Задача 4 продолжение.) Переберем все такие

b^2: 1, 4, 9, 16. 1 нас не интересует,

на 2, а следовательно на 4 и 16

10^n+1 не делится, т.к. оно ~~нечетное~~ нечетное,

а т.к. $10 \equiv_9 1$, то и $10^n \equiv_9 1 \Rightarrow 10^n+1 \equiv_9 2$,

т.е. не делится и на 9.

Значит, таких b нет, значит, такого a

не существует, как и такой записи при 20182019.

Ответ: нет.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

8973

1

15

1	2	3	4	5	6	сумма
3	3	0	1	2	0	9

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Новосибирск

Дата 07.03.2019

* *

10–11 класс. Первый вариант

1. Имеется 8 черных ладей и n белых. При каком наибольшем n их можно расставить на шахматной доске так, чтобы одноцветные ладьи не били друг друга? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Даны положительные числа x, y, z. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{xyz\,(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4+(yz)^4+(xz)^4}}.$$

3. Дан треугольник ABC с меньшей стороной AB. На сторонах AB и AC выбраны соответственно точки X и Y так, что $BX = CY$. Под каким углом прямая, проходящая через центры описанных окружностей треугольников ABC и AXY, пересекает прямую BC, если $\angle ABC = \beta$ и $\angle BCA = \gamma$?

4. Десятичная запись квадрата натурального числа x представляет собой два одинаковых соседних блока из n цифр. Может ли n равняться 20182019?

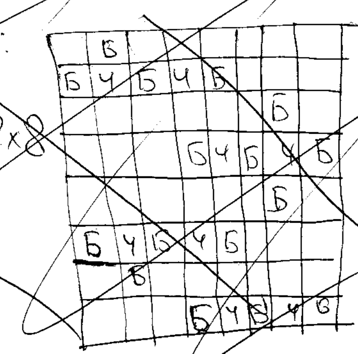
5. На однокруговой турнир по настольному теннису подало заявку 16 человек. Когда было сыграно n матчей, оказалось, что среди любых трех теннисистов найдутся двое, уже сыгравших между собой. При каком наименьшем n такое возможно?

6. Три конуса с общей вершиной, касающихся друг друга внешним образом, имеют высоту 2 и радиус основания $\sqrt{3}$. Два шара касаются внешним образом друг друга и всех конусов. Найдите отношения радиусов шаров (большего к меньшему).

Задача 1

Ответ: 16

Пример: ~~на~~ 16 = 2×8



Оценка: почему нельзя поставить больше 2n белых ладей на доску n×n, где есть n черных.

~~Д~~Рассмотрим строку доски под номером i, пусть там стоят a_i черных ладей. Тогда между ними $a_i - 1$ промежутков (не больше $a_i - 1$), и еще 2 могут быть по краям (слева от левой и справа от правой):

◡ Ч ◡ Ч ◡ Ч ◡ . . . . Ч ◡

Тогда в каждом таком промежутке есть белая ладья (кроме 2 крайних), иначе 2 черных бьют друг друга; и их там (белых ладей в промежутке) не больше 2, т.к. иначе они бьют друг друга.

Значит, на этой строке не больше чем $a_i + 1$ белых ладей (по принципу Дирихле).

Пусть S – сколько всего белых ладей, тогда

$$S \le (a_1+1)+(a_2+1)+\ldots+(a_n+1).$$

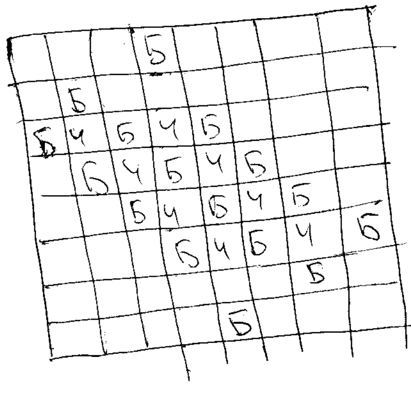
$$S \le (a_1+a_2+\ldots+a_n)+n.$$

а т.к. $a_1+a_2+\ldots+a_n = n$ (это всего столько черных ладей)

то $S \le 2n$.

