85

АО-1

УРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

1

9021

1	2	3	4	5	6	сумма
4	3	4	2	4	0	17

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Ижевск

Дата 18.03.19

* *

10–11 класс. Девятый вариант

1. Какое наибольшее количество ладей можно расставить на шахматной доске так, чтобы каждую ладью било не более трех других? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Числа x, y, z — углы треугольника, причем больший угол z не превосходит $\frac{\pi}{2}$. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \sqrt{\sin x \cdot \sin(z - y)} + \sqrt{\sin y \cdot \sin(z - x)}.$$

3. Дан четырехугольник $ABCD$, отличный от параллелограмма. На сторонах AB, BC, CD и DA выбираются соответственно точки K, L, M и N так, что $KL \parallel MN \parallel AC$ и $LM \parallel KN \parallel BD$. Найдите геометрическое место точек пересечения диагоналей параллелограмма $KLMN$.

4. Натуральное число x в восьмеричной системе 2019-значное, его младшая цифра равна 3, а все остальные цифры отличны от 3 и совпадают через одну. Число y получается записью цифр x в обратном порядке. Оказалось, что восьмеричное представление $x \cdot y$ содержит только цифры 1 и 6. Найдите $x \cdot y$ (в восьмеричной системе).

5. В однокруговом турнире по настольному теннису участвовало 100 спортсменов, причем ни один из них не выиграл все матчи. Будем говорить, что игрок A *круче* игрока B, если A выиграл у B или найдется такой игрок C, что A выиграл у C, а C выиграл у B. Каково наименьшее количество теннисистов, оказавшихся по итогам турнира круче всех остальных? Ничьих в теннисе не бывает.

6. На столе лежат два конуса с общей вершиной O, касаясь друг друга внешним образом. Угол между их осями симметрии равен $\operatorname{arctg} \frac{4}{3}$. Найдите максимальный угол при вершине меньшего из двух конусов с вершиной O, которые лежат на столе и касаются внешним образом первых двух конусов. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении.)

Задача №1

1) Докажем, что 2 крайние клетки в строке из „хорошей" таблицы можно раздвинуть по краям и таблица останется „хорошей". Хорошая — удовлетворяет условию.

Заметим, что ни одна ладья (~~клетка~~) в центральном квадрате 6×6 не стала побита большим кол-вом ладей чем была до нашего перемещения, т.к мы двигаем крайние (самую левую и самую правую ладей) в строке. А на границе (рамке 8×8) ни одна ладья не может быть побита больше чем 3 ладьями (т.к там отсутствует какое-либо направление.)

2) Если в строке 0 или 1 ладья (уже сдвинутая на край), то можно ~~до~~ добавить к „хорошей" таблице ладью в эту строку на край и она останется „хорошей". Это очевидно т.к в этой строке условие не нарушится (там не хватит ладей чтобы его нарушить) и на рамке условие автоматически выполнено.

Из пунктов 1 и 2 можно сказать, что столбец 1 и столбец 8 полностью заняты. (16 ладей)

3) Докажем, что в столбцах с 2-ого по 7ой в каждом не более 2 ладей.

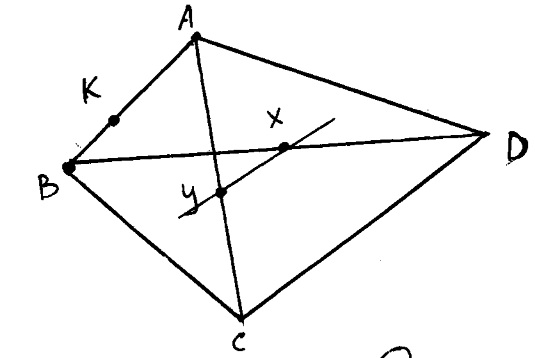
Пусть в каком-то 3 или более => есть ладья между 2-мя крайними в столбце (самой верхней и самой нижней) => ее бьют со всех 4ех направлений. — противоречие. => тут не более 12 ладей.

Итого 28 ладей.

Пример: рамочка 8×8. толщиной 1. (все на границе => условие выполнено автоматически).

1 3

Задача №3



Обозначим центр параллелограма за S и определим S как середину отрезка KM (где $K \in AB$; $M \in CD$).

