'РГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

63 12

1

60

1	2	3	4	5	6	сумма
3	1	4	1	3	0	12

60

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Москва

Дата 10.03.2019

* *

10–11 класс. Девятый вариант

1. Какое наибольшее количество ладей можно расставить на шахматной доске так, чтобы каждую ладью било не более трех других? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Числа x, y, z — углы треугольника, причем больший угол z не превосходит $\frac{\pi}{2}$. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \sqrt{\sin x \cdot \sin(z-y)} + \sqrt{\sin y \cdot \sin(z-x)}.$$

3. Дан четырехугольник $ABCD$, отличный от параллелограмма. На сторонах AB, BC, CD и DA выбираются соответственно точки K, L, M и N так, что $KL \parallel MN \parallel AC$ и $LM \parallel KN \parallel BD$. Найдите геометрическое место точек пересечения диагоналей параллелограмма $KLMN$.

4. Натуральное число x в восьмеричной системе 2019-значное, его младшая цифра равна 3, а все остальные цифры отличны от 3 и совпадают через одну. Число y получается записью цифр x в обратном порядке. Оказалось, что восьмеричное представление $x \cdot y$ содержит только цифры 1 и 6. Найдите $x \cdot y$ (в восьмеричной системе).

5. В однокруговом турнире по настольному теннису участвовало 100 спортсменов, причем ни один из них не выиграл все матчи. Будем говорить, что игрок A *круче* игрока B, если A выиграл у B или найдется такой игрок C, что A выиграл у C, а C выиграл у B. Каково наименьшее количество теннисистов, оказавшихся по итогам турнира круче всех остальных? Ничьих в теннисе не бывает.

6. На столе лежат два конуса с общей вершиной O, касаясь друг друга внешним образом. Угол между их осями симметрии равен $\operatorname{arctg} \frac{4}{3}$. Найдите максимальный угол при вершине меньшего из двух конусов с вершиной O, которые лежат на столе и касаются внешним образом первых двух конусов. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении.)

чистовик

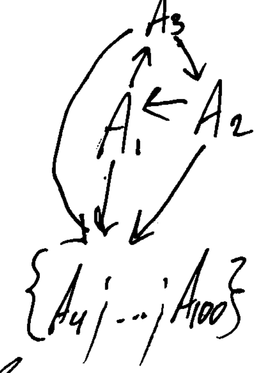
№5

Используем спортсменов $A_1 \dots A_{100}$, пусть они будут вершинами графа. Ориентированную победу A_i над A_j будем обозначать: $A_i \to A_j$, это будут рёбра ориентированного графа. Заметим, что если в графе есть цикл длины 3, то все его участники имеют одинаковую крутость. Пусть A_1 круче всех.

Рассмотрим A_1, пусть он выиграл у $A_2, \dots, A_i$ и проиграл $A_{i+1}, \dots, A_{100}$. Рассмотрим группу $A_{i+1}, \dots, A_{100}$, заметим, что среди них есть A_j такой, что $A_j \to A_k$, где $k \in \{2, \dots, i\}$, иначе A_j выиграл у всех, чего не может быть по условию

$\Rightarrow$ есть
$$\begin{array}{ccc} & & A_j \\ A_1 & \leftarrow & \uparrow \\ & \searrow & A_k \end{array}$$
$\Rightarrow$ хотя бы 3 спортсмена круче всех. ?

пример на 3:



т.е. $A_1 \to A_3$; $A_3 \to A_2$; $A_2 \to A_1$ и A_1, A_2, A_3 выиграли у всех остальных.

Ответ: 3

чистовик

№1

Рассмотрим ладью, заметим, что в 1 из направлений по которым она бьёт, нет других ладей (иначе её били 4 ладьи). ~~Тогда заметим~~

Отметим это направление и соединим по нему ладью и край доски. Заметим, что ~~это напр~~ в этом направлении нет других ладей => таких направлений $\leq 8\cdot 4=32$.

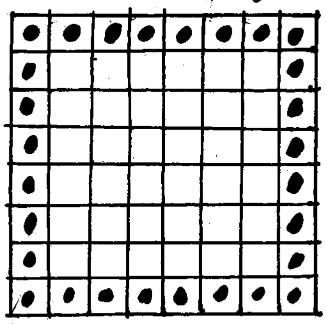
Также заметим, что если ладья ~~стоит~~ находится на краю доски, то отмеченное направление - направление в край доски. Рассмотрим угловую клетку, через неё 2 ладьи могут быть соединены с краем доски, но если ладья соединена с угловой клеткой, то она сама находится с краем доски, с которым она граничит

=> она должна быть соединена с краем, с которым граничит

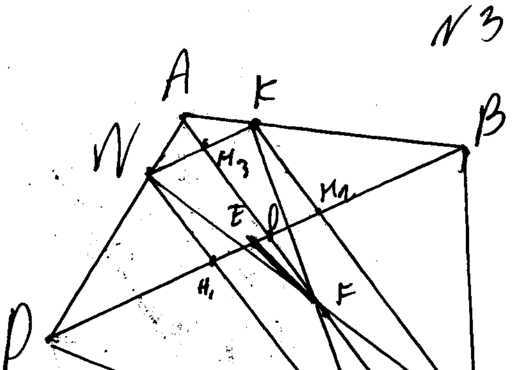
=> с каждой угловой клетки соединена ≤ 1 ладья.