Значит, белых ладей на 8×8 доске при 8 черных не больше чем 2×8 = 16.

Нетрудно убедиться, что следующий пример подходит:



Ладей 4 + 3×4 = 16.

Задача 4 ~~Найдем остаток от деления 10^9 на 121~~

Пусть n = 20182019; тогда $x^2 = a(10^n+1)$,

(*) где $10^{n-1} < a < 10^n$ из условий существования числа.

По признаку делимости на 11 $10^n+1 \vdots 11$, т.к. +1 стоит на 1 позиции, а 1 в „10^n" – на позиции с четным номером, т.к. после идут n нулей а n нечетно.

Заметим, что 10^k никогда не дает остаток −1 (или 120, что одно и то же) при делении на 121:

Степень	Остаток
1	10
2	100
3	32 (1000−968)
4	78 (320−242)
5	54 (780−726)
6	56 (540−484)
7	76 (560−484)
8	33 (760−726)
9	88 (330−242)
10	33 (880−847)

Итак, при k > 7 остаток либо 33, либо 88 (остатки зацикливаются). Значит, и $10^n+1 \not\vdots 121$, т.к. $10^n \not\equiv_{121} -1$.

Тогда делится (обязано делиться) на 11 число a.

~~Пусть~~ предположим, в 10^n+1 ~~еще~~ делится еще какой-нибудь квадрат, тогда, т.к. x^2 – квадрат, то b, а не только 11, входит и $\frac{10^n+1}{11 b^2}$, где b – такое число, что $10^n+1 \vdots b^2$, в противном случае, $a = 10^n+1$, что противоречит условию (*), потому что тогда в a n+1 цифра, а не n.

Итак, $a = \frac{10^n+1}{b^2}$, тогда, т.к. $a > 10^{n-1}$, то $b^2 < 25$, т.к. ~~иначе~~ иначе $\frac{10^n+1}{b^2} < \frac{10^n}{25} + \frac{1}{25} = 4\cdot 10^{n-2} + \frac{1}{25}$, что и так $< 10^{n-1}$.

Переберем на сл. странице $b^2 = 4, 9, 16$ и получим ответ нет (на случай если не отсканируют).

Задача 2.

Чистовик

Заметим, что при $x=y=z=a$ выражение равно $\frac{a^4 \cdot 3}{\sqrt{3a^8}}$, что равно $\sqrt{3}$.

Пусть выражение равно A.

Тогда $A^2 = \frac{(xyz(x+y+z))^2}{(xy)^4+(yz)^4+(xz)^4}$, получим:

$$A^2 \geq \frac{(x^2yz+xy^2z+xyz^2)^2}{\cancel{2}(x^2y^4z^2+x^4y^2z^2+x^2y^2z^4)}$$

Из нер-ва Коши

$\boxed{a^2+b^2 \geq 2ab \\ a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca}$

(1)

~~аналогично, т.к. $(a+b+c)^2 \geq 2ab+$~~

$$A^2 \geq \frac{1}{\cancel{2}} + \frac{2(x^3y^3z^2+x^2y^3z^3+x^3y^2z^3)}{x^2y^4z^2+x^4y^2z^2+x^2y^2z^4}$$

$$A^2 \geq 1 + \frac{2(xy+yz+zx)x^2y^2z^2}{(x^2+y^2+z^2)(x^2y^2z^2)}$$

$$A^2 \geq 1 + \frac{2(xy+yz+zx)}{(x^2+y^2+z^2)}.$$

Из нер-ва (1) дробь не превосходит 2.

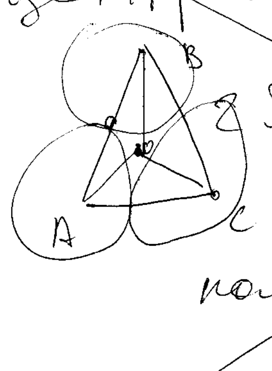
Нер-во (1) доказывается домножением обеих частей на 2 и переносом в 1 часть, дальше получаем сумма трех квадратов ≥ 0.

Ответ: $\sqrt{3}$ при равных x, y, z.

