной O, касаясь друг друга внешним образом. Угол между их осями симметрии равен $\operatorname{arctg} \frac{12}{5}$. Найдите максимальный угол при вершине большего из двух конусов с вершиной O, которые лежат на столе и касаются внешним образом первых двух конусов. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении.)

2

№2

$A = \cos x + \cos y + \cos z + \cos(x-y) + \cos(y-z) + \cos(z-x)$

т.к. выражение симметрично относительно x, y, z (косинус — четная функция, т.е. $\cos(x-y) = \cos(y-x)$)

⇒ не умаляя общности положим, что $z \geq y \geq x$, тогда $z \geq \frac{\pi}{2}$

Я тогда заметим, что $\cos x + \cos z = 2\cos\frac{x+z}{2}\cos\frac{z-x}{2}$, если мы начнем сближать числа x и z с фиксированной суммой (т.е. x увеличивать на t, а z уменьшать на t, где $t \leq \frac{x+z}{2}$) то значение выражения $z-x$ будет уменьшаться, и при этом $z-x < \pi$, т.е. при этом $z \geq x$ сохранится, откуда следует, что выражение $\cos(z-x)$ будет увеличиваться (*), а также значение $\cos\left(\frac{z-x}{2}\right)$ тоже будет увеличиваться, а значение $z+x$ меняться не будет, откуда

$\cos x + \cos z = 2\cos\frac{x+z}{2}\cdot\cos\frac{z-x}{2}$ — будет увеличиваться, $\cos(z-x)$ — будет увеличиваться,

$\boxed{\text{(*) — косинус на } [0;\pi] \text{ — убывающая}}$ $\cos(x-y) + \cos(y-z) = 2\cos\frac{x-z}{2}\cos\frac{x+z-2y}{2}$ — тоже будет увеличиваться, пока мы можем уменьшать, пока z не станет равным $\frac{\pi}{2}$, а это возможно, ведь $z - y_0 < y_0 - x$, т.к. $x+z < 180$, т.е. сближая x и z мы можем уменьшить z до $\frac{\pi}{2}$ а x останется меньше $\frac{\pi}{2}$, значит A — не уменьшится, тогда полученное A можно записать так:

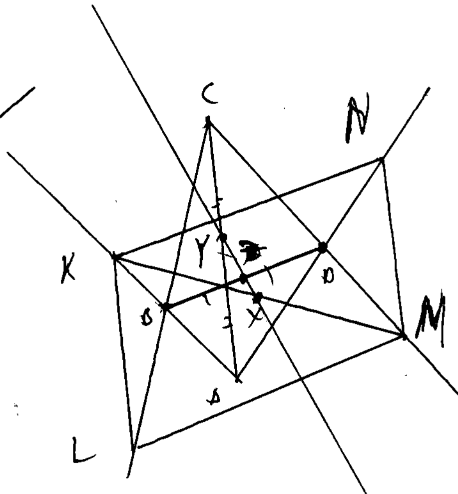
$A = \cos x + \cos y + \sin x + \sin y + \cos(x-y) = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} + 2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2} + \cos(x-y)$

тогда давайте сближать x и y с фикс. суммой, нетрудно заметить, что из-за убывания $x-y$, $\cos(x-y)$ и $\cos\frac{x-y}{2}$ возрастают, а $x+y$ — не меняется, поэтому мы можем увеличить (не уменьшить) значение A, сделав $x = y = \frac{\pi}{4}$, т.е. $A = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 4 + \cos(0) = 1 + 2\sqrt{2}$, это значение достигается, и может быть получено из любых исходных x, y, z путем их изменения и неуменьшения значения A, т.е. это максимальное значение A

ответ: $1 + 2\sqrt{2}$

№3

1



Заметим, что $\frac{AB}{AK} = \frac{AD}{AN} = \frac{CD}{DM}$

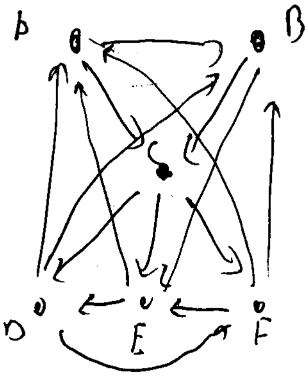
у параллелограмм $KL \parallel AC$ и NM, $KN \parallel BD$, тогда при гомотетии, которая в точке K центр гомотетии, которая преобразует с некоторым коэффициентом BD или AD в B, тогда:

$\frac{AK}{BDM} = \frac{AB}{CD}$ т.е. гомотетия в точке M тоже будет тогда отвечать k некоторой гомотетии

по пути CD, т.к. отношения их расстояний от A и C — пропорциональны.

