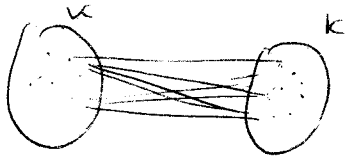
№5

Ответ: $k+1$

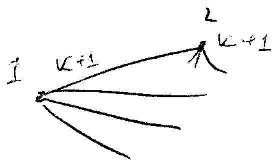
Покажем, что k туров недостаточно: разобьем всех людей на 2 группы по k человек и за первые k туров сделаем так, чтобы играли лишь люди из разных групп (т.е. „однокружники" не играли) (очевидно, так сделать можно), тогда будет следующая ситуация:



И очевидно, что в такой конструкции не найдется треугольника.

Теперь покажем, что $k+1$ всегда хватит:

выберем любого человека и того, с кем он сыграл:



он ~~сыграет~~ с тогда среди оставшихся у №2 есть k людей, с которыми он играл, но их всего $2k-2$ => есть один общий => нашелся треугольник

Задача №3

Дано:

$\triangle ABC$

$\omega(O,1)$

$B, C \in \omega$

$\omega \cap AB = K$

$\omega \cap AC = L$

$P \in LB$: $PB = AC$

$Q \in CK$: $CQ = AB$

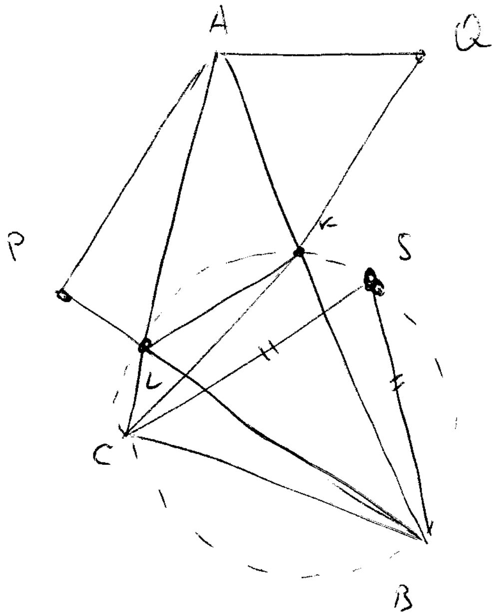
$\omega_1(O_1, r)$ – опис. окр-ть $\triangle APQ$

Найти:

OO_1 – ?

Ответ:

$OO_1 = 1$



Решение:

Рассмотрим середину дуги CKB: т. S, тогда $CS = SB$

$\angle ACS = \angle LCS = \angle LBS = \angle PBS$, $CB = SB$, $PB = AC$ $\Big|$ => $\triangle ACS = \triangle PBS$ => $AS = PS$

$\angle QCS = \angle KCS = \angle KBS = \angle ABS$, $BS = CS$, $CQ = AB$ $\Big|$ => $\triangle QCS = \triangle ABS$ => $AS = QS$

$\Big|$ => $S = O_1$ =>

=> т.к. $S \in \omega$ $OO_1 = 1$

Выход: 12^{05} – 12^{10}

...РГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

1	2	3	4	5	6	сумма
4	4	4	4	4		20

1702

1

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Санкт-Петербург

Дата 24 февраля 2019

* *

10–11 класс. Второй вариант

1. Имеется 9 черных ладей и n белых. При каком наибольшем n их можно расставить на шахматной доске так, чтобы одноцветные ладьи не били друг друга? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Даны положительные числа x, y, z. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{xyz\,(x+y+z)}{x^4+y^4+z^4}.$$

3. Окружность ω единичного радиуса проходит через вершины B и C треугольника ABC и вторично пересекает его стороны AB и AC в точках K и L соответственно. На лучах BL и CK отмечены соответственно такие точки P и Q, что $BP = AC$ и $CQ = AB$. Найдите расстояние между центрами описанных окружностей треугольников APQ и KBC.

4. Шестнадцатиричная запись квадрата натурального числа x представляет собой два одинаковых соседних блока из n цифр. Может ли n равняться 2023?

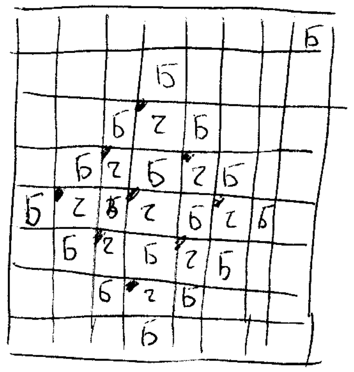
5. В однокруговом турнире по настольному теннису участвует $2k$ спортсменов. В каждом туре все участники проводят по одному матчу. Какое наименьшее число туров надо сыграть, чтобы при любом расписании игр обязательно нашлось трое теннисистов, сыгравших друг с другом?

