$\angle AKL = 90^\circ - \angle OAL$

$90^\circ - \angle AKL = \angle OAL$

$O = H$, т.к. $O$ выпол. услов., по котор. единств. образ. зад. точ. $H$.

$H$ — центр опис. окр. $\triangle AKL$

Что и требовалось доказать.

Задача 6.

Пусть: $p^2 + q^3 = n^3$

$n^3 - q^3 = p$

$(n-q)(n^2+nq+q^2) = p^2$

$(n-q)^2 \leq p^2$ $p \vdots (n-q)$ $n>q$

$n - q = 1$

$p^2 = 3q^2 + 3q + 1$

$4p^2 - 1 = 3(4q^2 + 4q + 1)$

$4p^2 - 1 = 3(2q+1)^2$

?

Ответ: $(p, q) = (13, 7)$.

---

ЭКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

4228

1

70

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | сумма |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 4 | | 2 | 4 | 0 | 14 |

70

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (8–9 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Москва

Дата 10 марта 2019

* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *

## 8–9 класс. Второй вариант

**1.** Из нескольких одинаковых белых кубиков Петя сложил большой куб и покрасил его грани в черный цвет. Оказалось, что число кубиков с одной черной гранью равно числу полностью белых кубиков. Сколько маленьких кубиков ровно с двумя черными гранями?

**2.** Найдите все такие квадратные трехчлены $ax^2+bx+c$ с целыми коэффициентами, графики которых проходят через точки $(a, b)$, $(b, c)$ и $(c, a)$ (среди этих точек могут быть совпадающие).

**3.** Том Сойер и Гекльберри Финн играют в игру, заключающуюся в покраске забора, состоящего из 1000 неокрашенных дощечек, в синий и красный цвета. Начинает Том, ходы делаются по очереди. За один ход игрок выбирает одну из неокрашенных дощечек и цвет, а затем красит эту дощечку в выбранный цвет. Игра заканчивается, когда будут покрашены все дощечки. Том хочет, чтобы по окончании игры было как можно больше пар соседних разноцветных дощечек, а Гек хочет, чтобы было как можно меньше пар соседних разноцветных дощечек. Какое максимальное число таких пар Том может обеспечить вне зависимости от игры Гека?

**4.** Вещественные числа $a$, $b$, $c$ и $d$ удовлетворяют соотношениям $a+b+c+d=0$ и $a^2+b^2+c^2+d^2=12$. Найдите наименьшее и наибольшее значения произведения $abcd$.

**5.** Дан неравнобедненный остроугольный треугольник $ABC$. На лучах $AB$ и $AC$ выбраны соответственно такие точки $K$ и $L$, что четырехугольник $KBCL$ вписанный. Точка $H$ — основание высоты, опущенной из вершины $A$ на сторону $BC$. Докажите, что если $KH = LH$, то $H$ — центр описанной окружности треугольника $AKL$.

**6.** Найдите все пары простых чисел $p$ и $q$, для которых $p^2+q^3$ является точным кубом.

Задача 1.

Пусть сторона большого куба $= n$ · сторона маленького кубика.

Кол-во белых кубов $= (n-2)^3$

Кол-во кубов ровно с одной чёрной гранью $= 6(n-2)^2$

$(n-2)^3 = 6(n-2)^2$

$n-2=0$ или $n-2=6$

$n=2$ или $8$

Кол-во кубов ровно с двумя чёрными гранями $= 12(n-2) = 12(2-2)$ или $12(8-2) = 0$ или $72$

Ответ: 0 или 72.

Задача 2.

Из факта, что график $ax^2+bx+c$ проходит через $(a,b)$, $(b,c)$ и $(c,a)$ следует:

$a \cdot a^2 + b \cdot a + c = b$, $a \cdot b^2 + b \cdot b + c = c$ и $a \cdot c^2 + b \cdot c + c = a$. Заметим, что $a \neq 0$, так как $ax^2+bx+c$ - квадратный трехчлен, но не линейная функция и не константа.

$a \cdot b^2 + b \cdot b + c = c \Leftrightarrow ab^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow b^2(a+1) \Leftrightarrow b=0$ или $a=-1$ Рассмотрим 2 случая:

а) $a \cdot a^2 + b \cdot a + c = b$ и $a=-1 \Leftrightarrow -1-b+c=b \Leftrightarrow c=2b+1$

$a \cdot c^2 + b \cdot c + c = a$, $a=-1$ и $c=2b+1 \Rightarrow -(2b+1)^2 + b(2b+1) + 2b+1 = -1 \Leftrightarrow -2b^2-b+1=0 \Leftrightarrow 16b^2+8b+\cancel{1}8=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (4b+1)^2 = 19 \Leftrightarrow b = \frac{-1\pm\sqrt{19}}{4} \Leftrightarrow b \notin \mathbb{Z}$ или $b=-1 \Rightarrow a=-1, b=-1, c=-1$

б) $a \cdot a^2 + b \cdot a + c = b$ и $b=0 \Rightarrow a^3+c=0 \Leftrightarrow c=-a^3$

$a \cdot c^2 + b \cdot c + c = a$, $b=0$ и $c=-a^3 \Rightarrow a^7 - a^3 - a = 0 \Leftrightarrow a=0$ или $a^6-a^2-1=0$ $a \neq 0$ (если $a=0$, то $c=0$ так выр. прим. так. знач.)

