VL 136

4305

1

60

УРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

1	2	3	4	5	6	сумма
4	4	0	2	2	0	12

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Невинномысск

Дата 04.03.2019

* *

10–11 класс. Восьмой вариант

1. Имеется два черных ферзя и n белых. При каком наибольшем n эти фигуры можно расставить на шахматной доске так, чтобы одноцветные ферзи не били друг друга? Ферзь не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Числа x, y, z — углы треугольника. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{\cos x \cdot \cos y \cdot \sin z}{\cos x + \cos y + \sin z}.$$

3. Дан остроугольный треугольник ABC. У прямоугольника $KLMN$ вершины M и N лежат соответственно на на продолжениях сторон AB и AC за точку A, а K и L — на стороне BC. Пусть AD — медиана треугольника ABC, E — середина его высоты, опущенной из вершины A, O — точка пересечения диагоналей прямоугольника. Найдите угол DEO.

4. Даны натуральные числа x и y. В десятичной системе они $4n$-значные, причем в записи x цифры повторяются через одну, а в записи y — через три. Оказалось, что десятичная запись $x \cdot y$ состоит из последовательных блоков по 4 одинаковых цифры. При каких n это возможно?

5. В однокруговом турнире по настольному теннису участвовало n спортсменов ($n \geqslant 3$). По итогам турнира оказалось, что всех участников можно рассадить за круглым столом так, что для произвольной пары соседей A и B любой теннисист, отличный от A и B, проиграл хотя бы одному из теннисистов A и B. При каких n такое возможно?

6. На столе лежат три конуса с общей вершиной, касаясь друг друга внешним образом. Оси симметрии первых двух конусов взаимно перпендикулярны. Угол при вершине первого конуса равен $\arcsin \frac{5}{6}$. Два шара вписаны в третий конус и касаются друг друга внешним образом. Найдите отношение радиусов шаров (большего к меньшему).

Чистовик

Подставим полученные значения $\cos x$, $\cos y$, $\sin z$:

$$A = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{8\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{4}.$$ Значит, максимальное

значение данного в задании выражения $= \frac{1}{4}$.

Ответ: $A_{max} = \frac{1}{4}$.

№4.

Т.к. цифры в записи ~~x~~ x повторяются через одну, то x можно представить, как $\underbrace{abababab}_{2n \text{ раз по } ab}$. Также число x можно представить, как $\underbrace{101010\ldots}_{2n \text{ раз по } 10}\cdot(10a+b)$. Тогда $x \,\vdots\, \underbrace{101010\ldots}_{2n \text{ раз по } 10}$. В свою очередь, число

$\underbrace{101010\ldots}_{2n \text{ раз}} = \underbrace{100010001\ldots1}_{n-1 \text{ раз по } 0001}\cdot 1010 = 10\cdot\underbrace{100010001\ldots1}_{n-1 \text{ раз по } 0001}\cdot 101$. Значит, $x \,\vdots\, 101$.

Т.к. цифры в записи y повторяются через 3, то y можно представить, как $\underbrace{cdefcdef}_{n \text{ раз по } cdef}$. Также число y можно представить, как $\underbrace{100010001\ldots1}_{n-1 \text{ раз по } 0001}\cdot(1000c+100d+10e+f)$. Тогда $y \,\vdots\, \underbrace{100010001\ldots1}_{n-1 \text{ раз по } 0001}$.

По условию произведение x и y состоит из блоков по 4 цифры. Тогда $x\cdot y$ можно представить в виде $\overline{a_1a_1a_1a_1a_2a_2a_2a_2\ldots a_ka_ka_ka_k} =$

