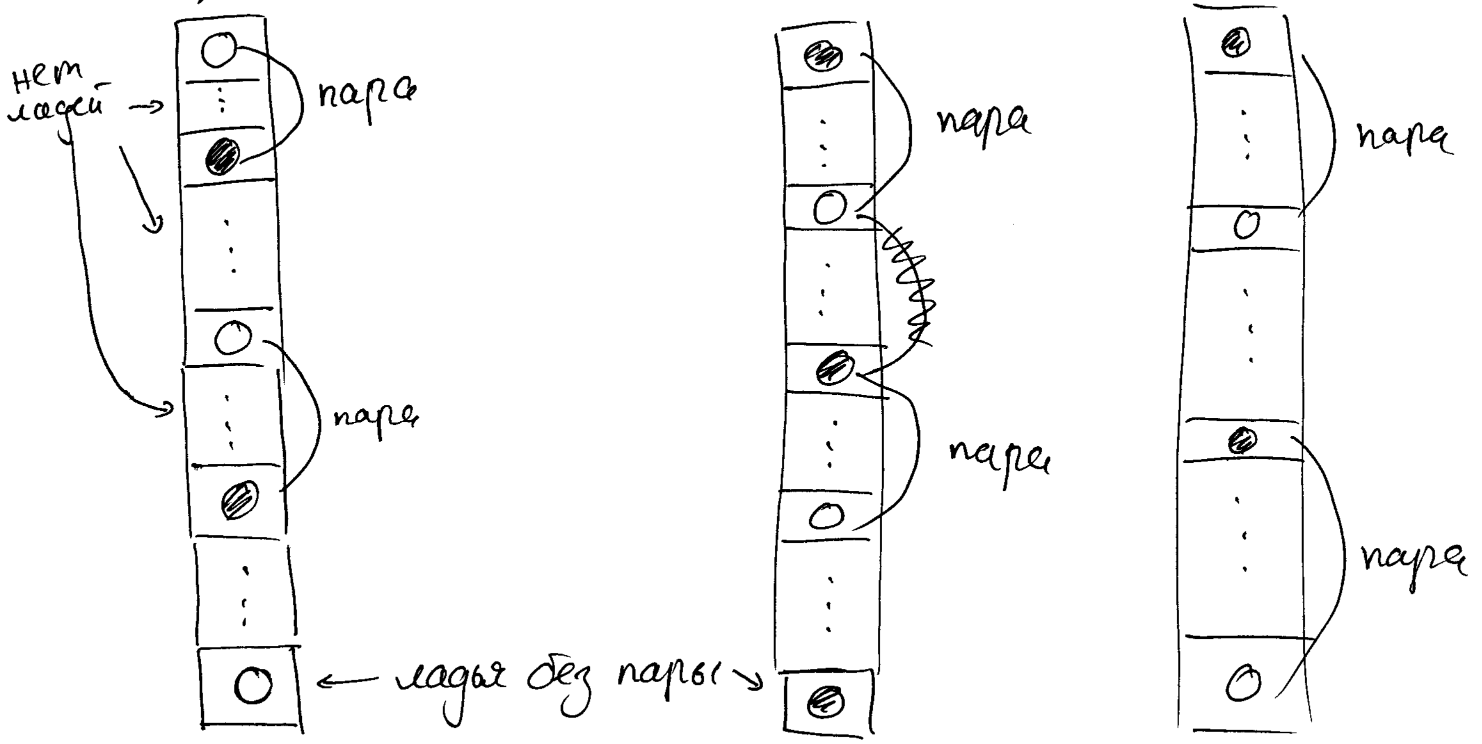
Чистовик

можно объединить в пары, и тогда без пары останется не более 1 ладьи)



$|y-x|=1$ $\quad$ $|y-x|=+1$ $\quad$ $|y-x|=0$

$|y-x| \le 1 \Rightarrow y-x \le 1$ (очевидно, что убирая мод, мы не увелич. число)

Напишем такое неравенство для каждой ~~диагонали~~ вертикали:

$y_1 - x_1 \le 1$, $y_2 - x_2 \le 1$, $\ldots$, $y_8 - x_8 \le 1$

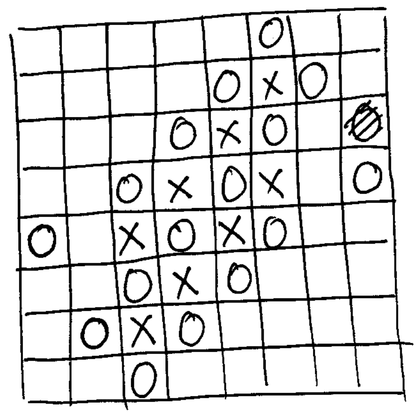
$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{8} y_i - \sum_{j=1}^{8} x_j \le 8 \Rightarrow \sum_{i=1}^{8} y_i - 8 \le 8$$

~~$Y \le 16$ (Y − кол~~ $\quad$ $n \le 16$

2. Пример расстановки 16 белых и 8 черных ладей:

X − черная ладья

O − белая ладья



Ответ: 16.