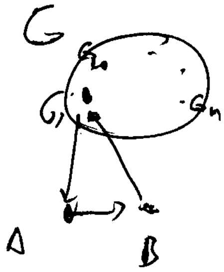
n=3 

очевидно, что это турнир

n=6 

вершины A и B круче C, D, E, F при этом есть цикл ABE длины 3. По контрасту A круче B и наоборот. C круче D, E, F, а также A и B, т.к. есть пути CDA и CDB, вершины D и F круче A и B, т.к. есть по векторам, круче C, т.к. есть DAC и FAC, круче E из цикла DEF, E круче A и B из цикла ABE, круче D и F из цикла DEF, круче C из-за цикла EAC, т.е. каждый участник круче всех остальных.

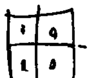
Так если есть G — граф, для которого условие выполняется, и в нём n вершин, то построим граф G' с n+2 вершинами:



пусть $G_1 - G_n$ — вершины графа G, а A и B — еще 2 новые, пусть проведены ребра $\overline{BG_i}$, $i \in \{1, 2..n\}$ и $\overline{G_iA}$, $i \in \{1, 2..n\}$ и ребро $\overline{AB}$, ~~[illegible]~~ тогда для $\forall i, j$ из мн-ва $\{1..n\}$, $i \neq j$ для G_i и G_j условие взаимной крутости выполнено в графе G, для $\forall i \in \{1..n\}$ есть треугольник G_iAB, в котором все ребра расположены по циклу, т.е. для G_i и A или B условие тоже выполняется, а еще A круче B и B так же круче A, т.е. из графа на n вершинах мы умеем строить граф на n+2 вершинах, т.е. из графов на 3 и 6 вершин мы построим граф для $\forall n: n \neq 4, n \geq 3$, а для $n \geq 3$ и условие.

Ответ: $\forall n \in \mathbb{N}$ $n \geq 3$, $n \neq 4$ V

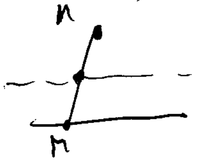
n 1

3) Доказать, что в квадрате n×n нельзя разместить не более 2n ладей, $n \geq 2$. База индукции n=2  — в квадрате 2×2 больше 4 ладей не поставить.

Переход индукции: предположим противное и что в квадрате n×n можно расставить 2n+1 ладей требуемым образом (считаем, что квадрат $(n-1)\times(n-1)$ оценка на 2n−2 доказана).

~~[illegible]~~ тогда есть столбец, в котором есть хотя бы 3 ладьи (всего ладей 2n+1, а столбцов 2n, тогда по принципу Дирихле получаем это утв).

Переформулируем, что относительно улитки в K, улитка в M движется с какой-то постоянной скоростью, равной векторной разности скоростей M и K, тогда середина отрезка KM тоже будет двигаться по прямой относительно K, но тогда относительно не (неподвижной системы отсчёта) это тоже тоже будет двигаться по прямой (просто ~~к~~ ~~каждой~~ каждую точку прямой для K надо будет сдвинуть на ~~вектор~~ вектор ~~скорости~~ перемещения K относительно точки A), ~~т.о.~~ т.о. серед. KM — точка пересечения диагоналей пар-ма, и ГМТ этой точки (назовем ее X) лежит в какой-то прямой.



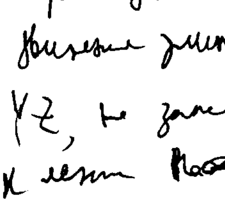
ГМТ серед. KM, при покоящемся K

Теперь определим эту ~~не~~траекторию, рассмотрев 2 предельных случая, не нарушающие условия задачи, впрочем, которые не меняют выше изложенных рассуждений.

