7424

ıСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

I

1

50

1	2	3	4	5	6	сумма
3	3	4				10

50

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Москва

Дата 10 марта 2019

* *

10–11 класс. Девятый вариант

1. Какое наибольшее количество ладей можно расставить на шахматной доске так, чтобы каждую ладью било не более трех других? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Числа x, y, z — углы треугольника, причем больший угол z не превосходит $\frac{\pi}{2}$. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \sqrt{\sin x \cdot \sin(z-y)} + \sqrt{\sin y \cdot \sin(z-x)}.$$

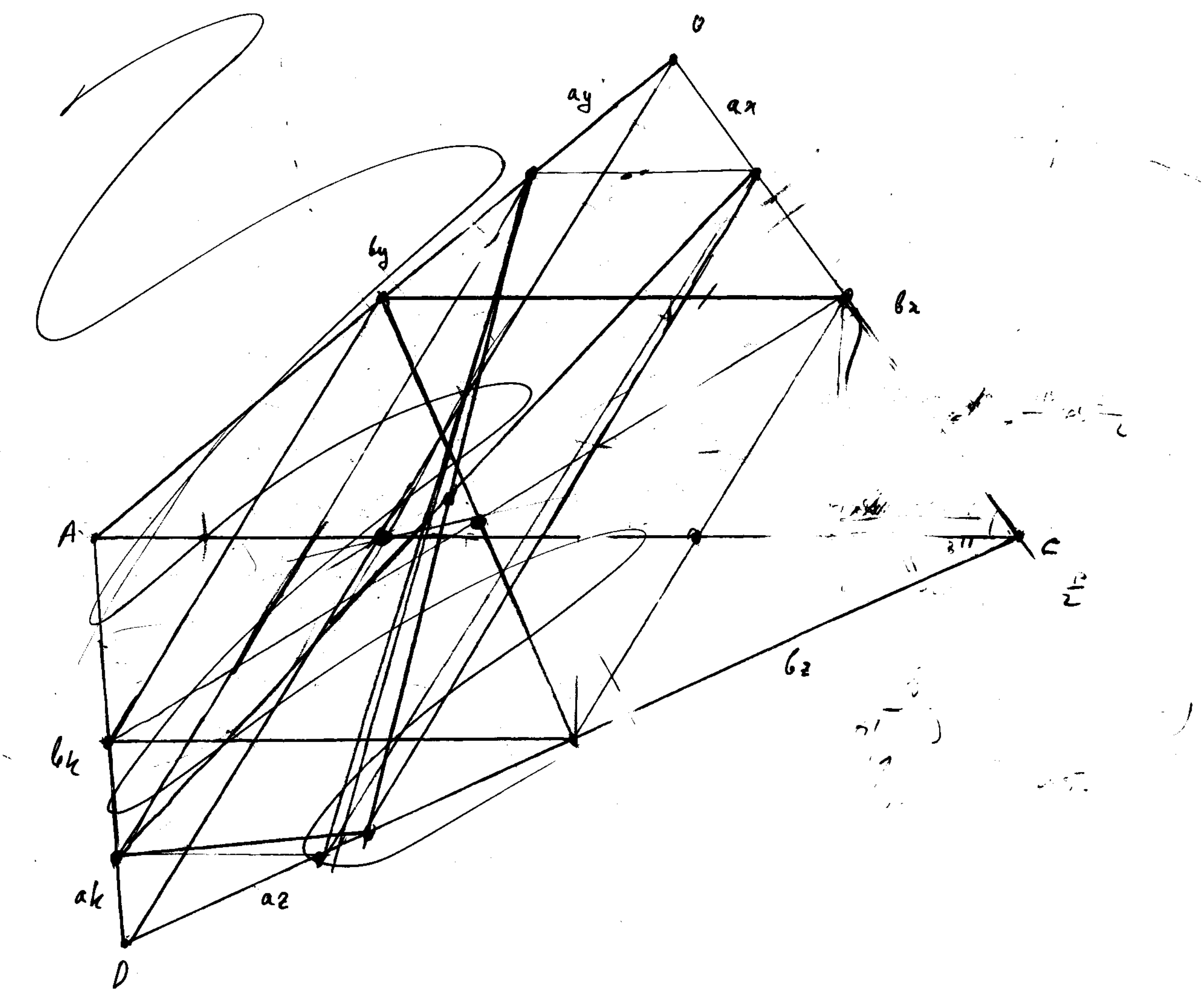
3. Дан четырехугольник $ABCD$, отличный от параллелограмма. На сторонах AB, BC, CD и DA выбираются соответственно точки K, L, M и N так, что $KL \parallel MN \parallel AC$ и $LM \parallel KN \parallel BD$. Найдите геометрическое место точек пересечения диагоналей параллелограмма $KLMN$.

