САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

1786

1 60

1	2	3	4	5	6	сумма
4	4		1		3	12

60

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (6–7 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Москва

Дата 10 марта 2019 г.

* *

6–7 класс. Второй вариант

1. Таня расставляет в клетках листа бумаги последовательные натуральные числа, двигаясь по спирали так, как показано на рисунке. Какое число будет написано в клетке слева от числа 2031?

10	9	8	7
11	2	1	6
12	3	4	5
13	14		

2. Говоря о собранных грибах, каждый грибник называет большее их количество, чем на самом деле. При этом все грибники число чужих грибов завышают не более чем в 3 раза, а число своих грибов — не менее чем в 8 раз. Беседуют два грибника А и Б.

   А. Я вчера собрал в лесу 215 белых грибов.

   Б. Да в этом лесу больше 60 грибов расти вообще не может.

   А. После дождей грибы так растут. 214 белых я точно собрал!

   Б. Гриб, может, и растет, но больше 61 гриба там собрать невозможно.

   А. Я собрал 213 грибов!

   Б. Нет. Не больше 62.

   Какое наибольшее число реплик может содержать такая беседа и какое количество грибов будет упомянуто в последней реплике? (Оба собеседника знают, сколько грибов собрал А на самом деле).

уникальными.

6) Шаг индукции:
возьмём линию из n+1 группы; (линию без старшей буквы — линия раздела левой; расстояние между ~~последним~~ и первым фонарем левой линии — река)

Если взять любой отрезок на старой линии, то на будет уникальный фонарь по предположению ~~индукции~~ индукции. При ~~изме~~ увеличении группы последнего цвета все остальные фонари ~~уникальность не потеря до какого-то~~ не потеряют, значит в любом отрезке новой линии будет уникальный фонарь;

Если отрезок пересекает реку, то он содержит букву а т.к. буква уникальна в старой линии, а в новой её не переключаем, то она будет уникальной до любого отрезка.

7) У нас 9 цветов; для новой группы требуется ровно 1 новый цвет, тогда есть 9 групп, сумма их длин:
$1+1+2+4+8+16+32+64+128=256$;

8) Если от примера для 256 фонарей с 9 цветов взять первые 150 фонарей, то новых отрезков не добавится, а значит пример работать будет, однако мы не возьмём 9-й цвет, который в этом примере был на 256-м фонаре, а значит мы получили пример для ~~22~~ 150 фонарей и 8 цветов

Ответ: 8 цветов.

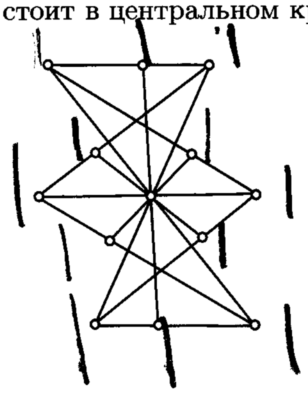
3. В остроугольном треугольнике BCD на стороне BD взяты точки G и F (точка G лежит на отрезке BF), при этом $BG = DF$, $GF < BG$. Точка E — основание перпендикуляра, опущенного из точки F на сторону BC, L — основание перпендикуляра, опущенного из точки G на сторону CD. Докажите, что $EF + GL > 2FG$.

4. При сложении двух чисел в столбик Костя сначала складывает цифры, не делая переносов, но запоминает, в каких разрядах они возникли. Затем он прибавляет переносы к результату. При этом иногда по ошибке он вместо прибавления переносимой единицы к соседнему старшему разряду вычитает единицу из соседнего младшего разряда. Такую ошибку Костя может сделать, только если в младшем разряде стоит не 0. Так, в примере справа разряды, где есть перенос, помечены звездочками. Перенос единицы из разряда единиц Костя сделал правильно, а перенос единицы из разряда десятков — неправильно (он не прибавил переносимую единицу к разряду сотен, а вычел ее из разряда единиц).

$$\begin{array}{ccc} 1 & 9 & 5 \\ 2 & 7 & 6 \\ \hline 3 & 6 & 1 \\ & * & * \\ \hline 3 & 7 & 0 \end{array}$$

Как-то раз Костя подсчитал сумму всех трехзначных чисел от 300 до 500 включительно. Мог ли он получить ответ 70 000?

5. В кружочках выписаны числа от 5 до 17 так, что сумма чисел на любом отрезке, содержащем 3 кружочка, одна и та же. Какое число стоит в центральном кружочке?



6. Вдоль длинной улицы стоит 150 фонарей. Каждый фонарь светит определенным цветом, причем цвета фонарей могут повторяться. Известно, что на любом отрезке улицы, где есть хотя бы один фонарь, найдется фонарь «уникального» цвета (то есть цвета, который у других фонарей на этом отрезке не встречается). Какое наименьшее число цветов фонарей может быть на этой улице?

16.

Решение. (~~по индукции~~

а) Оценка: при k фонарей при $k \geq 2^n$ нужно не менее n+1 цвета, тогда для 150 фонарей нужно минимум 8 цветов, т.к. $150 > 128 = 2^7$.

Теперь докажем это утверждение.

