(55)

Ао 54

КИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

II

1

7407

1	2	3	4	5	6	сумма
4	2	0	3	2	0	11

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Владимир

Дата 16-03.2019

* *

10–11 класс. Первый вариант

1. Имеется 8 черных ладей и n белых. При каком наибольшем n их можно расставить на шахматной доске так, чтобы одноцветные ладьи не били друг друга? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Даны положительные числа x, y, z. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{xyz\,(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4+(yz)^4+(xz)^4}}\,.$$

3. Дан треугольник ABC с меньшей стороной AB. На сторонах AB и AC выбраны соответственно точки X и Y так, что $BX = CY$. Под каким углом прямая, проходящая через центры описанных окружностей треугольников ABC и AXY, пересекает прямую BC, если $\angle ABC = \beta$ и $\angle BCA = \gamma$?

4. Десятичная запись квадрата натурального числа x представляет собой два одинаковых соседних блока из n цифр. Может ли n равняться 20182019?

5. На однокруговой турнир по настольному теннису подало заявку 16 человек. Когда было сыграно n матчей, оказалось, что среди любых трех теннисистов найдутся двое, уже сыгравших между собой. При каком наименьшем n такое возможно?

6. Три конуса с общей вершиной, касающихся друг друга внешним образом, имеют высоту 2 и радиус основания $\sqrt{3}$. Два шара касаются внешним образом друг друга и всех конусов. Найдите отношения радиусов шаров (большего к меньшему).

Чистовик

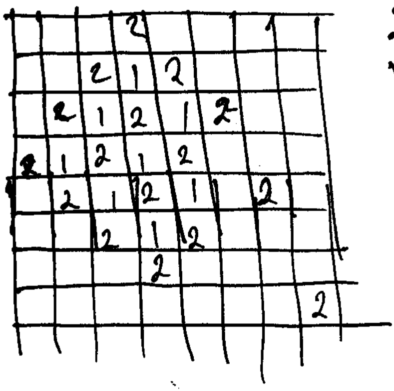
Задача №1

Ответ: 16 ладей

Решение:

Оценка: Разобьём доску на 8 строк. Заметим, что если в 1-ой строке a_1 белые ладьи, то чёрных как минимум a_1-1. Аналогично в любой другой строке, если в i-ой строке стоит a_i белых ладей, то чёрных должно быть не менее a_i-1. Значит, если всего белых ладей 17, получим: $a_1+a_2+\dots+a_8=17 \Rightarrow$ чёрных ладей: $(a_1-1)+(a_2-1)+\dots+(a_8-1)=17 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ чёрных ладей как минимум $17-8=9$. По условию их 8. Противоречие $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ max белых ладей - 16

Пример:



2 - белые ладьи

1 - чёрные ладьи

Задача №2

Ответ: $\sqrt{3}$

Решение: $\dfrac{xyz(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4+(yz)^4+(zx)^4}}=A$, $x,y,z>0$

$~~xy~~$ $x^2yz+xy^2z+xyz^2 \vee x^2y^2+y^2x^2+z^2x^2$

Пусть $x\ge y\ge z$, тогда $xy\ge xz\ge yz$

~~Возьмём~~ Воспользуемся транснеравенством, возьмём два набора чисел:

$xy\ge xz\ge yz$

$xy\ge xz\ge yz$

Чистовик

Тогда наибольшее значение будет принимать сумма:

$xy\cdot xy + xz\cdot xz + zy\cdot zy \geq xy\cdot yz + yz\cdot zx + zx\cdot xy = xyz(x+y+z)$

$\| $

$(xy)^2 + (zx)^2 + (zy)^2$

Теперь сравним эти два числа:

$(xy)^2 + (yz)^2 + (zx)^2 \vee \sqrt{(xy)^4 + (yx)^4 + (zx)^4} \quad |^2$

$\cancel{(xy)^4} + \cancel{(yz)^4} + \cancel{(zx)^4} + 2x^2z^2y^4 + 2x^2y^2z^4 + 2y^2z^2x^4 \vee \cancel{(xy)^4} + \cancel{(yx)^4} + \cancel{(zx)^4}$

$2x^2y^2z^2(x^2+y^2+z^2) > 0$

при $x, y, z \neq 0$ левая часть всегда больше 0 нуля. $\Rightarrow$

$\Rightarrow (xy)^2 + (yz)^2 + (zx)^2 > \sqrt{(xy)^4 + (yx)^4 + (zx)^4}$

А ~~неравен~~ выражение $xyz(x+y+z)$ достигает своего максимума при равенстве: $xyz(x+y+z) = (xy)^2 + (yx)^2 + (xz)^2$

Равенство бывает только при $x = y = z \Rightarrow$

$\Rightarrow xyz(x+y+z) = t^3(3t) = 3t^4$

$\sqrt{(xy)^4 + (yz)^4 + (zx)^4} = \sqrt{t^8 + t^8 + t^8} = \sqrt{3t^8} = \sqrt{3}t^4$

$\frac{3t^4}{\sqrt{3}t^4} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} = max$

Чистовик

Задача №4

Ответ: может

Решение:

$$a_1a_2\ldots a_{20182019}a_1a_2\ldots a_{20182019} = X^2$$

$$(\underbrace{100\ldots01}_{20182018\ \text{нулей}})a_1a_2\ldots a_{20182019} = (10^{20182019}+1)a_1a_2\ldots a_{20182019}$$

Заметим, что число $100\ldots001 \vdots 11$

$$\begin{array}{l|l} 10000\ldots001 & 11 \\ \underline{99} & 909090\ldots91 \\ \ \ 100 & \\ \ \ \underline{\ \,99} & \\ \ \ \ \ 100 & \\ \ \ \ \ \underline{\ \,99} & \\ \ \ \ \ \ \ 10\ldots & \end{array}$$

Каждый деля число мы продвигаемся к исходному результату на два нуля и возвращаемся. Поскольку нулей чётное кол-во, то в конце останется $11:11=1$ и получится число $909090\ldots9091$

Заметим, что получившееся число тоже делится на 11

$$\begin{array}{l|l} 90909091 & 11 \\ \underline{88} & \\ \ 29 & \\ \ \underline{22} & \\ \ \ 70 & \\ \ \ \underline{66} & \\ \ \ \ 49 & \\ \ \ \ \underline{44} & \\ \ \ \ \ 50 & \\ \ \ \ \ \underline{44} & \\ \ \ \ \ \ 69 & \\ \ \ \ \ \ \underline{66} & \\ \ \ \ \ \ \ 30 & \\ \ \ \ \ \ \ \underline{22} & \\ \ \ \ \ \ \ \ 89 & \\ \ \ \ \ \ \ \ \underline{88} & \\ \ \ \ \ \ \ \ \ 11 & \\ \ \ \ \ \ \ \ \ \underline{11} & \\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 0 & \end{array}$$

Если количество „пар" 90" встречается $4k+3$ раз, то число $90\ldots9091 \vdots 11$,

Количество 90, пар 90" в этом числе у нас $20182018 : 2 = 10091009$ (~~кол~~ количество нулей 20182018, а пару 90 мы получали ~~мы~~ уничтожением двух нулей)

~~10091009~~ $\vdots 4$ Следовательно $90\ldots9091 \vdots 11$

$$\left(10\ldots01 = (10^{20182018}+1) = ((11-1)^{20182018}+1) = 11^{20182018} + C_{20182018}^{1}\, 11^{20182017} + \ldots + C_{20182018}^{20182017}\, 11^{1} - X + X\right)$$

$\vdots 11^2$ $\vdots 11^2$ $\vdots 11^2$