+1 + 1 мин

Выход: 12^{56} – 13^{03}

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

1	2	3	4	5	6	сумма
4	4		0	4	4	16

8406

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Санкт-Петербург

Дата 24.02.2019

* *

10–11 класс. Второй вариант

1. Имеется 9 черных ладей и n белых. При каком наибольшем n их можно расставить на шахматной доске так, чтобы одноцветные ладьи не били друг друга? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Даны положительные числа x, y, z. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{xyz\,(x+y+z)}{x^4+y^4+z^4}.$$

3. Окружность ω единичного радиуса проходит через вершины B и C треугольника ABC и вторично пересекает его стороны AB и AC в точках K и L соответственно. На лучах BL и CK отмечены соответственно такие точки P и Q, что $BP = AC$ и $CQ = AB$. Найдите расстояние между центрами описанных окружностей треугольников APQ и KBC.

4. Шестнадцатиричная запись квадрата натурального числа x представляет собой два одинаковых соседних блока из n цифр. Может ли n равняться 2023?

5. В однокруговом турнире по настольному теннису участвует $2k$ спортсменов. В каждом туре все участники проводят по одному матчу. Какое наименьшее число туров надо сыграть, чтобы при любом расписании игр обязательно нашлось трое теннисистов, сыгравших друг с другом?

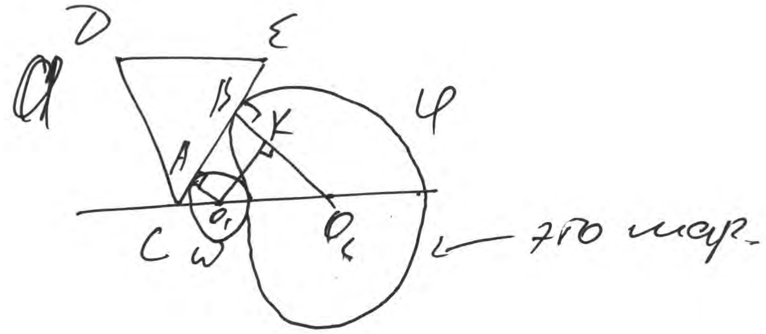
6. Имеется три одинаковых конуса с общей вершиной, касающихся друг друга внешним образом, а также два шара, касающихся внешним образом друг друга и всех конусов. Радиусы шаров относятся как $1:3$. Найдите угол при вершине конусов. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении).

Задание 6

Т нам даны конусы А, В, С и шары ω и φ
рассмотрим осевое сечение этой конструкции
для одного из конусов.

у ω радиус r

у φ радиус 3r



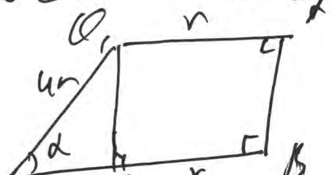
~~Рассмотрим~~

Заметим, что $\hat{CDE} = \hat{DEC} = \alpha = \hat{ECO_2}$ ~~(т.к. O_1O_2 - ось~~
т.к. все конусы равны => O_1O_2 - ось симметрии для
этой конструкции, тогда ~~DE~~ $DE \parallel O_1O_2$, тогда
~~рассмотрим трапецию O_1ABO_2~~:

$\hat{DCE} = 180° - 2\alpha = 2(90° - \alpha)$

в $\triangle CBO_2$: $\hat{BO_2C} = 90° - \alpha$ => $\hat{DCE} = 2\hat{BO_2C}$

рассмотрим трапецию ABO_2O_1:



$O_1K \perp BO_2$ => $AO_1 = BK = r$ =>

=> $KO_2 = 2r$ $\quad O_1O_2 = 3r + r = 4r$ =>

=> $\cos(\hat{BO_2C}) = \frac{1}{2}$ => $\hat{BO_2C} = 60°$ => $\hat{DCE} = 120°$

$\hat{DCE}$ - искомый нами угол 120°

Ответ: 120°. V

Задание 5

~~в решении я употреблял слово команда подразумевая спортсмен~~

Заметим что для любого 2k мы можем
составить такое расписание игр, что никакие трое
не сыграют друг с другом после k туров. Для это представим
условие задачи в виде графа: вершины - ~~команды~~ спортсмены
ребра - игры. Разобьем 2k на 2 группы по k ~~команд~~ спортсм.

k . . . . . . 1ая группа.

k . . . . . . 2ая группа

Т каждый тур спортсмен ~~команда~~ из 1ой группы играет с спортсмен ~~командой~~
из 2ой группы, т.е. спортсмены ~~команды~~ из одной группы не ~~иг~~ играют
м/у собой, таких ~~туров~~ туров мы сможем провести
k штук и у нас не найдутся 3 спортсмена ~~команды~~, которые
играли друг с другом, т.е. не найдется цикла из
~~длиной 3, т.к.~~ 3-х ребер, т.к. спортсмены ~~команды~~ из одной
группы не играли друг с другом.

