60

О-3В

КИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

1

7626

1	2	3	4	5	6	сумма
4	0	4	2	2		12

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (8–9 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Красноярск.

Дата 22.03.2019

* *

8–9 класс. Второй вариант

1. Из нескольких одинаковых белых кубиков Петя сложил большой куб и покрасил его грани в черный цвет. Оказалось, что число кубиков с одной черной гранью равно числу полностью белых кубиков. Сколько маленьких кубиков ровно с двумя черными гранями?

2. Найдите все такие квадратные трехчлены ax^2+bx+c с целыми коэффициентами, графики которых проходят через точки (a,b), (b,c) и (c,a) (среди этих точек могут быть совпадающие).

3. Том Сойер и Гекльберри Финн играют в игру, заключающуюся в покраске забора, состоящего из 1000 неокрашенных дощечек, в синий и красный цвета. Начинает Том, ходы делаются по очереди. За один ход игрок выбирает одну из неокрашенных дощечек и цвет, а затем красит эту дощечку в выбранный цвет. Игра заканчивается, когда будут покрашены все дощечки. Том хочет, чтобы по окончании игры было как можно больше пар соседних разноцветных дощечек, а Гек хочет, чтобы было как можно меньше пар соседних разноцветных дощечек. Какое максимальное число таких пар Том может обеспечить вне зависимости от игры Гека?

4. Вещественные числа a, b, c и d удовлетворяют соотношениям $a+b+c+d=0$ и $a^2+b^2+c^2+d^2=12$. Найдите наименьшее и наибольшее значения произведения $abcd$.

5. Дан неравнобедненный остроугольный треугольник ABC. На лучах AB и AC выбраны соответственно такие точки K и L, что четырехугольник $KBCL$ вписанный. Точка H — основание высоты, опущенной из вершины A на сторону BC. Докажите, что если $KH=LH$, то H — центр описанной окружности треугольника AKL.

6. Найдите все пары простых чисел p и q, для которых p^2+q^3 является точным кубом.

Чистовик

задача №1)

По условиям; Петя сложил куб из маленьких кубиков. и покрасил его грани в церыи.

рассмотрим, сколько получилось ~~из~~ маленьких кубиков с одной покрашенной гранью.

Если нато кол-во кубиков большом кубе равно $= x^3$.

кубики с покрашенной 1 гранью, это те кубики, которые принадлежат только одной стороне.

$\Rightarrow$ на одной стороне будет таких кубиков $=$:

всего на стороне куба x^2 кубиков $\Rightarrow$ кол-во кубиков, которые

принадлежат только этой стороне $= x^2 - (\underbrace{2x + 2x - 4}_{\text{клетки по периметру}}) =$

$= x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$

Всего сторон у куба 6 $\Rightarrow$ колво мини.куб. ~~клеток~~ с 1 покрашенной

гранью $= (x-2)^2 \cdot 6$.

рассмотрим кол-во непокрашенных мини-кубиков.,

если всего x^3 кубиков.

$\Rightarrow$ это будут кубики, расположенные под

верхним слоем кубиков (под всеми клетками на сторонах) посчитаем кол-во клеток на сторонах!

оно равно, $x^2 + x^2 + (x^2 - 2x) + (x^2 - 2x) + (x^2 - 4x + 4) + (x^2 - 4x + 4) =$

$= 6x^2 + -12x + 8$.

$\Rightarrow$ кол-во клеток внутри $= x^3 - (6x^2 - 12x + 8) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 =$

$= (x-2)^3$

$\Rightarrow$ по условиям необходимо:

$$6(x-2)^2=(x-2)^3$$
$$6(x-2)^2-(x-2)^3=0$$
$$(x-2)^2(6-x+2)=0$$
$$(x-2)^2(8-x)=0$$

1 случай: $x=2$,

в таком случае ~~щелок~~ кол-во кубиков имеющих 2 черные грани $=0$

2 случай: $x=8$

в таком случае кол-во ~~м~~ кубиков имеющих 2 черные грани $=6\cdot 12=72$ (по 6 на каждой из 12 граней)