Тогда, при $K = B$ и $M = D$: S = середина BD (точка X)

при $K = A$ и $M = C$: S = середина AC. (точка Y)

Докажем, что для любой точки $K \in AB$: $S \in$ прямой XY

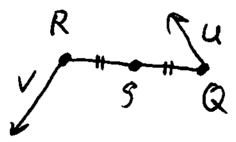
Заметим, что из т. Фалеса: $\frac{AK}{KB} = \frac{AN}{DN} = \frac{CL}{LB} = \frac{CM}{MD}$.

Пусть точка K движется линейно по прямой AB от A к B.

тогда и точка M движется линейно по прямой CD от C к D т.к

$\frac{AK}{KB} = \frac{CM}{MD}$ и $M \in CD$. (очевидно L - движется линейно т.к $KL \parallel AC$ и $L = BC \cap KL$. тогда понятно, что прямая LM движется линейно (так же как L) $\Rightarrow$ M - движется линейно ведь $M = CD \cap LM$)

Докажем, что если точки движутся линейно, то и середина отрезка движется линейно:



Если зафиксировать R то Q продолжит линейное движение с вектором u+v (*зафиксир. - значит рассмотреть в системе отсчета связ. с точкой R)

$\Rightarrow$ S будет двигаться с вектором $\frac{u+v}{2}$ $\Rightarrow$ линейно. (при не фикс. R вектор при точке S - $\frac{u+v}{2}$)

Получаем, что середина KM движется линейно $\Rightarrow$ по одной прямой, но ее крайние образы это X и Y $\Rightarrow$ $S \in XY$. (через 2 точки только одна прямая)

Ответ: ГМТ(S) - отрезок XY.

Задача №4.

$x = \overline{abab...ab3}_8$; $y = \overline{3ba...ba}_8$.

Рассмотрим последнюю цифру произведения:

$(3 \cdot a)$ по mod(8) и это, либо 1, либо 6. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3a \equiv 1 \mod(8) \\ 3a \equiv 6 \mod(8) \end{array}\right.$, где $a \in \{1 ... 7\}$ $a \neq 0$ т.к X начинается с a.

①

Заметим, что подходят только $a=2$ и $a=3$, но по условию $a \neq 3$ и $b \neq 3$
$\Rightarrow a=2$. Последняя цифра 6, переполнения нет.

Рассмотрим предпоследнюю цифру:

$$(a\cdot b + b\cdot 3) \text{ по } \bmod 8 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 5b \equiv 1 \bmod(8) \\ 5b \equiv 6 \bmod(8) \end{array}\right. \quad \text{где } b \in \{0 \ldots 7\}$$

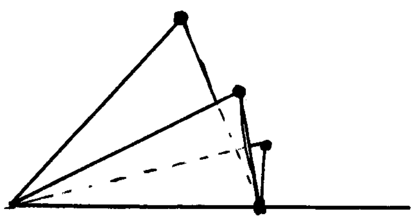
Заметим, что подходит только $b=5$ или $b=6$.

Проверим оба варианта:

$$\begin{array}{r} \times\; 2525\ldots253_8 \\ 3525\ldots252_8 \\ \hline \ldots526 \\ +\quad \ldots270 \\ \ldots600 \\ \hline 616 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\; 2626\ldots263_8 \\ 3626\ldots262_8 \\ \hline +\quad \ldots546 \\ \ldots620 \\ 600 \\ \hline 166 \end{array}$$

Оба варианта удовлетворяют условию задачи.

Задача №6



Задача №1 на стр №3! оборот.

Санкт-Петербургский
государственный
университет

Чистовик:

2

Задача №2

$A = \sqrt{\sin x \cdot \sin(z-y)} + \sqrt{\sin y \cdot \sin(z-x)}$. Известно, что $x+y+z=\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin(x) = \sin(z+y)$, а $\sin(y) = \sin(z-y)$. Тогда:

$$\sqrt{(\sin z \cos y + \sin y \cos z)(\sin z \cos y - \sin y \cos z)} =$$

$$= \sqrt{\sin^2 z \cos^2 y - \sin^2 y \cos^2 z} = \sqrt{\sin^2 z - \sin^2 z \sin^2 y - (\sin^2 y - \sin^2 y \sin^2 z)} =$$

т.к $\cos^2 y = 1 - \sin^2 y$ и $\cos^2 z = 1 - \sin^2 z$.

В итоге: $= \sqrt{\sin^2 z - \sin^2 y} = \sqrt{(\sin z + \sin y)(\sin z - \sin y)}$.

