Рассмотрим 2 случай, когда человек имеет 2 победы в тройке и 9 в турнире, тогда $10 \cdot \frac{9 \cdot 8}{2}$ троек подходят.
(кол-во игроков с 9 победами; 2 соперника, которых он победил)

Всего $10(45+36)$ ~~троек~~ троек второго типа (где у одного из них 2 победы)

Всего ~~20·19·~~ C_{20}^3 троек => всего троек первого типа $C_{20}^3 - 810 = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{6} - 810 =$

$= (19 \cdot 3 \cdot \cancel{3}^{2} - 81) 10 = (38 - 27) 30 = \underline{330 \text{ троек}}$ √

Ответ: 330

№2

$$A = \frac{(a-b)^2(b-c)^2(a-c)^2}{((a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2)^3}$$

$$\sqrt[3]{A} = \frac{\sqrt[3]{(a-b)^2(b-c)^2(a-c)^2} \cdot 3}{((a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2) \cdot 3}$$

Заметим, что сверху среднее геометрическое, а снизу среднее арифметическое

$\Rightarrow \sqrt[3]{A} \leq \frac{1}{3} \Rightarrow A < \frac{1}{27}$

(Равенство только если $(a-b)^2 = (a-c)^2 = (b-c)^2$, что верно только при $a=b=c$, что противоречит условию)

$A < \frac{1}{27}$

ГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

2

60

1	2	3	4	5	6	сумма
4	0	4		4		12

6798

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Барнаул

Дата 16.03.2019

* *

10–11 класс. Шестой вариант

1. Какое наибольшее количество фишек можно расставить на клетчатой доске 12×12 так, чтобы на каждой диагонали располагалось не более пяти фишек?

2. Даны различные числа a, b, c. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right)^3}.$$

3. На стороне BC остроугольного треугольника ABC выбрана точка D, а на продолжении стороны AB за точку B — точка X. Прямые, проходящие через X параллельно BC и AD, пересекают соответственно лучи AC и CB в точках Y и Z. Пусть M, K и N — середины отрезков BC, YZ и AD соответственно. Найдите угол KMN.

4. Восьмеричная запись натурального числа x — это написанная 2019 раз подряд пара каких-то цифр. Число y получено некоторой перестановкой цифр x. Может ли восьмеричная запись числа $x \cdot y$ представлять собой многократно повторенный блок из четырех цифр?

5. В однокруговом турнире по настольному теннису приняло участие 20 человек. Одна половина теннисистов одержала в турнире по 10 побед, вторая половина — по 9 побед. Сколько по итогам турнира оказалось троек участников, одержавших во встречах между собой ровно по одной победе? Ничьих в теннисе не бывает.

6. Три конуса с общей вершиной O касаются друг друга внешним образом. Первые два конуса имеют угол при вершине $\frac{2\pi}{3}$, а ось симметрии третьего конуса перпендикулярна осям симметрии первых двух. Еще один конус с вершиной O касается внешним образом трех других. Найдите его угол при вершине. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении.)

№1 Раскрасим нашу доску в шахматном порядке.

Заметим, что все диагонали, или на чёрных, или на белых клеточках. =>

=> если мы разместим наши фишки только на чёрных клеточках, то

~~На~~ все „белые" диагонали будут пустыми. => можно найти максимальное

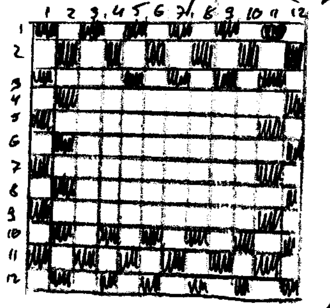
кол-во фишек только на чёрных полях, а затем повторить расположение

фишек для белых клеточек. (повернуть доску на 90° и все чёрные клеточки ~~будут белыми~~ будут белыми)

Заметим, что каждая клеточка участвует в 2-х диагоналях =>

=> Если посчитать все ~~клеточки~~ фишки на диагоналях, то их кол-во совпадёт

с кол-вом фишек на диагоналях.



(черные клеточки — клеточки на которых стоят фишки)

Заметим, что на доске ровно 12 диагоналей => максимум 60 ~~клеточек~~ фишек (на каждой диагонали ≤5 фишек), но клеточка (1;1) единственная на своей диагонали, как и клеточка (12,12) =>

максимум 60-4-4 фишек

В диагоналях (3,1) (2,2) (1,3) только 3 клеточки => максимум 3 фишки,

как и на диагоналях (12,10) (11,11) (10,12) => максимум 60-8-2-2

Также на клетках (1,1) (2,2) (3,3) (10;10) (11;11) (12;12) не ~~могут~~ может стоять

6 фишек => ещё на 1 фишку меньше => максимум фишек 60-12-1=47, а

для 47 у меня есть пример. => максимум на чёрных клеточках 47 =>

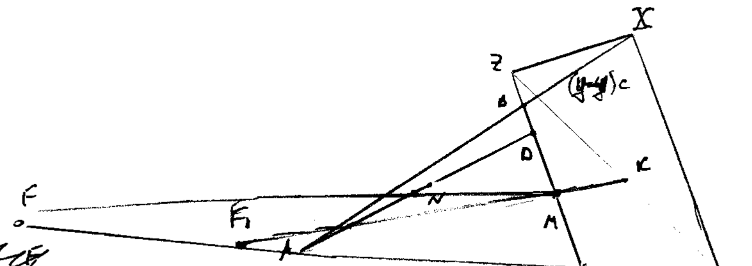
всего максимум 94 ~~фишки~~ фишки

Ответ: 94.

