САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

6769

1 60

1	2	3	4	5	6	сумма
2	4	0	2	4	0	12

60

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (6–7 КЛАССЫ)

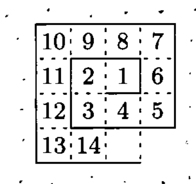
Город, в котором проводится Олимпиада Москва

Дата 10 марта 2019 г.

* *

6–7 класс. Второй вариант

1. Таня расставляет в клетках листа бумаги последовательные натуральные числа, двигаясь по спирали так, как показано на рисунке. Какое число будет написано в клетке слева от числа 2031?



2. Говоря о собранных грибах, каждый грибник называет большее их количество, чем на самом деле. При этом все грибники число чужих грибов завышают не более чем в 3 раза, а число своих грибов — не менее чем в 8 раз. Беседуют два грибника А и Б.

   А. Я вчера собрал в лесу 215 белых грибов.

   Б. Да в этом лесу больше 60 грибов расти вообще не может.

   А. После дождей грибы так растут. 214 белых я точно собрал!

   Б. Гриб, может, и растет, но больше 61 гриба там собрать невозможно.

   А. Я собрал 213 грибов!

   Б. Нет. Не больше 62.

   Какое наибольшее число реплик может содержать такая беседа и какое количество грибов будет упомянуто в последней реплике? (Оба собеседника знают, сколько грибов собрал А на самом деле).

2056 = $4n^2$ => n^2 = 514 – не подх. ; 2060 = $4n^2$ => n^2 = 515 – не подх.

2064 = $4n^2$ => n^2 = 516 – не подх. ; 2068 = $4n^2$ => n^2 = 517 – не подх.

2072 = $4n^2$ => n^2 = 518 – не подх. ; 2076 = $4n^2$ => n^2 = 519 – не подх. ;

2080 = $4n^2$ => n^2 = 520 – не подх. . 2084 = $4n^2$ => n^2 = 521 – не подх.

2088 = $4n^2$ => n^2 = 522 – не подх. 2092 = $4n^2$ =>

=> n^2 = 523 – не подх. ; 2096 = $4n^2$ => n^2 = 524 – не подх.

2100 = $4n^2$ => n^2 = 525 – не подх. ; $4n^2$ = 2104 => n^2 = 526 – не подх.

$4n^2$ = 2108 => n^2 = 527 – не подх. ; $4n^2$ = 2112 => n^2 = 528 – не подх. ;

$4n^2$ = 2116 => n^2 = 529 – подх. ; тогда n = 23 ;

тогда сторона нашего квадрата равна 46 ; первое (самое нижнее) число на левой (самой правой) стороне этого квадрата равна его площади, т.к. два последних написанные числа и об. кол-во маленьких квадратиков со стороной 1 для данного квадрата это число 46 · 46 = 2116 ; ~~число 2031~~ 2031 = 2116 – 46 – 39 ;

~~тогда число 2031 –~~ (46 – 40) = 6 – ; тогда число 2031 – 6-ое на самой левой стороне квадрата ; слева от него будет стоять 7-ое число на ~~сто~~ самой левой стороне сл. квадрата , сторона сл. квадрата – 48 ; наш. число – 48 · 48 = 2304 ; 7-ое число на самой левой стороне – это 2304 – (46 · 3 + 3) + 46 + 47 + 6 = 2163 + 46 + 47 + 6 = 2262

Ответ : 2262.

$$\begin{array}{r} 46 \\ \times\, 46 \\ \hline 276 \\ 184 \\ \hline 2116 \end{array}$$

№6. чистовик

1) два одинак. цвета не могут идти друг за другом;

2) если есть отр., где более 2-х одинаковых ~~второй~~ катег. цвета, то в нем нет уник. фонаря;

тогда макс. отр. в 2 фонаря отделяется

друг от друга ранее не исп. цветами,

тогда мин. кол-во цветов будет, если

все эти тройки – с одинак. цветами;

~~тогда мин. цветов~~

$175 = 43 \cdot 4 + 3$; тогда там будет 44 такие тройки

и 43 неповторяющ. в них цвета;

это всего $43 + 2 = 45$ цветов.

Ответ: мин. 45 цветов.

№ 5.

Если сумма чисел в одной стор. больше 28;
то 5 нельзя поставить не в одну сторону;
если сумма меньше 28, то 17 нельзя
поставить не в одну сторону;
след. никакие дают в разных
комбинациях с 12 другими числами;
~~тк все суммы которых равны~~
~~все~~ суммы во всех 6-и комбинациях
равны; тогда все числа разбиваются
на пары, (т.к. их 12), в которых
суммы равны, тогда они могут быть равны
только 22 т.к. иначе или 5 или 17 будет
нельзя поставить; тогда
центр. число - это сумма чисел в тройке
минус 22., ~~это число от 6 до 16;~~ ;
но если ~~это~~ не число 11; то число
11 в сумме с каким то другим числом дает 22,
тогда у нас есть 2 числа 11, чего не
может быть - противоречие; значит 11 -
в центре

ответ: 11. ✓

№2.

1) пусть количество грибов, которые нц. А = А ; а которые нц. Б = в, , ~~тогда~~ наст. лишь совп. грибов = С

беседа продолжается, пока.

$a \geq 8c$; $b \leq 3c$; то a

$a \geq 8c$

$3c \geq b$

$3c \geq b$

$2c \geq \frac{2}{3} b$.

