2740

СКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

60

1	2	3	4	5	6	сумма
[illegible]	[illegible]	[illegible]	–	[illegible]	–	[illegible]

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Краснодар

Дата 05.03.2019

* *

10–11 класс. Второй вариант

1. Имеется 9 черных ладей и n белых. При каком наибольшем n их можно расставить на шахматной доске так, чтобы одноцветные ладьи не били друг друга? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Даны положительные числа x, y, z. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{xyz\,(x+y+z)}{x^4+y^4+z^4}\,.$$

3. Окружность ω единичного радиуса проходит через вершины B и C треугольника ABC и вторично пересекает его стороны AB и AC в точках K и L соответственно. На лучах BL и CK отмечены соответственно такие точки P и Q, что $BP = AC$ и $CQ = AB$. Найдите расстояние между центрами описанных окружностей треугольников APQ и KBC.

4. Шестнадцатиричная запись квадрата натурального числа x представляет собой два одинаковых соседних блока из n цифр. Может ли n равняться 2023?

5. В однокруговом турнире по настольному теннису участвует $2k$ спортсменов. В каждом туре все участники проводят по одному матчу. Какое наименьшее число туров надо сыграть, чтобы при любом расписании игр обязательно нашлось трое теннисистов, сыгравших друг с другом?

6. Имеется три одинаковых конуса с общей вершиной, касающихся друг друга внешним образом, а также два шара, касающихся внешним образом друг друга и всех конусов. Радиусы шаров относятся как $1:3$. Найдите угол при вершине конусов. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении).

Чистовик

№1

Пример.

		б					
	б	ч	б				
б	ч	б	ч	б			
			б	ч	б		
	б		ч	б	ч	б	
			б	ч	б	ч	б
				б	ч	б	
					б		

Никакие одноцветные друг друга не бьют. черных 9, белых 17

Ответ: 17

Оценка:
Рассмотрим белые фишки
Посмотрим на столбец I в нем k белых фишек. между любыми двумя белыми должна стоять хотя бы одна черная, иначе белые будут бить друг друга. Значит черных $\ge k-1$. Просуммируем по каждому столбцу. Всего их 8, поэтому кол-во белых $- 8 \le$ кол-во черных
черных 9 штук, поэтому белых не больше чем $8+9=17$

№2.

Док-ть что
$$x^4+y^4+z^4 \ge \frac{(x+y+z)(x^3+y^3+z^3)}{3}$$

$$3x^4+3y^4+3z^4 \ge x^4+y^4+z^4+x^3y+x^2z+y^3x+y^3z+z^3x+z^3y$$

$$2(x^4+y^4+\cancel{z}z^4) \ge x^3y+y^3z+z^3x+x^3z+y^3x+z^3y$$

Заметим, что по транснеравенству (т.к. x, y, z положительны x, y, z упорядочены так же как x^3, y^3, z^3)

$$x^4+y^4+z^4 \ge x^3y+y^3z+z^3x \quad \text{и} \quad x^4+y^4+z^4 \ge x^3z+y^3x+z^3y$$

(например если $x \ge y \ge z$
$x \ge y \ge z$
$x^3 \ge y^3 \ge z^3$)

Таким образом
$$x^4+y^4+z^4 \ge \frac{(x+y+z)(x^3+y^3+z^3)}{3}$$

Чистовик

$\frac{(x+y+z)(x^3+y^3+z^3)}{3} \geq xyz(x+y+z)$, $x+y+z>0$

$\frac{x^3+y^3+z^3}{3} \geq xyz$ по Нер-ву Коши для 3х чисел

$\Rightarrow A \leq 1$

$\exists\ x=y=z=1$ $A=\frac{1\cdot 3}{3}=1$ Значит максимальное значение $A - 1$ Ответ: 1

№5.

Оценка: $\exists$ туров $\leq k$. Рассмотрим двудольный граф, в каждой доле по k вершин. ~~Вер~~ Вершины — это спортсмены, а вершины соединены ребром, если между двумя спортсменами был матч. Обозначим вершины в долях как $a_1, a_2 \dots a_k$ и $b_1, b_2 \dots b_k$

$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \dots \quad a_k$

$b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad \dots \quad b_k$

Тогда $\exists$ в первом туре играли $a_1-b_1;\ a_2-b_2 \dots$ во втором $a_1-b_2;\ a_2-b_3 \dots$ и т.д. со сдвигом на один. Тогда ~~через~~ за k туров получим полный двудольный граф. В нем нет циклов нечетной длины, в частности 3. Значит туров $> k$, т.е. $\geq k+1$

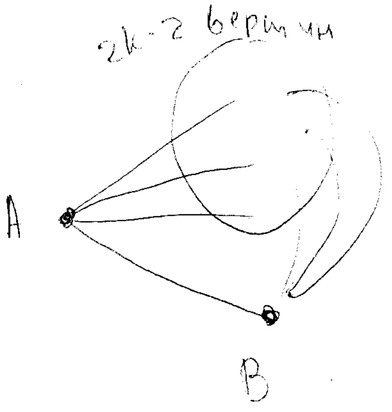
Д-ем, что $k+1$ подходит.