1) K лежит ~~[illegible]~~ в точке B, тогда M есть D, т.е. X — середина BD, и 2 случай, когда обе улитки начали свое движение, т.е. M = A, а K = C, тогда X — середина AC (конечно, с этим случаем вариант ~~с~~ ориентации рассуждений некорректно, но мы можем эту точку считать началом на прямой, содержащей ГМТ, тогда все промежуточные ~~[illegible]~~ точки прямой будут получаться перемещением этой точки на какой-то фикс. вектор, домноженный на коэффициент, зависящий от времени движения улиток. тогда пусть середины AC и BC — Y и Z, тогда ГМТ X — часть прямой YZ, но заметим, что при движении K от A к B, X движется от Y к Z, ~~[illegible]~~ причем в условии K лежит ~~[illegible]~~ на луче AB, строго за точкой B (т.е. луч с выколотым началом), ~~откуда~~ причем при K = B : X = Z, откуда ГМТ X есть часть луча YZ, за точкой ~~Z~~ ~~[illegible]~~ (т.к. Z не лежит в ГМТ) где Y — середина AC, Z — середина BD, а X, соответственно, ~~[illegible]~~ точка пересечения диагоналей пар-ма.

№ 5

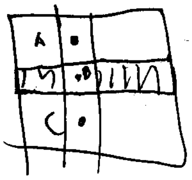
Ответ: при $n \neq 4$, ~~[illegible]~~ пусть можно на $n = 4$, тогда рассмотрим вершины (сделаем ориентированный граф по турниру,* причем ~~[illegible]~~ ориентирован ребро $\vec{AB}$, если A выиграл B) A и B, такие что A выиграл B, тогда $\exists$ C : B выиграл C, а C выиграл A, рассмотрим 4-го D, он должен кого-то из A, B и C выиграть, иначе он не может обыграть других, т.к. цикл ABC симметричен (для упрощения [illegible]), и пусть D выиграл A, тогда A должен был играть D, но A проиграл D, а единственная выигранная для A игра — игра AB, т.е. D обязан выиграть B



тогда нет турнира, т.к. не играли из C в D и нет ребер, поэтому либо C не играл D либо **D** не играл C, значит пример для $n = 4$ не существует.

Приведем примеры для $n = 3$ и $n = 6$:

(*) — вершины — участники турнира, ориентированные ребра — результаты матча между соответствующими.



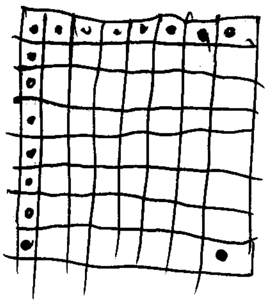
Тогда рассмотрим ту строку, в которой находится средняя из этих 3-х клеток, в ней может быть ладей, т.к. иначе бы средняя ладья B будет бить эти 3 (A, C и саму клетку-то) (очевидно, что если в столбце есть хотя бы 3 ладьи, и если выбрать, например 3 самые верхние ладьи в нём, тогда средняя из них будет бить две другие)

Тогда ~~Б~~ докажем ~~...~~ вырезаем эту строку из доски, и удаляем ровно 1 ладью B, тогда ладья A будет бить только C и количество битых ладей для каждой из оставшихся не изменится, получим ~~...~~ прямоугольник ~~...~~ $n \times (n-1)$, и в нём хотя бы $2n$ ладей

Тогда, из-за по принципу Дирихле найдётся строка, в которой будет хотя бы 3 ладьи, но тогда можно провести рассуждение, аналогичное вышеизложенному, и вырезать столбец с ровно одной ладьёй, тогда останется квадрат $(n-1) \times (n-1)$, в котором предположительно стоят хотя бы $2n-1$ ладей, что противоречит предположению индукции, значит в квадрате $n \times n$ не более $2n$ ладей можно так расставить.

~~...~~ значит для $n=8$ — не более 16 ладей.

представим пример на 16 ладей



точка в клетке — значит, что в этой клетке стоит ладья.

несложно убедиться, что этот пример подходит

ответ 16. V