VL159

7959

60

1

РГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

1	2	3	4	5	6	сумма
3	2	2	2	3	0	12

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Тамбов

Дата 14.03.2019

* *

10–11 КЛАСС. ДЕВЯТЫЙ ВАРИАНТ

1. Какое наибольшее количество ладей можно расставить на шахматной доске так, чтобы каждую ладью било не более трех других? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Числа x, y, z — углы треугольника, причем больший угол z не превосходит $\frac{\pi}{2}$. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \sqrt{\sin x \cdot \sin(z-y)} + \sqrt{\sin y \cdot \sin(z-x)}.$$

3. Дан четырехугольник $ABCD$, отличный от параллелограмма. На сторонах AB, BC, CD и DA выбираются соответственно точки K, L, M и N так, что $KL \parallel MN \parallel AC$ и $LM \parallel KN \parallel BD$. Найдите геометрическое место точек пересечения диагоналей параллелограмма $KLMN$.

4. Натуральное число x в восьмеричной системе 2019-значное, его младшая цифра равна 3, а все остальные цифры отличны от 3 и совпадают через одну. Число y получается записью цифр x в обратном порядке. Оказалось, что восьмеричное представление $x \cdot y$ содержит только цифры 1 и 6. Найдите $x \cdot y$ (в восьмеричной системе).

5. В однокруговом турнире по настольному теннису участвовало 100 спортсменов, причем ни один из них не выиграл все матчи. Будем говорить, что игрок A *круче* игрока B, если A выиграл у B или найдется такой игрок C, что A выиграл у C, а C выиграл у B. Каково наименьшее количество теннисистов, оказавшихся по итогам турнира круче всех остальных? Ничьих в теннисе не бывает.

6. На столе лежат два конуса с общей вершиной O, касаясь друг друга внешним образом. Угол между их осями симметрии равен $\operatorname{arctg} \frac{4}{3}$. Найдите максимальный угол при вершине меньшего из двух конусов с вершиной O, которые лежат на столе и касаются внешним образом первых двух конусов. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении.)

№4.

$x_8 = \underbrace{ab}\,\underbrace{ab} \dots \underbrace{ab}\,3$ a и b − цифры от 0 до 7.

$y_8 = 3\,\underbrace{ba}\,\underbrace{ba} \dots \underbrace{ba}$

$(x \cdot y)_8$ − содержит только 1 и 6

1) Обозначим $A = ab$, $B = ba$. A, B − блоки по 2 цифры, которые повторяют.

Тогда, $x = A \cdot \frac{100^n - 1}{100 - 1} + 3$

$y = \underbrace{3 \cdot 10^{2018}} + \underbrace{B \cdot \frac{100^n - 1}{100 - 1}}$ (для блока повторов)

2). $(x \cdot y)$ содержит только 1 и 6

$3 \cdot a = 1$ (в 8-и рич.)!
или $3 \cdot a = 6$

$3 \cdot 0 = 0$
$3 \cdot 1 = 3$
$3 \cdot 2 = 6$
$3 \cdot 3 = 9 \equiv 1$
$3 \cdot 4 = 12 \equiv 4$
$3 \cdot 5 = 15 \equiv 1$.
$3 \cdot 6 = 18 \equiv 4$
$\cancel{7}$

значит цифра a − 2 или 5. ($a \neq 3$).

~~если $a = 5$:~~ $\cancel{5\ b\ 3}$

3) ~~если~~ если $a = 2$:

$$\begin{array}{r} \times\ 2b\,2b \dots 2b\,3 \\ b\,2 \\ \hline \dots 6 \end{array}$$

$6 \Rightarrow 2b$ на этом месте сумма по модулю 8: $2b + b^2$

$2b + b^2 \equiv 1$ или 6. (mod 8).

$b = 0: \equiv 0$
$b = 1: \equiv 3$
$b = 2: \equiv 0$
$b = 3: \equiv 6 + 9 = 15 \equiv 1$ $(b \neq 3)$
$b = 4: \equiv 8 + 16 = 24 \equiv 3$
$b = 5: \equiv 10 + 25 = 35 \equiv$ [illegible]

Чистовик

№5.

1). Рассмотрим для 3-х спортсменов:

$A \to B$ (A→B, значит A выиграл B).