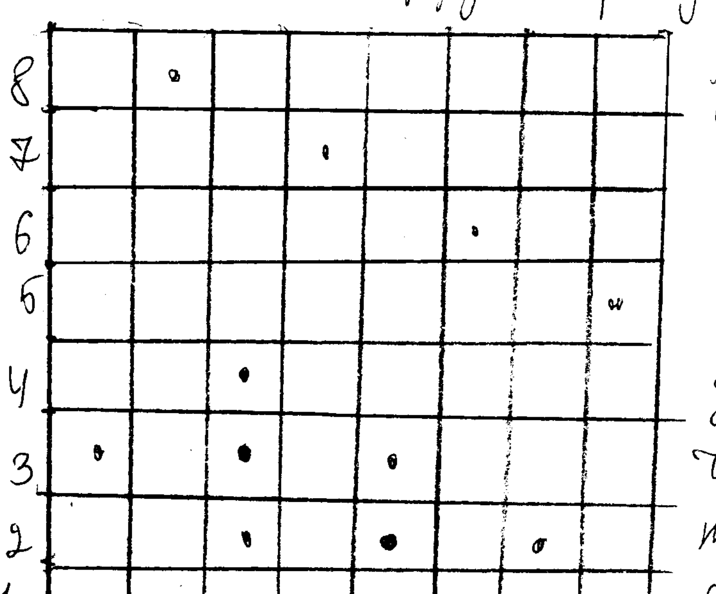
$= 1111(10^{4k}\cdot a_1 + 10^{4(k-1)}\cdot a_2 + \ldots + a_k)$, $\Rightarrow x\cdot y \,\vdots\, 1111$. В свою очередь, $1111 = 101\cdot 11$. ~~Знач~~ Тогда $x\cdot y \,\vdots\, 101$ и $x\cdot y \,\vdots\, 11$. Деление на 101 обеспечено тем, что $x \,\vdots\, 101$. Тогда нам необходимо обеспечить деление на 11 либо числа x, либо числа y. Каждое из чисел x и y будет делиться на 11 тогда, когда $\underbrace{100010001\ldots1}_{n-1 \text{ раз по } 0001}$ будет делиться на 11. Заметим, что в этом числе нечётное кол-во знаков, причём единицы располагаются на нечётных позициях. По признаку делимости на 11 число делится на 11, если разность суммы ~~нечётных~~ цифр на нечётных и суммы цифр на чётных позициях делится на 11

№1

Чистовик

Для начала докажем, что нельзя расположить на доске больше 10 белых ферзей: на каждой горизонтали шахматного поля можно расположить не больше чем 1+k белых ферзей так, чтобы они не били друг друга, где k – кол-во чёрных ферзей на горизонтали (при k=0 на горизонтали может стоять только 1 белый ферзь, т.к. 2 уже могут друг друга побить; при k=1 можно поставить 1 белого ферзя по 1 сторону от чёрного, а второго – по другую. 3 уже нельзя поставить при k=1, т.к. 2 белых ферзя на 1 горизонтали будут по 1 сторону от чёрного ⇒ могут друг друга побить)

Тогда на доске не больше, чем 8+n белых ферзей, где n – кол-во чёрных ферзей. По условию чёрных ферзей 2, ⇒ на доске не больше, чем 10 белых ферзей. Приведём пример для 10 белых ферзей:



На доске ~~ручкой~~ точками синего цвета ~~расположены~~ обозначены белые ферзи, а точками чёрного цвета – чёрные ферзи.

Белые ферзи расположены так, что ни один из них не стоит на 1 диагонали с другим, а на 1 вертикали и горизонтали располагаются белые ферзи так, что их разделяет чёрный ⇒ белые ферзи не бьют друг друга, что и требуется в условии задачи.

Ответ: при n=10 можно расположить ферзей так, чтобы одноцветные ферзи не били друг друга.

Чистовик

№2.

$A=\frac{\cos x\cdot\cos y\cdot\sin z}{\cos x+\cos y+\sin z}\to max.$

Пусть $\cos x=a$; $\cos y=b$; $\sin z=c$.

Тогда $\frac{abc}{a+b+c}\to max.$

По неравенству Коши:

$\sqrt[3]{abc}\leq\frac{a+b+c}{3}$. Полученное выражение можем возвести в куб, не меняя знака, т.к. 3 степень — нечётная. (функции $y=x$ и $y=x^3$ — монотонно неубывающие).

$abc\leq\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$.

Чтобы максимизировать значение abc необходимо, чтобы $abc=\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$. Это будет тогда, когда $a=b=c$.

Тогда $\cos x=\cos y=\sin z$.

Т.к. x, y и z — углы треугольника, то $z=\pi-x-y$.

Тогда $\sin z=\sin(\pi-x-y)=\sin(x+y)$.

