90

Ас-92

ТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

1

4965

1	2	3	4	5	6	сумма
4	4	0	4	4	2	18

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Владимир

Дата 16.02.2019

* *

10–11 класс. Первый вариант

1. Имеется 8 черных ладей и n белых. При каком наибольшем n их можно расставить на шахматной доске так, чтобы одноцветные ладьи не били друг друга? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Даны положительные числа x, y, z. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{xyz\,(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4+(yz)^4+(xz)^4}}\,.$$

3. Дан треугольник ABC с меньшей стороной AB. На сторонах AB и AC выбраны соответственно точки X и Y так, что $BX = CY$. Под каким углом прямая, проходящая через центры описанных окружностей треугольников ABC и AXY, пересекает прямую BC, если $\angle ABC = \beta$ и $\angle BCA = \gamma$?

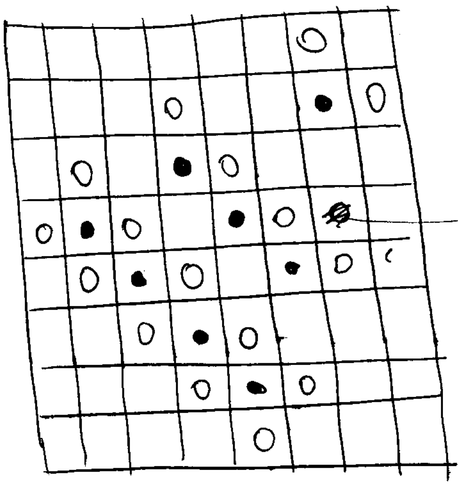
4. Десятичная запись квадрата натурального числа x представляет собой два одинаковых соседних блока из n цифр. Может ли n равняться 20182019?

5. На однокруговой турнир по настольному теннису подало заявку 16 человек. Когда было сыграно n матчей, оказалось, что среди любых трех теннисистов найдутся двое, уже сыгравших между собой. При каком наименьшем n такое возможно?

6. Три конуса с общей вершиной, касающихся друг друга внешним образом, имеют высоту 2 и радиус основания $\sqrt{3}$. Два шара касаются внешним образом друг друга и всех конусов. Найдите отношения радиусов шаров (большего к меньшему).

Чистовик

Задача 1



1) На поле может стоять максимум 8 ладей одного цвета и не бить друг друга. (т.к всего 8 строк и 8 столбцов)

2) Заметим, что независимо можно расставить 8 белых и 8 черных ладей на доске (просто (1) пункт объединенный для двух цветов)

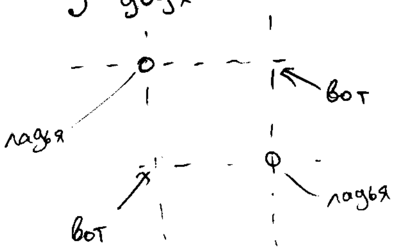
Тогда чтобы поставить белых больше, чем 8, нужно загородить линии ударов черных ладей. Заметим, что каждую клетку (пустую) бьют 2 ладьи одного цвета.

~~Заметим, что одна ладья освобождает~~ от удара черных ладей

Заметим, что чтобы освободить клетку нужно минимум 2 ладьи другого цвета.

~~И одна белая ладья~~

У двух ладей максимум 2 клетки в пересечении линий ударов

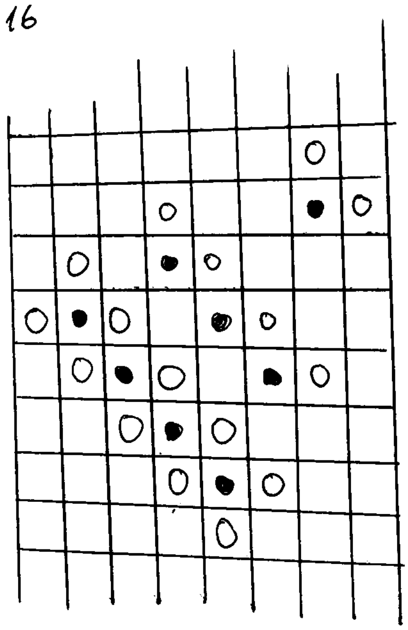


Значит 8 черных ладей могут максимум освободить 8 клеток для новых белых ладей

Значит, $n = 16$ - максимум.

