3 803

ГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

1

63

1	2	3	4	5	6	сумма
1	3	4	1,5	3	0	12,5

63

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Москва

Дата 10.03.2019

* *

10–11 класс. Девятый вариант

1. Какое наибольшее количество ладей можно расставить на шахматной доске так, чтобы каждую ладью било не более трех других? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Числа x, y, z — углы треугольника, причем больший угол z не превосходит $\frac{\pi}{2}$. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \sqrt{\sin x \cdot \sin(z-y)} + \sqrt{\sin y \cdot \sin(z-x)}.$$

3. Дан четырехугольник $ABCD$, отличный от параллелограмма. На сторонах AB, BC, CD и DA выбираются соответственно точки K, L, M и N так, что $KL \parallel MN \parallel AC$ и $LM \parallel KN \parallel BD$. Найдите геометрическое место точек пересечения диагоналей параллелограмма $KLMN$.

4. Натуральное число x в восьмеричной системе 2019-значное, его младшая цифра равна 3, а все остальные цифры отличны от 3 и совпадают через одну. Число y получается записью цифр x в обратном порядке. Оказалось, что восьмеричное представление $x \cdot y$ содержит только цифры 1 и 6. Найдите $x \cdot y$ (в восьмеричной системе).

5. В однокруговом турнире по настольному теннису участвовало 100 спортсменов, причем ни один из них не выиграл все матчи. Будем говорить, что игрок A *круче* игрока B, если A выиграл у B или найдется такой игрок C, что A выиграл у C, а C выиграл у B. Каково наименьшее количество теннисистов, оказавшихся по итогам турнира круче всех остальных? Ничьих в теннисе не бывает.

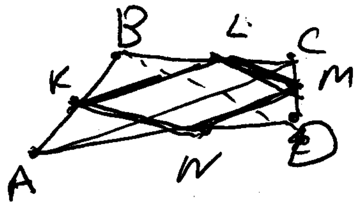
6. На столе лежат два конуса с общей вершиной O, касаясь друг друга внешним образом. Угол между их осями симметрии равен $\operatorname{arctg} \frac{4}{3}$. Найдите максимальный угол при вершине меньшего из двух конусов с вершиной O, которые лежат на столе и касаются внешним образом первых двух конусов. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении.)

Санкт-Петербургский государственный университет

Чистовик

(3) KLMW - параллелограм, => $LK=MW$

$\triangle BKL$ и $\triangle ABC$, а также $\triangle ACB$ и $\triangle MBW$ - подобны, поэтому можно записать след. соотношения



$$\frac{LK}{AB}=\frac{BK}{AB}=\frac{BL}{BK} \quad и \quad \frac{MW}{AC}=\frac{MB}{DB}=\frac{BW}{AB}$$

Так как $LK=MW$, то из этого след. равенство отношений между собой $\in(0;1)$, тогда

Обозначим эти отношения через k. Предположим k отложив на отрезке AD, отрезок $BK=k\cdot AB$, на отрезке CB, отрезок $BL=k\cdot BC$, далее получаем параллелограм KLMW, так как $LK \parallel AC \parallel MW$ и $LK=MW$

Запишем коорд. точки пересечения диагоналей параллелограма -

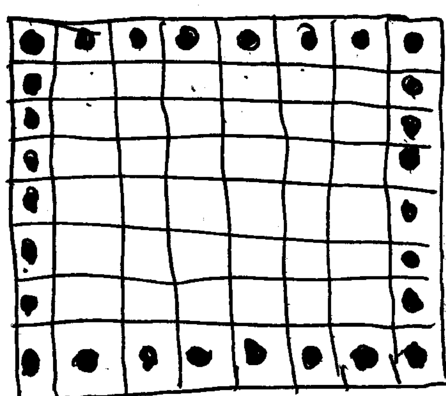
~~т.О = $\frac{M+K}{2}$~~ т. $O=\frac{M+K}{2}$, где $K=B+(A-B)k$; $M=D+(B-D)k$

$$т.O=\frac{M+K}{2}=\frac{D+(A-B)k+B+(B-D)k}{2}=\frac{B+D}{2}+k\frac{A+C-(B-D)}{2}$$

Пусть E - середина BD, а F - середина AC, Тогда вектор $\frac{A+C-(B+D)}{2}=\overrightarrow{EF}$

Так как $E\in(0;1)$, то ~~[illegible]~~ геометр. место таких точек - это отрезок EF, не включая его концы. $\boxed{\text{Ответ: отрезок } EF, \text{ не включая его концы}}$ V

(1)



Для начала обратим внимание, что если ладья стоит на краю доски, то ее бьёт не более 3 других ладей.

