$\angle ABC = \beta$ $\angle BCA = \gamma$

Обозн. $BX = YC$

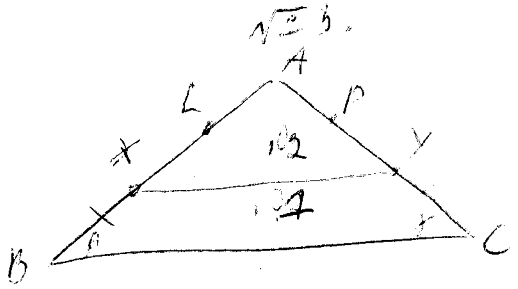
O_1 – центр опис. окр. ABC

O_2 – центр опис. окр. AXY

$\angle AKM$ – ?

I нес-?

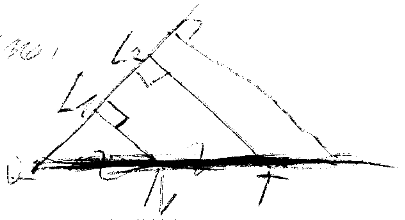
№3.



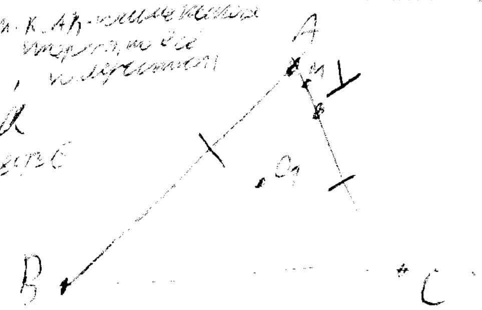
Вид-х

1) ~~Заметим~~, что точка O_1 (центр описанной окружности ABC и O_2 (центр описанной окружности $\triangle AXY$) лежат на пересечении серединных перпендикуляров, мы можем сделать вывод, что по точке X ~~и~~ O_2 мы можем задать точку O_2 (т.к. точка X задает точку Y из того, что $AX = YC$ (а значит серединный перпендикуляр задает и серединный перпендикуляр точке точку) Y)

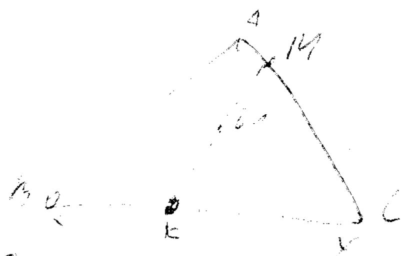
2) ~~X~~ Линейно двигая точку X к точке A заметим, что точка O_1 стоит на месте, а точка O_2 движется по прямой, т.к. точка O_2 задается ~~серединн~~ серединными перпендикулярами из точек L и P, где L – середина XA, и P – середина AY и при движении точки X перемещение отрезков нормалями, ~~действительно~~ ~~и т.д.~~ и их уголные L_1L_2TN прямые NL_1 и TL_2 – параллельны $\Rightarrow O_2$ движется по прямой.



3) Рассмотрим ситуацию, где $BX = CY = AB$, (т.к. AB – наименьшая сторона, то все получается) тогда $\triangle AXY$, составленные вершины AY, а точка пересечения серединных перпендикуляров будет м-серед AY.



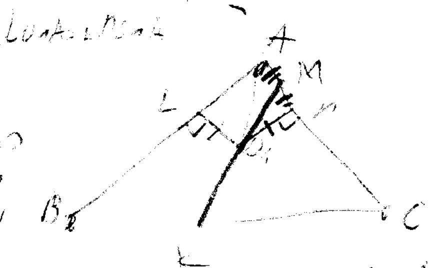
Рассмотрим еще один случай, где $BX = CX = 0$, тогда треуг-к вырожден точкой A и C и ~~ее~~ точка O_2 движется точкой O_1. Т.е. имеем две точки „крайних" случаев (~~$BX \leq AB$~~ ~~$BX > 0$~~) везде BX ограничено как $0 \leq BX \leq AB \Rightarrow$ прямая ~~отрезок~~ серединная определена ~~М~~ MO_1 по условию M (и O_1) и пересекает BC в точке K.



4) В $\triangle ABC$ ~~один~~ и O_1 середина серединный перпендикуляр $\Rightarrow$ ...