$a \geq 2\frac{2}{3} b$. ; которые грешки; a ув. на 1; b ув. на 1; числ. $a = 215$; $b = 60$; $2\frac{2}{3} b = 160$;

кажд. грешки; $\cancel{b}$ $2\frac{2}{3} b$ ув. на $2\frac{2}{3}$;

пусть ~~ниже~~ пошло пошедших грешки n;

тогда $a - n = 2\frac{2}{3}(b+n) \Rightarrow a = 2\frac{2}{3} b + 3\frac{2}{3} n \Rightarrow$

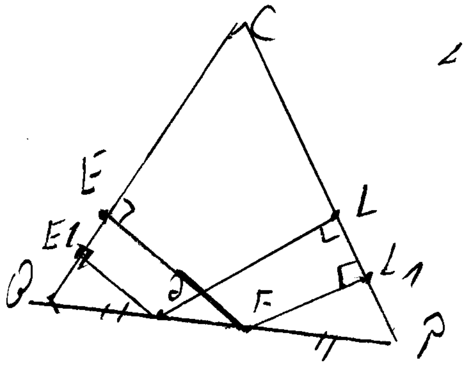
$\Rightarrow 215 = 160 + 3\frac{2}{3} n \Rightarrow 3\frac{2}{3} n = 55 \Rightarrow n =$

$= \frac{55 \cdot 3}{11} \Rightarrow n = 15$; тогда всего 30 грешек.

Ответ: 30 грешек ~~№3~~. ✓

№7. черновик

1) проведем отр. $EL_1 \perp CP$; $PE1 \perp CQ$; т.к. сумма углов четырехуг. = 360°; то ∠QCP + ∠EPL₁ = 180°, т.е. по усл. ∠QCP – остр. то



$\angle EFL_1 > 90^\circ$;

аналогично $\angle E1\partial L > 90^\circ$

?

№4.

Если он ошибается, то результат сложения становится меньше либо на 100+10=110, либо на 10+1=11, либо на 110+11=121; тогда число, на которое результат уменьшается отн. реального, всегда кратно 11; сумма всех чисел от 300 до 500 равна $\frac{800 \cdot 200}{2} = 80000$; он получить должен результат на 10000 меньший, но 10000 $\not\vdots$ 11 – противоречие.

Ответ: не может.

№5

№1.

1) будем рассм. квадраты, получающиеся при полном заполнении спиралью из 1, 2, 3, 4, например квадрат, получающийся из всех чисел от 1 до 16; ~~и т.д.~~ далее квадрат, получающийся из клеток всех чисел от 1 до 36 и т.д.

~~это~~ ~~и~~ площади этих квадратов — это квадраты длины стороны квадрата, а эта длина получается прибавлением числа 2 к сумм. длине стороны, которая равна 2-м; тогда она равна произв. 2-ки и числа n, где n — номер рассм. квадрата, считая от квадрата 1, 2, 3, 4; тогда площадь каждого такого n-ного квадрата равна $2n \cdot 2n = 4n^2$, ~~так~~ чисел в полном квадрате рав. число 2031;

найдем ~~наим.~~ наим. число, большее или равное 2031, равное $4n^2$.

$2031 \not\vdots 4$ — не подх.

$2032 = 4n^2 \Rightarrow n^2 = 508$; но 508 не явл. квадратом нат. числа; рассм. числа $\vdots 4$.

$2036 = 4n^2 \Rightarrow n^2 = 509$ — не подх.

$2040 = 4n^2 \Rightarrow n^2 = 510$ — не подх.

$2044 = 4n^2 \Rightarrow n^2 = 511$ — не подх.

$2048 = 4n^2 \Rightarrow n^2 = 512$ — не подх.

$2052 = 4n^2 \Rightarrow n^2 = 513$ — не подх.

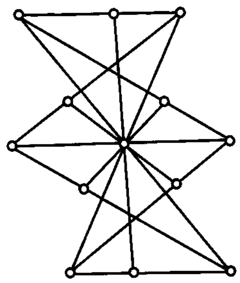
3. В остроугольном треугольнике BCD на стороне BD взяты точки G и F (точка G лежит на отрезке BF), при этом $BG = DF$, $GF < BG$. Точка E — основание перпендикуляра, опущенного из точки F на сторону BC, L — основание перпендикуляра, опущенного из точки G на сторону CD. Докажите, что $EF + GL > 2FG$.

4. При сложении двух чисел в столбик Костя сначала складывает цифры, не делая переносов, но запоминает, в каких разрядах они возникли. Затем он прибавляет переносы к результату. При этом иногда по ошибке он вместо прибавления переносимой единицы к соседнему старшему разряду вычитает единицу из соседнего младшего разряда. Такую ошибку Костя может сделать, только если в младшем разряде стоит не 0. Так, в примере справа разряды, где есть перенос, помечены звездочками. Перенос единицы из разряда единиц Костя сделал правильно, а перенос единицы из разряда десятков — неправильно (он не прибавил переносимую единицу к разряду сотен, а вычел ее из разряда единиц).

1	9	5
2	7	6
3	6	1
	*	*
3	7	0

Как-то раз Костя подсчитал сумму всех трехзначных чисел от 300 до 500 включительно. Мог ли он получить ответ 70 000?

5. В кружочках выписаны числа от 5 до 17 так, что сумма чисел на любом отрезке, содержащем 3 кружочка, одна и та же. Какое число стоит в центральном кружочке?



6. Вдоль длинной улицы стоит 150 фонарей. Каждый фонарь светит определенным цветом, причем цвета фонарей могут повторяться. Известно, что на любом отрезке улицы, где есть хотя бы один фонарь, найдется фонарь «уникального» цвета (то есть цвета, который у других фонарей на этом отрезке не встречается). Какое наименьшее число цветов фонарей может быть на этой улице?