Ответ: $n = 16$

Пример:



O - белая ладья

● - черная ладья

Чистовик

Задача №5.

Пусть в турнире (однокруговом) играет $2K$ человек. Докажем, что для того чтобы выполнялось условие, (чтобы среди 3 игроков нашлось двое, которые уже играли) необходимо чтобы несыгранных игр было $\leq K^2$:

Докажем по индукции:

База: $K = 1$ - очевидно

Предположение: для K - верно - то есть для команды из $2K$ человек число несыгранных игр $\leq K^2$.

Шаг: ~~K+1~~ докажем для $K+1$, соответственно для $2K+2$ игроков несыгранных игр $\leq (K+1)^2$;

Доказательство:

Было $2K$ игроков. Добавим двух игроков A и B. Тогда для $\forall$ игрока C из прежнего множества игроков верно:

C должен сыграть либо с A, либо с B (для того, чтобы выполнялось условие)

Всего игроков C - $2K$, значит максимальное допустимое число несыгранных игр $2K$ (игру между A и B рассмотрим отдельно). Т.к сыграть должны $2K$ игр и всего игр может быть $2 \cdot 2K$ (без игры AB), то от этого условие не нарушится - $\forall C$ из прежнего множества играл либо с A, либо с B и в любой тройке с A и B условие будет выполняться.

Значит A и B могут и не играть друг с другом.

Отсюда получаем, что максимальное количество несыгранных игр равно:

$$\underbrace{K^2}_{\text{предположение индукции}} + \underbrace{2K}_{\text{игры } \forall \text{ игрока } C \text{ с } A \text{ или } B} + \underbrace{1}_{\text{игра между } A \text{ и } B}$$

Заметим, что $K^2+2K+1 = (K+1)^2$. Значит утверждение доказано.

q.e.d.

В нашей задаче число игроков $= 16$. Значит $K = 8$.

Значит по доказанному утверждению ~~число~~ максимальное количество несыгранных партий равно $K^2 = 64$. Всего игр $\frac{15 \cdot \cancel{16}^{8}}{\cancel{2}} = 120$.

Т.к максимальное несыгранных $= 64$, всего 120 игр, то минимальное количество сыгранных партий $= 120 - 64 = 56$.

Ответ: $n = 56$.

А0-82

90

...КИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

1	2	3	4	5	6	сумма
	1	0	4	4	2	18

Чистовик

Задача N 4

Пусть x^2 имеет вид двух блоков из 20182019 цифр: $\underbrace{\overline{ab\ldots k}}_{20182019}\underbrace{\overline{ab\ldots k}}_{20182019} = x^2$

и x - натуральное.

1) Заметим, что число $\underbrace{\overline{ab\ldots k\,ab\ldots k}}_{20182019} \vdots (10^{20182019}+1)$

) Теперь докажем, что $10^{20182019}+1 \equiv 0 \pmod{121}$:

$$10^3 \equiv -1 \pmod{121}$$

$$\Downarrow$$

$$10^k \equiv -1 \pmod{121}, \text{ где } k \text{ - нечетное (признак делимости на 11)}$$

$$\Updownarrow$$

$$10^k + 1 \equiv 0 \pmod{121}, \text{ где } k \text{ - нечетное.}$$

...метим, что 20182019 - нечетное. Значит $10^{20182019}+1 \vdots 121$.

...ь докажем, что число $\frac{10^{2018 2019}+1}{121}\cdot 100$ имеет ровно 20182019 знаков:

$...^{20182019} + 1$ имеет 20182019 знаков (очевидно)

$\frac{...^{20182019}+1}{121}$ имеет $20182019 - 2 = 20182017$ знаков (т.к делим на число большее 100).

... число $\frac{10^{20182019}+1}{121}\cdot 100$ имеет ровно 20182019 знаков.