Чистовик

Задача 6.

Заметим, что в силу симметричности конструкции центры обоих шаров лежат на прямой ⊥ плоскости на которой стоят конусы и проходящей через т. O, центр описанной окружности △ABC если A, B, C - центры оснований конусов.



$2\sqrt{3}$ т.к. △ABC равностор., то из 3 равенства площадей $\frac{AB\cdot BC\cdot AC}{4AO} = \frac{1}{2}\cdot AC\cdot\frac{AC\sqrt{3}}{2}$

получаем: $AO = \frac{AB}{\sqrt{3}} = 2$. ($AB = 2\sqrt{3}$ как 2 радиуса в т. касания)

предположим, что нижний (меньший шар) не касается поверхности (плоскости с конусами)

Задача 5.

Всего троек игроков $C_{16}^{3} = \frac{16\cdot 15\cdot 14}{3\cdot 2\cdot 1} = 8\cdot 5\cdot 14$.

Пусть в каждой тройке ровно одна игра. Игра тогда она посчитана в 14 тройках (зафиксируем 2 человек, останется 14 способов выбрать последнего)

значит всего игр хотя бы $\frac{8\cdot 5\cdot 14}{14} = 40$, иначе в какой-то тройке меньше.

~~Пример.~~

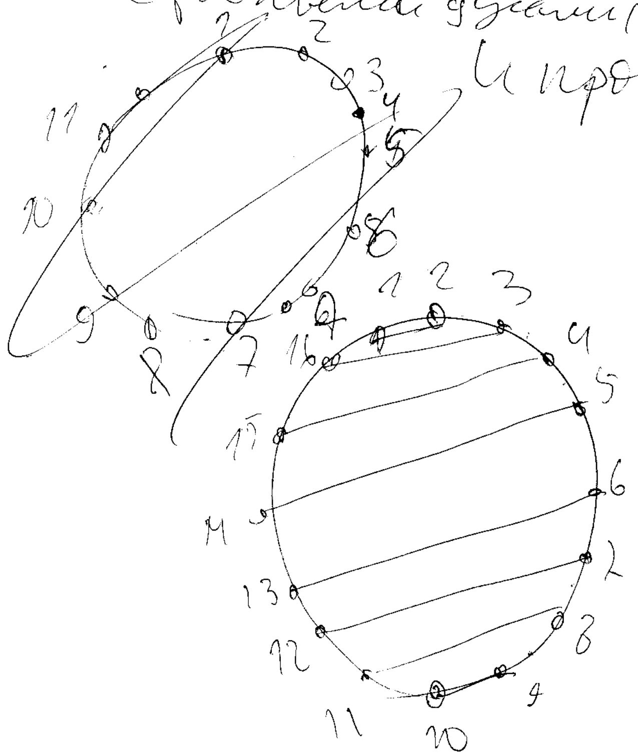
Если 2 человека не сыграли друг с другом, то их сумма кол-ва игр должна быть хотя бы 14, т.к. иначе среди оставшихся 14-ти найдется человек, который с ними не играл (и будет тройка, где никто ни с кем не играл)

разбив всех на пары, получим, что всего игр было $\geq \frac{14\times 8}{2} = 56$ (8 пар, каждая игра по 2 раза).

Чистовик.

Задача 5
продолжение.

Тогда примером будет момент, когда все сыграли по 7 игр таким образом, что если расположить 16 точек с равными дугами между ними (см. рис 1) и провести 7 серий параллельных прямых как на рис 2



чтобы соединенными оказались в разных сериях.

1 и 2
2 и 3
3 и 4
4 и 5
5 и 6
6 и 7
7 и 8

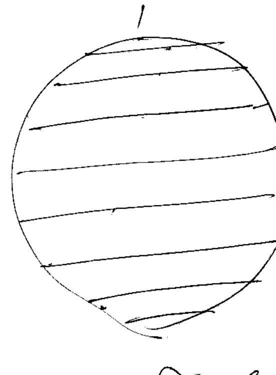


рис 2

Тогда найдется 1 серия где 2 из 3 точек будут соединены по принципу Дирихле