

(50)

вход 12.52  
приход 12.54

0-1

КИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ



1

9425

1	2	3	4	5	6	сумма
4	-	4	-	-	2	10

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (8–9 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Чебоксары

Дата 19.03.19

\* \* \* \* \*

## 8–9 КЛАСС. ПЕРВЫЙ ВАРИАНТ

1. Маша на свой день рождения принесла в школу конфеты, оставила несколько конфет себе, а остальные раздала шестерым своим подружкам. Оказалось, что у всех девочек разное число конфет и количество конфет у любых четырех девочек больше, чем у трех оставшихся. Какое наименьшее количество конфет Маша могла оставить себе?

2. При каких  $a$  квадратные трехчлены  $x^2 + ax - 2$  и  $2x^2 - 3x + 2a$  имеют общий корень?

3. На столе лежит 2019 камней. Петя и Вася играют в игру по следующим правилам. Ходят по очереди, начинает Петя. За один ход можно взять со стола 1 или 2 камня, но один и тот же игрок два раза подряд не может брать 2 камня. Проигрывает не имеющий хода. Кто из игроков сможет обеспечить себе победу вне зависимости от игры противника?

4. Для любых положительных чисел  $a$ ,  $b$  и  $c$  докажите неравенство

$$\frac{a}{2a^2 + b^2 + c^2} + \frac{b}{a^2 + 2b^2 + c^2} + \frac{c}{a^2 + b^2 + 2c^2} \leq \frac{9}{4(a + b + c)}.$$

5. Внутри треугольника  $ABC$  выбрана такая точка  $D$ , что  $\angle ABD = \angle ACD$  и  $\angle ADB = 90^\circ$ . Точки  $M$  и  $N$  середины сторон  $AB$  и  $BC$  соответственно. Найдите угол  $\angle DNM$ .

6. Найдите все пары простых чисел  $p$  и  $q$ , для которых  $p^2 + pq + q^2$  является точным квадратом.

Ответ: вырывает 1-й шток

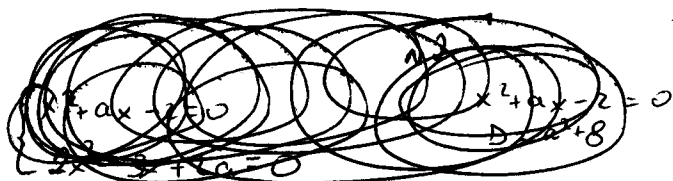
сначала 1-й игрок берёт 1 камень, затем

1 раз допалкиет 2-ого игрока до 3 (если 2-й игрок взял 1 камень первый возьмёт 2 и наоборот), ~~то~~ потом 40 3 раза допалкиет до 5 (позже скажу как).

Заметим, что после последнего хода 1-го игрока останется 0 камней  $\Rightarrow$  он выигрывает.

$$\begin{matrix} 2-\bar{u} & 1-\bar{u} \\ 1 & 1 \end{matrix} < \begin{matrix} 2-\bar{u} & 1-\bar{u} \\ 1 & 2 \end{matrix}$$
$$\begin{array}{cccc} 2-\bar{u} & 1-\bar{u} & 2-\bar{u} & 1-\bar{u} \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

Заметим, что первый ход  
первого игрока в этом допол-  
нении всегда 1 камень  $\Rightarrow$   
мы всегда сможем доплатить



Оценка:

$\sqrt{1}$

~~Обозначим~~ Обозначим конфеты семи девочек за  $x_1, x_2, \dots, x_7$ .

$$500 \quad x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq x_4 \geq x_5 \geq x_6 \geq x_7,$$

$$\text{Но т.к. } \cancel{x_1 \neq x_2}, x_1 \neq x_3, x_2 \neq x_3, \dots, x_6 \neq x_7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5 > x_6 > x_7$$

$\Downarrow$

$$x_1 \geq x_2 + 1 \geq x_3 + 2 \geq x_4 + 3 \geq x_5 + 4 \geq x_6 + 5 \geq x_7 + 6$$

$$x_2 \geq x_3 + 1 \geq x_4 + 2 \geq x_5 + 3 \geq x_6 + 4 \geq x_7 + 5$$

$$x_3 \geq x_4 + 1 \geq x_5 + 2 \geq x_6 + 3 \geq x_7 + 4$$

По условию задачи  $x_7 + x_6 + x_5 + x_4 > x_1 + x_2 + x_3$

$$x_7 + x_6 + x_5 + x_4 > x_1 + 3 + x_5 + 3 + x_6 + 3$$

$$x_7 > 9$$

$$x_7 \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow \boxed{x_7 \geq 10}$$

Пример:

Мама оставила себе 10 конфет, а подружки дали 11, 12, 13, 14, 15, 16 конфет.

