УРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

5133

60

1	2	3	4	5	6	сумма
2	0	4	4	2		12

60

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Москва

Дата 10.03.2019

* *

10–11 класс. Десятый вариант

1. Какое наибольшее количество ладей можно расставить на шахматной доске так, чтобы каждую ладью било не более двух других? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Числа x, y, z — углы некоторого треугольника, один из которых не меньше $\frac{\pi}{2}$. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \cos x + \cos y + \cos z + \cos(x - y) + \cos(y - z) + \cos(z - x).$$

3. Дан четырехугольник $ABCD$, отличный от параллелограмма. На лучах AB, CB, CD и AD вне сторон четырехугольника $ABCD$ выбираются соответственно точки K, L, M и N так, что $KL \parallel MN \parallel AC$ и $LM \parallel KN \parallel BD$. Найдите геометрическое место точек пересечения диагоналей параллелограмма.

4. Натуральное число x в восьмеричной системе 2018-значное, и его цифры повторяются через одну. Оказалось, что восьмеричная запись x^2 содержит только цифры 3 и 4, причем в равном количестве. Найдите x^2 (в восьмеричной системе).

5. В однокруговом турнире по настольному теннису участвовало n теннисистов ($n \geqslant 3$). Будем говорить, что игрок A *круче* игрока B, если A выиграл у B или найдется такой игрок C, что A выиграл у C, а C выиграл у B. При каких n по итогам турнира могло оказаться так, что каждый игрок круче всех остальных? Ничьих в теннисе не бывает.

6. На столе лежат два конуса с общей вершиной O, касаясь друг друга внешним образом. Угол между их осями симметрии равен $\operatorname{arctg} \frac{12}{5}$. Найдите максимальный угол при вершине большего из двух конусов с вершиной O, которые лежат на столе и касаются внешним образом первых двух конусов. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении.)

№3

Заметим, что $MN = LK$, т.к. $KLMN$ — параллелогр., так как имеем (вер. $(KN) \| (ML)$; $(KL) \| (MN)$)

$\triangle DKL \sim \triangle ABC$, $\triangle ACD \sim \triangle MDN$. Тогда:
т.к. $(KL) \| (AC)$ т.к. $(AC) \| (MN)$ [по одному вертикальному углу и две н/л пр. $\|$ пр]

$\frac{LK}{AC} = \frac{DK}{AB} = \frac{DL}{BC} = k$ и

$\frac{MN}{AC} = \frac{MD}{DC} = \frac{DN}{AD} = k$

Из того, что $MN = LK$ эти отнош. все равны между собой.
Обозначим их всех через k (эти отношения). Заметим, что если луче AB за т. B отложим $BK = k \cdot AB$, за т. B на луче CB $BL = k \cdot BC$ и т.д.; то получим параллелогр. $KLMN$, т.к. будет выполняться $LK \| AC \| MN$ и $LK = MN$.

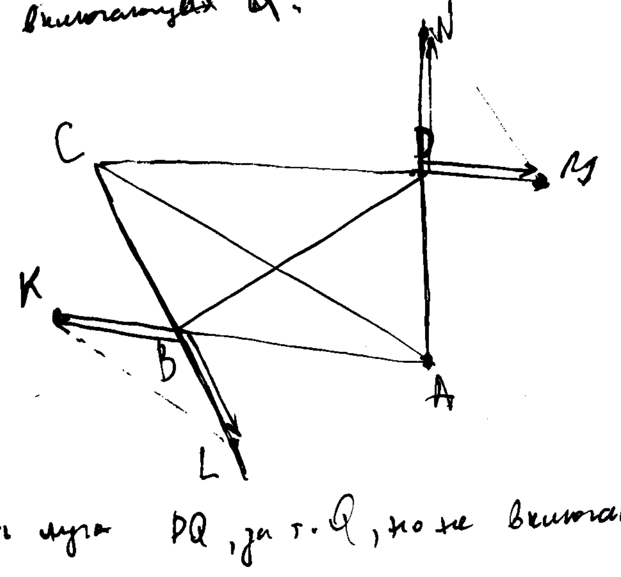
Обозначим координаты точек через их букв. Посчитаем теперь координаты точки пересечения диагоналей параллелогр. Т.к. это середина одной из диагоналей, то это т. $O = \frac{M+K}{2}$;

$K = B + (D - A) \cdot k$;

$M = D + (B - C) \cdot k$;

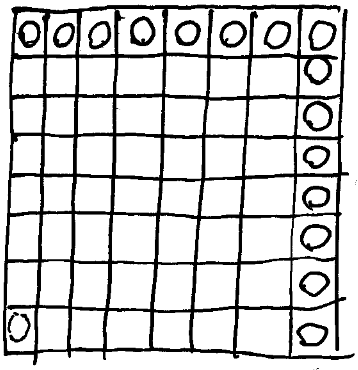
$O = \frac{M+K}{2} = \frac{B + (D-A) \cdot k + D + (B-C) \cdot k}{2} = \frac{B+D}{2} + k\frac{B+D-(A+C)}{2}$;

Обозначим середину BD через т. Q, середину AC через т. P, тогда вектор $\frac{B+D-(A+C)}{2} = \overrightarrow{PQ}$, т.к. $k \in (0; +\infty)$, то ГМТ таких точек — часть луча PQ, за т. Q, не включающая Q.