$\Rightarrow$ Ответ: либо 0, либо 72

задача N 4) $a+b+c+d=0$ $\quad a^2+b^2+c^2+d^2=12$

$\Rightarrow a+b=-(c+d)$

$\Rightarrow a^2+b^2=-c^2-d^2-2cd-2ab$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2+d^2=12=-c^2-d^2-2cd-2ab+c^2+d^2=$

$=-2cd-2ab.$

$\Rightarrow cd+ab=-6.$

аналогично: $cb+ad=-6$
$db+ac=-6.$

$\Rightarrow cb+db+ac+ad=0=(a+b)(c+d)=0$

аналогично:
$(b+d)(c+a)=0$
$(a+b)(c+d)=0$

$\Rightarrow$ 2 числа равны, а 2 других ~~им~~ равны им $\cdot(-1)$

$\Rightarrow a^2=b^2=c^2=d^2$

$a=b=c=d=\sqrt{3}$ $\quad\Rightarrow a\cdot b\cdot c\cdot d=9$ Ответ: 9. только 9.

Чистовик.

задача №3)

~~рас~~ т.к. в условиях не сказано, что система заборов - замкнутая => он стоит в ряд.

рассмотрим ряд из 1000 заборчиков.

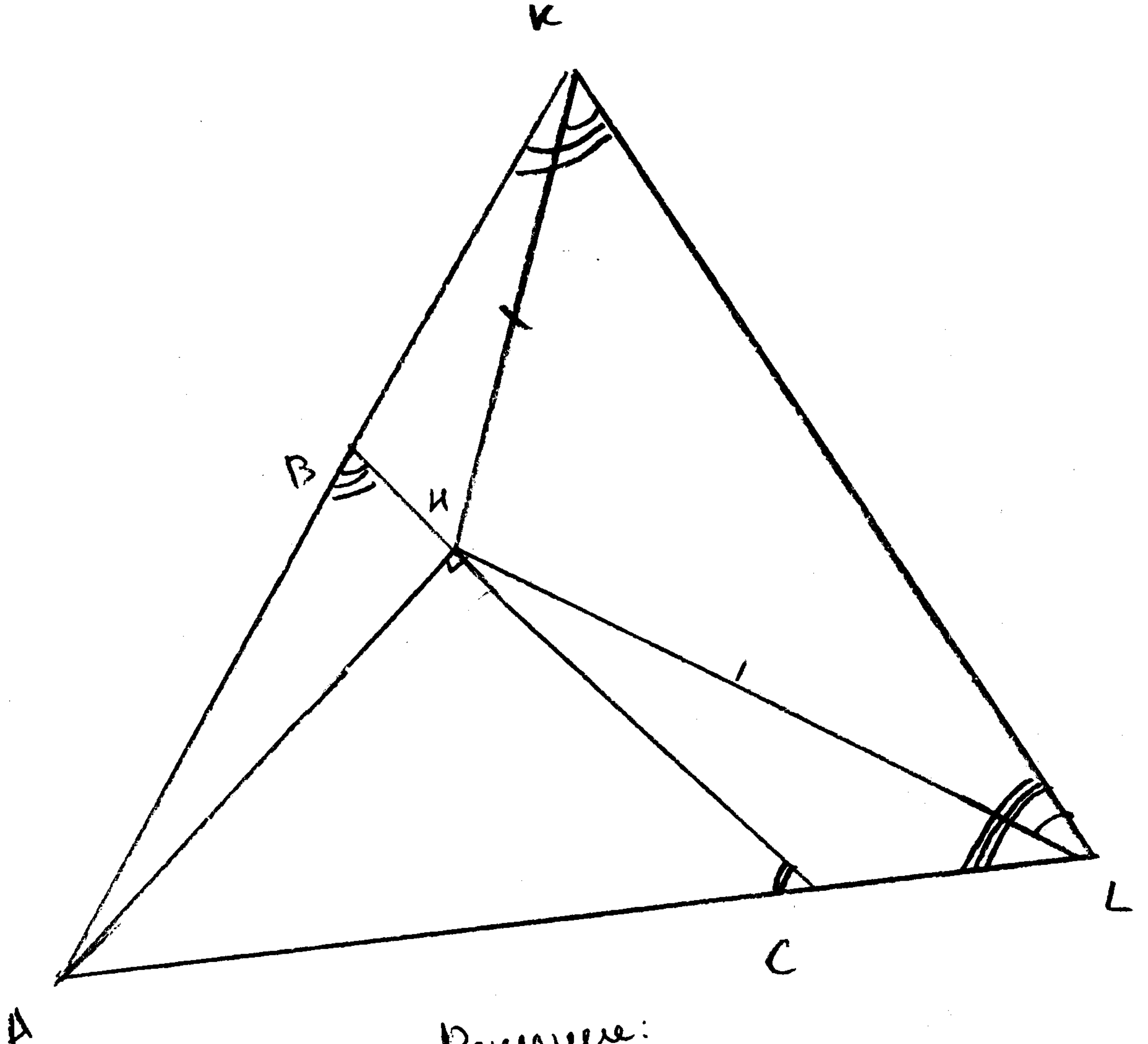
Каждым ходом Том не может ~~поставить~~ создать больше 1 новой пары разноцветных соседов. (т.к. это возможно только тогда, когда через одну заборину от закрашенной Томом ~~Fe~~ Финн закрасит тем же цветом, оставив заборину между этими двумя - пустой), разумеется он этого делать не будет, т.к. он хочет минимизировать.

