Тогда число в – удовлетворяет условию

(5)

1. Док-м, что макс. кол-во несыгранных партий для турнира в 2a игроков это a^2.

Д-м по индукции

Для 4х верно (всего игр 6 для выполн. условия достаточно 2х партий то есть можно не сыграть 4)

Пусть верно для 2a.

Д-м для 2a+2.

~~Пусть~~ Мы добавили 2х новых игроков X и Y.

Для выполнения ус-вия необходимо, чтобы каждый из 2a игроков сыграл хотя бы один раз с X или Y.

Тогда необходимо сыграть еще 2a партий

С добавлением X и Y кол-во возможных (по кол-ву игроков без X и Y) партий стало на 4a + 1 больше.

Из них 2a сыграть необходимо.

Соответственно, максимально не сыграть можно $a^2+4a+1-2a = 2a+1+a^2 = (a+1)^2$ ч.т.д.

2. Тогда для 16 $a=8$

Соответственно, мин. кол-во игр:

$$\frac{2a(2a-1)}{2} - a^2 = 2a^2 - a - a^2 = a^2 - a$$

$a=8$: $a^2 - a = 64 - 8 = 56$.

Покажем, что этот мин. достигается

Разобьем 16 на ~~[illegible]~~ половины.

8 игроков 8 игроков

И пусть в каждой группе сыграны все игры.

Тогда всего игр сыграно $\frac{8\cdot 7}{2} + \frac{8\cdot 7}{2} = 8\cdot 7 = \boxed{56}$

При этом какую бы мы не взяли тройку двое игроков будут из одной части. (по принц. Дирихле)

Соответственно, они уже сыграли. ч.т.д.

Ответ: 56

Выход $12^{15} - 12^{20}$

80

1

ГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

1

8835

1	2	3	4	5	6	сумма
4	4	0	4	4	0	16

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Владимир

Дата 16.03.2019

* *

10–11 класс. Первый вариант

1. Имеется 8 черных ладей и n белых. При каком наибольшем n их можно расставить на шахматной доске так, чтобы одноцветные ладьи не били друг друга? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Даны положительные числа x, y, z. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{xyz\,(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4 + (yz)^4 + (xz)^4}}.$$

3. Дан треугольник ABC с меньшей стороной AB. На сторонах AB и AC выбраны соответственно точки X и Y так, что $BX = CY$. Под каким углом прямая, проходящая через центры описанных окружностей треугольников ABC и AXY, пересекает прямую BC, если $\angle ABC = \beta$ и $\angle BCA = \gamma$?

4. Десятичная запись квадрата натурального числа x представляет собой два одинаковых соседних блока из n цифр. Может ли n равняться 20182019?

5. На однокруговой турнир по настольному теннису подало заявку 16 человек. Когда было сыграно n матчей, оказалось, что среди любых трех теннисистов найдутся двое, уже сыгравших между собой. При каком наименьшем n такое возможно?

6. Три конуса с общей вершиной, касающихся друг друга внешним образом, имеют высоту 2 и радиус основания $\sqrt{3}$. Два шара касаются внешним образом друг друга и всех конусов. Найдите отношения радиусов шаров (большего к меньшему).

(1) Заметим, что если на строке стоит k черных ладей, то на этой же строке может стоять максимум $k+1$ белая ладья. (Так, чтобы между 2мя белыми была 1на черная)

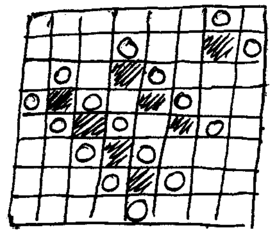
Тогда пусть на первой строке стоит k_1 черных ладей, на второй k_2 и так далее.

Также из условия мы знаем, что $k_1+k_2+\ldots+k_8=8$.

Тогда на всех строках могут стоять максимум $(k_1+1)+(k_2+1)+\ldots+(k_8+1)$ белых ладей.

$$(k_1+1)+(k_2+1)+\ldots+(k_8+1) = k_1+k_2+\ldots+k_8+8 = 8+8=16$$

Приведем пример, что можно 16.



▨ – черные ладьи

О – белые

$\boxed{\text{Ответ: } 16.}$

(2)

1) $$A=\frac{xyz(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4+(xz)^4+(yz)^4}}=\frac{(xy)(xz)+(xz)(yz)+(yz)(xy)}{\sqrt{(xy)^4+(xz)^4+(yz)^4}}$$

Пусть $a=xy$, $b=yz$, $c=xz$

Тогда A примет вид:

$$A=\frac{ab+bc+ac}{\sqrt{a^4+b^4+c^4}}$$

2) Док-м, что $(a^2+b^2+c^2)^2\le 3(a^4+b^4+c^4)$

$$\Updownarrow$$

$$a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2\le 3a^4+3b^4+3c^4$$

$$\Updownarrow$$

$$0\le 2a^4+2b^4+2c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2$$

$$\Updownarrow$$

$$0\le a^4-2a^2b^2+b^4+b^4-2b^2c^2+c^2+c^2-2a^2c^2+a^2$$

$$\Updownarrow$$

$$0\le (a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2$$

$\overset{\vee}{0}$ $\overset{\vee}{0}$ $\overset{\vee}{0}$

ч.т.д.

3) Из п. 2 получаем, что $(a^2+b^2+c^2)^2\le 3(a^4+b^4+c^4)$

$\Downarrow$ т.к. $a^2+b^2+c^2>0$ и $a^4+b^4+c^4>0$

$$a^2+b^2+c^2\le\sqrt{3(a^4+b^4+c^4)}$$

4) Д-м, что $ab+bc+ac\le a^2+b^2+c^2$

$$\Updownarrow$$

$$2ab+2bc+2ac\le 2a^2+2b^2+2c^2$$

$$\Updownarrow$$

$$0\le 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac$$

$$\Updownarrow$$

$$0\le a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ac+a^2$$

$$\Updownarrow$$

$$0\le (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$$

$\overset{\vee}{0}$ $\overset{\vee}{0}$ $\overset{\vee}{0}$

ч.т.д.

5) Тогда из пунктов 3 и 4 получаем:

$$ac+ab+bc\le a^2+b^2+c^2\le\sqrt{3(a^4+b^4+c^4)}$$

$$\Downarrow$$

$$ac+ab+bc\le\sqrt{3(a^4+b^4+c^4)}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{ac+ab+bc}{\sqrt{a^4+b^4+c^4}}\le\sqrt{3}$$

то есть $A\le\sqrt{3}$

6) Покажем, что максимум достигается

Вернемся к x,y,z

$$A=\frac{xyz(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4+(yz)^4+(xz)^4}}$$

Пусть $x=y=z=1$.

Тогда $$A=\frac{1(1+1+1)}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}.$$

Максимум достигается

$\boxed{\text{Ответ: } \sqrt{3}}$

$\boxed{4}$

Пусть $a=20182019$, искомое число x^2.

Заметим, что полученное число должно делиться на 10^a+1, т.к. состоит из 2х блоков.

Заметим, что число $b=\frac{10\cdot(10^a+1)}{11}$ в квадрате делится на (10^a+1).

Д-м, что оно целое.

Для этого докажем, что $10^a+1 \vdots 121$.

Рассмотрим 10^a по mod 11

т.к. a – нечет, то $10^a\equiv -1 \pmod{11}$

Соответственно $10^a+1\equiv 0 \pmod{11}$