Ответ: 1

N4.

$(\underbrace{-\text{''}-}_{2023}\underbrace{a_{2022}a_{2021}\ldots a_0}_{2023})_{16} = (x^2)_{10}$

$x^2 = (1+16^{2023})a$, где $a = (a_{2022}a_{2021}\ldots a_0)_{16}$ — a – десят. запись числа

Т.к. a представимо 23 цифрами $\Rightarrow a_{2022} \neq 0$

$\Rightarrow a \geq 16^{2022}$

но $a \leq 16^{2023}-1$ (23 цифры)

Тогда $(16^{2023})^2 - 1 \geq x^2 \geq 16^{2022}(16^{2023}+1)$

~~при~~ При этом $x^2 \,\vdots\, (16^{2023}+1)$

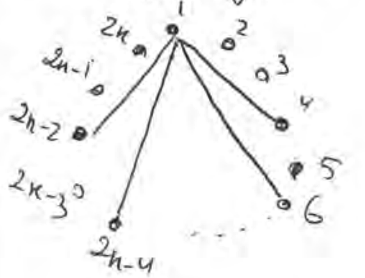
При ~~ду~~ модулю 16^{2023} $\quad x^2 \underset{16^{2023}}{\equiv} 1\cdot a$

и т.к. $a<16^{2023}$, то остаток $x^2 \,\vdots\, 16^{2023}$ ровно a

$\cancel{(\underset{x^2}{\underset{\shortparallel}{16^{2023}k+a}}) = (16^{2023}+1)a = a+16^{2023}a, \text{ т.е. } k=a}$

N5.

При k матчах может не быть такой тройки.
Покажем, как поставить k ребра так чтобы степень $\forall$ вершины была k, тогда ребро означает, что они сыграли. Если в таком графе не будет цикла 3, то усл. не выпол.
Пронумеруем вершины от 1 до $2n$ и поставим их в круг



Будем соединять для $\forall i \leq k$

$i - i+3$ (1 матч)

$i - i+5$ (2 матч)

$\vdots$

$i - 2k+1-3$ (k-ый матч)

Т.к. вершины соединяются с номерами противоположной четности, то цикла длины 3 не будет

~~$\Rightarrow$ при k матчах возможно, что не будет троих попарно сыгравших~~ $6\ (k+1)$ матч

~~Начиная с k матчей право~~ и

$i - i+1$

РГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

2442

1	2	3	4	5	6	сумма
4	1	4	0	–		13

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада САНКТ-ПЕТЕРБУРГ

Дата 24.02.2019

* *

10–11 класс. Второй вариант

1. Имеется 9 черных ладей и n белых. При каком наибольшем n их можно расставить на шахматной доске так, чтобы одноцветные ладьи не били друг друга? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Даны положительные числа x, y, z. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{xyz\,(x+y+z)}{x^4+y^4+z^4}.$$

3. Окружность ω единичного радиуса проходит через вершины B и C треугольника ABC и вторично пересекает его стороны AB и AC в точках K и L соответственно. На лучах BL и CK отмечены соответственно такие точки P и Q, что $BP = AC$ и $CQ = AB$. Найдите расстояние между центрами описанных окружностей треугольников APQ и KBC.

4. Шестнадцатиричная запись квадрата натурального числа x представляет собой два одинаковых соседних блока из n цифр. Может ли n равняться 2023?

5. В однокруговом турнире по настольному теннису участвует $2k$ спортсменов. В каждом туре все участники проводят по одному матчу. Какое наименьшее число туров надо сыграть, чтобы при любом расписании игр обязательно нашлось трое теннисистов, сыгравших друг с другом?

6. Имеется три одинаковых конуса с общей вершиной, касающихся друг друга внешним образом, а также два шара, касающихся внешним образом друг друга и всех конусов. Радиусы шаров относятся как $1:3$. Найдите угол при вершине конусов. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении).

№2

$$\frac{xyz(x+y+z)}{x^4+y^4+z^4} \le 1$$

Док-тем, что $x^2yz+xy^2z+xyz^2 \le x^4+y^4+z^4$

Не умоляя общности, пусть $x \ge y \ge z \Rightarrow x^2 \ge y^2 \ge z^2$ и $xy \ge xz \ge yz$

По транснеравенству $x^2yz+y^2xz+z^2xy \le x^3z+y^3x+z^3y$?