$A \leftarrow C$ ни 1 не выиграл всё ⇒

$B \to C$ ⇒ $\left.\begin{matrix} A \to B \\ A \leftarrow C. \\ B \to C \end{matrix}\right\}$ однозначно

~~А~~ ~~круче~~:

A круче B и C

B круче C и A ⇒ ~~в~~ трое круче всех.

C круче A и B

2). Для 4-х:

$A \to B$ $B \to C$; $C \to D$.

$A \leftarrow C$; $B \leftarrow D$

$A \to D$

~~А~~ ~~может~~ Никто не выигрывает всех ⇒

⇒ хоть 1 знак в I столбце влево. (например $A \leftarrow C$)

К предыдущей расстановке добавляем D.

$\left.\begin{matrix} \text{A круче: B, C, D} \\ \text{B круче: C, D, A} \\ \text{C круче: A, B, D.} \end{matrix}\right\}$ кол-во тех, кто „круче" всех – не изменилось

D круче: B, C.

3) Добавим E:

$A \to B$ $\quad B \to C \quad C \to D \quad$ ~~DE~~ $D \leftarrow E$

$A \leftarrow C \quad B \leftarrow D \quad C \to E$

$A \to D \quad B \to E$

$A \to E$

4) Расставим так, чтобы каждый был круче E, но E не круче всех (кол-во самых крутых не изменится).

A круче: B, C, D, E
B: C, D, A, E
C: D, A, B, E
D: B, C, E
E: D, B

действуя аналогично, прибавляем следующего игрока.
~~(A, B, C - его~~
Все должны быть его круче
и A, B, C - его выиграть.

Все стрелки вправо, последнего влево.

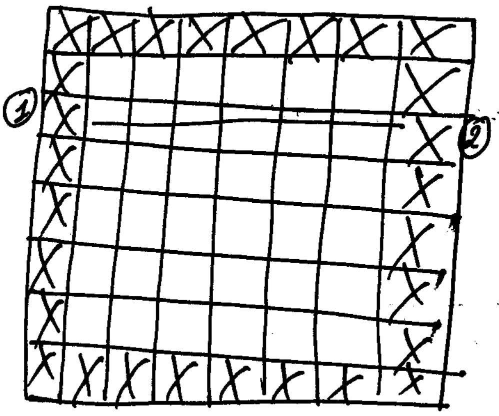
Таким образом, можно дойти до 100, не изменив кол-во тех, кто „круче" остальных.
Менее 3-х невозможно сделать ни для какой расстановки из 3-х или 4-х.
При прибавлении нового (к любой исходной расстановке), либо A, B, C ~~круче~~ выиграли его. И он не круче всех. (A, B, C - остались).
Либо ~~он~~ A (например) не круче, чем он. Но A круче всех остальных. Новый игрок встанет на место A.
⇒ менее 3-х невозможно.

Ответ: 3.

Чистовик

№1.

1). Приведём пример для 28-ми.



все ладьи стоят по краям, и каждую бьёт ровно 3 другие. Внутрь ни одну поставить нельзя.

2). Если убрать ладью 1, ~~новые не добавят~~, можно добавить не более одной в соответствующей строке.

Если одновременно убрать 1 и 2 - аналогично в эту строку можно поставить не более 2-х.

Таким образом, убирая ладьи на границе ~~мы~~ и добавляя внутри общее число не изменится.

Значит, любую подходящую расстановку можно свести к такой (сдвинув к сторонам по вертикали или по горизонтали).

Приведение, число не уменьшится ⇒

⇒ 28 - это максимум

Ответ: 28.

1

Чистовик.

№2.

$x+y+z=\pi$; $z \le \frac{\pi}{2}$.

$A=\sqrt{\sin x\cdot \sin(z-y)}+\sqrt{\sin y\cdot \sin(z-x)}$.

1). Докажем, что значение выражения максимально при $z=\frac{\pi}{2}$.

При $z=\frac{\pi}{2}$: $\cancel{x+y}$ $A_1=\sqrt{\sin x\cdot \sin(\frac{\pi}{2}-y)}+\sqrt{\sin y\cdot \sin(\frac{\pi}{2}-x)}$.