4. Натуральное число x в восьмеричной системе 2019-значное, его младшая цифра равна 3, а все остальные цифры отличны от 3 и совпадают через одну. Число y получается записью цифр x в обратном порядке. Оказалось, что восьмеричное представление $x \cdot y$ содержит только цифры 1 и 6. Найдите $x \cdot y$ (в восьмеричной системе).

5. В однокруговом турнире по настольному теннису участвовало 100 спортсменов, причем ни один из них не выиграл все матчи. Будем говорить, что игрок A *круче* игрока B, если A выиграл у B или найдется такой игрок C, что A выиграл у C, а C выиграл у B. Каково наименьшее количество теннисистов, оказавшихся по итогам турнира круче всех остальных? Ничьих в теннисе не бывает.

6. На столе лежат два конуса с общей вершиной O, касаясь друг друга внешним образом. Угол между их осями симметрии равен $\operatorname{arctg} \frac{4}{3}$. Найдите максимальный угол при вершине меньшего из двух конусов с вершиной O, которые лежат на столе и касаются внешним образом первых двух конусов. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении.)

$\omega^1 3$



№1

Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л
Л							Л
Л							Л
Л							Л
Л							Л
Л							Л
Л							Л
Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л

Ответ: не более 28 ладей

Пример на 28 слева

Оценка:

Пусть ладей хотя бы 29.
Тогда обязательно найдется ладья, стоящая в „центральном" квадрате 6×6 (т.е. таком, что никакая его клетка не принадлежит крайней строке / столбцу), т.к. клеток по краю всего 28.
Рассмотрим все такие ладьи.
Среди них обязательно найдется такая, что по обе стороны от нее и в строке, и в столбце будет по ладье (т.е. ее будет бить 4 фигуры), ?
т.к. иначе в любом некрайнем столбце / строке будет не более 2 ладей. Тогда всего ладей будет не более $12 \cdot 2 + 4 = 28$ (по 2 в строке / столбце, не явл. крайними, и не более 4 в углах доски, причем каждую считаем не менее 1 раза), что меньше 29.
Противоречие. Значит, если ладей 29 и больше, среди них обязательно найдется такая, что ее бьют 4 раза.
Вывод: ладей не более 28.

№2

~~Пусть $x \le y \le z$ (т.к. z - наибольший из углов, а из-за обмена значений x и y значение выражения не меняется) Тогда~~

~~$\begin{cases} 0 \le z-y \le \frac{\pi}{4} \\ 0 \le z-x \le \frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow$~~

~~$\sin(z-y) \le \frac{1}{\sqrt{2}}$~~

~~$\sin(z-x) \le \frac{1}{\sqrt{2}}$~~

~~Пусть $z-y > \frac{\pi}{4}$.~~

~~Тогда $z-x \ge z-y > \frac{\pi}{4}$~~

~~Тогда $2z-x-y > \frac{\pi}{2}$~~

~~$x+y+z=\pi$ (по усл-ю, т.к. x,y,z - углы тр-ка)~~

~~Тогда $2z-x-y+\pi = 3z-x-y+x+y = 3z > \frac{\pi}{2}+\pi > \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow$~~

~~$\Leftrightarrow z > \frac{\pi}{2}$, что противоречит усл-ю.~~

$$\sin x \cdot \sin(z-y) \le \sin x \cdot \sin(z-x) \le \sin x \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x \cos x \le \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{2} \le \frac{1}{2}$$

