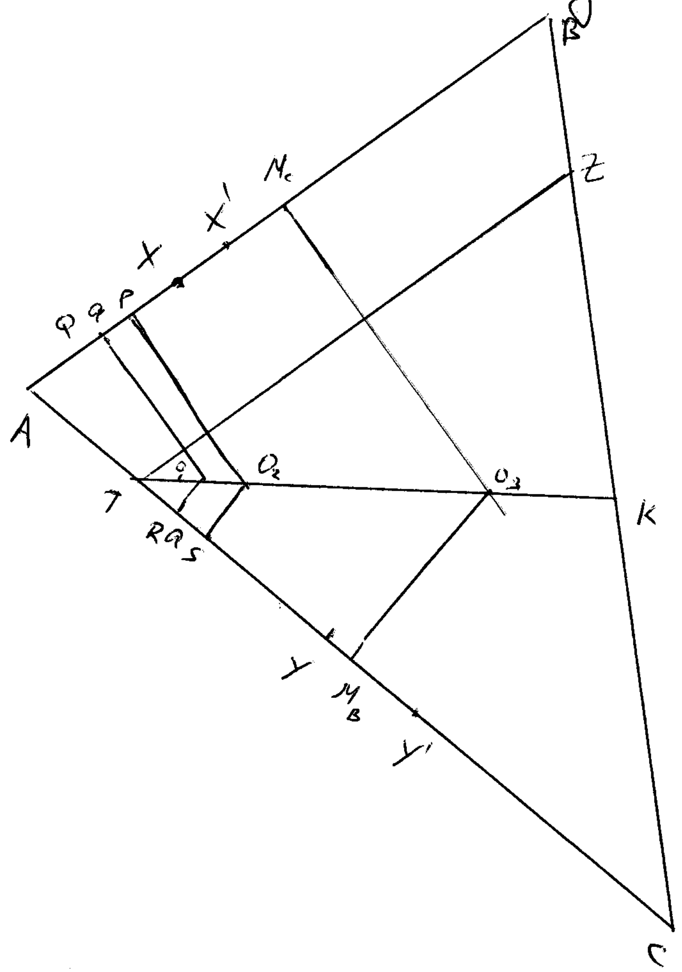
жно быть полных подграфов на 3 => это "лес" - несколько компонент связности, каждая из к-х является деревом. В каждом дереве ~~на~~ рёбер $k-1$ при k вершинах. Нам нужно, чтобы кол-во рёбер в обычном графе было мин => в антиграфе max. $\exists$ в антиграфе $m \geq 1$ компонент связности. ~~Тогда рёбер 16-m при 16 вер~~ В первой k_1 вершин, во второй k_2, и т.д. всего $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = 16$ вершин. Рёбер то $k_1 - 1 + k_2 - 1 + \ldots + k_m - 1 = 16 - m$. Чтобы их кол-во было max надо, чтобы m было $\min(1)$

Значит, антиграф - дерево с 16 верш. и 15 рёбрами

В исходном графе ~~не~~ не хватает 15 рёбер. ~~Это~~ Max. их количество $C_{16}^2 = \frac{16 \cdot 15}{2} = 120$. $120 - 15 = 105$. Именно столько матчей сыграли теннисисты.

Ответ: 105.

Задача 3



Дано: ΔABC: $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$. $X \in AB$, $Y \in AC$. $BX = CY$. O_3 - центр оп. окр. ΔABC, O_1 - центр оп. окр. ΔAXY. $O_3O_1 \cap BC = K$, $O_3O_1 \cap AC = T$.

Найти: $\angle TKB$

Решение: i) Докажем лемму: положение прямой TK не зависит от длины $BX = CY = l$. Возьмём точки $X' \in AB$ и $Y' \in AC$: $BX' = BX - 2a$, $CY' = CY - 2a$ для произвольного a.

