M035

9846

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Шиф

1

1	2	3	4	5	6	сумма
3	3	4	–	–	–	10

50

50

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (8–9 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Стерлитамак

Дата 07.03.2019

* *

8–9 класс. Четвертый вариант

1. На свой день рожденья Вася принес в класс несколько конфет и все их раздал своим одноклассникам (каждому досталось не менее одной конфеты). Некоторые из них поделились с одноклассниками полученными конфетами. В результате у четверти всего класса оказалось по 2 конфеты, у трети класса — по 1 конфете, у Маши оказалось 6 конфет, а больше ни у кого конфет не осталось. Какое наибольшее количество конфет мог раздать Вася?

2. При каких a квадратные трехчлены $x^2 + ax - 6$ и $2x^2 - 5x + 2a$ имеют общий корень?

3. В тетради карандашом нарисована квадратная сетка 2019×2019 клеток (сторона клетки равна 1). Петя и Вася играют в игру по следующим правилам. Ходят по очереди, начинает Петя. За один ход игрок стирает один единичный отрезок этой сетки. Выигрывает тот игрок, после чьего хода образуется клетка, все четыре стороны которой стерты. Кто из игроков может обеспечить себе победу вне зависимости от игры соперника?

4. Для положительных чисел a, b и c докажите неравенство

$$\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geqslant \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}.$$

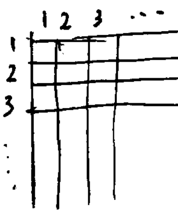
5. В остроугольном треугольнике ABC с наименьшей стороной AB провели высоты BB_1 и CC_1, они пересеклись в точке H. Через точку C_1 провели окружность ω с центром в точке H и окружность ω_1 с центром в точке C. Через точку A провели касательную к ω, касающуюся ее в точке K, а также касательную к ω_1, касающуюся ее в точке L. Найдите $\angle KB_1L$.

6. Найдите все пары простых чисел p и q, для которых $\frac{p^3+1700}{q^3+96} = q^3$.

Чистовик.

№3

Заметим, что в сетке есть центральная клетка. Она лежит на пересечении 1010 вертикали и 1010 ~~в~~ горизонтали (если нумеровать их из угла:



~~Анало~~ ~~А~~ Все квадратики разбиваются на пары относительно центра ~~центральной клетки~~ таблицы - (кроме центрального)

Заметим, что все ~~отрезки~~ единичные отрезки разбиваются на пары так, что оба отрезка в паре симметричны относительно ~~ее~~ центра центральной клетки (центра таблицы). Тогда Вася ~~должен делать 2 ход~~ всегда должен стирать отрезок, симметричный тому, который стёр Петя (относительно центра) ~~Тогда~~ кроме того случая, где у Васи есть выигрышный ход.

Докажем, что Вася не проиграет от противного.

Пусть он проиграл. Значит, после его предыдущего хода, на доске появился единичный квадрат только с 1 стороной. Заметим, что до Васиного хода, такого квадрата не было, т.к. в таком случае, он просто стёр бы эту сторону. Также заметим, что всегда после хода Васи, ~~Вася~~ все отрезки также разбивались на пары симметричные относительно центра доски. ~~Э квадрат~~ Т.к. своим ходом он удалял пару. Но т.к. после его хода оказался ~~отрезок~~, ~~который~~ с одной стороной, то до его хода существовал ~~такой же~~ квадрат, симметричный этому, тоже с 1 стороной. И ~~тог~~ Вася бы просто убрал эту сторону. Исключение составляет случай, где этим квадратом оказался центральный, ~~но в таком случае~~ т.к. у него нет пары, но в таком случае можно заметить, что ~~сторон~~ противоположные стороны этого квадрата симметричны друг другу относительно центра, т.е ~~в~~ ~~после хода~~ ~~в~~ после хода Васи в нём всегда бы оставалось чётное кол-во сторон, ~~а~~ значит, Петя не мог убрать последнюю.

Значит, т.к. кол-во отрезков не бесконечно, а Вася не проиграет, ~~В~~ то он выиграет. (в ином случае сотрутся все отрезки - не уд)

Ответ: Вася.

Чистовик.

№2. $x^2+ax-6=0$ $x^2-2{,}5x+a=0$

пусть x_1, x_2 - корни первого уравнения, x_3, x_1 - корни второго

тогда по теореме Виета: $x_1+x_2=-a$ $x_1x_2=-6$, $x_3+x_1=2{,}5$, $x_3\cdot x_1=a$

x_1 - общий корень

Выпишем систему:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-a \\ x_1x_2=-6 \\ x_3+x_1=2{,}5 \\ x_3\cdot x_1=a \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1+x_2=-a \\ x_2=-\frac{6}{x_1} \\ x_3=2{,}5-x_1 \\ x_3\cdot x_1=a \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1-\frac{6}{x_1}=-a \\ (2{,}5-x_1)x_1=a \end{cases}$$

$$\frac{6}{x_1}-x_1=(2{,}5-x_1)x_1=a \qquad x_1\neq0$$

$$\frac{6}{x_1}-x_1=(2{,}5-x_1)x_1 \quad (\cdot x)$$

$$6-x_1^2=2{,}5x_1^2-x_1^3$$

$$x_1^3-3{,}5x^2+6=0$$

$$2x_1^3-7x^2+12=0$$

$$(x_1-2)(2x_1^2-3x_1-6)=0$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1=2 \\ 2x_1^2-3x_1-6=0 \end{array}\right. \quad D=9+8\cdot6=57$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1=2 \\ x_1=\frac{3+\sqrt{57}}{4} \\ x_1=\frac{3-\sqrt{57}}{4} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} a=\frac{6}{2}-2 \\ a=\frac{6\cdot4}{3+\sqrt{57}}-\frac{3+\sqrt{57}}{4} \\ a=\frac{6\cdot4}{3-\sqrt{57}}-\frac{3+\sqrt{57}}{4} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} a=1, \\ a=\frac{1}{4}\sqrt{57}-\frac{15}{4} \\ a=-\frac{1}{2}\sqrt{57}-\frac{15}{4} \end{array}\right.$$

Ответ: $a=1$, $a=\frac14\sqrt{57}-\frac{15}{4}$ $a=-\frac12\sqrt{57}-\frac{15}{4}$

№1.

пусть в классе x детей. Пусть Вася всего принёс e конфет.

тогда $\frac14 x\cdot2+\frac13 x+6=e$

$\frac56 x+6=e$ т.к. он раздал всем хотя бы по одной, $e\geq x$

тогда $\frac56 x+6\geq x \Rightarrow 6\geq\frac16 x \Rightarrow 36\geq x$

Значит, т.к. $e=\frac56 x+6$, чтобы e было макс., нужно взять максимальное x, тогда $e=30+6=36$

Ответ: 36

2