=> всего ладей $6\cdot 4+4=28$

пример на 28 ладей:



№3



из условия: $NK \parallel DB \parallel ML$

и $NM \parallel AC \parallel KL$

$\Rightarrow \frac{AK}{KB}=\frac{AN}{ND}$; $\frac{AK}{KB}=\frac{CL}{LB}$; $\frac{CL}{LB}=\frac{MC}{DM}$;

$\frac{MC}{MD}=\frac{AN}{ND} \Rightarrow \frac{AK}{KB}=\frac{CL}{LB}=\frac{CM}{MD}=\frac{AN}{ND}$

=> NKLM - параллелограмм

тогда заметим, что т. пересечения диагоналей NKLM ~~[illegible]~~ делит KM и NL пополам. Отметим т. пересечения NKLM и DB и AC, назовём их H_1, H_2, H_3, H_4

тогда т. пересечения делит H_1H_2 и H_3H_4 пополам. чистовик

пусть т. пересечения AC и DB - O

тогда ~~$H_1O : H_2O : H_3O : H_4O = KB : AK$~~

$H_1O : H_2O : H_3O : H_4O = MC : LC : KB : BL$

~~тогда в границах на AC т. пересечения принадлежит отрезку OF~~

~~а в границах на DB принадлежит~~

тогда т. пересечения лежит на отрезке EF, где

E - середина DB, а F - середина AC.

№4

пусть наше число x_8, тогда

$x_8 = \overline{a_{2019} \ldots a_1}$; $a_1 = 3$; $a_2 = a_4 = \ldots = a_{2018}$; $a_3 = a_5 = \ldots = a_{2019}$

$y_8 = \overline{a_1 \ldots a_{2019}}$

$x_8 y_8 = \overline{a_1 \ldots a_{2019}} \cdot \overline{a_{2019} \ldots a_1} = (a_1 \cdot 8^{2018} + a_2 \cdot 8^{2017} + \ldots + a_{2019} \cdot 8^0)(a_{2019} \cdot 8^{2018} + a_{2018} \cdot 8^{2017} + \ldots + a_1 \cdot 8^0) =$

$= (a_1 a_{2019} \cdot 8^{4036} + (a_2 a_{2019} + a_1 a_{2018}) \cdot 8^{4035} + \ldots + a_1 a_{2019} \cdot 8^0)$

тогда $a_{2019} \cdot a_1 \underset{8}{\equiv} 1; 6 \Rightarrow a_{2019} \cdot 3 \underset{8}{\equiv} 1; 6 \Rightarrow a_{2019} = 2; 3$, но $a_{2019} \neq 3$ по условию

$\Rightarrow a_{2019} = 2$

тогда $a_{2019} \cdot a_2 + a_1 \cdot a_{2018} = 2a_2 + 3a_{2018} = 5a_2 \underset{8}{\equiv} 1; 6 \Rightarrow a_2 = 5; 6$ и $5a_2 = 31_8; 36_8$

тогда $a_1 \cdot a_{2017} + a_2 \cdot a_{2018} + a_3 a_{2019} = a_1 \cdot a_3 + a_2^2 + a_3^2 = 3 \cdot 2 + a_2^2 + 2^2 = 10 + a_2^2 \underset{8}{\equiv}$

и $a_2^2 + 10 \underset{8}{\equiv} a_2^2 + 2$ т.к. $5a_2 = 31_8; 36_8$ то 3 перешло в след. разряд

$\Rightarrow a_2^2 + 5 \underset{8}{\equiv} 1; 6$

тогда $a_1 a_{2016} + a_2 a_{2017} + a_3 a_{2018} + a_4 a_{2019} = a_1 a_2 + 3 a_2 a_3 = a_2(a_1 + 3a_3) = a_2(3+6) \underset{8}{\equiv} a_2$

тогда a_2 + переход через разряд $\underset{8}{\equiv} 1; 6$

если $a_2 = 6$ то $6 + 6 \underset{8}{\not\equiv} 1; 6$ т.к. $6^2 + 13 = 61_8$

если $a_2 = 5$ то $5 + 4 \underset{8}{\equiv} 1$ т.к. $5^2 + 13 = 46_8$

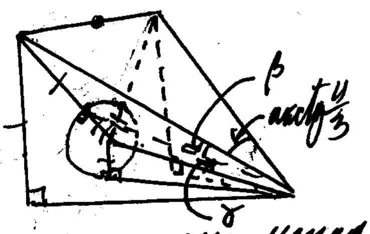
$\Rightarrow a_1 = 3; a_2 = 5; a_3 = 2$

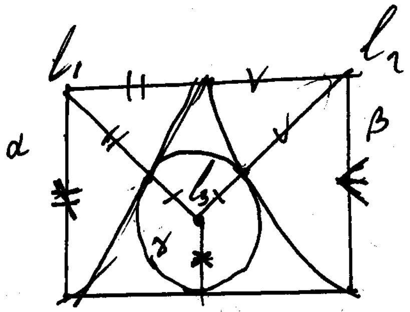
$\Rightarrow (xy)_8 = 616 \ldots 616$

?