Ответ: ГМТ - часть луча PQ, за т. Q, но не включающая Q;

№1



Представим, что у нас есть еще одна ладья, обойдем ею нашу доску по периметру (представим, что у нас появились столько строк и столбцов, что поле у нас теперь 10×10 [расширили по одной с каждой стороны]). Обойдем доску по периметру и посчитаем сколько ладей побьет наша доп. ладья, она не может побить большее кол-во ладей существующих доски ($8\cdot4=32$) 32. Причем каждую ладью мы побили как минимум два раза (т.к. по условию её бьет не больше чем две другие ладьи, значит с двух сторон она должна быть открыта), тогда с таким условием на доске не может стоять больше чем 16 ладей, а такой пример приведен на рисунке.

2 способ оценки: (не связанный с вышеуказанным)
Аналогично оценку можно провести рассмотрев проекции каждой ладьи вдоль сторон в обоих направлениях: она должна упираться или в внешнюю сторону квадрата 8×8 (входящую в состав периметра, их у нас 32) или в сторону квадратика с ладьей.
Каждая ладья дает по две стороны, в которые можно упереться, ~~значит~~ при этом каждой ладье нужно по 4 такие стороны:

$2n+32 \geq 4n$ $\quad n\leq16$. (пример на рисунке)

Ответ: 16;

№4

Заметим, что в 8-ричной СС, признак делимости на 7 такой же, как и признак делимости на 9 в 10-ой СС. Так как $\overline{\ldots k\ldots} = 8^n\cdot k \equiv 1^n\cdot k \equiv k$ по mod 7, то есть все число сравнимо по mod 7 с суммой его цифр. Значит, число $X^2 \vdots 7$, т.к. его сумма цифр $\vdots 7$ (3 и 4 одинаковое кол.). Следовательно и $X \vdots 7$. Т.к. $\overline{abababab\ldots abab} \equiv 1008\cdot(a+b)$ по mod 7, то $(a+b) \vdots 7$. Обратим внимание на посл. цифру X^2: по условию она или 3 или 4. Т.к. $\overline{abababab\ldots abab} = 8\cdot(\overline{abababa\ldots aba})+b$, то последняя цифра квадрата этого числа зависит только от b.

СС – системы счисления

Переберём квадрат каждой цифры 8-ой СС:

$0^2=0;\ 1^2=1;\ 2^2=4;\ 3^2=9=8+1;\ 4^2=16=2\cdot8+0;$

$5^2=25=3\cdot8+1;\ 6^2=36=4\cdot8+4;\ 7^2=49=6\cdot8+1;$

То есть ни одна из цифр не дает последнюю цифру 3. А цифру 4 дают 2 и 6. Кроме того, $(a+b)\vdots7$, значит либо $a=1;\ b=6$, либо $a=5;\ b=2$. Обратим внимание на 2 посл. цифры X^2: т.к. $\overline{abababab\ldots abab} = 8^2\cdot(\overline{abababab\ldots abab})+8a+b$, то посл. цифры кв. этого числа зависят только от a и b. Возведем в квадрат оба эти варианта

$(1\cdot8+6)^2 = 1\cdot8^2+12\cdot8+36 = 3\cdot8^2+0\cdot8+4$ — не подходит, т.к. предпосл. цифра это 0.

N 2 (продолжение)

$= 1 - |\cos(x)| + \cos(y) + \cos(z) + \frac{1-2\cos^2(x)}{2} + \frac{1-2\cos^2(y)}{2} +$

$+ \frac{1-2\cos^2(z)}{2} + \frac{1-2\cos^2(x)}{2} = 1 - |\cos(x)| + \cos(y) + \cos(z) + 2 -$

$- 2\cos^2(x) - \cos^2(y) - \cos^2(z)$;

Очевидно, что A максимально при $\cos(x) = 0$, то есть $x = \frac{\pi}{2}$, ?

Тогда $A \leq 1 + \cos(y) + \cos(z) + 2 - \cos^2(y) - \cos^2(z)$.

Т.к. x, y, z – углы $\Delta \longrightarrow$ $x+y+z = \pi$; $x = \frac{\pi}{2}$ $\longrightarrow$ $z + y = \frac{\pi}{2}$;

$z = \frac{\pi}{2} - y$; $A \leq 1 + \cos(y) + \cos(\frac{\pi}{2} - y) + 2 - \cos^2(y) - \cos^2(\frac{\pi}{2} - y) =$

$= 3 + \cos(y) + \sin(y) - \cos^2(y) - \sin^2(y) = 3 + \cos(y) + \sin(y) - 1 =$

$= 2 + \cos(y) + \sin(y)$;

Найдем максимум;

$f(y) = 2 + \sin(y) + \cos(y)$

$f'(y) = \cos(y) - \sin(y)$; $\cos(y) - \sin(y) = 0$; $\longrightarrow$ $y = \frac{\pi}{4}$.

