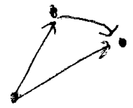
Посчитаем кол-во вот таких:  ~~[illegible]~~

из X выходит 12 ребер направленных от него, значит вершины: X, Y, Z, где $Y \in A$, $Z \in A$

образуют  (неправильный треугольник)

пар $Y, Z = \frac{12 \cdot 11}{2} = 66$

всего „неправильных" треугольников $66 \cdot 25$

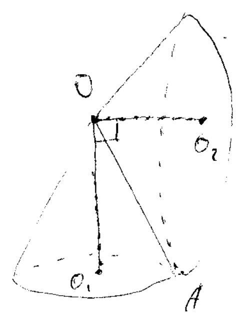
Всех треугольников $C_{25}^3 = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23}{3 \cdot 2 \cdot 1}$

правильных $S = C_{25}^3 - 66 \cdot 25 = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23}{6} - 66 \cdot 25 = 25(23 \cdot 4 - 66) =$

$= 25 \cdot 26 = 650$

Ответ: 650

6



OA - общая образующая

OO_1 - высота первого

OO_2 - высота третьего

$\angle O_1OA = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$

$\angle O_2OA = \frac{\pi}{2} - \angle O_1OA = \frac{\pi}{3}$

I

8467

60

1	2	3	4	5	6	сумма
4	4			4	0	12

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Барнаул

Дата 16.03.2019

* *

10–11 класс. Пятый вариант

1. Какое наибольшее количество слонов можно расставить на шахматной доске так, чтобы на каждой диагонали располагалось не более трех слонов?

✓ **2.** Даны различные числа a, b, c. Найдите минимальное значение выражения

$$A = \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{|a-b|^3 + |b-c|^3 + |c-a|^3}.$$

3. На сторонах BC и AB остроугольного треугольника ABC выбраны точки D и X. Прямые, проходящие через X параллельно BC и AD, пересекают соответственно стороны AC и BC в точках Y и Z. Пусть M, K и N — середины отрезков BC, YZ и AD соответственно. Найдите угол MKN.

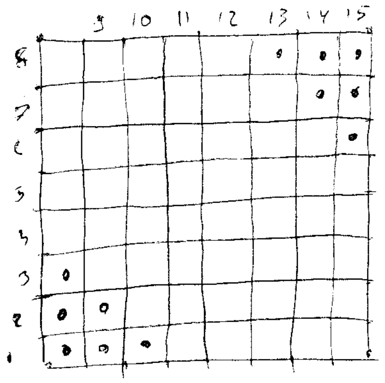
4. Десятичная запись натурального числа x — это написанная 2019 раз подряд пара каких-то цифр. Число y получено некоторой перестановкой цифр x. Может ли десятичная запись числа $x \cdot y$ представлять собой многократно повторенный блок из четырех цифр?

5. В однокруговом турнире по настольному теннису приняло участие 25 человек. Каждый теннисист одержал по 12 побед. Сколько по итогам турнира оказалось троек участников, одержавших во встречах между собой ровно по одной победе? Ничьих в теннисе не бывает.

6. Три конуса с общей вершиной O касаются друг друга внешним образом. Первые два конуса имеют угол при вершине $\frac{\pi}{3}$, а ось симметрии третьего конуса перпендикулярна осям симметрии первых двух. Еще один конус с вершиной O касается внешним образом трех других. Найдите его угол при вершине. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении.)

№1

Допустим, что в каждой диагонали длины 1 — один слон, длины 2 — два слона, длины, большей 2, — три слона.



Рассмотрим левый нижний и правый верхний углы нашей доски.

Пусть диагональ, идущая вправо вниз, — это диагональ первого типа. Диагональ, идущая вправо вверх, — это диагональ второго типа.

• Тогда, по предположению, на диагонали первого типа, которая начинается в клетке 1 стоит 1 слон, которая начинается в клетке 2 — 2 слона, которая начинается в клетке 3 — 3 слона. Так же в диагонали первого типа, которая начинается в клетке 13 — 3 слона, в клетке 14 — 2 слона, в клетке 15 — 1 слон.