при $z<\frac{\pi}{2}$: $\sin(z-y)<\sin(\frac{\pi}{2}-y)$.

так как z — острый угол, y — угол о.

$(z-y)$ и $(\frac{\pi}{2}-y)$ в I четверти.

Аналогично для x. $\sin(z-x)<\sin(\frac{\pi}{2}-x)$.

$$A=\sqrt{\sin x\cdot \underbrace{\sin(z-y)}_{<\sin(\frac{\pi}{2}-y)}}+\sqrt{\sin y\cdot \underbrace{\sin(z-x)}_{<\sin(\frac{\pi}{2}-x)}}<A_1.$$

То есть для $\forall$ x, y подходящих условию $A<A_1$.

A_1 — значение в $z=\frac{\pi}{2}$.

При $z=\frac{\pi}{2}$ — максимум (независимо от x и y)

$x+y=\frac{\pi}{2}$; $\cancel{x=\ldots}$ $y=\frac{\pi}{2}-x$; $\frac{\pi}{2}-y=x$.

2). $A=\sqrt{\sin x\cdot \sin(\frac{\pi}{2}-y)}+\sqrt{\sin y\cdot \sin(\frac{\pi}{2}-x)}=$

$\sin y=\sin(\frac{\pi}{2}-x)=\cos x$

$\sin(\frac{\pi}{2}-x)=\cos x$

$\cancel{=\sqrt{\sin x^2}+\sqrt{\sin y^2}}$

$\sqrt{\sin x^2}+\sqrt{\cos^2 x}=\sin x+\cos x$, x — угол в I четверти.

$f(x)=\sin x+\cos x$; $f'(x)=\sin x-\cos x=0 \Rightarrow \sin x=\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$x=y=\frac{\pi}{4}$, $z=\frac{\pi}{2}$.

$\cancel{A_{max}=\sqrt{\ldots}}$ $A_{max}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2=\sqrt{2}$

Ответ: $\sqrt{2}$.

2

Санкт-Петербургский государственный университет

Чистовик.

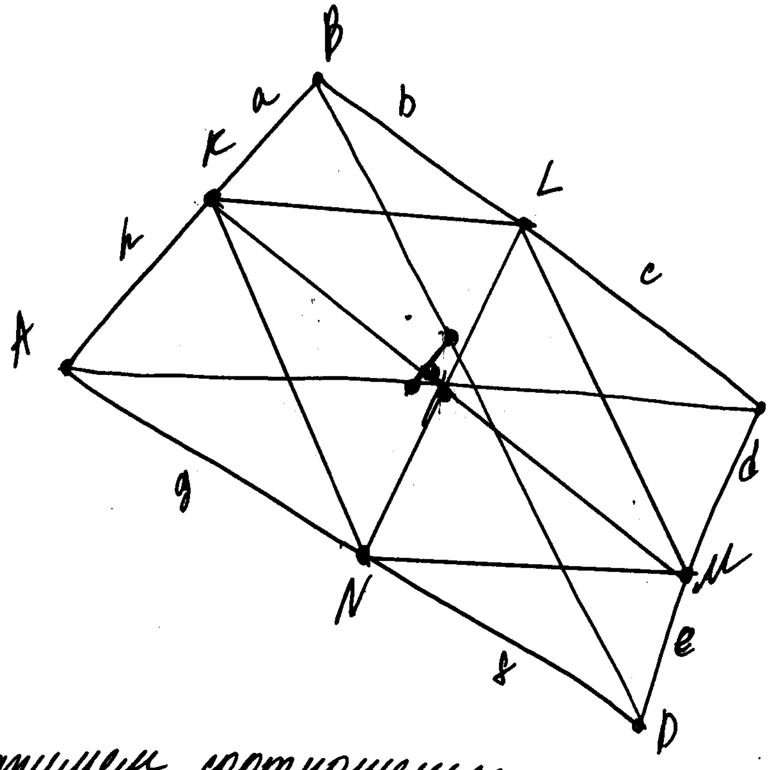
№3.

1) Возьмём произвольно точку $K \in AB$

проведём $KL \parallel AC$

По теореме Фалеса:

$\frac{BK}{AB} = \frac{BL}{BC}$ ($KL \parallel AC$).



