АРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

6694 1 70

1	2	3	4	5	6	сумма
2	4	4	0	0	4	14

70

ПИСЬМЕ... БОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (8–9 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Челябинск

Дата 02.03.2019

* *

8–9 класс. Четвертый вариант

1. На свой день рожденья Вася принес в класс несколько конфет и все их раздал своим одноклассникам (каждому досталось не менее одной конфеты). Некоторые из них поделились с одноклассниками полученными конфетами. В результате у четверти всего класса оказалось по 2 конфеты, у трети класса — по 1 конфете, у Маши оказалось 6 конфет, а больше ни у кого конфет не осталось. Какое наибольшее количество конфет мог раздать Вася?

2. При каких a квадратные трехчлены $x^2 + ax - 6$ и $2x^2 - 5x + 2a$ имеют общий корень?

3. В тетради карандашом нарисована квадратная сетка 2019×2019 клеток (сторона клетки равна 1). Петя и Вася играют в игру по следующим правилам. Ходят по очереди, начинает Петя. За один ход игрок стирает один единичный отрезок этой сетки. Выигрывает тот игрок, после чьего хода образуется клетка, все четыре стороны которой стерты. Кто из игроков может обеспечить себе победу вне зависимости от игры соперника?

4. Для положительных чисел a, b и c докажите неравенство

$$\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geqslant \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}.$$

5. В остроугольном треугольнике ABC с наименьшей стороной AB провели высоты BB_1 и CC_1, они пересеклись в точке H. Через точку C_1 провели окружность ω с центром в точке H и окружность ω_1 с центром в точке C. Через точку A провели касательную к ω, касающуюся ее в точке K, а также касательную к ω_1, касающуюся ее в точке L. Найдите $\angle KB_1L$.

6. Найдите все пары простых чисел p и q, для которых $\frac{p^3+1700}{q^3+96} = q^3$.

№ 1.

Пусть было k конфет $\Rightarrow$ всего было человек $\leq k+1$, т.к. Вася раздал все и как минимум 1 каждому $\Rightarrow$ Пусть m - учеников, тогда

$\frac{1}{4}\cdot 2m+\frac{1}{3}\cdot m+6=k \Rightarrow \frac{1}{2}m+\frac{1}{3}m+6=k \Rightarrow k=\frac{5}{6}m+6$, т.к. $m\leq k+1$,

~~это при $m=k+1$ будет максимальным~~ и $m=(k-6)\cdot\frac{6}{5}$, что

$(k-6)\frac{6}{5}\leq k+1 \Rightarrow \frac{6}{5}k-\frac{36}{5}\leq k+1 \Rightarrow \frac{1}{5}k\leq\frac{41}{5} \Rightarrow k\leq 41 \Rightarrow$

максимальное $k=41$.

Ответ: 41

№ 2.

2

1) $x^2+ax-6=0$ $\qquad x\neq 0$, т.к. $-6\neq 0$.

2) $2x^2-5x+2a=0$

Пусть $x_1;x_2$ - корни 1), а $x_1;x_3$ - корни 2).

$$\begin{cases}-a=x_1+x_2\\ 2{,}5=x_1+x_3\\ -6=x_1x_2\\ a=x_1x_3\end{cases}\ \overset{x_1\neq 0}{\Rightarrow}\ \begin{cases}-a=x_1+x_2\\ 2{,}5+a=x_3-x_2\\ -6x_3=x_2a\\ a=x_1x_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_2=-\frac{6}{a}x_3\\ a+2{,}5=x_3(1+\frac{6}{a})\\ a=x_1x_3\\ -a=x_1+x_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_2=-\frac{6}{a}x_3=\frac{-6(a+2{,}5)}{a+6}\\ x_3=\frac{a(a+2{,}5)}{a+6}\\ a=x_1x_3\\ -a=x_1+x_2\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{a}{x_3}\\ x_1=-a-x_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{a+6}{a+2{,}5}\\ x_1=\frac{-a^2-6a+6a+15}{a+6}\end{cases}\Rightarrow\frac{a+6}{a+2{,}5}=-\frac{a^2-15}{a+6}\Rightarrow$$

$\Rightarrow 2(a+6)^2=-(2a+5)(a^2-15)\Rightarrow 2a^2+24a+72=-2a^3-5a^2+30a+75\Rightarrow$

$\Rightarrow 2a^3+7a^2-6a-3=0$

$(a-1)(2a^2+9a+3)=0$.

$a=1$.

$a=\frac{-9\pm\sqrt{57}}{4}$ $\qquad\Rightarrow$ Ответ: $a=1$ и $a=\frac{-9\pm\sqrt{57}}{4}$

№3.