$a^6-a^2-1=0 \Leftrightarrow a^6-a^2=1 \Leftrightarrow a^2(a^2+1)(a+1)(a-1)=1$ Заметим, что левая часть чётная, а правая нечётная.

Ответ: ~~не существует нужных трёхчленов~~. $-x^2-x-1$ (если нуж. линей. выр. и конст., то и $0x^2+0x+0$).

Задача 3.

~~Тек может разбить все дощечки на пары: 1 и 2, 3 и 4, ..., 999 и 1000, и ход красить каждый ход дощечку парную той, которую последней покрасил Том, в тот же цвет. Тек может обеспечить хотя бы 500 однацветных пар.~~

~~Том может разбить все дощечки кроме кра~~

Том и Тек могут (каждый раз выбрать дощечку соседнюю с покрашенной, а такая будет всегда после первого хода Тома, и красить так: Тек - в одинак. с ней цвет, Том - в другой цвет. Так Том может обеспечить минимум 499 разноцветных пар сосед. дощ., ~~по одной на~~ вне завис. от игры Финна (по 1 на каждый ход кроме первого), Тек может обеспечить максимум 499 разноц. досок вне завис. от Сойера (всего пар 999, по 1 однацв. паре в ход).

Ответ: 499.

Задача 4.

$a^2+b^2+c^2+d^2 \leq 12$

$\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4} \leq 3$

Если $abcd<0$, то среди $a,b,c$ и $d$ 1 или 3 отриц. числа. Если их 3, то домножим все переменные на $-1$. Пусть: отриц. чис. - это $d$

$\sqrt[4]{a^2b^2c^2d^2} \leq 3$

$|abcd| \leq 9$

$-9 \leq abcd \leq 9$

при $a=b=\sqrt{3}$, $c=d=-\sqrt{3}$:

$a+b+c+d = \sqrt{3}+\sqrt{3}-\sqrt{3}-\sqrt{3} = 2\sqrt{3}-2\sqrt{3}=0$

$a^2+b^2+c^2+d^2 = (\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2+(-\sqrt{3})^2+(-\sqrt{3})^2 = 3+3+3+3=12$

$abcd = \sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot(-\sqrt{3})\cdot(-\sqrt{3}) = 3\cdot 3 = 9$

$d=-(a+b+c) \Leftrightarrow a+b+c+d=0$. $a>0, b>0, c>0$

$a^2+b^2+c^2+d^2=12$

$a^2+b^2+c^2+(a+b+c)^2=12$

$a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca=6$

$(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)^2=36$

Пусть: $(x,y,z) = \frac{a^xb^yc^z + a^xb^zc^y + a^yb^xc^z + a^yb^zc^x + a^zb^xc^y + a^zb^yc^x}{6}$

12

$(3(2,0,0)+3(1,1,0))^2=36$

$3(4,0,0)+12(3,1,0)+9(2,2,0)+12(2,1,1)=36$

$3(2,1,1)+12(2,1,1)+9(2,1,1)+12(2,1,1) \leq 36$ по неравен. Мюрхеда

$36(2,1,1) \leq 36$

формулировка?

доказательство?

$3(2,1,1) \leq 3$

$abc(a+b+c) \leq 3$

$-abcd \leq 3$

$abcd \geq -3$

при $a=b=c=1$, $d=-3$

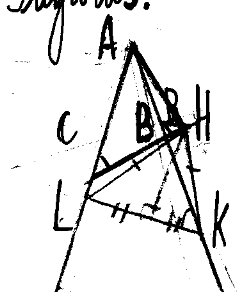
$a+b+c+d = 1+1+1-3 = 3-3=0$

$a^2+b^2+c^2+d^2 = 1^2+1^2+1^2+(-3)^2 = 1+1+1+9=12$

$abcd = 1\cdot1\cdot1\cdot(-3) = -3$

Ответ: $-3$ и $9$.

Задача 5.




1. $\angle AKL = \angle ACB$, так как $KBCL$ - вписанный четырёхуг.

$\angle AKL = 180^\circ - \angle CHA - \angle HAC$

$\angle AKL = 90^\circ - \angle HAC$

$90^\circ - \angle AKL = \angle HAC$

2. $H \in$ сер. пер. $KL$, т. к. $HL=HK$

3. $AB \neq AC$

$\angle ABC \neq \angle ACB$ (по приз. равнобед. $\Delta$)

$\angle AKL \neq \angle ALK$, так как $KBCL$ - впис. четырёх.

$AK \neq AL$ (по свой. равноб. $\Delta$)

4. Используя условия $\angle HAL = 90^\circ - \angle AKL$ и $H \in$ сер. пер. $KL$, возможно единств. способ задать $H$ по $\Delta AKL$ ($AK \neq AL$), т. к. $H$ явл. перес. 2 прямых (не совпадающ.).

Пусть: $O$ - центр опис. окр. $\Delta AKL$.

5. $O \in$ сер. пер. $KL$, т. к. $OK=OL$

6. $2\angle AKL = \angle AOL$

$2\angle AKL = 180^\circ - \angle OLA - \angle LAO$

$2\angle AKL = 180^\circ - 2\angle OAL$