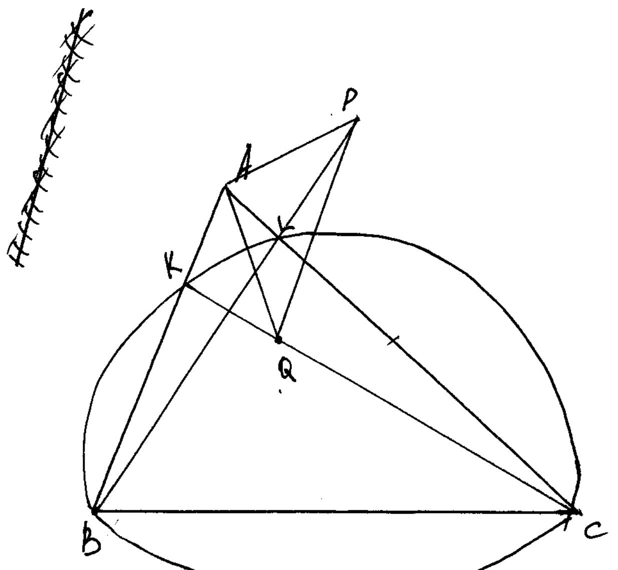
Сложим по всем строкам и столбцам кол-во белых, получим 18+16 = 34 (все чёрные до 9 раза и +1 за каждую строку и каждый столбец). каждую ладью посчитали 2 раза => может быть не больше, чем 17 ладей.
Ответ: 17.

№3



Дано:
ω-окружность
$B, C \in \omega$
$AB \cap \omega = K$
$AC \cap \omega = L$
$BP = AC$
$P \in BL$
$CQ = AB$
$Q \in CK$
Найти: O_1O_2

$O_1 \in \triangle APQ$
$O_2 \in \triangle BKC$

Решение

2

60

…СКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

5247

1	2	3	4	5	6	сумма
4	4	0		4		12

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Владимир

Дата 16 марта 2019

* *

10–11 класс. Второй вариант

1. Имеется 9 черных ладей и n белых. При каком наибольшем n их можно расставить на шахматной доске так, чтобы одноцветные ладьи не били друг друга? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Даны положительные числа x, y, z. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{xyz\,(x+y+z)}{x^4+y^4+z^4}\,.$$

3. Окружность ω единичного радиуса проходит через вершины B и C треугольника ABC и вторично пересекает его стороны AB и AC в точках K и L соответственно. На лучах BL и CK отмечены соответственно такие точки P и Q, что $BP = AC$ и $CQ = AB$. Найдите расстояние между центрами описанных окружностей треугольников APQ и KBC.

4. Шестнадцатиричная запись квадрата натурального числа x представляет собой два одинаковых соседних блока из n цифр. Может ли n равняться 2023?

5. В однокруговом турнире по настольному теннису участвует $2k$ спортсменов. В каждом туре все участники проводят по одному матчу. Какое наименьшее число туров надо сыграть, чтобы при любом расписании игр обязательно нашлось трое теннисистов, сыгравших друг с другом?

6. Имеется три одинаковых конуса с общей вершиной, касающихся друг друга внешним образом, а также два шара, касающихся внешним образом друг друга и всех конусов. Радиусы шаров относятся как 1 : 3. Найдите угол при вершине конусов. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении).

№2

$A=\frac{xyz(x+y+z)}{x^4+y^4+z^4}$; $x,y,z>0$

Запишем неравенство для трёх переменных a, в, c

$(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+a^2)\ge(ab+bc+ac)^2$ — по Коши-Буняковского-Шварца

Извлечём квадратный корень:

$a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ac$

Заметим, что $x^4+y^4+z^4\ge x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2$

Если $a=x^2$; $b=y^2$; $c=z^2$, тогда:

$$A=\frac{xyz(x+y+z)}{x^4+y^4+z^4}\le\frac{xyz(x+y+z)}{(xy)^2+(yz)^2+(xz)^2}=\frac{x^2yz+xy^2z+xyz^2}{(xy)^2+(yz)^2+(xz)^2}$$

Произведём замену:

$xy=a$, $a>0$
$yz=b$, $b>0$
$xz=c$, $c>0$

$$A\le\frac{ab+bc+ac}{a^2+b^2+c^2}$$

$A\le 1$

так значение A не превосходит 1

~~Наибольшее~~ равенство достигается при $x=y=z$

$$A=\frac{x^3\cdot 3x}{3x^4}=1$$

Ответ: 1

№5

Докажем, что K+1 туров будет достаточно.

Чтобы выполнить условие: каждый игрок сыграл K+1 матчей. Выберем любого и назовём A.

Среди тех K+1 игроков, с которыми он сыграл выберем случайного и назовём B

Игроков, с которыми не играл A осталось K-2

B также сыграл K+1 матч, поэтому найдётся игрок, который сыграл и с A, и с B.

Получается, что после проведения K+1 туров - будет 3 человека, которые играли между собой.

Теперь проведём пример, когда прошло K турниров, но не нашлось 3 игроков, игравших между собой.

Для этого выберем случайного игрока N.

N играл с K человек - назовём это множество M.

N не играл с K-1 человеком - назовём это множество K.

Тогда пусть каждый игрок из множества M сыграл с каждым игроком K.

Тогда, каждый игрок сыграл к матчей (т.е. было проведено к туров) и не нашлось таких 3, которые играли между собой.

Тогда, min достаточное кол-во турниров будет K+1.

Ответ: K+1

№4.

$2023 \vdots 17 \Rightarrow 16^{2023}+1=(16+1)(16^{2022}-16^{2021}+\ldots-16^1+1)$

Т.к. слагаемых 2023 и это число $\vdots$ 17, вторая скобка $\vdots$ 17.

Значит, $(16^{2023}+1)\vdots 289$.

Если $x=\frac{16^{2023}+1}{17}$, то $x^2=(16^{2023}+1)\cdot\frac{16^{2023}+1}{289}$

Чтобы найти искомое число домножим x на 16.

Тогда получим: $x=(16^{2023}+1)\frac{16}{17}$

$$x^2=(16^{2023}+1)\cdot 256\cdot\frac{16^{2023}+1}{289}$$

Т.к. $256\frac{16^{2023}+1}{289}$ - целое и в восьмеричной системе счисления записывается 2023 цифрами, x^2 будет составлять 2 одинаковых блока из n цифр.

$\Rightarrow$ n может равняться 2023

Ответ: да, может

№1

А-белые
Б-чёрные

				А				
			А	Б	А			
		А	Б	А	Б	А		
	А	Б	А	Б	А			
А	Б	А	Б	А				
	А	Б	А					
		А				Б	А	
						А		

В каждой строке и в каждом столбце кол-во чёрных должно быть меньше белых на 1.