Введём обозначения: сер. $AX = Q$, сер. $AX' = P$, сер. $AY = R$, сер. $AY' = S$. Восст. перпендикуляр к AB в (.) P, $\exists$ он пересекает TK в (.) O_2

$$AP - AQ = \frac{1}{2}(BX - BX') = a.$$

$$AS - AR = \frac{1}{2}(CY - CY') = a.$$

Продолжение на листе 2

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

1	2	3	4	5	6	сумма
4	4	4	[illegible]	0	1	17

6096

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Санкт-Петербург

Дата 24 февраля 2019

* *

10–11 класс. Первый вариант

1. Имеется 8 черных ладей и n белых. При каком наибольшем n их можно расставить на шахматной доске так, чтобы одноцветные ладьи не били друг друга? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Даны положительные числа x, y, z. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{xyz\,(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4 + (yz)^4 + (xz)^4}}.$$

3. Дан треугольник ABC с меньшей стороной AB. На сторонах AB и AC выбраны соответственно точки X и Y так, что $BX = CY$. Под каким углом прямая, проходящая через центры описанных окружностей треугольников ABC и AXY, пересекает прямую BC, если $\angle ABC = \beta$ и $\angle BCA = \gamma$?

4. Десятичная запись квадрата натурального числа x представляет собой два одинаковых соседних блока из n цифр. Может ли n равняться 20182019?

5. На однокруговой турнир по настольному теннису подало заявку 16 человек. Когда было сыграно n матчей, оказалось, что среди любых трех теннисистов найдутся двое, уже сыгравших между собой. При каком наименьшем n такое возможно?

6. Три конуса с общей вершиной, касающихся друг друга внешним образом, имеют высоту 2 и радиус основания $\sqrt{3}$. Два шара касаются внешним образом друг друга и всех конусов. Найдите отношения радиусов шаров (большего к меньшему).

Задача 1.

Пусть на какой-то горизонтали стоит K белых ладей. Тогда промежутков между ними $k-1$ ~~(некоторые, возможно, пустые)~~. Чтобы эти белые ладьи не били друг друга, необходимо, чтобы в каждом промежутке стояла хотя бы 1 черная ладья, всего не меньше $k-1$ черных ладей.

На шахматной доске 8 горизонталей, на всех них стоит n белых ладей. На первой k_1, на вт. k_2 и т.д. $k_1+k_2+\ldots+k_8=n$. В то же время черных ладей не меньше $k_1-1+k_2-1+\ldots+k_8-1=n-8$. Но их 8 $\Rightarrow n\leq 16$.

Пример на 16:

	Б						
				Б			
			Б	Ч	Б		
Б	Ч	Б	Ч	Б	Ч	Б	
	Б	Ч	Б	Ч	Б	Ч	Б
		Б	Ч	Б			
			Б				
						Б	

Где Б - белые ладьи, Ч - черные. Всего 16 белых и 8 черных ладей.

Ответ: 16

Задача 4.

Пусть $x^2=\underbrace{a}_{20182019 \text{ цифр}}\underbrace{a}_{20182019 \text{ цифр}}=a\cdot(10^{20182019}+1)$ ← Посмотрим на это число. (Это $=t$)

$t=1\underbrace{00\ldots00}_{20182018 \text{ нулей}}1$ По признаку делимости на 11, оно делится на 11 (сумма всех цифр на нечетных местах $-\ \Sigma$ цифр на четных $=0$). Разделим в столбик:

$$\begin{array}{l} 100\ldots01 \mid 11 \\ \underline{-99} \quad\quad 909\ldots091 \\ \ \ 100 \\ \ \underline{-99} \\ \quad 1 \ldots 1001 \end{array}$$

Заметим, что, начиная со второго шага деления, мы сносим 00 и добавляем к рез-ту 09. Таких пар по 00 осталось ~~20182016~~ 10091008 $\Rightarrow$ именно столько пар "09" в результате:

$\underbrace{909\,09\ldots091}_{10091008 \text{ пар}}$ Сумма цифр на нечётных местах: 1.