$\angle BAC = 180 - \gamma + \beta) = 180° - \angle LO_1P \Rightarrow \angle LO_1P = \gamma + \beta$

В LO_1NC $\angle LO_1C = 90°$; LC-γ ; $\angle LO_1P$-$\gamma + \beta = \Rightarrow \angle MO_1P = \frac{\gamma + \beta}{2} \Rightarrow \angle POMK = \frac{\gamma + \beta}{4}$



~~ОтветΔНКС~~ = $\angle MO_1L = \angle MO_1P + \angle POK \Rightarrow \angle PO_1K = 90 - \frac{\gamma + \beta}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle MKC = 360° - 90 - \gamma - (90 - \frac{\gamma + \beta}{4}) = 90 - \gamma + \frac{\gamma + \beta}{4} = 90 - \frac{\cancel{\gamma} + 4\gamma - \beta}{4} = 90 - \frac{\beta - 3\gamma}{4}$

Ответ: $\angle MKC = 90 - \frac{\beta - 3\gamma}{4}$

(70)

ГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

5870

1	2	3	4	5	6	сумма
4	4	2	0	4	0	14

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Владимир

Дата 16/03/2019

* *

10–11 класс. Первый вариант

1. Имеется 8 черных ладей и n белых. При каком наибольшем n их можно расставить на шахматной доске так, чтобы одноцветные ладьи не били друг друга? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Даны положительные числа x, y, z. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{xyz\,(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4 + (yz)^4 + (xz)^4}}.$$

3. Дан треугольник ABC с меньшей стороной AB. На сторонах AB и AC выбраны соответственно точки X и Y так, что $BX = CY$. Под каким углом прямая, проходящая через центры описанных окружностей треугольников ABC и AXY, пересекает прямую BC, если $\angle ABC = \beta$ и $\angle BCA = \gamma$?

4. Десятичная запись квадрата натурального числа x представляет собой два одинаковых соседних блока из n цифр. Может ли n равняться 20182019?

5. На однокруговой турнир по настольному теннису подало заявку 16 человек. Когда было сыграно n матчей, оказалось, что среди любых трех теннисистов найдутся двое, уже сыгравших между собой. При каком наименьшем n такое возможно?

6. Три конуса с общей вершиной, касающихся друг друга внешним образом, имеют высоту 2 и радиус основания $\sqrt{3}$. Два шара касаются внешним образом друг друга и всех конусов. Найдите отношения радиусов шаров (большего к меньшему).

№1.

Оценка: ~~сделаем оценку~~ Найдем максимальное кол-во белых ладей, которые можно расставить в одной строке с черными. Если черных ладей x, то белых $x+1$, т.к. иначе белые будут бить друг друга в одной строке.

