$(2x^3 - y^2x - y^3)(x-y) \wedge 0$

$x > y \Rightarrow x - y > 0$

$x^3 > y^2x$ и $x^3 > y^3 \Rightarrow$ 1 скобка > 0

$x < y \Rightarrow x - y < 0$

$x^3 < y^2x$, $x^3 < y^3 \Rightarrow$ 1 скобка < 0

$(2x^3 - y^2x - y^3)(x-y) > 0$

$\dfrac{xyz(x+y+z)}{x^4+y^4+z^4} < 0$

Все не равны;

пусть $x > z > y$ (не ум. общ.)

в числ. $z \to x$ – числ. ув.

в зн. $z \to y$ – знам. ум. $\Rightarrow$ дробь ~~уменьшится~~ увеличится

$\dfrac{x^2y(2x+y)}{2y^4+x^4} \vee 1$ $\quad$ $| \cdot 2y^4+x^4 > 0$

$2x^3y + x^2y^2 \vee 2y^4 + x^4$

$x^2(y^2-x^2) + 2y(x^3-y^3) \vee 0$

Все не равны

$z > x > y$

числ. $y \to x$

в зн. $z \to x$

$\Rightarrow \dfrac{x^2 z(2x+z)}{2x^4+y^4} \vee$

$2x^3z + x^2z^2 \vee y^4 + 2x^4$

Все не равны:

$x > y > z$ $\quad$ $x < y < z$

$y = x + d_1$ $\quad$ $y + d_1 = x$ $\quad$ $y = x + d_1$

$z = x + d_2$ $\quad$ $z + d_2 = x \Rightarrow d_2 > d_1$ $\quad$ $z = x + d_2$ $\quad$ $d_2 > d_1$

$x(x+d_1)(x+d_2)(3x+d_1+d_2) \vee x^4 + (x+d_1)^4 + (x+d_2)^4$

$(x^3 + (d_1+d_2)x^2 + d_1d_2x)(3x+d_1+d_2) \vee x^4 + 2x^4 + 4x^3(d_1+d_2) + 6x^2(d_1^2+d_2^2) + 4x(d_1^3+d_2^3) + d_1^4 + d_2^4$

$\cancel{3x^4} + \cancel{4(d_1+d_2)x^3} + ((d_1+d_2)^2 + 3d_1d_2)x^2 + d_1d_2 \vee \cancel{3x^4} + \cancel{4x^3(d_1+d_2)} + 6x^2(d_1^2+d_2^2) + 4x(d_1^3+d_2^3) + d_1^4 + d_2^4$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

Пример: $x = y = z = 1 \Rightarrow \dfrac{1 \cdot 3}{3} = 1$

Ответ: 1, при $x = y = z = 1$

4818 $\quad$ 48

ГРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

1	2	3	4	5	6	сумма
7	1,5			4		3,5

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Санкт-Петербург

Дата 24 февраля 2019 года

* *

10–11 класс. Второй вариант

1. Имеется 9 черных ладей и n белых. При каком наибольшем n их можно расставить на шахматной доске так, чтобы одноцветные ладьи не били друг друга? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Даны положительные числа x, y, z. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{xyz\,(x+y+z)}{x^4+y^4+z^4}.$$

3. Окружность ω единичного радиуса проходит через вершины B и C треугольника ABC и вторично пересекает его стороны AB и AC в точках K и L соответственно. На лучах BL и CK отмечены соответственно такие точки P и Q, что $BP = AC$ и $CQ = AB$. Найдите расстояние между центрами описанных окружностей треугольников APQ и KBC.

4. Шестнадцатиричная запись квадрата натурального числа x представляет собой два одинаковых соседних блока из n цифр. Может ли n равняться 2023?

5. В однокруговом турнире по настольному теннису участвует $2k$ спортсменов. В каждом туре все участники проводят по одному матчу. Какое наименьшее число туров надо сыграть, чтобы при любом расписании игр обязательно нашлось трое теннисистов, сыгравших друг с другом?

6. Имеется три одинаковых конуса с общей вершиной, касающихся друг друга внешним образом, а также два шара, касающихся внешним образом друг друга и всех конусов. Радиусы шаров относятся как $1 : 3$. Найдите угол при вершине конусов. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении).