чистовик

№6





пусть углы между ~~осью~~ осями симметрии и образующими $\alpha; \beta; \gamma$

тогда ~~...~~ $\operatorname{arctg}\frac{4}{3} = \arcsin\frac{4}{5} = \alpha+\beta$

пусть ~~образующие~~ оси симметрии $l_1; l_2; l_3$

тогда если рассмотреть сечение:

$\alpha - \alpha\sin x = \gamma + \gamma\sin x$

$\beta - \beta\sin(\frac{\pi}{2}-x) = \gamma + \gamma\sin(\frac{\pi}{2}-x)$

$\Rightarrow \gamma = \alpha\frac{1-\sin x}{1+\sin x} = \beta\frac{1-\sin(\frac{\pi}{2}-x)}{1+\sin(\frac{\pi}{2}-x)}$ тогда заметим, что максимум достигается

при $\alpha=\beta$ и $x=\frac{\pi}{4}$ $\Rightarrow \gamma = \alpha\frac{1-\sin\frac{\pi}{4}}{1+\sin\frac{\pi}{4}} = \alpha\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}} = \alpha\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = \alpha(3-2\sqrt{2})$

$\gamma = \frac{\operatorname{arctg}\frac{4}{3}}{2}\cdot(3-2\sqrt{2}) = \frac{3-2\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$

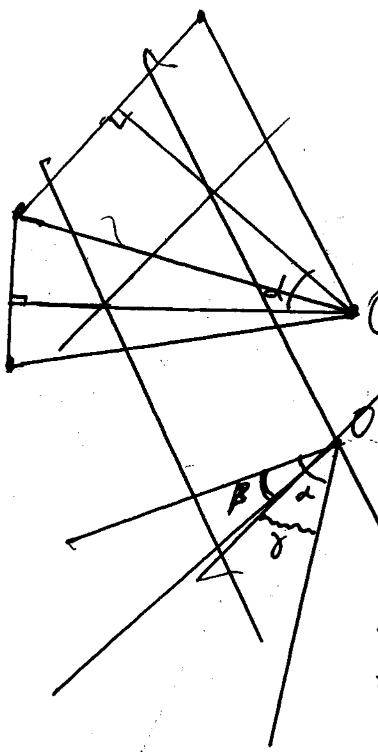
$2\gamma = (3-2\sqrt{2})\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$

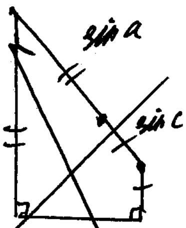
Ответ: $(3-2\sqrt{2})\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$

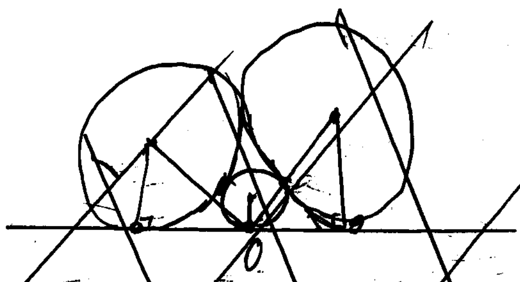
черновик

№6

~~α = arctg $\frac{4}{3}$~~





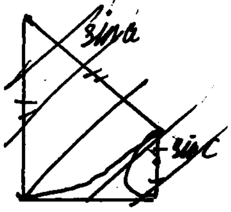


пусть углы между осями симметрии $\alpha; \beta; \gamma$

а углы при вершинах $2a; 2b; 2c$

тогда $a+b=\alpha$; $a+c=\beta$; $b+c=\gamma$

$\Rightarrow$ искомый угол $2c = \beta+\gamma-\alpha$



чистовик

№2

по условию $\frac{\pi}{2} \geq z$; $z > y$; $z > x$

заметим, что $\sin x$ возрастает ~~на~~ при ~~$x \in [0; \frac{\pi}{2}]$~~ $x \in (0; \frac{\pi}{2})$

заметим, что $z - y > x \Leftrightarrow z - y > 180° - y - z \Leftrightarrow 2z > 180° \Leftrightarrow z > \frac{\pi}{2}$

аналогично $z - x > y \Leftrightarrow z > \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \sqrt{\sin(x)\sin(z-y)} + \sqrt{\sin(y)\sin(z-x)} \leq \sqrt{\sin^2(x)} + \sqrt{\sin^2(y)} = \sin x + \sin y$

~~при $z = \frac{\pi}{2}$~~ равенство достигается при $z = \frac{\pi}{2}$

в этом случае $x + y = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin x + \sin y = \sin x + \sin(\frac{\pi}{2} - x) =$

$= \sin x + \cos x$, а $\max(\sin x + \cos x) = \sqrt{2}$ при $x = \frac{\pi}{4}$

Ответ: максимальное значение $\sqrt{2}$, достигается при $z = \frac{\pi}{2}$; $x = y = \frac{\pi}{4}$