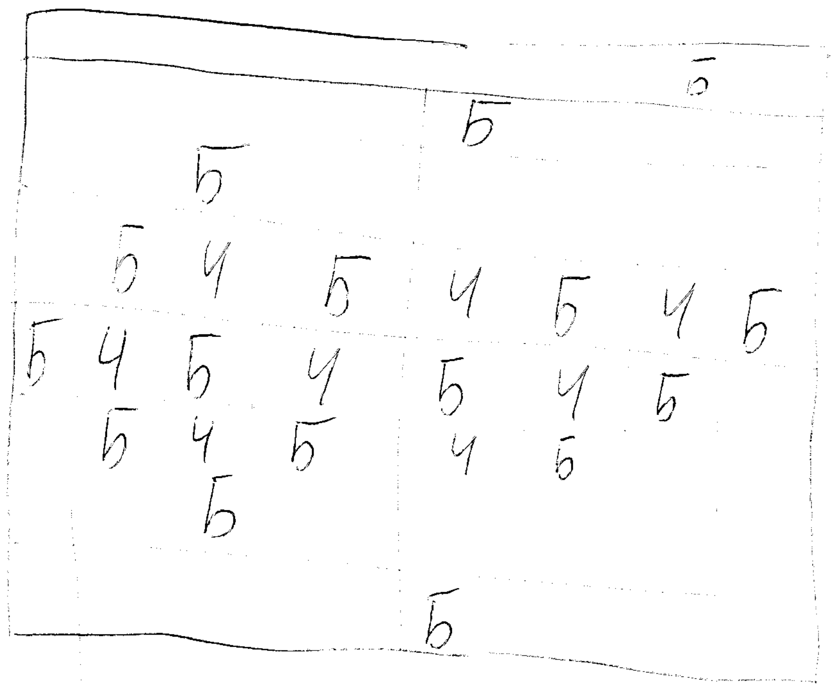
Б	Ч	Б	Ч	Б	Ч	Б	

пример для 3-ех черных

Оценим максимальное кол-во белых. Пусть в 1-ой строке было x_1 черных ладей, тогда в той же строке будет x_1+1 белых ладей. Аналогично для 2-ой строки (x_2 черных и x_2+1 черных), 3-ей (x_3 черных, x_3+1 черных) и т.д. до 8-ой. Сложим все белые ладьи во всех строках. ~~Н кол~~ Получим $x_1+1+x_2+1+x_3+1+x_4+1+x_5+1+x_6+1+x_7+1+x_8+1=$

$=(\underbrace{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8}_{\text{кол-во черных ладей, которые по условию равн. 8}})+(1+1+1+1+1+1+1+1)=8+8=16$. Т.к. имеем ≤ 16 белых ладей (в ~~этом~~ кол-ве черных (сумма $x_1+x_2+x_3+\ldots+x_8$))

Пример.



16 белых ладей
8 черных ладей

Ответ: при $n=16$.

№2.

$x, y, z > 0$

1) $A=\dfrac{xyz(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^2+(yz)^2+(xz)^2}}$. Раскроем скобки в числителе. Получим

$\dfrac{x^2yz+xy^2z+xyz^2}{\sqrt{(xy)^2+(yz)^2+(xz)^2}}$. Пусть $a=xy$, $b=yz$, $c=xz$, тогда имеем $\dfrac{ab+bc+ac}{\sqrt{a^4+b^4+c^4}}$.

2) Докажем, что $ab+bc+ac \le a^2+b^2+c^2$;

$2(ab+bc+ac) \le 2(a^2+b^2+c^2)$

$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac \le 0$

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \le 0$, что очевидно, т.к. квадрат выражения всегда больше либо равен нулю. Таким образом $\dfrac{ab+bc+ac}{\sqrt{a^4+b^4+c^4}} \le \dfrac{a^2+b^2+c^2}{\sqrt{a^4+b^4+c^4}}$

Возьмем правую часть неравенства, возведем ее во 2-ую степень и возьмем квадратный корень, т.е. $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{\sqrt{a^4+b^4+c^4}} \Rightarrow \dfrac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^4+b^4+c^4} \Rightarrow \sqrt{\dfrac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^4+b^4+c^4}}$, ~~сначала получим~~

3) $\sqrt{\dfrac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^4+b^4+c^4}}=\sqrt{\dfrac{a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)}{a^4+b^4+c^4}}=\sqrt{\dfrac{a^4+b^4+c^4}{a^4+b^4+c^4}+\dfrac{2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)}{a^4+b^4+c^4}}$

Сравним $a^4+b^4+c^4 \,?\, (a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)$

$2(a^4+b^4+c^4) \,?\, 2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)$

$2a^4+2b^4+2c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2 \,?\, 0$, $a^4+b^4+c^4 \ge a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2$

$(a^2-b^2)^2+(a^2-c^2)^2+(b^2-c^2)^2 \le 0$, т.к. квадрат выражения всегда больше либо равен нулю. ~~Зная это, и учитывая то~~ Зная этот факт, и учитывая то, что изначальное выражение A мы стремимся максимизировать, то можем заменить $a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2$ на $a^4+b^4+c^4$. Тогда получим $\sqrt{\dfrac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^4+b^4+c^4}} \le \sqrt{\dfrac{a^4+b^4+c^4+2(a^4+b^4+c^4)}{a^4+b^4+c^4}}$, а $\sqrt{\dfrac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^4+b^4+c^4}}=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{\sqrt{a^4+b^4+c^4}}$ и еще $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{\sqrt{a^4+b^4+c^4}} \ge \dfrac{ab+bc+ac}{\sqrt{a^4+b^4+c^4}}$. Имея эти ~~эти~~ три неравенства, получим

$\dfrac{ab+bc+ac}{\sqrt{a^4+b^4+c^4}} \le \sqrt{\dfrac{3(a^4+b^4+c^4)}{a^4+b^4+c^4}} \Rightarrow \dfrac{ab+bc+ac}{\sqrt{a^4+b^4+c^4}} \le \sqrt{3}$

Ответ: $A=\dfrac{xyz(x+y+z)}{\sqrt{x^4+y^4+z^4}}$ максимально, когда равно $\sqrt{3}$.