Аналогично для x.

В итоге:

$$A = \sqrt{(\sin z + \sin y)(\sin z - \sin y)} + \sqrt{(\sin z + \sin x)(\sin z - \sin x)}$$

Воспользуемся нер-вом Коши для каждого из корней:*

$$\sqrt{(\sin z + \sin y)(\sin z - \sin y)} \leq \frac{1}{2}(\sin z + \sin z + \sin y - \sin y) = \sin z$$

$A \leq 2\sin z$, где $z \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin z \leq 1 \Rightarrow A \leq 2$ – Ответ.

Равенство достигается при $z = \frac{\pi}{2}$ $x = y = \frac{\pi}{4}$

* Можно пользоваться т.к $\frac{\pi}{2} \geq z > x$ и $\frac{\pi}{2} \geq z > y \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin z - \sin y > 0$ и $\sin z - \sin x > 0$. (все скобки под корнями >0).

4

Задача №5

Оценка на 3:

Пусть людей, кто круче всех, нет. ∄ (от противного).
Тогда рассмотрим человека у которого больше всего побед. Это A.
Он не круче всех => есть B, что A не круче B. Это значит, что B выиграл A и всех, кого выиграл A. => у B больше побед — противоречие. => таких как минимум 1. — Пусть это V.

~~Пример на 2: Занумеруем людей~~ Построим граф, где ребро из X в Y означает, что X выиграл Y. Граф ориентированный.

Подвесим граф за вершину V. К I уровню отнесем все вершины, которых V выиграл. По условию это не все вершины значит что-то осталось. Этот остаток — II уровень. Заметим в каждую вершину II-ого уровня ведет ребро из I-ого т.к V круче всех и не круче вершин II-ого уровня напрямую (т.е проиграл им) и из всех вершин II-ого уровня ведет ребро в V т.к если бы было на оборот то они были бы на I-ом уровне.
Найдем во II ом уровне вершину, что круче всех на II-ом уровне (такая есть по 1-ому абзацу оценки). Это U. Заметим, что U победила V, а V победила всех на I-ом => U круче всех на I-ом и круче всех на II-ом по построению => U тоже круче всех. => таких как минимум 2.

продолжение на стр ⑥

~~Пример на 2: Занумеруем всех числами от 1 до 100. Пусть i победил j, если i > j, но 1 победил 100. Получаем, что 1 и 100 круче всех т.к ∀ i ≠ 1, 100 ; a 100 > 2 > 1 => 100 круче 1. => 100 круче всех. ∀ i ≠ 100: 1 > 100 > i и 1 > 100 => 1 круче всех и ∀ i ≠ 100 и ≠ 1 ...~~

Чистовик:

Продолжение задачи №5.

~~[illegible], что Если во II-ом уровне [illegible]~~

Рассмотрим U: если кроме нее во II-ом уровне есть еще вершина, которая круче всех во II-ом уровне, то эта вершина (аналогично U) круче вообще всех. Если же такой вершины нет, то U победила всех во II-ом уровне (по 2-ому абзацу оценки). Тогда рассмотрим множество вершин из I-ого уровня, что победили U. Выберем из них ту, что круче всех из этого множества (такая есть по 1-ому абзацу). Это D: D победила U, которая победила весь II-ой уровень, часть I-ого уровня и V $\Rightarrow$ D круче всех их + D круче оставшейся части I-ого уровня $\Rightarrow$ D круче всех. $\Rightarrow$ таких как минимум 3.

Пример на 3 вершины, что круче всех:
Занумеруем всех числами от 1 до 100. Проведем ребро из 1 в 100 и из i в j если $i > j$. Покажем, что 1, 99, 100 - круче всех.

100: $\forall i \neq 1 : 100 > i$ и $100 > 2 > 1 \Rightarrow$ 100 круче всех

1: $\forall i \neq 100 : 1 > 100 > i$ и $1 > 100 \Rightarrow$ 1 - круче всех.

99: $\forall i \neq 100 : 99 > i$ и $99 > 1 > 100 \Rightarrow$ 99 - круче всех.

Также для $\forall i \neq 1, 100, 99$: i не круче $i+1$ т.к. $i+1 > i$ и для $\forall j < i : j < i+1$. $\Rightarrow$ в данном примере ровно 3 теннисиста, кто круче всех