экстремум

max.

$+$ $-$

$\frac{\pi}{4}$ y

max при $y = \frac{\pi}{4}$: $A \leq 2 + \sin(\frac{\pi}{4}) + \cos(\frac{\pi}{4}) = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 + \sqrt{2}$

A максимальное: $2 + \sqrt{2}$.

Ответ: $2 + \sqrt{2}$;

4

Чистовик

№4 (продолжение)

$(5\cdot 8+2)^2=(5\cdot 8)^2+20+4=7\cdot 8^2+4\cdot 8+4$ — подходит.

Т.к. все ост. варианты неверные, то имеем X: в 8 СС;

$X=5252\ldots5252$; Заметим, что 52 в 8 СС (42 в 10 сс), это

$\frac{2}{3}\cdot 77$ ($\frac{2}{3}$ от 63 в 10 сс)

То есть $X^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot(77777\ldots777)^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot(8^2\cdot 0.18-1)^2=$

$=\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot(8^4\cdot 0.36-2\cdot 0.18^2+1)=\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot(777\ldots777000\ldots001)$ ← 2017 нулей,

2017 „7"; $\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot(777\ldots777000\ldots001)=\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot(777\ldots77577\ldots7770+11)$

— 2017 „7"; „5"; еще 2017 „7";

Заметим, что в 8-ой сс $3^2=11\rightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot(777\ldots77577\ldots777+11)$

$=\left(\frac{2}{3}\right)^2(777\ldots7757000\ldots0007+0+11)=\left(\frac{2}{3}\right)^2(777\ldots777\ldots000\ldots000-1100\ldots$

$\ldots000\ldots0+11)=4(7070\ldots707000\ldots000-10000\ldots000+70\ldots7070+$

$+1)=\underbrace{3434343434}_{5\text{ пар}}\ldots34343434\ldots34344$;

Ответ: $3434343434\ldots34343434\ldots34344$;

№2 $A=\cos(x)+\cos(y)+\cos(z)+\cos(x-y)+\cos(y-z)+\cos(z-x)=$

$=\cos(x)+\cos(y)+\cos(z)+\cos(x)\cos(y)+\sin(x)\sin(y)+\cos(y)\cos(z)+\sin(y)\sin(z)+\cos(z)\cos(x)+$

$+\sin(z)\sin(x)$; Т.к. выражение симметрично, пусть $x\geq\frac{\pi}{2}$, тогда

$\cos(x)\leq 0$.

$A=-|\cos(x)|+\cos(y)+\cos(z)-|\cos(x)|\cdot\cos(y)+\sin(x)\sin(y)+\cos(y)\cos(z)+\sin(y)\sin(z)-$

$-|\cos(x)|\cos(z)+\sin(z)\sin(x)$.

Неравенство Коши:

$|\cos(x)|\cdot\cos(y)\leq\frac{\cos^2(y)+\cos^2(x)}{2}$;

$A\leq-|\cos(x)|+\cos(y)+\cos(z)-\frac{\cos^2(y)+\cos^2(x)}{2}+\frac{\sin^2(x)+\sin^2(y)}{2}+$

$+\frac{\cos^2(y)+\cos^2(z)}{2}+\frac{\sin^2(y)+\sin^2(z)}{2}-\frac{\cos^2(x)+\cos^2(z)}{2}+\frac{\sin^2(z)+\sin^2(x)}{2}=$

$-|\cos(x)|+\cos(y)+\cos(z)+\frac{\sin^2(x)+\sin(x)\sin^2(x)}{2}+\frac{\sin^2(x)-\sin^2(y)}{2}+$

$+\frac{\sin^2(y)-\cos^2(y)}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\sin^2(z)-\cos^2(z)}{2}+\frac{\sin^2(x)-\cos^2(x)}{2}=$

Чистовик

3

N5 Для нечетного числа участников предположим, что для всех четных $k<n$, не существует такого турнира на k вершинах, что все круче всех.

Тогда $k=2$, т.к. все ~~должны быть~~ круче всех, то мы сможем разбить все множество ~~на подмножест~~ва, так что между ними ребра множества идут одинаково. Мн-ва множеств не менее 2 из условия, что все круче всех. Тогда у ~~нас~~ либо нет число множеств, либо одно из множеств легкое по размеру и тогда по предп. индукции ~~индукции~~ не существует турнира ~~на n~~ n.

Для нечетных n можем свести к $m-2$, разбив на A, B и остальных, где A выигрывает у остальных, B проигр. остальным и выигр. A. Тогда можем убрать A и B и рассм. для ~~нечетного~~ меньшего числа $m-2$ и так сводим к 3.

~~Для нечетных m может~~ А для этого есть пример:

А выигр. Б, Б выигр. у С, С выигр. у А.

Ответ: для всех нечетных n;

5

Шестовик