Сумма цифр на чётных местах: $10091009\cdot 9=90819081$.

Разность сумм цифр 90819080. Аналогично проверим делимость на 11

Сумма цифр на нечет. местах: 1.

Сумма цифр на чет. местах: 34.

Разность $33 \vdots 11 \Rightarrow$ и всё число $\underbrace{909\ldots091}_{10091008 \text{ пар}} \vdots 11$.

Значит, $t \vdots 11^2$. $t=11^2\cdot p$. Тогда $x^2=at=11^2\cdot ap$

Пусть $a=100p$. Тогда $x^2=11^2\cdot 10^2 p^2 \Rightarrow x=110p$.

$$a=100p=t\cdot\frac{100}{121}=\left(10^{20182019}+1\right)\cdot\frac{100}{121}.$$

$a<10^{20182019} \Rightarrow$ знаков в его записи не больше 20182019
$a\overset{(1)}{>}10^{20182018} \Rightarrow$ знаков в его записи не меньше 20182019 $\Big\} \Rightarrow$ их ровно 20182019.

Итак, мы нашли число a, при к-м вып. все условия: в его записи ровно 20182019 цифр, и $(10^{20182019}+1)a$ является квадратом $\Rightarrow$ это возможно

Ответ: да может.

P.S. (1) $(10^{20182019}+1)\cdot\frac{100}{121}>10^{20182018}$

$1000\cdot 10^{20182016}+1>121\cdot 10^{20182016}$ это верно

Задача 5.

Переведём задачу на язык графов: теннисисты - вершины, если они сыграли матч - между вершинами проведём ребро.

Надо найти минимальное кол-во ребер, при к-м в графе нет ни одного пустого подграфа на 3 вершины.

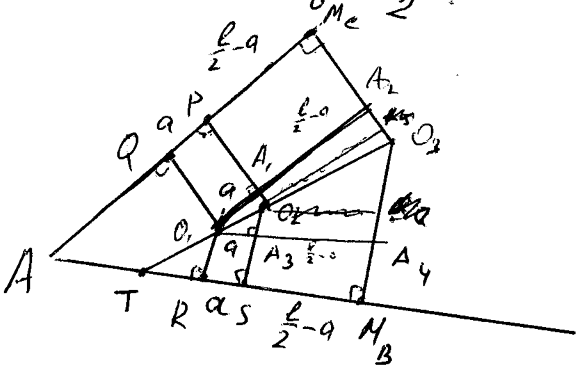
Возьмём "антиграф", соответствующий данному. Вершины останутся неизменными, но если в исходном ребро было, то в "антиграфе" его не будет, и наоборот. Тогда в антиграфе не рол-

Лист 2.

Продолжение задачи 3.

$\exists$ $AB = c$, $AC = b$. Тогда $BM_c = \frac{b}{2}$, $AX = c - b$, $AQ = \frac{c-b}{2}$, $QM_c = AB - (BM_c + AQ) = \frac{b}{2}$.

Аналогично, $RM_b = \frac{b}{2}$.



Параллельно перенесём ст-ны угла A в (.) O_1 — см. новый рисунок

$\triangle O_1A_1O_2 = \triangle O_1O_2A_3$ по катету и гипотенузе $\Rightarrow$

$\Rightarrow O_1O_2$ - биссектриса $A_2O_1A_4$

Аналогично, ~~параллельно перенеся ст-ны угла A в (.) O_2~~

$\triangle O_1O_3A_2 = \triangle O_1O_3A_4$ по кат. и гипот. $\Rightarrow O_1O_3$ - бисс. $\angle A_2O_1A_4$

