80

А0-56

СКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

I

I

3295

1	2	3	4	5	6	сумма
4	4	0	4	4	0	16

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Владимир

Дата 16.03.2019

* *

10–11 класс. Второй вариант

+ **1.** Имеется 9 черных ладей и n белых. При каком наибольшем n их можно расставить на шахматной доске так, чтобы одноцветные ладьи не били друг друга? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

+ **2.** Даны положительные числа x, y, z. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{xyz\,(x+y+z)}{x^4+y^4+z^4}\,.$$

3. Окружность ω единичного радиуса проходит через вершины B и C треугольника ABC и вторично пересекает его стороны AB и AC в точках K и L соответственно. На лучах BL и CK отмечены соответственно такие точки P и Q, что $BP = AC$ и $CQ = AB$. Найдите расстояние между центрами описанных окружностей треугольников APQ и KBC.

+ **4.** Шестнадцатиричная запись квадрата натурального числа x представляет собой два одинаковых соседних блока из n цифр. Может ли n равняться 2023?

+ **5.** В однокруговом турнире по настольному теннису участвует $2k$ спортсменов. В каждом туре все участники проводят по одному матчу. Какое наименьшее число туров надо сыграть, чтобы при любом расписании игр обязательно нашлось трое теннисистов, сыгравших друг с другом?

6. Имеется три одинаковых конуса с общей вершиной, касающихся друг друга внешним образом, а также два шара, касающихся внешним образом друг друга и всех конусов. Радиусы шаров относятся как $1:3$. Найдите угол при вершине конусов. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении).

4. Заметим, что 2023 делится на 17

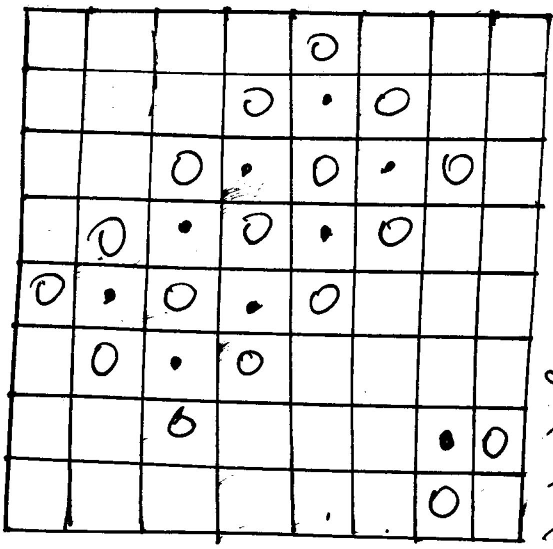
тогда $16^{2023}+1=(16+1)\cdot(16^{2022}-16^{2021}+\dots-16+1)$

Заметим, что каждое слагаемое во второй скобке сравнимо с 1 по модулю 17. Т.к. слагаемых 2023, а это число делится на 17, вторая скобка делится на 17 $\Rightarrow 16^{2023}+1$ делится на 289. Если $x=\frac{16^{2023}+1}{17}$, то $x^2=(16^{2023}+1)\cdot\left(\frac{16^{2023}+1}{289}\right)$. Однако, мы еще не получили искомое число, потому что $\frac{16^{2023}+1}{289}<16^{2022}$. Домножим x на 16, тогда: $x=\frac{16}{17}\cdot(16^{2023}+1)\Rightarrow$

~~$\cdot\left(256\frac{16^{2023}+1}{289}\right)$. Т.к. $256\frac{16^{2023}+1}{289}$ - целое и в восьмеричной СС записывается 2023 цифрами, десятичная запись x^2 будет представлять собой два одинаковых блока из k цифр. Следовательно $k=2023$~~

$\Rightarrow x^2=(16^{2023}+1)\cdot\left(256\frac{16^{2023}+1}{289}\right)$ т.к. $256\frac{16^{2023}+1}{289}$ - целое, и в восьмеричной системе исчисления записывается 2023 цифрами, десятичная запись x^2 будет представлять из себя два одинаковых блока из k цифр. Следовательно, $k=2023$

1.