Далее: $x \ge y \ge z$
$x^3 \ge y^3 \ge z^3 \Rightarrow$ по транснеравенству $x^4+y^4+z^4 \ge x^3z+y^3x+z^3y$

т.е. $x^2yz+y^2xz+z^2xy \le x^4+y^4+z^4$ тогда $A \le 1$ т.к. $x,y,z>0$ по условию

при $x=y=z$ $A=\frac{x^3 \cdot 3x}{3x^4}=1$

Ответ: 1

№1.

1. ~~Если в столбце стоит 1 черная ладья ⇒ ≤ 2 белые~~
Если в столбце k черных ладей, где $k \ge 1 \Rightarrow$ белых $\le k+1$

Тогда $\exists$ a столбцов с 1 черной ладьей
b — с 2
c — с 3
d — с 4

Заметим, что при 5 черных ладьях в одном столбце какие-то две будут бить друг друга

~~Тогда белых $\le 2a+3b+4c+4$~~

Тогда черных $9=a+2b+3c+4d$, а белых $\le 2a+3b+4c+5d = 9+a+b+c+d$

Заметим, что $\exists$ не более 7 столбцов с 1 черной ладьей, т.к. столбцов всего 8

$9+a+b+c+d = 18-b-2c-3d$

Заметим, что $\exists$ хотя бы 1 столбец с ладьями черного цвета больше одной штуки. Тогда $b+2c+3d \ge 1$

$\Rightarrow 9+a+b+c+d \le 18-1=17$

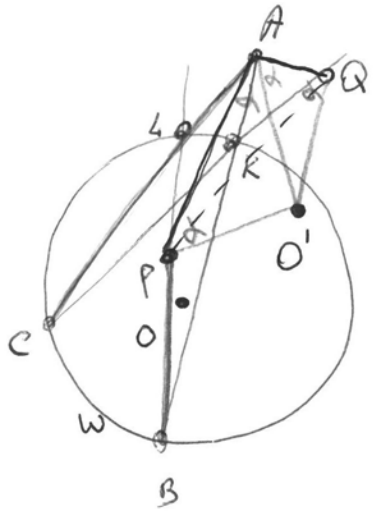
Тогда белых ≤ 17 штук. Пример:

~~Пример:~~

Ответ: 17

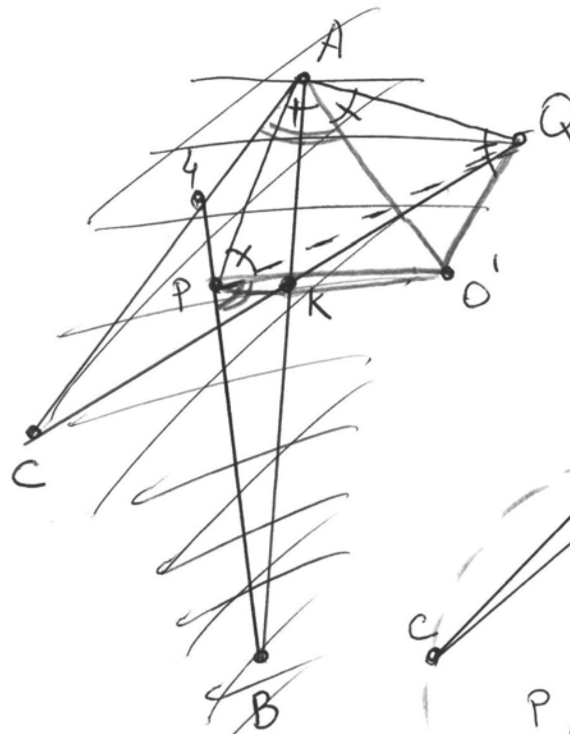
№3.