6. Имеется три одинаковых конуса с общей вершиной, касающихся друг друга внешним образом, а также два шара, касающихся внешним образом друг друга и всех конусов. Радиусы шаров относятся как 1 : 3. Найдите угол при вершине конусов. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении).

Задача №1

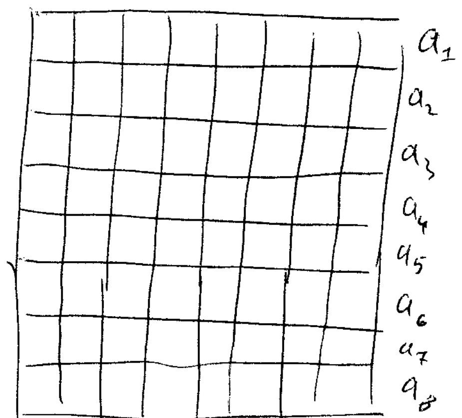
Ответ: 17

Пример:



Нетрудно убедиться, что данный пример подходит.

Оценка:



~~Пусть~~ обозначим за a_i - число черных ладей в соответствующей строке, тогда в i строке не более чем a_i+1 белых ладей, т.к иначе в ней ~~найдутся~~ должны чередоваться цвета ладей. Значит, всего их не более $\sum_{i=1}^{8}(a_i+1) = 8+\sum_{i=1}^{8} a_i = 17$, т.к $\sum_{i=1}^{8} a_i$ - общее число черных ладей $\Rightarrow$ белых не более 17

Задача №2

Ответ: 1

Пример: $x=y=z=1$ $A=\frac{3x^4}{3x^4}=1$

Докажем, что $A\le 1$, т.е $xyz(x+y+z)\le x^4+y^4+z^4 \mid \cdot 4 \Leftrightarrow 4x^2yz+4y^2xz+4z^2xy \le 4x^4+4y^4+4z^4$

$x^4+x^4+y^4+z^4 \ge 4\sqrt[4]{x^4\cdot x^4\cdot y^4\cdot z^4} = 4x^2yz$ (нер-во о средних) $\Rightarrow (2x^4+y^4+z^4)+(2y^4+x^4+z^4)+(2z^4+y^4+x^4) \ge$

$\ge 4x^2yz+4y^2xz+4z^2yx$. Ч.Т.Д.

Задача №4

Ответ: ~~Нет, не может.~~ Да, может.

~~Предположим, что может, тогда~~ из условия следует, что $x^2 = A + A\cdot 16^{2023}$, где $16^{2023}-1 \ge A \ge 16^{2022}$ (A - блок в 16 системе счисления), т.е $x^2 = A(1+16^{2023}) \Rightarrow$

$16^{2022}(16^{2023}+1) \le x^2 \le (16^{2023}+1)(16^{2023}-1)$

$16^{4045}+16^{2022} \le x^2 \le 16^{4046}-1$ $\quad (16^{2023})^2 = 16^{4046} \Rightarrow x \le 16^{2023} \Rightarrow x \le 16^{2023}-1$

$1^\circ)$ $x=16^{2023}-1 \Rightarrow (16^{2023}-1)^2 \vdots 16^{2023}+1$, но $(16^{2023}+1, 16^{2023}-1) = (16^{2023}+1, 2) = 1$

$2^\circ)$ $x=16^{2023}-2 \Rightarrow (16^{2023}-2)^2 \vdots 16^{2023}+1$, но $(16^{2023}+1, 16^{2023}-2) = (16^{2023}+1, 3) = 1$, т.к $16 \underset{3}{\equiv} 1 \Rightarrow 16^{2023}+1 \underset{3}{\equiv} 2$

$3^\circ)$ $x=16^{2023}-3 \Rightarrow (16^{2023}-3)^2 \vdots 16^{2023}+1$, но $(16^{2023}-3, 16^{2023}+1) = (16^{2023}+1, 4) = 1$

$4^\circ)$ $x=16^{2023}-4 \Rightarrow (16^{2023}-4)^2 \vdots 16^{2023}+1$, но $(16^{2023}-4, 16^{2023}+1) = (16^{2023}+1, 5) = 1$, т.к $16 \underset{5}{\equiv} 1 \Rightarrow 16^{2023}+1 \underset{5}{\equiv} 2$

$5^\circ)$ $x=16^{2023}-5 \Rightarrow (16^{2023}-5)^2 \vdots 16^{2023}+1$, но $(16^{2023}-5, 16^{2023}+1) = (16^{2023}+1, 6) = 1$, т.к $16^{2023}+1 \not\vdots 2, \not\vdots 3$