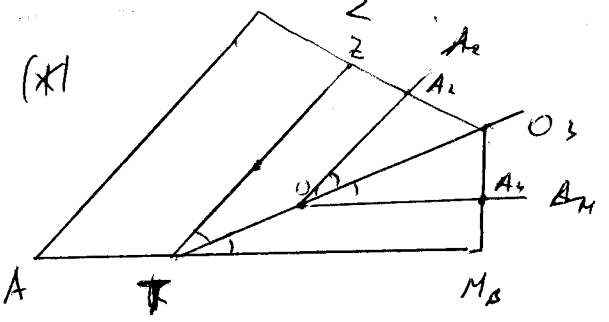
$O_1O_2O_3$ $\Rightarrow$ ~~O_1O_3~~ - одна прямая. Т.к. полож. (.) O_2 зависит только от a, O_2 "пробегает" всю прямую O_1O_3 при разных зн.-ях a

Вернемся к исходному рисунку. ~~По этому ранее~~, KT - биссектриса$^{(*)}$ угла, полученного парал. переносом ст-н угла A в (.) T $\Rightarrow \angle KTC = \frac{1}{2}\angle BAC$.

Из суммы внутр. углов треугольника CKT, $\angle BKT = \angle KTC + \angle\gamma = \gamma + \frac{1}{2}(180^\circ - \beta - \gamma) = 90^\circ + \frac{\gamma - \beta}{2}$. Заметим, что он меньше 90, т.к. AB - меньшая ст-на $\Rightarrow \gamma$ - меньший угол $\triangle ABC$.

Ответ: $90^\circ - \frac{\beta - \gamma}{2}$

(*)



$\angle A_2O_1O_3 = \angle ZTO_3$ из параллельности

$\angle A_4O_1O_3 = \angle M_bTO_3$ из парал.

$\angle A_2O_1O_3 = \angle A_4O_1O_3$ по р-ку

$\Rightarrow \angle ZTO_3 = \angle M_bTO_3$.

Задача 2.

$$A = \frac{xyz(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4 + (yz)^4 + (xz)^4}}$$

Применим нер-во о средних кв. и арифм.

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \Rightarrow \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot (a_1 + \ldots + a_n)$$

$$A \leq \frac{xy \cdot zx + xy \cdot zy + zx \cdot zy}{xy \cdot xy + yz \cdot yz + xz \cdot xz} \cdot \sqrt{3}$$

$\boxed{\text{Продолжение на обороте}}$

Продолжение задачи 2.

~~Без ограничения общности пусть xy ≥ xz ≥ yz.~~

Пусть $xy = t_1$, $yz = t_2$, $xz = t_3$.

$A \le \frac{t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_1 t_3}{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2} \cdot \sqrt{3}$. Докажем, что $\frac{t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_1 t_3}{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2} \le 1$.

Тогда $A \le \sqrt{3}$.

$t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_1 t_3 \le t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 \quad | \cdot 2$

$2t_1^2 - 2t_1 t_2 + 2t_2^2 - 2t_2 t_3 + 2t_3^2 - 2t_1 t_3 \ge 0$

$(t_1 - t_2)^2 + (t_2 - t_3)^2 + (t_1 - t_3)^2 \ge 0$ Это верно.

Итак во всех наших ~~преобразованиях~~ неравенствах равенство достигалось при $x = y = z$. Значит, макс. зн-е $A = \sqrt{3}$ и оно достигается. Проверим подстановкой: Пусть $x = y = z = s$.

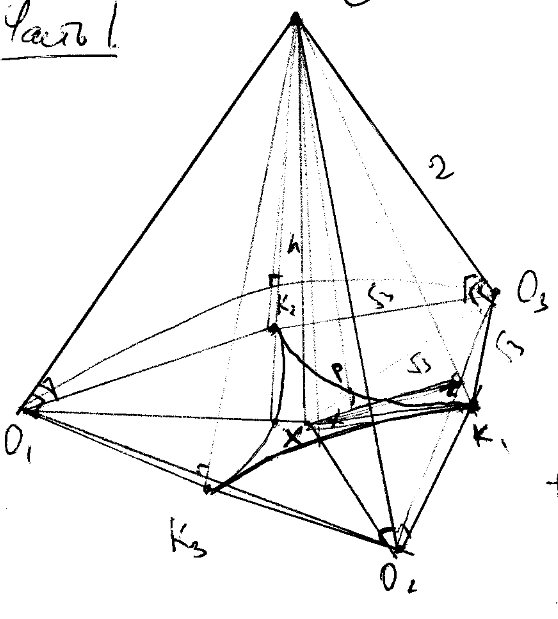
$A = \frac{s^3 \cdot 3s}{\sqrt{3s^8}} = \sqrt{3}$.