• В таком случае диагональ второго типа, которая начинается в клетке 1 и заканчивается в 15 будет содержать 4 слона, что противоречит условию.

• Посчитаем кол-во слонов в такой расстановке:

номер клетки начала диагонали первого типа —

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 $\quad S = 39$

1 2 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 2 1

кол-во слонов

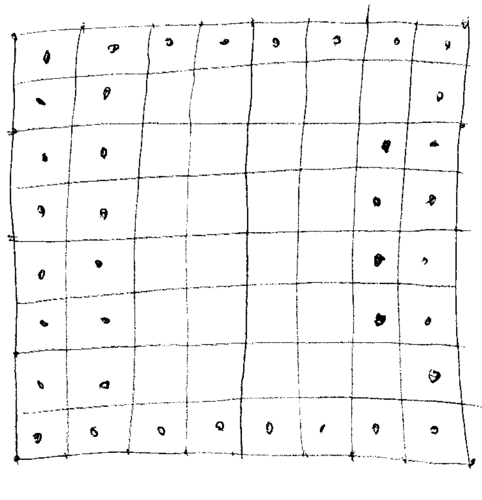
Больше 39 быть не может, т.к. в какой-то из диагоналей будет больше 3 слонов.

39 тоже быть не может

$\Downarrow$

$S < 39$

Пример на 38 →

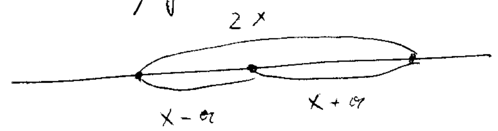


№2

Заметим, что A может быть меньше нуля, например при $\begin{cases} a=3 \\ b=2 \\ c=1 \end{cases}$

Нужно найти наибольшее по модулю отрицательное значение.

a, b, c — координаты точек на прямой



Пусть расстояние между двумя крайними $= 2x$, между левой и средней $x-a$, между правой и средней $x+a$

$$\begin{cases} 0 \le x-a \le 2x \\ 0 \le x+a \le 2x \end{cases}$$

Тогда

$$|A| = \frac{2x \cdot (x-a)(x+a)}{(2x)^3 + (x-a)^3 + (x+a)^3}$$

$$|A| = \frac{2x^3 - 2a^2x}{8x^3 + 2x^3 + 6a^2x} = \frac{2x^3 - 2a^2x}{10x^3 + 6a^2x} = \frac{x^2 - a^2}{5x^2 + 3a^2}$$

т.к. $x^2 \ge 0$, $a^2 \ge 0$, то $\frac{x^2 - a^2}{5x^2 + 3a} \le \frac{x^2}{5x^2}$

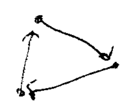
$$|A| \le \frac{1}{5}$$

$$\min(A) = -\frac{1}{5}$$

Пример: $\begin{cases} a=3 \\ b=2 \\ c=1 \end{cases}$ $\quad A = \frac{(3-2)(2-1)(1-3)}{1^3 + 1^3 + (-2)^3} = -\frac{2}{10} = -\frac{1}{5}$ ✓

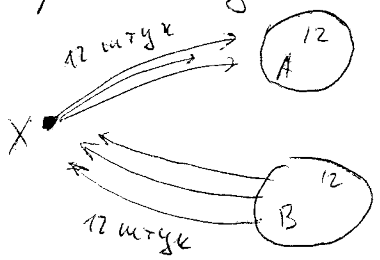
№5

Нужно найти кол-во таких треугольников (правильные)



Построим граф: вершины — участники, ребро — от победителя к проигравшему.

Рассмотрим одного участника X.



$|A| = |B| = 12$

~~Возьмём одного из A. Кроме него в A осталось 11 человек, но он выиграл 12, значит есть хотя бы одно ребро в B. (у каждого из A)~~