$\cos x=\cos y$, причём $x\in(0;\pi)$; $y\in(0;\pi)$, $\Rightarrow x=y$.

Тогда $\cos x=\sin 2x=2\sin x\cos x$.

$\cos x-2\sin x\cos x=0$

$\cos x(1-2\sin x)=0$.

$\cos x=0$ или $\sin x=\frac{1}{2}$.

$\cos x=0$ не подходит, т.к. в этом случае произведение $=0$, что не является максимальным значением.

Тогда $\sin x=\frac{1}{2}$. Заметим, что если $\cos x<0$, то и $\cos y<0$, тогда $x>\frac{\pi}{2}$, $y>\frac{\pi}{2}$, $\Rightarrow x+y>\pi$, но такого не бывает, т.к. x и y — углы треугольника. Значит, $\cos x>0$.

Тогда $\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos y$;

$\sin z=\sin 2x=2\sin x\cos x=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Чистовик

таблица удовлетворяет условию задачи.

При чётных n есть также спортсмены с номерами m и l, которые сидят за круглым столом напротив друг друга, т.е. слева от спортсмена l и до спортсмена m такое же кол-во спортсменов, сколько и справа от l до m. В такой ситуации если спортсмен m проиграл спортсмену l, то ему надо $\frac{n}{2}-1$ поражений в $n-1$ матчах, а если спортсмен m выиграл у спортсмена l, то ему необходимо проиграть $\frac{n}{2}$ матчей, чтобы выполнилось условие задачи. Тогда спортсменам l и m в сумме требуется $n-1$ поражений в $2n-2$ матчах. Просуммировав все пары спортсменов l и m, получим, что им необходимо минимум $\frac{n(n-1)}{2}$ поражений в $n(n-1)$ матчах, что является максимально возможным количеством поражений в $\frac{n(n-1)}{2}$ матчах. Но получается, что половина спортсменов проиграли обоим соседям. Приходим к противоречию, $\Rightarrow$ при чётных n невозможно выполнение условий задачи.

Ответ: при нечётных n возможно выполнение условий задачи.

Чистовик

В числе $\underbrace{10001\,0001\ldots1}_{n-1 \text{ раз по } 0001}$ сумма цифр нечётных позиций $=n$, а сумма цифр чётных позиций равна 0, $\Rightarrow n-0 \vdots 11$, т.е. $n \vdots 11$. Тогда при $n \vdots 11$ возможно, что в записи x цифры повторяются через 1, в записи y — через 3, а в записи $x \cdot y$ цифры объединены в блоки по 4 одинаковых.

Ответ: при $n \vdots 11$ возможна ситуация, описанная в задаче.

№5.

Рассмотрим случай, когда n — нечётное. Тогда n можно представить в виде $2k+1$. Пронумеруем спортсменов за круглым столом по часовой стрелке, начиная с любого, т.е. присвоим им номера по порядку от 1 до $2k+1$. Продемонстрируем, как могли сыграть спортсмены, чтобы выполнялось условие задачи, в таблице партий с указанием результата встречи любых 2-х теннисистов.

	1	2	3	4	...	2k	2k+1
1	X	В	П	В	...	В	П
2	П	X	В	П	...	П	В
3	В	П	X	В	...	В	П
4	П	В	П	X	...	П	В
...	...	...	...	...	...	...	...
2k	П	В	П	В	...	X	В
2k+1	В	П	В	П	...	П	X

В представленной таблице выше главной диагонали расположен результат встречи m-ного теннисиста с l-тым, где $m<l$ (например, в ячейке 1-ой строки 2-го столбца буква „В" означает, что 1-ый теннисист выиграл у 2-го), а ниже главной диагонали расположен результат l-того ~~теннисиста~~ с m-ным, где $l>m$ (например, в ячейке 2-ой строки 1-го столбца буква „П" означает, что 2-ой теннисист проиграл первому). Тогда для соседних теннисистов с любыми номерами p и $p+1$ и любого теннисиста q ~~найдется~~ ~~его~~ у q-того теннисиста будет 1 выигрыш у кого-то (либо у p-того, либо у $(p+1)$-того) и 1 проигрыш кому-то (либо p-тому, либо $(p+1)$-ому). Значит, такая