№3 ~~В Пусть~~

Рассмотрим △ADC и опустим перпендикуляр из точки M и N на AC

~~перпендикуляр из точки M обозначим~~

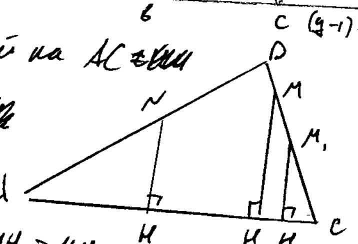


Пусть M_1 - середина DC, то перпендикуляр M_1H_2, опущенный на AC ~~равен~~

равен HN, а ~~...~~

$\triangle CMH_1 \sim \triangle CM_1H_2$ по 2-м углам => $\frac{MH_1}{M_1H_2} = \frac{CM}{CM_1} \geq 1$ т.к

$CM = \frac{1}{2}BC$, а $CM_1 = \frac{1}{2}DC$, (т.к точка D лежит на BC) => $MH_1 \geq M_1H_2$ => $MH_1 \geq NH$ => или



~~MN~~ MN пересекает AC, то тогда за точку A. (если точка M лежит в DC, или

M не лежит в DC, то MN пересекает отрезок AC)

Допустим, что MN ∥ AC, но т.к N - середина AD, то MN средняя линия △ADC =>

=> M - середина DC => D совпадает с точкой B => точка Z совпадает с

точкой B => NMK - средняя линия △ABY => ∠KMN = 180° (NM∥AC; NK∥AC => они

лежат на одной прямой).

Пусть MN ∩ AC = F, то по теореме Менелая в △ADC и секущей NM

$$\frac{DN}{NA}\cdot\frac{AF}{FC}\cdot\frac{CM}{MD}=1$$

$$\frac{AF}{FC} = \frac{MD}{CM}$$

(Если M лежит на BD, то т. Менелая для △ADC и секущей FN

$\frac{ax+a-ax}{2x+2}$

Пусть ~~AF/FC~~ AC = b, а AF = xb, ~~...~~ BC = a, то $\frac{AF}{FC} = \frac{x}{x+1} = \frac{2\cdot MD}{a}$ => $MD = \frac{ax}{2x+2}$ => $BD = \frac{a}{2} - \frac{ax}{2x+2}$

Рассмотрим △ABC и △AXY они подобны т.к BC ∥ XY. => $\frac{AB}{AX} = \frac{AC}{AY} = \frac{1}{y}$ => $CY = (y-1)b$

Пусть AB = c, то BX = ~~...~~ c(y-1)

~~Из подобия~~

$\triangle ADB \sim \triangle XZB$ по 2-м углам => $\frac{AB}{BX} = \frac{BD}{ZB} = \frac{1}{y-1}$ => $ZB = (y-1)\frac{a}{2x+2}$

~~...~~ По теореме Менелая в △CZY и секущей MK (MK ∩ AC = F_1)

$$\frac{ZM}{MC}\cdot\frac{CF_1}{F_1Y}\cdot\frac{YK}{KZ} = 1 \Rightarrow \frac{CF_1}{F_1Y} = \frac{BM}{ZM}$$

$$\frac{AF}{FC} = x \Rightarrow \frac{AF}{AF+b} = x \Rightarrow AF = \frac{b}{x-1}$$

$$\frac{CF_1}{F_1Y} = \frac{ZM}{BM} = \frac{\frac{a}{2}+\frac{a(y-1)}{2x+2}}{\frac{a}{2}} = \frac{a(x+1)+a(y-1)}{a(x+1)} = \frac{x+y}{x+1}$$

$$\frac{AF_1+b}{AF_1+yb} = \frac{x+y}{x+1}$$

$$AF_1(x+1)+bx+b = AF_1(x+y)+yxb+y^2b$$

$AF_1 = \frac{b}{x-1}$ => F_1 и F совпадают => MNK - прямая. => ∠NMK = 180°

Ответ: 180°

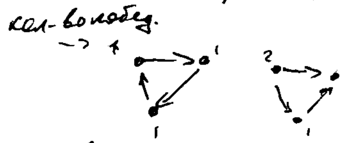
№5

Решим графом, где ребра - кто кого победил, а вершины - ~~...~~ игроки.

~~...~~ Граф полный т.к всего вершин 20 => максимальное число рёбер 190,

как и кол-во побед. (10·10+(10·9)

Рассмотрим любые 3 вершины существует 2 варианта



(Направление означает, кто кого победил)

Заметим, что только первый △ подходит по условию.

Найдём кол-во вторых треугольников.

В таком △ только один человек имеет ~~...~~ 2 победы => если мы найдём все

тройки, в которых один человек имеет 2 победы, то мы найдём все

такие тройки. Рассмотрим 1 случай, когда человек имеет 2 победы в тройке,

и 10 побед в турнире. тогда ровно $10\cdot\frac{10\cdot9}{2}$ троек подходят и все они различные.