~~$\sin y \cdot \sin(z-x)$ ... $\frac{1}{\sqrt{2}}$~~

~~$x \le \frac{\pi}{3}$ как наименьший угол в треугольнике~~

$$\frac{A}{2} \le \sqrt{\frac{\sin x \sin(z-y) + \sin y \sin(z-x)}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A \le \sqrt{2}\cdot\sqrt{\sin x(\sin z\cos y - \sin y \cos z) + \sin y(\sin z \cos x - \sin x \cos z)} =$$

$$= \sqrt{2}\cdot\sqrt{\sin x \sin z \cos y - \sin x \sin y \cos z + \sin y \sin z \cos x - \sin x \sin y \cos z} =$$

$$= \sqrt{2}\cdot\sqrt{\sin z \sin(x+y) - 2\sin x \sin y \cos z} \le \sqrt{2}\cdot\sqrt{\sin^2 z - 2\sin x \sin y \cos z} \le$$

$x, y, z \in [0; \frac{\pi}{2}] \Rightarrow 2\sin x \sin y \cos z \ge 0$?

$$\le \sqrt{2}\cdot\sqrt{\sin^2 z} = \sqrt{2}\sin z \le \sqrt{2}\cdot 1 = \sqrt{2}$$

$$\Updownarrow$$

$$A \le \sqrt{2}$$

рав-во достигается при $x=y=\frac{\pi}{4}$, $z=\frac{\pi}{2}$.

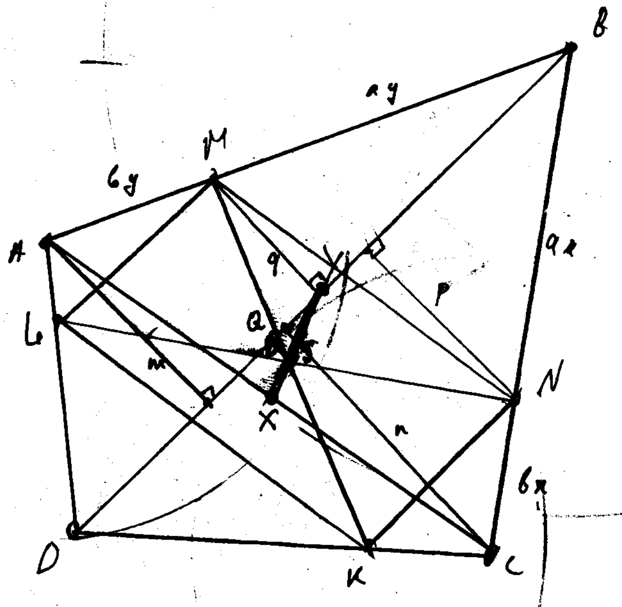
$$A = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}} + \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}} = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Ответ: $A \le \sqrt{2}$

№3

Чистовик

Ответ: отрезок XY, где X и Y – середины AC и BD соотв.



Пусть
$m = \rho(A; (BD))$
$n = \rho(C; (BD))$
$p = \rho(N; (BD))$
$q = \rho(M; (BD))$
$l = \rho(S; (BD))$

$l = \frac{|p-q|}{2}$

$p = \frac{a}{a+b} \cdot n$

$q = \frac{a}{a+b} \cdot m$

$l = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{|m-n|}{2}$

$\Downarrow$

$\frac{a}{a+b} = \frac{2l}{|m-n|}$

$\frac{BN}{BC} = \frac{2l}{|m-n|}$

$BN = \frac{2l \cdot BC}{|m-n|}$ строится как 4 пропорц-й ~~(…)~~

$BN \cdot |m-n| = 2l \cdot BC$

Далее по точке N однозначно восст. $MNPQ$

Ан-но, центр любого такого пар-ма $MNPQ$ лежит на XY и делит его в отн-нии $\frac{a}{a+b}$ считая от точки Y (следует из рассуждений, пров. в обратном порядке)