...что $\frac{10^{20182019}+1}{121}\cdot 100\cdot(10^{20182019}+1)$ имеет вид $\overline{ab\ldots k\,ab\ldots k}$ (двух блоков)

..., что $\frac{10^{20182019}+1}{121}\cdot 100\cdot(10^{20182019}+1)$ - квадрат натурального числа

$\sqrt{\ldots \cdot 100\cdot(10^{20182019}+1)} = \frac{10\cdot(10^{20182019}+1)}{11}$, причем $10^{20182019}+1 \vdots 11$.

... может - пример $x = \frac{10\cdot(10^{20182019}+1)}{11}$.

...матной
... фигуру.
...ы соответствен-
...ентры описанных
... $\angle BCA = \gamma$?
...одинаковых соседних
...к. Когда было сыграно n
...равших между собой. При
...зом, имеют высоту 2 и радиус
... конусов. Найдите отношения

Чистовик

Задача 2

2

$x, y, z \geq 0$

$$A = \frac{xyz(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4+(yz)^4+(xz)^4}}$$. Найти $\max A$ - ?

Пусть $a = xy$, $b = yz$, $c = xz$.

Тогда $$A = \frac{ab+bc+ac}{\sqrt{a^4+b^4+c^4}}$$

1) $ab+bc+ac \leq a^2+b^2+c^2$ - докажем это:

$$\Uparrow$$

$$2ab+2bc+2ac \leq 2a^2+2b^2+2c^2$$

$$\Updownarrow$$

$$0 \leq 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac$$

$$\Uparrow$$

$$0 \leq (a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2$$ - доказано

т.к $x^2 \geq 0$ при $\forall x$.

2) Докажем, что $(a^2+b^2+c^2)^2 \leq 3(a^4+b^4+c^4)$:

$$\Uparrow$$

$$a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2a^2c^2 \leq 3a^4+3b^4+3c^4$$

$$\Updownarrow$$

$$0 \leq 2a^4+2b^4+2c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2a^2c^2$$

$$\Uparrow$$

$$0 \leq (a^2-b^2)^2+(a^2-c^2)^2+(b^2-c^2)^2$$ - доказано

т.к $x^2 \geq 0$ при $\forall x$.

~~Из 1) и 2) следует~~: т.к по условию $x, y, z \geq 0$, то $a, b, c \geq 0$

Значит, $(a^2+b^2+c^2)^2 \leq 3(a^4+b^4+c^4)$

$$\Downarrow$$

$$a^2+b^2+c^2 \leq \sqrt{3(a^4+b^4+c^4)}$$

Из 1) и 2) получаем:

$$ab+bc+ac \leq a^2+b^2+c^2 \leq \sqrt{3(a^4+b^4+c^4)}$$

Тогда:

$$\frac{ab+bc+ac}{\sqrt{a^4+b^4+c^4}} \leq \frac{\sqrt{3(a^4+b^4+c^4)}}{\sqrt{a^4+b^4+c^4}} = \sqrt{3}$$

Значит $$\frac{ab+bc+ac}{\sqrt{a^4+b^4+c^4}} \leq \sqrt{3}$$

Тогда вернемся к x, y, z:

$$A = \frac{xyz(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4+(yz)^4+(xz)^4}} \leq \sqrt{3}$$

Достигается при $x=y=z=1$.

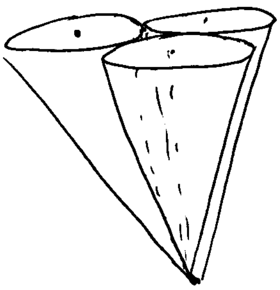
Ответ: $\max(A) = \sqrt{3}$

Чистовик

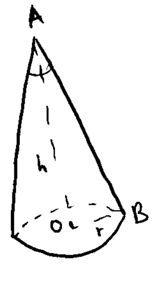
Санкт-Петербургский государственный университет

Задача 6

Дано: $h=2$, ~~[illegible]~~ $r=\sqrt{3}$



1)



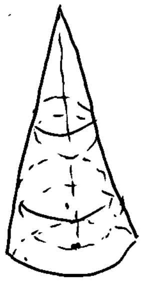
Найдем образующую трех данных равных конусов; обозначим её за l.