$6^\circ)$ $x=16^{2023}-6 \Rightarrow (16^{2023}-6)^2 \vdots 16^{2023}+1$, но $(16^{2023}-6, 16^{2023}+1) = (16^{2023}+1, 7) = 1$, т.к $16^{2023} \underset{7}{\equiv} 2^{2023} \underset{7}{\equiv} 8^{674}\cdot 2 \underset{7}{\equiv} 2 \Rightarrow 16^{2023}+1 \underset{7}{\equiv} 3$

$7^\circ)$ $x=16^{2023}-7 \Rightarrow (16^{2023}-7)^2 \vdots 16^{2023}+1$, но $(16^{2023}-7, 16^{2023}+1) = (16^{2023}+1, 8) = 1$, ~~т.к~~

~~$8^\circ)$ $x \le 16^{2023}-8 \Rightarrow x^2 \le 16^{4046} - 16$.~~

Найдем наименьший простой делитель числа $16^{2023}+1$.

$(16^{2023}+1; 2) = 1$; $(16^{2023}+1; 3) = 1$, т.к $16 \underset{3}{\equiv} 1 \Rightarrow 16^{2023}+1 \underset{3}{\equiv} 2$; $(16^{2023}+1; 5) = 1$ т.к $16^{2023} \underset{5}{\equiv} 1^{2023} \Rightarrow 16^{2023}+1 \underset{5}{\equiv} 2$

$(16^{2023}+1; 7) = 1$ т.к $16 \underset{7}{\equiv} 2 \Rightarrow 16^{2023} \underset{7}{\equiv} 2^{2023} \underset{7}{\equiv} 8^{674}\cdot 2 \underset{7}{\equiv} 2 \Rightarrow 16^{2023}+1 \underset{7}{\equiv} 3$; $(16^{2023}+1; 11) = 1$, т.к

$16^{2023} \underset{11}{\equiv} 5^{2023} \underset{11}{\equiv} (5^{10})^{202}\cdot 5^3 \underset{11}{\equiv} 1^{202}\cdot 5^3 \underset{11}{\equiv} 4 \Rightarrow 16^{2023}+1 \underset{11}{\equiv} 5$; $(16^{2023}+1; 13) = 1$, т.к $16^{2023}+1 \underset{13}{\equiv} 3^{2023}+1 \underset{13}{\equiv} (3^3)^{674}\cdot 3+1 \underset{13}{\equiv}$

$\underset{13}{\equiv} 1^{674}\cdot 3+1 \underset{13}{\equiv} 4 \Rightarrow$ наименьший простой делитель $16^{2023}+1$ не менее 17

Положим $A = \frac{16^{2023}+1}{17^2}\cdot 25$, докажем, что A - целое:

$16^{2023}+1 = (16+1)(16^{2022}-16^{2021}+16^{2020} \ldots +16^2-16+1) = 17(16^{2022}-16^{2021}+\ldots+1) \Rightarrow$ дост. доказать, что

$16^{2022}-16^{2021}+\ldots+1 \vdots 17$

$16^{2k} \underset{17}{\equiv} 1$; $16^{2k+1} \underset{17}{\equiv} -1 \Rightarrow -16^{2k+1} \underset{17}{\equiv} 1 \Rightarrow 16^{2022}-16^{2021}+\ldots+1 \underset{17}{\equiv} \underbrace{1+1+1 \ldots +1}_{2023} \underset{17}{\equiv} 2023 = 0$, т.к $2023 = 17\cdot 119 \Rightarrow$

A - целое. Покажем, что в 16-ой записи числа A ровно 2023 цифры, т.е $16^{2022} \le A \le 16^{2023}-1$, т.е

$16^{2022} \overset{①}{\le} \frac{16^{2023}+1}{17^2}\cdot 25 \overset{②}{\le} 16^{2023}-1$

① $(16^{2023}+1)25 \ge 16^{2022}\cdot 17^2$

$(16^{2023}+1)\,25 \ge 16^{2023}\cdot 25 = 16^{2022}\cdot(20)^2 \ge 16^{2022}\cdot 17^2$

② $\frac{16^{2023}+1}{17^2}\cdot 25 \le 16^{2023}-1$

$(16^{2023}+1)\,25 \le (16^{2023}-1)\,17^2$

$16^{2023}(17^2-5^2) \ge 25+17^2$ (очевидно)

Осталось лишь проверить, что $A(1+16^{2023})$ - квадрат нат. числа: $A(1+16^{2023}) = \left(\frac{1+16^{2023}}{17}\cdot 5\right)^2 \in \mathbb{N}$