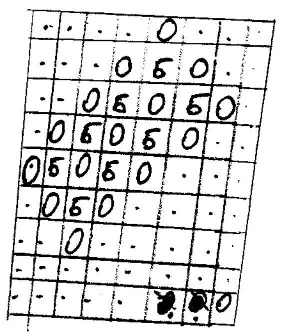
Т.к. $\frac{100\left(10^{20182019}+1\right)}{121}$ – целое и записывается 20182019 цифрами. десятичная запись x^2 будет представлять из себя два одинаковых блока из n цифр $\Rightarrow$ n может равняться 20182019

Ответ: может

① ~~Б~~

столбцы

строчки

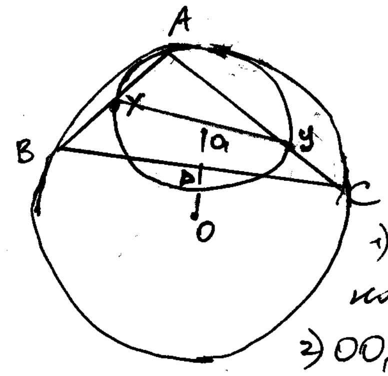


Б – чёрные ладьи. О – белые ладьи.

В каждой строке и в каждом столбце кол-во белых не должно превышать черных более, чем на одну. Просуммируем кол-во белых. Получим: $16+16=32$. Все черные по 2 раза и плюс один за каждую строку и каждый столбец. Каждую ладью посчитали два раза. Может быть не больше, чем 16 белых ладей.

Ответ: 16

③



$\angle ABC = \beta$

$\angle BCA = \gamma$

$\angle O_1DC - ?$

1) Пусть O и O_1 – центры описанных окружностей $\triangle ABC$ и $\triangle AXY$.

2) OO_1 – прямая, соедин. O и O_1.

3) Пусть D – точка пересечения прямой OO_1 и стороной BC, тогда $\angle O_1DC$ – искомый угол.

80

СКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

I

9359

1	2	3	4	5	6	сумма
4	4	0	4	4	0	16

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Владимир

Дата 16. 03. 2019

* *

10–11 класс. Первый вариант

1. Имеется 8 черных ладей и n белых. При каком наибольшем n их можно расставить на шахматной доске так, чтобы одноцветные ладьи не били друг друга? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Даны положительные числа x, y, z. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{xyz\,(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4+(yz)^4+(xz)^4}}.$$

3. Дан треугольник ABC с меньшей стороной AB. На сторонах AB и AC выбраны соответственно точки X и Y так, что $BX = CY$. Под каким углом прямая, проходящая через центры описанных окружностей треугольников ABC и AXY, пересекает прямую BC, если $\angle ABC = \beta$ и $\angle BCA = \gamma$?

4. Десятичная запись квадрата натурального числа x представляет собой два одинаковых соседних блока из n цифр. Может ли n равняться 20182019?

5. На однокруговой турнир по настольному теннису подало заявку 16 человек. Когда было сыграно n матчей, оказалось, что среди любых трех теннисистов найдутся двое, уже сыгравших между собой. При каком наименьшем n такое возможно?

6. Три конуса с общей вершиной, касающихся друг друга внешним образом, имеют высоту 2 и радиус основания $\sqrt{3}$. Два шара касаются внешним образом друг друга и всех конусов. Найдите отношения радиусов шаров (большего к меньшему).

(5) Допустим, что M сыграл меньше всего матчей, тогда оставшиеся сыграли более m матчей. Все игроки сыграли между собой. Теперь посчитаем минимальное удвоенное кол-во матчей в данном случае.

1. M сыграл минимум 5 матчей и каждый из m игроков сыграли M.

2. Все сыграли друг с другом, но не играли с M.

Получаем: $m \cdot (m+1) + (16-1-m) \cdot (16-2-m)$

$m^2 - 28m + 210$

$2 \cdot ((m-7)^2 + 56)$

Минимальное n будет равно 56. Докажем, что такое возможно. Пусть будет 2 группы по 8 игроков. Пусть внутри каждой группы каждый сыграл с каждым. В таком случае условие задачи выполняется, а также кол-во сыгранных матчей будет равно 56.

Ответ: 56

(2)
$$A = \frac{xyz(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4+(yz)^4+(xz)^4}}$$

$$A = \frac{x^2 \cdot y \cdot z + x \cdot y^2 \cdot z + xyz^2}{\sqrt{(xy)^4+(yz)^4+(xz)^4}}$$

Произведём замену: $xy = a > 0$
$yz = b > 0$
$xz = c > 0$, тогда

$$A = \frac{ac+ab+bc}{\sqrt{a^4+b^4+c^4}}$$

Согласно нер-ву о средних

$$\sqrt{a^4+b^4+c^4} \geq \sqrt{3} \cdot \frac{a^2+b^2+c^2}{3} = \frac{a^2+b^2+c^2}{\sqrt{3}}$$, тогда

$$A = \frac{ac+ab+bc}{\sqrt{a^4+b^4+c^4}} \leq \sqrt{3} \cdot \frac{(ab+ac+bc)}{a^2+b^2+c^2}$$

По нер-ву Коши – Буняковского – Шварца

$a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc$ получаем

$A \leq \sqrt{3}$

max значение A не превосходит $\sqrt{3}$. Равенство достигается при $x=y$, $y=z$

$$A = \frac{x^3 \cdot 3x}{\sqrt{3x^8}} = \sqrt{3}$$

Ответ: $\sqrt{3}$

(4) По признаку делимости 20182019 делится на 11.

$10^{20182019}+1 = (10+1)(10^{20182018} - 10^{20182017} + \ldots - 10^1 + 1)$

так как слагаемых 20182019 и это число делится на 11, и вторая скобка делится на 11, значит $10^{20182019}+1$ делится на 121. Если X равен $\frac{10^{20182019}+1}{11}$, то $X^2 = (10^{20182019}+1) \cdot \frac{10^{20182019}+1}{121}$.

Однако мы ещё не нашли искомое число, потому что

$$\frac{10^{20182019}+1}{121} < 10^{20182018}$$

домножим X на 10, тогда $X = (10^{20182019}+1) \cdot \frac{10}{11}$

$$X^2 = (10^{20182019}+1) \cdot \frac{100(10^{20182019}+1)}{121}$$