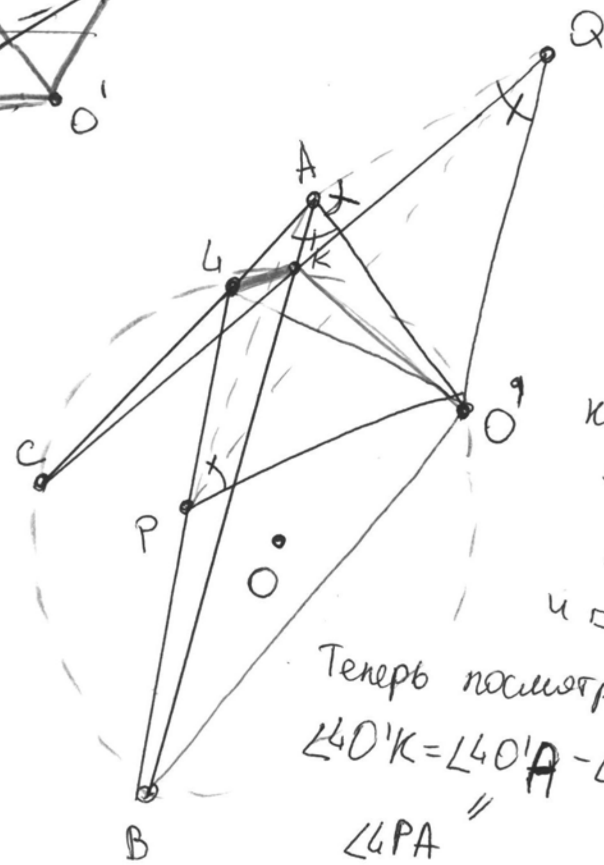
~~AB=~~
$AB=CQ$
$BP=AC$
$\angle 4CK=\angle 4BK$ т.к. опир. на 1 дугу
$\Rightarrow \triangle APB=\triangle QAC$ по 2 сторонам и углу между ними
$\Rightarrow AP=QA$



центр описан. окр. $\triangle KBC$ — центр окр ω (т. O)
$\exists$ O' — центр описанной окр. $\triangle APQ$
$O'P=O'A=O'Q$ и $AP=AQ$
$\Rightarrow \angle AQO'=\alpha=\angle O'AP=\angle O'AQ$

из р-ва $\triangle APB$ и $\triangle QAC$:
$\angle CAQ=\angle BPA$
$\angle 4AO'=\angle CAQ-\angle O'AQ=\angle BPA-\alpha=\angle BPO'$
Тогда $P4AO'$ — вписан. четырехуг.





~~$\angle KAQO'$ вписанный~~
$\angle BAP=\angle CQA$
$\angle PQO'=\alpha-\angle CQA=\alpha-\angle BAP=\angle BAO'$
Тогда эти углы равны как опирающиеся на одну дугу
и $\square KAQO'$ вписанный

Теперь посмотрим на $B4KO'$
$\angle 4O'K=\angle 4O'A-\angle KO'A=$
$\angle 4PA$ $\qquad$ $\angle AQK$
из вписанности четырехуг.
$\angle 4O'K=\angle 4PA-\angle AQK=180^\circ-\angle APB-\angle AQK=180^\circ-\angle APB-\angle PAB=\angle PBA$

Тогда $B4KO'$ — вписанный четырехугольник
$\Rightarrow O' \in \omega$ тогда расстояние OO' равен радиусу окружности
т.е. 1 (единичная окр. по усл.)

№5 продолжение

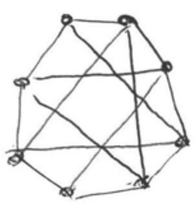
Чистовик

Т.е. алгоритм таков, что соединяем в m-ом матче вершину i с $i+2m+1$ ~~...~~ $\forall\, i \le k,\ m \le k-2$

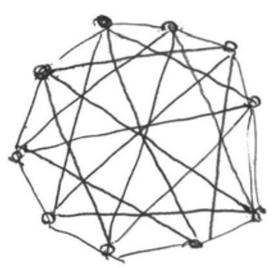
Тогда будем (посмотрим на $k-1$ и k-ый матчи):

№ матча:	соединяем:
1	$i - i+3$
2	$i - i+5$
3	$i - i+7$
4	⋮
⋮	⋮
$k-2$	$i+2k-4+1$
$k-1$	$i - i+1$
k	$i - i-1$

Для $k=4$:



Для $k=5$

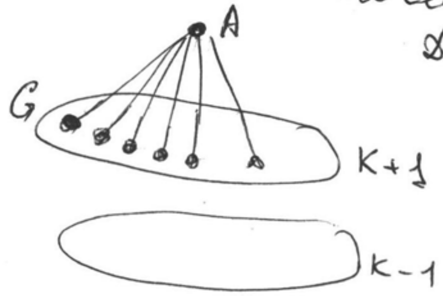


Итак, для k матчей возможно, что не будет троих попарно сыгравших.

А для $k+1$ матча всегда есть.

Покажем почему.

Посмотрим на игрока A и $k+1$ человека, с кем он играл



Для каждого из них так же верно, что их степень $k+1$, т.е. ещё k ребер из каждого (помимо A), т.к. осталось $k-1$ человек, то обязательно ребро внутри графа G, т.е. среди этих $k+1$ человек, с кем играл A есть сыгравшие между собой.

Т.е. мы нашли сыгравших троих попарно при любой игре

Ответ: $k+1$