$l^2=h^2+r^2$ (по т. Пифагора)

$l^2=4+3=7 \Rightarrow l=\sqrt{7}$

~~α - угол при вершине конуса. $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{3}}{\dots}$ (из $\triangle AOB$)~~

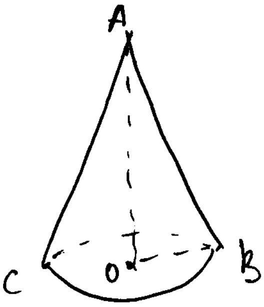
2) Заметим, что между данными тремя конусами можно вписать еще один. В таком случае задача сведется к такой картинке:



В новый конус два шара из условия будут так же вписаны.

l_1 - образующая нового конуса и $l_1=l$.

Вернемся к исходным конусам:



$\triangle AOB$ - прямоугольный. ($\angle AOB=90^\circ$ т.к конус прямой)

Пусть α - угол CAB в плоскости ACB.

тогда $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{BO}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{\alpha}{2}=30^\circ \Rightarrow \alpha=60^\circ$

(из $\triangle AOB$)

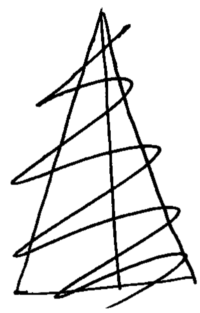
~~Найдем угол при вершине в новом конусе~~:

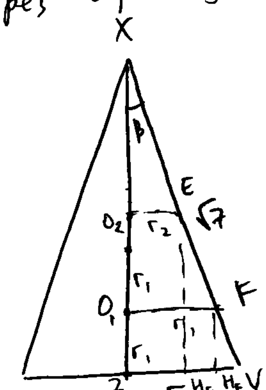
новый конус

2β - ~~[illegible]~~ угол при вершине нового конуса

Пусть r_1 - радиус большего шара, r_2 - радиус меньшего шара

Рассмотрим сечение через вершину и середину.





$\frac{r_1}{r_0}=\frac{XF}{XY}=\frac{XY-FY}{XY}$

$FY=\frac{r_1}{\cos\beta}$ (из $\triangle FYH_F$)

$\frac{r_1}{r_0}=\frac{\sqrt{7}-\frac{r_1}{\cos\beta}}{\sqrt{7}}=\frac{\cos\beta\sqrt{7}-r_1}{\cos\beta\cdot\sqrt{7}}$

$\frac{r_2}{r_0}=\frac{XE}{XY}=\frac{XY-EY}{XY}$

$EY=\frac{r_1+r_2}{\cos\beta}$ (из $\triangle EH_EY$) $\Rightarrow \frac{r_2}{r_0}=\frac{\sqrt{7}-\frac{r_1+r_2}{\cos\beta}}{\sqrt{7}}$

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{r_1}{r_a} \cdot \frac{r_a}{r_2} = \frac{\left(\sqrt{7}\cos\beta - r_1\right)}{\cos\beta \cdot \sqrt{7}} \div \frac{\left(\cos\beta \cdot \sqrt{7} - r_1 - r_2\right)}{\cos\beta\sqrt{7}} =$$

$$= \boxed{\frac{\sqrt{7}\cos\beta - r_1}{\cos\beta\sqrt{7} - r_1 - r_2} = \frac{r_1}{r_2}}$$

$\beta = 30^\circ/2 = 15^\circ$

Чистовик

Задача №5.

Пусть в турнире (однокруговом) играет $2K$ человек. Докажем, что для того чтобы выполнялось условие, (чтобы среди 3 игроков нашлось двое, которые уже играли) необходимо чтобы несыграных игр было $\leq K^2$:

Докажем по индукции:

База: $K = 1$ - очевидно

Предположение: для K - верно — то есть для команды из $2K$ человек число несыграных игр $\leq K^2$.