1) База индукции: для 1 фонаря нужен хотя бы 1 цвет

2) Предположение индукции: мы доказали, что для 2^n фонарей нужен ~~n+1~~ хотя бы n+1 цвет

3) Шаг индукции:

Рассмотрим полосу фонарей длиной в 2^{n+1} (т.е. часть от полосы k):

для её половины потребуется n+1 цвет (по предположению индукции), тогда на полосу 2^{n+1} ~~дл~~ потребуется не меньше чем n+1 цвет. Однако если ровно n+1 цвет, тогда другой половине ~~раз~~ потребуются те ~~же~~ самые n+1 цвет, что и на I половину, тогда ~~твой~~ любой цвет повторяется в полосе 2^{n+1} минимум по 2 раза ~~тогда во всей~~ т.е. в полосе 2^{n+1} нет уникального фонаря, тогда минимум n+2 цвета, т.е. (n+1)+1 цвет. ~~доказано, и меньше чем n+1 не удастся~~ ~~если~~ ~~всех этих~~

б) 1) Пример для 256 ~~фонарей~~ (8 цветов) способ построения примера:

2) Достаточно описать метод построения

I группа — 1 фонарь 1 цвета.

Каждая следующая группа получается путём переписывания всех предыдущих групп, образуя их рядок и за увеличением цифры последнего цвета на 1.

3) Докажем, что пример правильный по индукции:

4) База индукции: цепь из 1 группы, т.е. 1 фонарь 1 цвета, очевидно, что цифра подходит.

Цвет правой границы ~~всей~~ цепи — наибольший и уникальный для всей цепи

~~Шаг индукции~~ 5) Предположение индукции: доказали, что пример верен при n группах, что последнее число в этой цепи (назовём её скоростью), а последнее число — "уникальное") наибольшее в этой группе и зел

Чистовик

№4.

Решение (от обратного)

~~1) Пусть получил.~~

2) $300+301+302+\ldots+500=(1+2+3+\ldots+500)-(1+2+3+\ldots+299)=$

$= \frac{500\cdot 501}{2} - \frac{299\cdot 300}{2} = 501\cdot 250 - 299\cdot 150 =$

$= 50(501\cdot 5 - 299\cdot 3) = 50(2505 - 897) = 50\cdot 1608 =$

$= 80400;$

2

$$\begin{array}{r} \times 1608 \\ 50 \\ \hline 80400 \end{array}$$

80400 — должен был получить Костя, если бы не ошибался;

3) $80400 - 70000 = 10400$ — на столько ошибся в итоге.

4) Заметим, что при ~~сложении~~ ошибке на разряде ~~на n-ном~~ $n, n \geq 1$; итоговый результат уменьшается на $10^{n+1} - 10^{n-1} =$
$= 10^{n-1}(100-1) = 10^{n-1}\cdot 99$, т.е. на число кратное 99, значит ~~суммарная ош~~ ошибся в итоге на число кратное 99,
а $10400 \not\vdots\, 99$, т.к. $10400 \not\vdots\, 9$ по признаку делимости на 9,
~~а $99 \vdots 9$ $99 \vdots 9$~~ а $99 \vdots 9$.

Значит наше предположение не верно и 70000 получить он не мог.

Ответ: не мог.

№2.

Решение. 1) Пусть ~~А~~ собрал x грибов; $x \in \mathbb{N}_0$

1) А сказал, что он собрал 213 грибов, значит он не мог собрать 27 и более грибов, т.к. тогда он бы назвал ~~минимум~~ минимум $27 \cdot 8 = 216$ грибов;

~~Зна~~ Значит $x \le 26$.

2). $x \ge 20$, т.к. если $x \le 19$, то Б не сказал бы, что А собрал 60 грибов т.к. $19 \cdot 3 = 57 < 60$.

3) Значит $20 \le x \le 26$, а т.к. $x \in \mathbb{N}_0$ по сост. таблицу:

x	$3x$	$8x$	Сколько фраз скажет А ($213-8x+1$)	сколько фраз скажет Б ($3x-60+1$)	Диалог продлится ... реплик
20	60	160	56	1	2
21	63	168	48	4	8
22	66	176	40	7	14
23	69	184	32	10	20
24	72	192	24	13	26
25	75	200	16	16	32
26	78	208	8	19	16

Диалог продлится ~~еще~~ максимум 32 реплики;

Последними репликами будут: Б: 75; А: 200.

Ответ: 32 реплики; Б: 75; А: 200

№1.

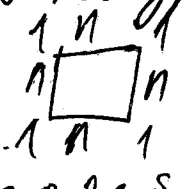
Решение. 1). ~~Полным~~ квадратом будем называть последнюю записанную часть спирали, ~~которая~~ ~~которая~~ в какой-то момент времени ~~была зап.~~ ~~записана также~~ 2)). квадратом;

2). Выходом из квадрата будем наз. число, записанное ~~также~~ после того как на доске появился новый квадрат.

2) $2025 = 45^2$; ~~Зна~~ Тогда выходом из квадрата будет 2026.

3). Заметим, что ~~в силу~~ чётные выходы будут находиться в левой ~~верхней~~ клетке квадрата;

4). Чтобы „обогнуть" квадрат со стороной n нужно $4n+4$ числа



5) Тогда над числом 2026 будет число $2025 + 45 \cdot 4 + 4 =$
$= 2025 + 180 + 4 = 2209$.

Чистовик

Продолжение задачи №1.

б). Теперь нарисуем эту часть спирали:

2210 ← 2209 ← 2208 ←
↓
2211 2026 ← 2025 ← ...
↓ ↓
2212 2027
↓ ↓
2213 2028
↓ ↓
2214 2029
↓ ↓
2215 2030
↓ ↓
2216 2031
↓ ↓
2217 ...
↓
...

Значит левее числа ~~2216 б~~ 2031 будет число 2216.

Ответ: 2216. √