3

+1+1+1+1+1+1+1+1+1 лист

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Ши

1

6685

1	2	3	4	5	6	сумма
2	2	4		4		16

20

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада САНКТ-ПЕТЕРБУРГ

Дата 24.02.2019

* *

10–11 класс. Первый вариант

1. Имеется 8 черных ладей и n белых. При каком наибольшем n их можно расставить на шахматной доске так, чтобы одноцветные ладьи не били друг друга? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Даны положительные числа x, y, z. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{xyz\,(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4 + (yz)^4 + (xz)^4}}.$$

3. Дан треугольник ABC с меньшей стороной AB. На сторонах AB и AC выбраны соответственно точки X и Y так, что $BX = CY$. Под каким углом прямая, проходящая через центры описанных окружностей треугольников ABC и AXY, пересекает прямую BC, если $\angle ABC = \beta$ и $\angle BCA = \gamma$?

4. Десятичная запись квадрата натурального числа x представляет собой два одинаковых соседних блока из n цифр. Может ли n равняться 20182019?

5. На однокруговой турнир по настольному теннису подало заявку 16 человек. Когда было сыграно n матчей, оказалось, что среди любых трех теннисистов найдутся двое, уже сыгравших между собой. При каком наименьшем n такое возможно?

6. Три конуса с общей вершиной, касающихся друг друга внешним образом, имеют высоту 2 и радиус основания $\sqrt{3}$. Два шара касаются внешним образом друг друга и всех конусов. Найдите отношения радиусов шаров (большего к меньшему).

~~Чистовик~~

№ 2

1. Докажем, что $A \le \sqrt{3}$:

$$\cancel{A = \frac{xyz(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4+(yz)^4+(xz)^4}}}$$

~~Заметим~~

Из неравенства о среднем квадрат. и среднем арифметическом:

$$\sqrt{\frac{(xy)^4+(yz)^4+(xz)^4}{3}} \geqslant \frac{(xy)^2+(yz)^2+(xz)^2}{3} \iff$$

$$\sqrt{(xy)^4+(yz)^4+(xz)^4} \geqslant \frac{(xy)^2+(yz)^2+(xz)^2}{\sqrt{3}} \iff$$

$$\frac{1}{\sqrt{(xy)^4+(yz)^4+(xz)^4}} \le \frac{\sqrt{3}}{(xy)^2+(yz)^2+(xz)^2} \quad (x, y, z \text{ - полож. ч.})$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{xyz(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4+(yz)^4+(xz)^4}} \le \frac{xyz(x+y+z)\sqrt{3}}{(xy)^2+(yz)^2+(xz)^2}$$

Докажем, что $\frac{xyz(x+y+z)\sqrt{3}}{(xy)^2+(yz)^2+(xz)^2} \le \sqrt{3}$:

$$\frac{xyz(x+y+z)\sqrt{3}}{(xy)^2+(yz)^2+(xz)^2} \le \sqrt{3} \iff \frac{xyz(x+y+z)}{(xy)^2+(yz)^2+(xz)^2} \le 1$$

$$\iff \frac{x+y+z}{\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{xz}{y}} \le 1 \iff \underset{(*)}{\underline{x+y+z \le \frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{xz}{y}}}$$

$(x, y, z$ - полож. ч.$)$

(1).

~~Чистовик~~

(*) следует из системы неравенств о среднем арифм. и среднем геом.:

$$\begin{cases} \dfrac{\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}}{2} \geqslant y \\ \dfrac{\frac{yz}{x}+\frac{xz}{y}}{2} \geqslant z \\ \dfrac{\frac{xy}{z}+\frac{xz}{y}}{2} \geqslant x \end{cases} \Rightarrow \underset{(*)}{\underline{\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{xz}{y} \geqslant x+y+z.}}$$

$$\Rightarrow \underline{A} \le \frac{xyz(x+y+z)\sqrt{3}}{(xy)^2+(yz)^2+(xz)^2} \le \underline{\sqrt{3}}$$

2. Подставим $x=1$, $y=1$, $z=1$:

$$A = \frac{1\cdot1\cdot1\cdot3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$\Rightarrow \sqrt{3}$ - максимальное значение A.

Ответ: $\sqrt{3}$.