~~[illegible]~~

Оценим количество белых ладей, которые мы можем добавить к 8 черным ладьям. Для этого посчитаем суммарное кол-во белых ладей по строкам и столбцам, т.к. в каждой строке и каждом столбце белых не больше, чем на одну больше чем черных, то эта сумма не может быть больше, чем $18+16=34$, где каждую белую ладью мы посчитали по два раза. А значит нельзя расставить на доске больше, чем 17 ладей.

Б. Сначала докажем, что K+1 туров будет достаточно для того, чтобы условия задачи выполнялось: каждый игрок сыграл K+1 матч. Возьмем случайного из них и назовем А. Среди тех K+1 игроков, с которыми он сыграл, выберем случайного и назовем его Б. Игроков с которыми не играл А осталось K−2. Мы знаем, что Б также сыграл K+1, поэтому обязательно найдется игрок, который сыграл и с А, и с Б. ~~Получается~~ Получается, что после проведения K+1 туров всегда найдутся такие три человека, которые играли между собой.

Теперь приведем пример, когда прошло K туров, а 3 человек, игравших между собой, так и не нашлось. Для этого выберем случайного игрока и назовем его М. М сыграл с K человек. Назовем это множество Г. М не сыграл с K−1 человеком — назовем это множество K (заглавная). Тогда пусть каждый игрок из множества Г сыграл с каждым игроком из множества K (заглавная). В таком случае получаем, что каждый игрок сыграл K матчей ⇒ было проведено K туров, и не нашлось таких трех, которые играли между собой ⇒

значит ~~минимальное~~ минимальное расстояние равно.
ту цифров будет $n+1$

Ответ: $n+1$

4. Заметим, что 2023 делится на 17, тогда $16^{2023}+1=(16+1)\cdot(16^{2022}-16^{2021}+\ldots-16^{1}+1)$. Заметим, что каждое слагаемое во второй скобке сравнимо с 1 по модулю 17. Т.к. слагаемых 2023 и это число делится на 17, вторая скобка делится на 17 $\Rightarrow$ $16^{2023}+1$ делится на 289. Если $x=\frac{16^{2023}+1}{17}$, то $x^2=(16^{2023}+1)\cdot\left(\frac{16^{2023}+1}{289}\right)$. Однако, мы еще не получили ~~ответ~~ искомое число, потому что $\frac{16^{2023}+1}{289}<(16)^{2022}$. Домножим x на 16, тогда: $x=\frac{16}{17}\cdot(16^{2023}+1)$; $256\frac{(16)^{2023}+1}{289}$ - целое, и $x^2=(16^{2023}+1)\left(256\frac{16^{2023}+1}{289}\right)$. Т.к. в восьмиричной системе исчисления записывается 2023 цифрами, десятичная запись x^2 будет представлять из себя две одинаковых блока из n цифр. Следовательно, $n=2023$.

чистовик

2. Докажем следующее неравенство для любых 3 положительных чисел: $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca$. Воспользуемся неравенством Коши-Буняковского-Шварца:

$$(a^2+b^2+c^2)\cdot(b^2+c^2+a^2) \geqslant (ab+bc+ac)^2$$

$$(a^2+b^2+c^2)^2 \geqslant (ab+bc+ac)^2$$

Извлекая квадратный корень (все числа положительные), получаем исходное неравенство. Будем использовать его в дальнейших рассуждениях.

Перейдем к условию $A=\frac{xyz(x+y+z)}{x^4+y^4+z^4}$; $x,y,z>0$

По доказанному ранее неравенству имеем $x^4+y^4+z^4 \geqslant (xy)^2+(yz)^2+(xz)^2$. Тогда $A \leqslant \frac{x^2yz+xy^2z+xyz^2}{(xy)^2+(yz)^2+(xz)^2}$

Введем замену переменных

$xy=k$; $yz=m$; $xz=n$

$$A \leqslant \frac{kn+km+nm}{k^2+m^2+n^2}$$

Снова применим доказанное неравенство $k^2+m^2+n^2 \geqslant kn+km+mn$. Получаем, что $A \leqslant 1$. Максимальное значение A не превосходит 1. Покажем, что это значение достигается. Пусть $x=y=z$: $A=\frac{x^3\cdot 3x}{3x^4}=1 \Rightarrow$ максимальное значение $A=1$

Ответ: 1