2). Из L проведём $LM \parallel BD$ до $\cap$ с CD

Тогда: $\frac{CL}{BC} = \frac{CM}{CD}$.

и проведём $KN \parallel BD \parallel LM$.

3). Запишем соотношения:

1. $\frac{a}{a+h} = \frac{b}{b+c} \Rightarrow \frac{a+h}{a} = 1+\frac{h}{a} = \frac{b+c}{b} = 1+\frac{c}{b}$ $\quad \frac{h}{a} = \frac{c}{b}$

2. $\frac{c}{b+c} = \frac{d}{d+e}$: $\frac{b+c}{c} = \frac{b}{c}+1 = \frac{d+e}{d} = 1+\frac{e}{d}$ $\quad \frac{b}{c} = \frac{e}{d}$

$\frac{c}{b} = \frac{d}{e}$

~~$\frac{g}{e+d} = \frac{f}{f+g} \Rightarrow \frac{e+d}{e} = 1+\frac{d}{e} = \frac{f+g}{f} = 1+\frac{g}{f} \Rightarrow \frac{d}{e} = \frac{g}{f} = \frac{c}{b}$~~

3. $\frac{h}{a+h} = \frac{g}{f+g} \Rightarrow \frac{h+a}{h} = 1+\frac{a}{h} = \frac{f+g}{g} = 1+\frac{f}{g} \Rightarrow \frac{a}{h} = \frac{f}{g}, \frac{h}{a} = \frac{g}{f}$.

получим: $\frac{h}{a} = \frac{c}{b} = \frac{d}{e} = \frac{g}{f}$.

$\Downarrow$

MN получится $\parallel AC$.

$NM \parallel KL$, $KN \parallel LM$ (по построению) $\Rightarrow$ $KLMN$ — параллелограмм

3

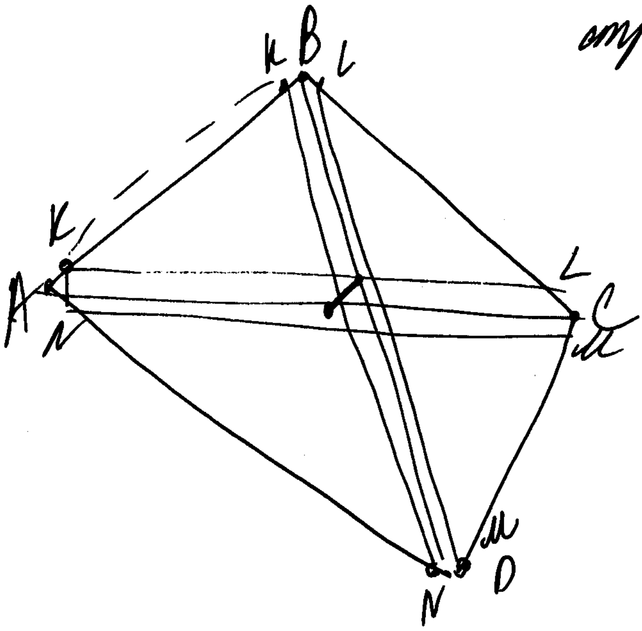
(продолжение) $\rightarrow$

№3. Чистовик.

K - выбираем произвольно.

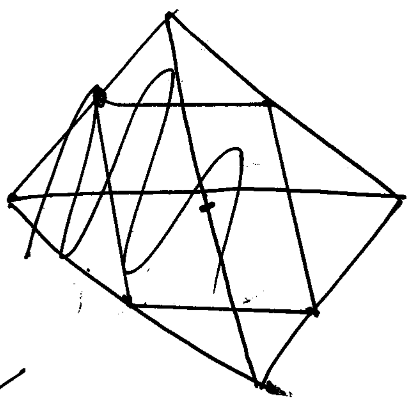
Таких параллелограммов бесконечно много.