№ 1

1. Докажем, что $n \le 14$:

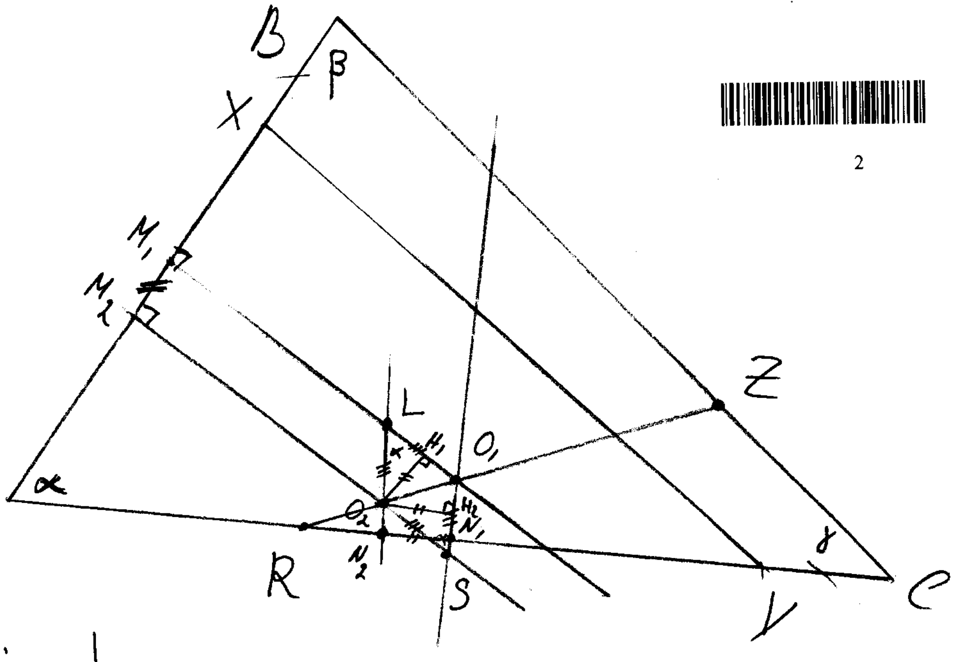
~~Заметим, что в каждой вертикали стоят не более чем 2 белые ладьи.~~

Рассмотрим вертикаль. Ясно, что в этой вертикали черные и белые ладьи чередуются, иначе какие-то две одноц. били друг друга. Пусть x - кол-во черных ладей в вертикали, а y - кол-во белых. Тогда, так как они чередуются: $|y-x| \le 1$ (черные и белые, стоящие по соседству

(2)

Чистовик

№3



Дано:
$\angle ABC = \beta$
$\angle BCA = \gamma$
$BX = CY$

Решение:

1. Пусть O_1 – центр описанной окружности $\triangle ABC$. ~~Тогда~~ это точка пересечения серединных перпендикуляров сторон AB и AC с основаниями M_1 и N_1 соотв.

2. ~~O_1~~ Пусть O_2 – центр описанной окружности $\triangle AXY$. Это точка пересечения серединных перпендикуляров сторон AX и AY с основаниями M_2 и N_2 соотв.

3. $M_1M_2 = AM_1 - AM_2 = \frac{AB}{2} - \frac{AX}{2} = \frac{AB}{2} - \frac{AB - XB}{2} = \frac{BX}{2}$; $N_1N_2 = AN_1 - AN_2 = \frac{AC}{2} - \frac{AY}{2} = \frac{AC}{2} - \frac{AC - YC}{2} = \frac{CY}{2}$; $BX = CY$ (условие) $\Rightarrow \underline{M_1M_2 = N_1N_2}$

4. Пусть L – точка пересеч. серед. перпенд. с основаниями M_1 и N_2, а S – точка пересеч. серед. перпенд. с основаниями N_1 и M_2.

Чистовик

5. LO_1SO_2 – параллелограмм, т.к. $LO_1 \parallel O_2S$ и $LO_2 \parallel O_1S$ (а это очевидно)

6. Пусть $\angle BAC = \alpha$.

7. $\angle M_2O_2N_2 = 180° - \alpha$ (сумма углов четырехуг.)

8. $\angle LO_2S = 180° - \alpha$ ($\angle M_2O_2N_2$ и $\angle LO_2S$ – верт. углы)

9. $\angle O_2LO_1 = \alpha$ и $\angle O_2SO_1 = \alpha$ (LO_1SO_2 – параллелогр.)

10. Проведем O_2H_1 ($O_2H_1 \perp M_1O_1$) и O_2H_2 ($O_2H_2 \perp N_1O_1$).