=> Одним ходом Том может создать не больше одной новой пары. Первым ходом он не может создать пару, т.к. он ходит первым. => макс число пар = ~~200~~ 499.

заметим, что все ходы кроме 1, Том может создавать новую пару. Это очевидно, т.к. всегда найдётся такая ~~пара~~ заборина (покрашенная), у которой сосед непокрашен, и Том сможет покрасить её в противоположный цвет и создать пару. Так будет происходить, пока заборины не кончатся, то есть 500 ходов Тома создадут 499 пар (каждый ход, кроме 1)

Ответ: 499.

5.)



Решение:

по усл: Н- вершина равнобедренного $\triangle HKL$ с осн KL

$\Rightarrow$ Н- лежит на серединном $\perp$ к KL, осталось доказать, что $\triangle AHL$, либо $\triangle AHK$- равнобедренный (если 1-равнобедр. по равнобедр и другой.) заметим, что по усл.

$\angle BCL + \angle BKL = 180^\circ$

$\Rightarrow \angle ACB = \angle BKL$ (т.к. $\angle BCL$ смеж с $\angle ACB$)

аналогично, $\angle CBA = \angle CLK$.

$\Rightarrow \triangle AKL \sim \triangle ABC$ $\quad \frac{AB}{AL} = \frac{AC}{AH} = \frac{BC}{KL}$

и т.к. $KH = HL$. $\Rightarrow AH = HL$.

$\Rightarrow \triangle HAL$ - равнобедр

$\Rightarrow$ Н лежит на $\perp$ серед. к AL.

$\Rightarrow$ Н - центр описанной окр $\triangle AKL$. Ч.Т.Д.

чистовик.

задача №2)

ax^2+bx+c

из условий $\Rightarrow$

$$\begin{cases} b=a^3+ab+c \\ c=ab^2+b^2+c \\ a=ac^2+bc+c \end{cases} \iff \begin{aligned} b&=a^3+ab \quad (1)\\ c&=ab^2+b^2 \quad (2)\\ a&=ac^2+bc. \quad (3)\end{aligned}$$

$(1)-(2) = b-c = a^3-ab^2+ab-b^2 = a(a-b)(a+b)+b(a-b) =$
$=(a-b)(a(a+b)+b)$,

Аналогично: $b-a=(a-c)(a(a+c)+b)$

Ни один из корней $x\neq 0$ т.к иначе зануляются все.

Ответ: таких трёхчленов нет!

задача №6)

$p^2+q^3=a^3$
$\Rightarrow p=\sqrt{q^3-p^3}$

Если ~~одно~~ $q\neq 2 \Rightarrow a^3$ - нечетное число
$\Rightarrow a$ - нечетное число.