№ 4

$x^2 = \underbrace{\quad\ldots\quad}_{n}\underbrace{\quad\quad\quad}_{n}{}_{16}$

пусть $\underbrace{\quad\quad}_{n}{}_{16} = k \Rightarrow x^2 = k \cdot 16^n + k$

$x^2 = k \cdot (16^n + 1) = k \cdot (2^{4n} + 1)$

$n = 2023 \Rightarrow x^2 = k \cdot (2^{4 \cdot 2023} + 1) = k \cdot (2^{8092} + 1)$, где $k \leq 16^n$
$\Downarrow$
$k \leq 2^{8092}$

Δ остатки от деления 2^a на 9:

a =	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ост.	1	2	4	8	7	5	1	2	4	8 ...

при $a \in \mathbb{N}$ остатки – 2; 4; 8; 7; 5; 1 ... далее они повторяются в том же порядке, ~~поэтому~~ т.к. цикл состоит из 6-ти остатков:

2^{6b+3} $k \in \mathbb{N}$ – имеет остаток от деления на 9 — 8.

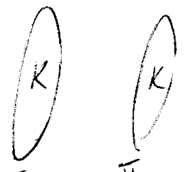
заметим, что $8088 \vdots 6$ $(818 + 8 \vdots 3$ и $8 \vdots 2)$, а $8092 = 8088 +$

№ 5.

Ответ: $k+1$.

Оценка:

пусть сыграно k матчей; разделим $2k$ людей в кучки по k.



I II

пусть каждый человек из кучки I сыграл со всеми из кучки II и наоборот... тогда все сыграли k матчей и ни один не сыграл с человеком из своей группы.

Докажем, что трёх людей – нет:

пусть мы взяли двух людей из одной группы, тогда они не играли между собой: Если взять из разных групп, то:

I —×— I

I ——— II

из I игрок играл только с II, а II-ые играл только с I $\Rightarrow$ нет игрока, который бы играл с обоими.

Докажем, что $k+1$ – хватит:

два игрока сыгравшие между собой:

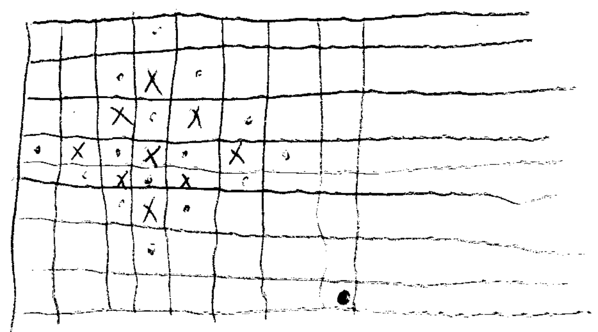
у каждого из них осталось k матчей, а всего осталось $2(k-1)$ игроков, значит у них есть хотя бы 1 общий соперник.

Доказано!

№ 1

~~у нас есть~~ Ответ: $n = 17$

Пример:



X – 9 шт

• – 17 шт

Оценка:

пусть $n \geq 17$ тогда.

Если на одной вертикали стоит k фигур одного цвета, то нам нужно поставить не меньше, чем $k-1$ фигуру другого цвета на эту вертикаль

K_i – количество белых ладей на вертикали i

$n = K_1 + K_2 + K_3 + \ldots + K_8$

$9 \geq K_1 - 1 + K_2 - 1 + K_3 - 1 + K_4 - 1 + \ldots + K_8 - 1$

$\geq$ – если $K_i = 0$

$9 \geq n - 8$

$n \leq 17$, при $n > 17$ нам понадобится более 9 чёрных.

№ 2.

равны $x = y = z \Rightarrow \dfrac{xyz(x+y+z)}{x^4+y^4+z^4} = \dfrac{x^3(3x)}{3x^4} = 1$

2 равны $x = z \neq y$

$\dfrac{xyz(x+y+z)}{x^4+y^4+z^4} = \dfrac{x^2y(2x+y)}{2x^4+y^4} \vee 1 \Rightarrow x^2y(2x+y) \vee 1 \cdot 2x^4+y^4$

не ум. общ.

$2x^3y + x^2y^2 \vee 2x^4 + y^4$

$2x^3(x-y) + y^2(x+y)(x-y) \wedge 0$