11. Т.к. $M_1M_2\cancel{O}H_1O_2$ и $N_2O_2H_2N_1$ – прямоуг., $M_1M_2 = H_1O_2$ и $N_1N_2 = H_2O_2$
$\Rightarrow H_1O_2 = H_2O_2$.

12. $LO_2 = \frac{H_1O_2}{\cancel{\cos\alpha}\ \sin\alpha}$ и $SO_2 = \frac{H_2O_2}{\sin\alpha} \Rightarrow$
$\Rightarrow LO_2 = SO_2 \Rightarrow LO_1SO_2$ – ромб.

13. $\angle LO_1S = 180° - \alpha$ (LO_1SO_2 – ромб., $\angle LO_2S = 180° - \alpha$)

14. $\angle O_2O_1S = \frac{180° - \alpha}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}$ (LO_1SO_2 – ромб.)

15. Пусть R и Z точки пересечения прямой O_1O_2 с AC и BC соответственно.

16. $\angle O_1RC = \frac{\alpha}{2}$ ($\Delta O_1R\cancel{S}N_1$ – прямоуг. треуг.)

17. $\angle RZC = 180° - \frac{\alpha}{2} - \gamma$ (сумма углов треуг.)

18. $\alpha = 180° - \beta - \gamma$ (сумма углов треуг.)

19. $\angle RZC = 180° - 90° + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} - \gamma = 90° + \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2}$

(5)

Чистовик

20. $\angle BZR = 90^\circ + \frac{\gamma}{2} - \frac{\beta}{2}$.

21. AB – меньшая сторона $\Rightarrow \gamma < \beta \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $90^\circ + \frac{\gamma}{2} - \frac{\beta}{2}$ – острый угол

Ответ: $90^\circ + \frac{\gamma}{2} - \frac{\beta}{2}$.

№5

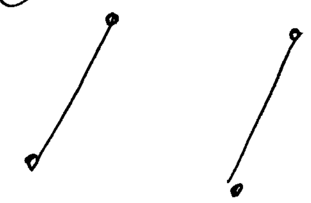
1. Пример на 56:

Разобьем 16 человек на 2 группы по 8. В этих группах пусть все сыграют друг с другом, а между группами игр не будет. Итого игр $\frac{7 \cdot 8}{2} \cdot 2 = 56$ ($\frac{7 \cdot 8}{2}$ – кол-во ребер в полном графе с 8 вершинами)

Очевидно среди любых 9-х человек есть пара игравших, т.к. хотя бы двое из них из одной группы.

2. Докажем по индукции, что кол-во игр с N игроками по данному условию не меньше $\frac{N}{2}(\frac{N}{2}-1)$:
(N – степень двойки)

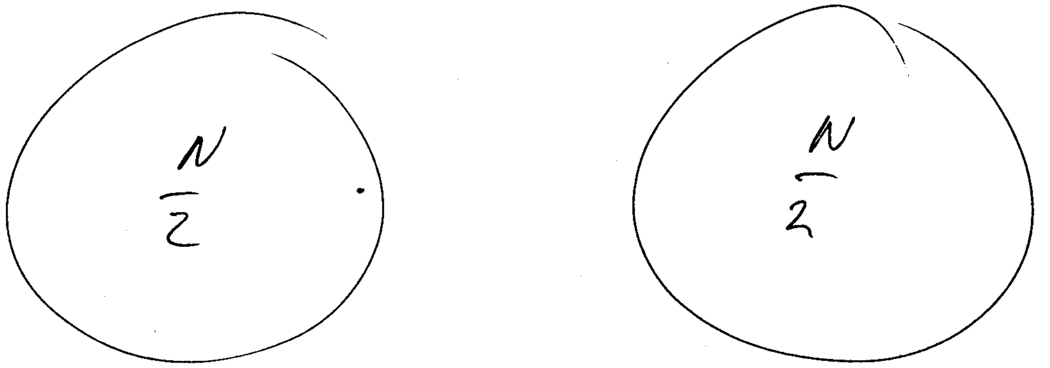
База: $N = 2\ 4$ Чистовик



Очевидно достаточно 2 игр $\left(2 = \frac{4}{2}\cdot\left(\frac{4}{2}-1\right)\right)$

Переход: $\frac{N}{2} \to N$:

Разделим N человек на 2 группы по $\frac{N}{2}$ человек. В обеих группах должно быть сыграно хотя бы $\frac{N}{4}\left(\frac{N}{4}-1\right)$ игр.



$\geqslant \frac{N}{4}\left(\frac{N}{4}-1\right)$ игр $\qquad \geqslant \frac{N}{4}\left(\frac{N}{4}-1\right)$ игр.

При этом $\frac{N}{2}$ человек из одной группы должны сыграть хотя бы с $\frac{N}{4}$ людьми из другой группы.