~~Рассмотрим одну~~ вершину ~~человека~~ ~~и все ребра, для которых вершина конец ребра. Их k+1~~

Рассмотрим одну вершину (назовем ее A) и все вершины, связанные с ней

Лист 2

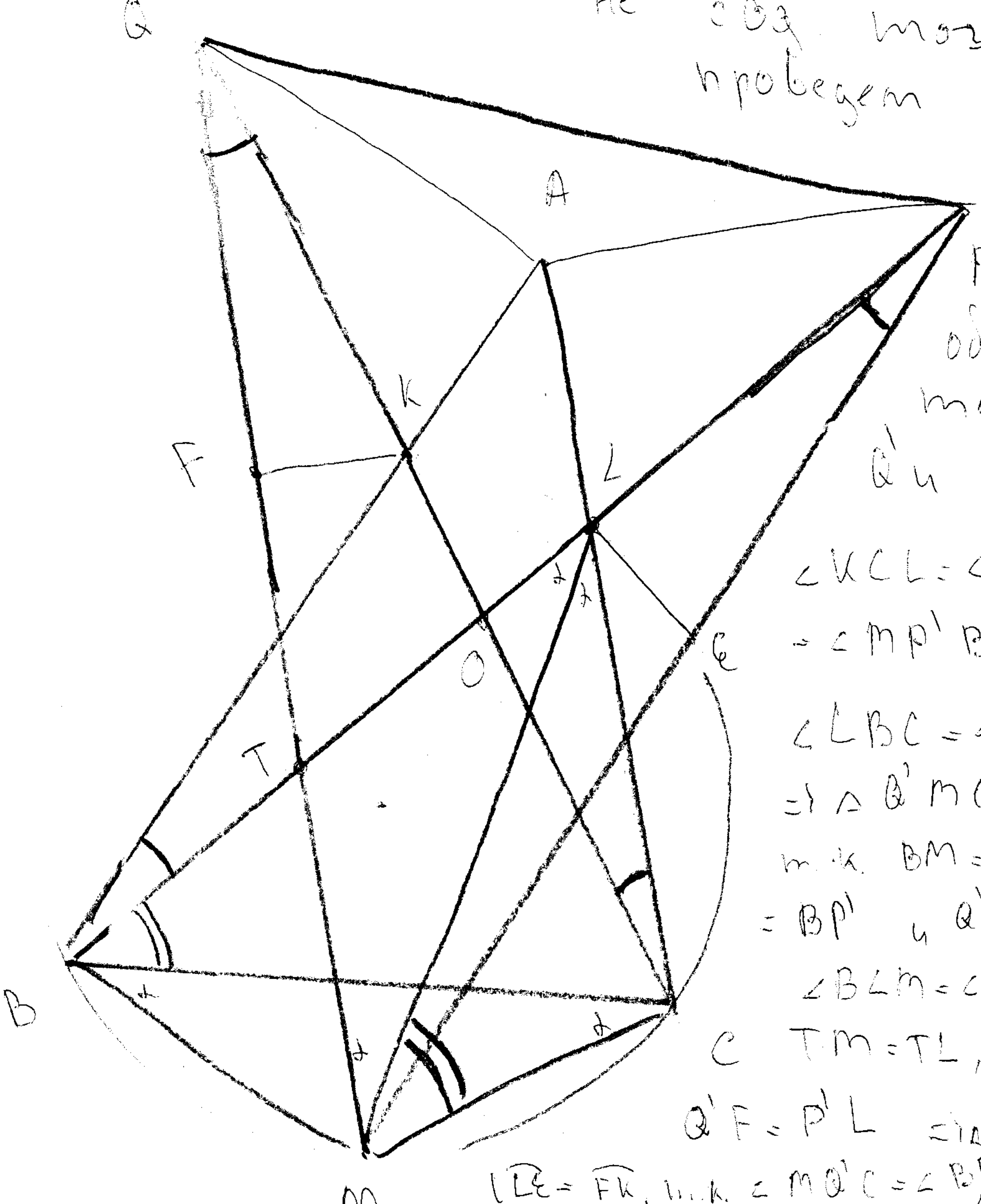
Чистовик



Рассмотрим одну из вершин, связанных с A, назовем ее B. B связана с k вершинами кроме A. A связана с k вершинами кроме B. Но всего вершин отличных от A и B $2k-2$. $k+k>2k-2$, значит найдется вершина C связанная и с A и с B, но тогда люди A, B и C сыграли друг с другом

Ответ: $k+1$

№3



M - середина дуги BC, не сод. точку A проведем из M прямые параллельные AB и AC обозначим точки пересеч. Q' и P'. $\angle BCM=\alpha$

$\angle KCL=\angle LCK=\angle CQ'M=$
$=\angle MP'B$

$\angle LBC=\angle LMC$

$\Rightarrow \triangle Q'MC=\triangle P'BM$ т.к. $BM=MC \Rightarrow Q'M=$
$=BP'$ и $Q'C=MP'$

$\angle BLM=\angle TML=\alpha \Rightarrow$
$TM=TL$, $BT=TF \Rightarrow$
$Q'F=P'L \Rightarrow \triangle P'LE=\triangle Q'FK$

$\cup LE=\cup FK$, т.к. $\angle MQ'C=\angle BP'M$ и они равны полуразности

Лист 3

Чистовик дог BM и LE, и MC и FK.
. Следовательно если посмотреть на точки P и Q'
как на B и C, то получится такая же картинка
(т.к. $\triangle BOC = \triangle Q'OP$, $BC = Q'P'$) => $BP' = AC$, $CQ' = AB$, т.е.
точки Q' и Q; P' и P. совпадают. Знагит $BC = QP$

$\angle = \frac{4d - 2\angle KCL}{2}$ $\triangle BAP' = \triangle CAQ'$ по I пр.

$\Rightarrow \angle Q'AP = 180 - \angle BKC$ т.е. их синусы равны.

Знагит по теореме синусов равны р. оп. окр.

при гомотетии одной окружности в др.

$\triangle AQ'P'$ пер. в $\triangle MBC$, центр в центр => прямая
соед. A с центром ~~в~~ пер. в прямую сое. т. с центр
рад. равны => ~~рае~~ центр лежит на окр.

Ответ: 1