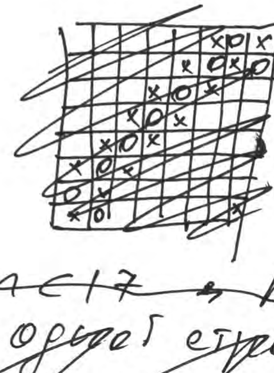
Докажем, что k+1 тура нам хватит, чтобы
появился цикл ~~длиной~~ из 3-х ребер. Рассмотрим
одного спортсмена: он сыграл k игр => ~~из~~ он
соед. с k другими вершинами, т.к. всего
спортсменов 2k => есть k-1 спортсмен, которые
не играли с выбранным, но т.к. игр всего k =>
=> ~~он~~ каждый из (k-1) спортсмена играл с каким-то
из группы из (k) спортсменов, тогда после k+1 тура
наш выбранный спортсмен сыграет с каким-то
из (k-1) спортсмена и получим цикл
из 3 ребер соед. выбранного спортсмена, одного
из группы из (k) человек и одного из группы
(k-1) человека, т.е. k+1 тура нам
хватит.

Ответ: k+1 тур. V

Задание 1

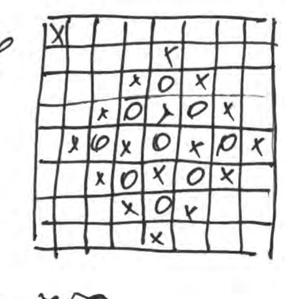
~~пример на 16~~

пример на 17.



О - чёрные

Х - белые



~~Докажем что n ≤ 17~~ => Предположим, что

Заметим, что на одной строке ~~с k чёрной ладьёй может стоять не более k+1 белых, чтобы фигуры одного цвета не били друг друга => n ≤ 2·9~~

Заметим, что белая может стоять в любой
строке как минимум одна и каждая чёрная
ладья может позволить ставить в эту строку ещё одну
продолжение на доп. листе.

Чистовик

Задание 1 (продолжение)

одну ладью, т.к. в строке с k чёрными ладьями не может стоять более $k+1$ белой, т.к. по условию ладьи одного цвета не бьют друг друга $\Rightarrow$ максимум: $8+9=17$

пример в начале решения

Ответ: 17.

Задание 2

в силу симметрии рассматриваем относительно $x\,y\,z$

$$A = \frac{xyz(x+y+z)}{x^4+y^4+z^4} \le \quad , \quad \exists\; x \ge y \ge z > 0$$

$$A \le \frac{(x^3+y^3+z^3)(x+y+z)}{3(x^4+y^4+z^4)} = \frac{x^4+y^4+z^4+x^3(y+z)+y^3(x+z)+z^3(x+y)}{x^4+y^4+z^4+2x^4+2y^4+2z^4}$$

Сравним числитель и знаменатель.

$$x^4+y^4+z^4+x^3(y+z)+y^3(x+z)+z^3(x+y) \vee x^4+y^4+z^4+2x^4+2y^4+2z^4$$

$$0 \vee x^3(x-y)+x^3(x-z)+y^3(y-x)+y^3(y-z)+z^3(z-x)+z^3(z-y)$$

$$0 \vee \underbrace{\underbrace{\underbrace{(x-z)}_{\ge 0}\underbrace{(x^3-z^3)}_{\ge 0}}_{\ge 0} + \underbrace{\underbrace{(x-y)}_{\ge 0}\underbrace{(x^3-y^3)}_{\ge 0}}_{\ge 0} + \underbrace{\underbrace{(y-z)}_{\ge 0}\underbrace{(y^3-z^3)}_{\ge 0}}_{\ge 0}}_{\ge 0}$$

$$3(x^4+y^4+z^4) \ge (x^3+y^3+z^3)(x+y+z) \Rightarrow A \le 1$$

равенство достигается, когда $x=y=z$.

Ответ: $A \le 1 \Rightarrow$ наибольшее значение $\max(A) = 1$

Чистовик.

Задание 4

$\exists\ (x^2)_{16} = m \cdot 10^{2023} + m = \cancel{m}(10^{2023} \cancel{\ldots}) = m(10^{2023}+1)$, причём $m < 10^{2024}$

Заметим, что $(10^{2023}+1) \underset{16}{\equiv} 1$

2

4