Заметим, что если четверка минимальных чисел больше тройки максимальных чисел, то условие будет выполняться для любой четверки (т.е. любая четверка  $>$  минимальная четверка  $>$  максимальная тройка  $\geq$  любая тройка  $\Rightarrow$  любая четверка  $>$  любая тройка)

$$10 + 11 + 12 + 13 > 14 + 15 + 16$$

$$46 > 45 - \text{верно}$$

Ответ: 10 конфет.

13.

Ответ: выигрывает первый.

Стратегия:

сначала первый берёт 1 камень, затем будет "дополнять" второго игрока до чётного числа (т.е. если 2-й взял 3 камня, то 1-й возьмёт 1, если 2-й возьмёт 2 камня, то 1-й возьмёт 2).

13.

Ответ: выигрывает первый.

Стратегия:

потом 1-й доп. до 8

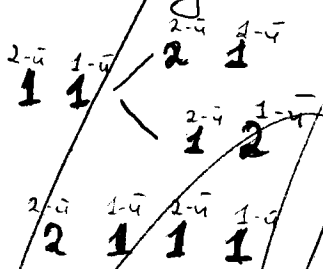
сначала 1-й игрок берёт 1 камень, затем 4 0 2

~~1 0 0 0 0~~ 2-й доп. до 5 (позже расскажем), ~~0 0 0 0~~

~~1 0 0 0 0 0 0 0~~ (позже расскажем), т.е. после последнего хода 1-ого игрока останется 0 ~~каменей~~ камней  $\Rightarrow$  он выигрывает

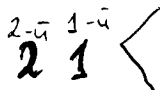
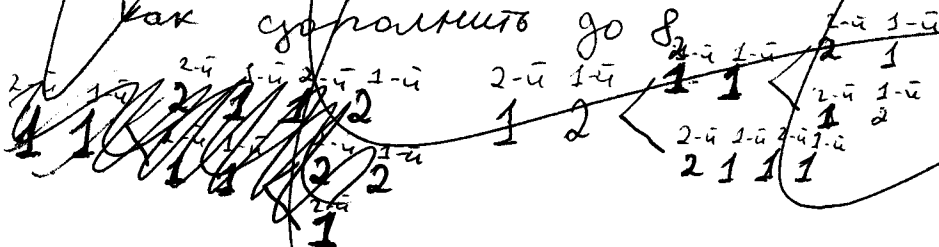
как дополнить до 5:

Первый ход всегда 2-ого игрока.



Заметим, что первый ход первого игрока всегда 1  $\Rightarrow$  он всегда сможет дополнить до 5, если хватит камней.

как дополнить до 8:



16.

$$p^2 + pq + q^2 = x^2 \Rightarrow \begin{cases} x > p \\ x > q \end{cases}$$

$x \in \mathbb{N}$

500:

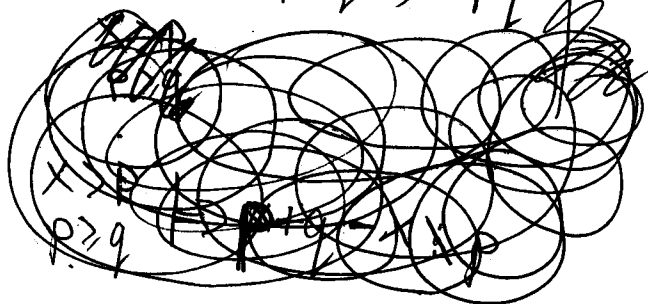
$$p \geq q$$



2

$$(p+q)^2 - x^2 = pq$$

$$(p+q-x)(p+q+x) = pq \Rightarrow pq : p+q-x$$



$$p+q-x < q \Rightarrow \begin{cases} p+q-x \leq p \\ p+q-x \leq q \\ pq : p+q-x \end{cases} \Rightarrow p+q-x=1$$

$$x = p+q-1$$

$$p^2 + pq + q^2 = p^2 + 2pq + q^2 - 2p - 2q + 1$$

$$4p-1 \geq pq \quad \leftarrow \begin{cases} 2p+2q-1 = pq \\ p \geq q \end{cases}$$

$$4 - \frac{1}{p} \geq q \quad \left| \begin{matrix} q \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow \end{matrix} \right. \boxed{3 \geq q}$$

1) Если  $q=3$ :

$$2p + 6 - 1 = 3p$$

$$\begin{cases} p=5 \\ q=3 \end{cases}$$

2) Если  $q=2$ :

$$2p + 4 - 1 = 2p$$

$$3 = 0 \text{ — неверно}$$

$$q \neq 2$$

Ответ:  $p=5$ ,  
 $q=3$