Переформулируем задачу: после чьего хода у клетки осталась только 1 сторона, тот проиграл, т.к. след. ходом другой игрок сотрет её и выиграет.
Обозначим главную диагональ, заметим, что относительно неё для каждой стороны есть симметричная. Второй игрок при стирании стороны стирает симметричную ей относительно выбранной (любой но одной и той же на всю игру) диагонали.
Т.к. если проиграл второй, то после его хода оказалась клетка только с 1 стороной, но т.к. отн. главной диагонали все симметрично, то уже была такая клетка, либо эта клетка лежит на главной диагонали, но там после хода второго не может быть нечет. число сторон $\Rightarrow$ противоречие.
Ответ: второй (Вася)

№4

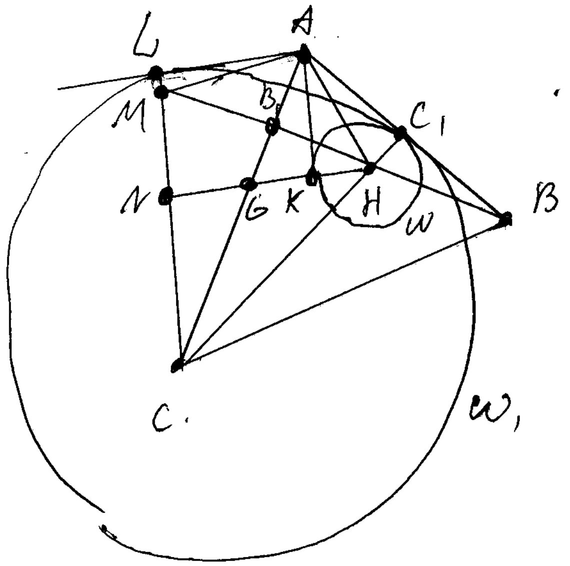
$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2} \vee \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}$$
$$\Downarrow$$
$$19\left(\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\right) \vee 19\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)$$

$$14\frac{a^3}{b^2}+3\frac{b^3}{c^2}+2\frac{c^3}{a^2} \geq 19\sqrt[19]{\left(\frac{a^3}{b^2}\right)^{14}\left(\frac{b^3}{c^2}\right)^{3}\left(\frac{c^3}{a^2}\right)^{2}} = 19\sqrt[19]{\frac{a^{42}\cdot b^9 c^6}{b^{28}\cdot c^6\cdot a^4}} = 19\sqrt[19]{\frac{a^{38}}{b^{19}}} = 19\frac{a^2}{b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (14+3+2)\left(\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\right) \geq 19\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2} \geq \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}$$, ч.т.д.

№5



Дано:

$\triangle ABC$-остроугольный

$AB \le BC$

$AB \le AC$.

AK-касательная ω

AL-касательная ω_1

Найти:

$\angle KB_1L$

решение:

т.к. $\angle LCA = \angle ACC_1$, то если прямая BB_1 пересекает LC в точке M, то $CB_1 \perp MH$ и CB_1-биссектриса $\Rightarrow MB_1 = B_1H \Rightarrow \angle MAC = \angle CAH = 90^\circ - \angle C$, т.к. AH-отрезок высоты $\Rightarrow MAH = 2(90^\circ - \angle C) = 180^\circ - 2\angle C$. т.к. $AB \le AC$, то $\angle B \ge \angle C \Rightarrow \angle 90^\circ - \angle C \ge \angle 90^\circ - \angle B \Rightarrow \angle CAK = \angle A - 2\cdot(90^\circ - \angle B) =$
$= \angle A - 180^\circ + 2\angle B$, а $\angle LCA = \angle ACC_1 = 90^\circ - \angle A \Rightarrow \angle MNH =$
$= \angle NGC + \angle LCA = 90^\circ - (\angle A - 180^\circ + 2\angle B) + 90^\circ - \angle A =$
$= 360^\circ - 2\angle B - 2\angle A = 2\angle C \Rightarrow \angle MNH + \angle MAH = 360^\circ \Rightarrow MAHN$-вписанный, где $N = KH \cap LC$, тогда т.к. $AK \perp HN$; $AB_1 \perp MH$; $AL \perp MN$, и $A \in$ описанной треугольника MHN, то LB_1K-прямая Симсона $\Rightarrow \angle KB_1L = 180^\circ$

Ответ: $\angle KB_1L = 180^\circ$

~~№4~~
№6.

$$\frac{p^3+1700}{q^3+36}=q^3$$

$p^3+1700=q^6+36q^3$

$p^3=q^6+96q^3-1700$. Пусть p и q не 7, тогда $p^3 \underset{7}{\equiv} \pm1$ и $q^3 \underset{7}{\equiv} \pm 1$

$\Rightarrow p^3 \underset{7}{\equiv} \pm 1$, а $q^6+36q^3-1700 \underset{7}{\equiv} 1+5\cdot(\pm1)+1 \underset{7}{\equiv} 2\pm5$, что либо 7, либо -3, что не ±1 $\Rightarrow$ одно из чисел это 7

Если $p=7$, то.

$343=q^6+56q^3-1700$

$q^6+36q^3-2043=0$. $t=q^3$.

$\frac{D}{4}=2304+2043=4347$

$q^3=-48\pm\sqrt{4347}$, 4347 - не квадрат $\Rightarrow$ q где q - натуральное. не существует.

Если $q=7$, то.

$343^2+56\cdot343-1700=p^3$.

$343\cdot(439)-1700=p^3$.

$150577-1700=p^3$

$p^3=148877$

$p^3=53^3 \Rightarrow p=53$ $\Rightarrow$ пара простых чисел - только 7 и 53, где $p=53$, $q=7$