Шаг: ~~K+1~~ докажем для $K+1$; соответственно для $2K+2$ игроков несыгранных игр $\leq (K+1)^2$:

Доказательство:

Было $2K$ игроков. Добавим двух игроков A и B. Тогда для $\forall$ игрока C из прежнего множества игроков верно:

C должен сыграть либо с A, либо с B (для того, чтобы выполнялось условие)

Всего игроков C - $2K$, значит максимальное допустимое число несыгранных игр $2K$ (игру между A и B рассмотрим отдельно). Тк сыграть должны $2K$ игр и всего игр может быть $2 \cdot 2K$ (без игры AB)

Если игрок A и игрок B не будут играть друг с другом, то от этого условие не нарушится - $\forall C$ из прежнего множества играл либо с A, либо с B и в любой тройке с A и B условие будет выполняться.

Значит A и B могут и не играть друг с другом.

Отсюда получаем, что максимальное количество несыгранных игр равно:

$$\underbrace{K^2}_{\text{предположение индукции}} + \underbrace{2K}_{\text{игры } \forall \text{ игрока } C \text{ с } A \text{ или } B} + \underbrace{1}_{\text{игра между } A \text{ и } B}$$

Заметим, что $K^2 + 2K + 1 = (K+1)^2$. Значит утверждение доказано.

q.e.d.

В нашей задаче число игроков $= 16$. Значит $K = 8$.

Значит по доказанному утверждению ~~число~~ максимальное количество несыгранных партий равно $K^2 = 64$. Всего игр $\frac{15 \cdot \cancel{16}^{8}}{\cancel{2}} = 120$.

Т.к максимальное несыгранных $= 64$, всего 120 игр, то минимальное количество сыгранных партий $= 120 - 64 = 56$.

Ответ: $n = 56$.

Чистовик

Задача N 4

Пусть x^2 имеет вид двух блоков из 2018 2019 цифр: $\underbrace{\overline{ab\ldots k}}_{2018 2019}\underbrace{\overline{ab\ldots k}}_{2018 2019} = x^2$

и x - натуральное.

1) Заметим, что число $\underbrace{\overline{ab\ldots k}}_{2018 2019}\overline{ab\ldots k} \vdots (10^{2018 2019}+1)$

2) Теперь докажем, что $10^{2018 2019}+1 \equiv 0 \pmod{121}$:

$$10^3 \equiv -1 \pmod{121}$$

$$\Downarrow$$

$$10^k \equiv -1 \pmod{121}, \text{ где } k \text{ - нечетное (признак делимости на 11)}$$

$$\Updownarrow$$

$$10^k + 1 \equiv 0 \pmod{121}, \text{ где } k \text{ - нечетное.}$$

Заметим, что 20182019 - нечетное. Значит $10^{2018 2019}+1 \vdots 121$.

3) Теперь докажем, что число $\frac{10^{2018 2019}+1}{121} \cdot 100$ имеет ровно 20182019 знаков:

$10^{2018 2019}+1$ имеет 20182019 знаков (очевидно)

$\frac{10^{2018 2019}+1}{121}$ имеет $20182019-2 = 20182017$ знаков (т.к делим на число большее 100).

Значит число $\frac{10^{2018 2019}+1}{121} \cdot 100$ имеет ровно 2018 2019 знаков.

Заметим, что $\frac{10^{2018 2019}+1}{121} \cdot 100 \cdot (10^{2018 2019}+1)$ имеет вид $\overline{ab\ldots k ab\ldots k}$ (двух блоков)

4) И очевидно, что $\frac{10^{2018 2019}+1}{121} \cdot 100 \cdot (10^{2018 2019}+1)$ - квадрат натурального числа

$$\sqrt{\frac{10^{2018 2019}+1}{121} \cdot 100 \cdot (10^{2018 2019}+1)} = \frac{10 \cdot (10^{2018 2019}+1)}{11},$$ причем $10^{2018 2019}+1 \vdots 11$.

Ответ: да, может. пример $x = \frac{10 \cdot (10^{2018 2019}+1)}{11}$.