Ответ: $\sqrt{3}$.

Задача 6.

Разобьем задачу на две части. Сначала рассмотрим только касание конусов.

Часть 1.



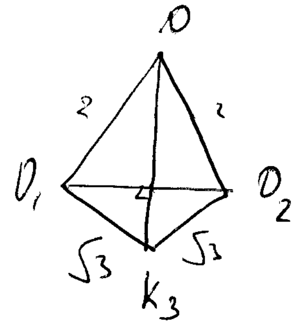
Дано: 3 конуса с $R_{осн} = \sqrt{3}$ и $H = 2$. Центры O_1, O_2, O_3. Общая вершина O.

Найти: X ~~A~~ ($\sin\angle$)

Решение: 1) Когда касаются ~~на~~ конусы ~~внешне~~, прямая, проходящая через центры их оснований, проходит ⊥ ~~образующ~~ общей образующей. (см. рис.)

Продолжение на листе 3.

Лист 3.



$$O_1O_2 = 2h_{O_1OK_3} = 2\cdot\frac{2S_{O_1OK_3}}{OK_3} = \frac{4\sqrt3}{\sqrt7}$$

$\boxed{\exists \sin\alpha = \frac{x}{h}}$, α - угол XOP.

Вернемся к изнач. чертежу. В △ O_2XO_3 нам известна сторона O_2O_3.

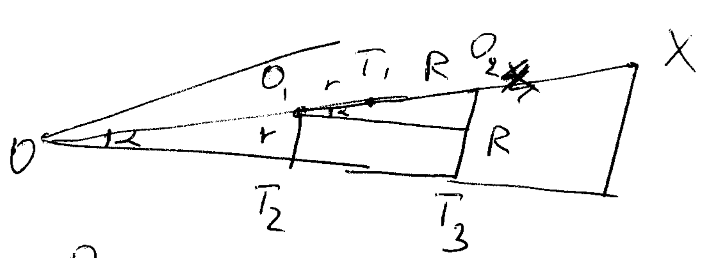
Найдем X, т.к. пл-ть $K_2K_1O_3 \perp OO_3$, то $h = \sqrt{(x+\sqrt3)^2+2^2} = \sqrt{x^2+\sqrt3x+7}$

$= \frac{\frac{2\sqrt3}{\sqrt7}}{2} = \frac{\sqrt3}{\sqrt7}$.

$$\sin\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+\sqrt3x+7}}$$

~~Итак~~

Часть 2. Центры шаров лежат на OX и достаточно рассматривать касание лишь одного конуса (из симметрии). $\frac{x}{h} = \sin\alpha$ и картинка становится плоской (рассм. сечение шаров пл-тью OO_3X)



2

Параллельно перенесем OT_3 в (.) O_1. Тогда $\sin\alpha = \frac{R-r}{R+r}$ ⇒

из параллельности

$$\Rightarrow R\sin\alpha + r\sin\alpha = R - r \Rightarrow \boxed{\frac{R}{r} = \frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha} = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+\sqrt3x+7}}}{1-\frac{x}{\sqrt{x^2+\sqrt3x+7}}}}$$

).

$\operatorname{tg} OPO_3 = \frac{2}{\sqrt3}$ ⇒ пл-ти $O_3K_2K_1$, $O_2K_1K_3$, $O_1K_2K_3$ накл. к горизонту под $\angle \operatorname{arcctg}\left(\frac{2}{\sqrt3}\right)$