Чистовик.

№4.

1) Докажем, что если x^2 имеет 2·20192019 разрядов, то x имеет 20192019 разрядов. При возведении числа в квадрат можно получить из m разрядов 2m разрядов, а также из m получить 2m-1 разряд.

$\underset{1}{4} \times \underset{1}{4} = \underset{2}{16}$ $\underset{2}{15} \times \underset{2}{15} = \underset{3}{225}$

Значит, т.к. число разрядов x^2 чётное, то первая цифра числа не превышает 3 => x имеет 20192019 разрядов

2) $x^2 = x(x \cdot k \cdot (10^{20192019} + 1))$, ~~т.к. x [illegible]~~ (3 => первая цифра числа x не больше 3-ех, т.к. последняя цифра [illegible] (последней цифрой 2-ого числа ~~[illegible]~~, ~~[illegible]~~ ~~[illegible] x, т.к. 3×4>11 => [illegible] [illegible]~~ => $10^{20192019}+1$ должны быть кратны двум, либо трём, т.к. x^2 может делиться на два или на три => $10^{20192019}+1 \not\vdots 2$ (нечётное) и $10^{20192019}+1 \not\vdots 3$ (сумма цифр 2) => $n \neq 20192019$

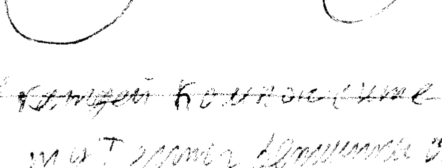
Ответ: нет, не может.

№5.

1) Докажем, что при компонентах связности больше не может

Пусть это не так. Возьмём из каждой по вершине. По определению компонент связности у них нет общих рёбер, что противоречит условию задачи.

2) Рассмотрим две компоненты связности: ~~[illegible]~~ ~~графа~~ пусть между ними две ~~[illegible]~~. Тогда [illegible] вершины, [illegible] компонент связности и 2 вершина будет наименьшее кол-во.



~~[illegible]~~ компоненте ~~связности~~ связности (К.С.) будет для первой [illegible], что тут есть вершина без ребра. Тогда возьмём ~~[illegible]~~ второй К.С. после её вершины и получим, что между ними нет ребра => противоречит условию

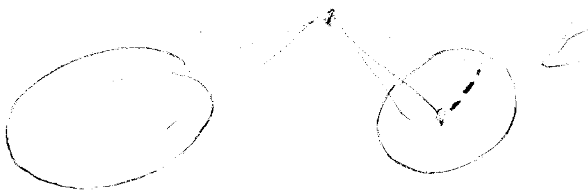
Продолжение номера 5.

Пусть в каждой к.с. будет по $16/2=8$ вершин $\Rightarrow$ кол-во ребер равно $\cancel{k+1}\ \frac{8(8-1)}{2}\cdot 2 = 56$ ребер. Докажем, что другие распределения вершин дают большее кол-во ребер. Пусть имеем $8+x$ и $8-x$, тогда

$$\frac{(8+x)(8+x-1)}{2}+\frac{(8-x)(8-x-1)}{2}=\frac{(8+x)(7+x)+(8-x)(7-x)}{2}=\frac{56+15x+x^2+56-15x+x^2}{2}$$

$$=\frac{112+2x^2}{2}=56+\frac{x^2}{2}\to\min\Rightarrow x=0,$$ тогда при $x>0$ кол-во ребер будут увеличиваться.

3) Покажем для одной к.с., что ребер можно сделать меньше 56. Допустим, удалили ~~одно из~~ ребро, уменьшим кол-во ребер на 1 $\Rightarrow$ т.к. в другой к.с. из одной возможно 7 ребер, но пусть из некоторой вершины вышло. Но, тогда потерянное ребро, и или



пути по ~~...~~ уже одним, кому ... добавить и ~~...~~ этим вершинам по 4 ~~ребра, т.к. ...~~ 2 ребер, т.е. или $\frac{16}{2}-1$, или $\frac{16}{2}+2$ тогда получим, что вместо „удаленного" этого ребра будут добавлено еще два из-за условия задачи. Значит 56 – наименьшее кол-во игр.

Ответ: $n_{min}=56$ игр.