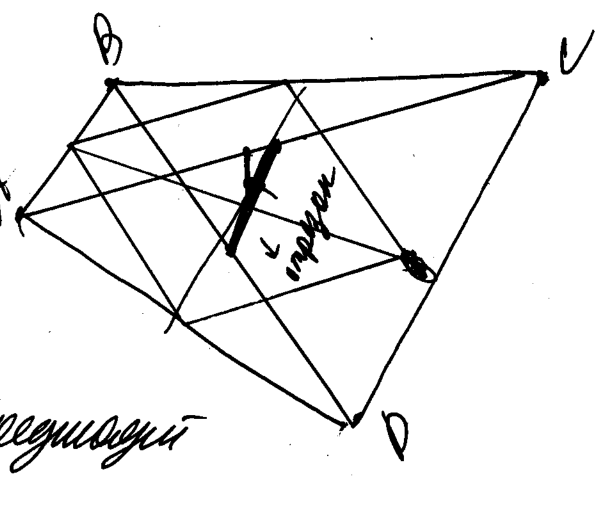
2). Выберем K и L - очень близко к B. Тогда точка пересечения диагоналей будет стремиться к тому, чтобы лежать в середине (BD). (стороны почти сливаются).



Далее двигаем точку K вдоль AB вниз. (получаем все возможные пар). получаем M и N - очень близко к K. Тогда т. пересеч. диагоналей стремиться к середине AC.

ABCD - не паралл. => середина AC не совпадает с серединой BD.





Ответ: ГМТ - это отрезок, соединяющий середины BD и AC.

4

Санкт-Петербургский государственный университет

Чистовик №2 (продолжение).

$(x\cdot y)$ содержит 1 и 6.

$3\cdot a \equiv 1$ или $6 \pmod 8$.

$3\cdot 0\equiv 0$ $\quad 3\cdot 4=12\equiv 4$

$3\cdot 1\equiv 1$ $\quad 3\cdot 5=15\equiv 7$

$3\cdot 2\equiv 6$ $\quad 3\cdot 6=18\equiv 2.$

$3\cdot 7=21\equiv 5$

Подходит только $a=2$.

$$\begin{array}{r} \times\ 2b\,2b\ldots\ 2b\ 3 \\ 2\ b\ 2 \\ \hline \cdot\ 6\ 6 \\ x. \end{array}$$

на месте x: $3b+b^2 \pmod 8$. 6 или 1

$b=0: \equiv 0$

$b=1: \equiv 4$

$b=2: \equiv 6+4=10\equiv 2$ $(b\neq 3)$.

$b=4: \equiv 12+16=28\equiv 4$

$b=5: \equiv 15+25=40\equiv 0$

$b=6: \equiv 18+36=54\equiv 6$

$b=7: \equiv 21+49=70\equiv 6$

b, либо 6, либо 7

$x=6$.

заканчивается на 66 произведение.

число либо: ~~26 00~~.

3). На каком-то месте появится единица.

на месте до x: ~~6+111~~ $6+2b+4=10+2b \equiv 1$ или 6.

$b=6: \equiv 10+12=22\equiv 6$

$b=7: \equiv 10+14=24\equiv 0.$

подходит $b=6$.

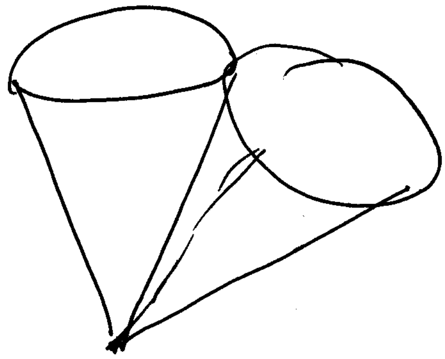
Изначальное число:

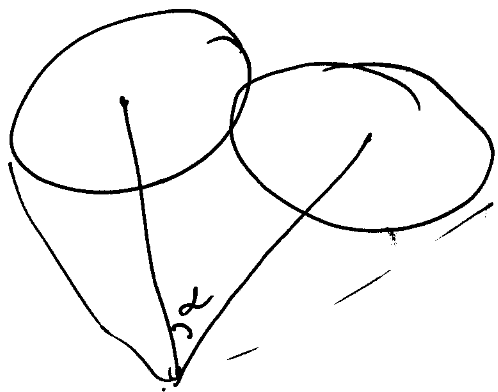
$26\,26\ldots 26\ 3 \cdot 36262\ldots 62.$

все вторая половина 6
в середине 61.
первое часть 11.

Ответ: $11\ldots 1166\ldots 66.$

№6 Чистовик.





$\alpha = \mathrm{arctg}\left(\frac{4}{3}\right)$