Так как крайнюю ладью бьет не более 3 др., то каждая ладья не должна быть закрыта другой ладьей, хотя бы с одной стороны. Таким образом, сумм. кол-во ладей не может быть больше периметра доски, то есть 32

При этом угловые ладьи посчитаны по 2 раза, а остальные по разу, тогда максимальное число ладьей, которое можно размест. на доске 28.

$\boxed{\text{Ответ: } 28}$

② $A=\sqrt{\sin x\cdot\sin(z-y)}+\sqrt{\sin y\cdot\sin(z-x)}$

Учитывая, что $x+y+z=180^\circ$ (как углы треуг.), то $z=180^\circ-x-y$ (Откуда $\sin(z-y)=\sin(180^\circ-x-2y)=\sin(x+2y)$, по аналогии $\sin(2x+y)$

Выражение A принимает вид

$A=\sqrt{\sin x\cdot\sin(x+2y)}+\sqrt{\sin y\cdot\sin(2x+y)}$

По неравенству получаем

$$\begin{cases}\sqrt{\sin x\cdot\sin(x+2y)}\le\dfrac{\sin x+\sin(x+2y)}{2}\\ \sqrt{\sin y\cdot\sin(2x+y)}\le\dfrac{\sin y+\sin(2x+y)}{2}\end{cases}$$

Тогда $A\le\dfrac{\sin x+\sin y+\sin(x+2y)+\sin(2x+y)}{2}=\sin\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cdot\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)+$
$+\sin\left(\dfrac{3x+3y}{2}\right)\cdot\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)=2\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)\sin(x+y)\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right)=$
$=(\cos x+\cos y)\sin(x+y)$

При фиксированной сумме $x+y=\left(\ge\dfrac{\pi}{2}\right)$ Наиб. значение $\cos x+\cos y$ очевидно достигается при $x=y$

Также известно, что $x+y\ge\dfrac{\pi}{2}$ (так как $z\le\dfrac{\pi}{2}$)

Значит $\dfrac{\pi}{2}\ge x=y\ge\dfrac{\pi}{4}$

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\le\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$. Таким образом максимум выраж. при $x=y=\dfrac{\pi}{4}$. Подставим в неравенство, тогда исход. выраже. $A\le\sqrt{2}$

Равенство в послед. выраж. достигается $x=y=\dfrac{\pi}{4}$; $z=\dfrac{\pi}{2}$

$\boxed{\text{Ответ: } \sqrt{2}}$

Санкт-Петербургский государственный университет

Чистовик

(5) Докажем, что в любом множестве найдется игрок лучше A
Назовем игрока, выигравшего наибольшее кол-во матчей - игрок A
A некоторого игрока, которому проиграл игрок A - игрок B. При этом игрок B обязательно одному из игроков, у которых выиграл игр. A иначе он бы выиграл больше матчей чем A, что приводит к противоречию. Получаем игрок A лучше всех, так как любой игрок которому он проиграл - проиграл тому, у кого выиграл игрок A

Пусть теперь нек. игрок A - лучший во множестве из 100 игроков.
Во множестве всех игроков которым проиграл A, найдется свой лучший игрок B, котор. выиграл у игрока A. Из этого можно сказать что он лучше всех, у кого выиграл игрок A и при этом лучше всех, кому игрок A проиграл. Значит, второй ~~?~~ лучший игрок - игрок B.
Рассуждая аналогично, можно найти ~~игрока~~ игрока C ?

Пример, где среди 100 игр. - 3 лучше всех:

Игрок A выиграл у игрока B
Игрок B выиграл у игрока C
Игрок C выиграл у игр. A
При этом каждый из них оказался лучше всех остальных.

$\boxed{\text{Ответ: 3}}$

(4) Запишем исходное число x в следующем виде ав...ав3,
тогда y записывается 3ва...ва.
Так как их произведение $x \cdot y$ оканчивается либо на единицу,
либо на шестерку, то можно подобрать посл. цифру (а) числа y
очевидно, что $a=2$, так
как $3 \cdot 2 = 6$. Перебрав произведения 3 на все числа от 1 до 7, "в" можно найти подбором "в"=5. Тогда x ~~равно~~ "
2525...253, а y=352...52.
Произведение $x \cdot y$ = 11616...161611616...1616 (между 1009 пар „1" и „6",
, шестерками стоящими в паре единицами, не считая пару аналогично 1009 пар „1" и „6")
после второй единицы)

$\boxed{\text{Ответ: } x \cdot y = 11616...161611616...1616}$

(6) Имеем 2 конуса, угол между симметриями которых равен $\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$

ОКМ-?

$ODC = \operatorname{arctg}\frac{4}{3}$

△OCL-прямоуг.

$\frac{LC}{CO} = \frac{4}{3}$