80

А0-6

ГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

1

973

1	2	3	4	5	6	сумма
4	4	0	0	4	4	16

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Архангельск

Дата 23.03.2019

* *

10–11 класс. Четвертый вариант

1. При каком наибольшем n на доске 9×9 можно расставить n королей и 6 ладей так, чтобы никакая фигура не была под боем?

2. Даны числа $x, y > 0$. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{xy\,(x+y)}{\sqrt[4]{x^{12}+y^{12}}}\,.$$

3. Дан тупой угол BAD, где точка D отлична от A. На луче AB произвольным образом выбирается точка X, также отличная от A. Пусть P — точка пересечения касательных к описанной окружности треугольника ADX, проведенных в точках D и X. Найдите геометрическое место точек P.

4. Дано натуральное число x, шестнадцатиричная запись которого n-значная и не содержит нулей. Числа x и x^2 в шестнадцатиричной системе одинаково читаются слева направо и справа налево. Найдите все n, при которых такое x существует.

5. В однокруговом турнире по настольному теннису принимает участие 20 человек. Если тройка участников A, B, C такова, что A выиграл у B, а B — у C, то организаторы турнира вручают спортсменам из этой тройки соответственно "золотой", "серебряный" и "бронзовый" сувениры. Участник, оказавшийся в нескольких тройках, получает сувенир за каждую из них. Какое наименьшее количество "серебряных" сувениров надо закупить организаторам, чтобы их хватило вне зависимости от результатов турнира? Ничьих в теннисе не бывает.

6. Четыре конуса с общей вершиной O касаются друг друга внешним образом, причем первые два и последние два их них имеют одинаковый угол при вершине. Пятый конус, отличный от четвертого, касается первых трех конусов внешним образом. Найдите максимальный угол при вершине пятого конуса. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении).

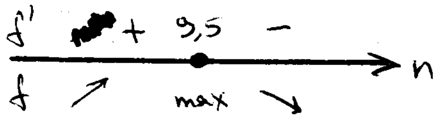
Рассмотрим $f(n)=19n-n^2$ ~~и найдём её экстремумы~~.

$f'(n)=19-2n$; $f'(n)=0$

$19-2n=0$

$2n=19$

$n=9,5$



Поскольку $n=9,5$ - нецелое число, рассмотрим ближайшие к нему целые числа: 9 и 10

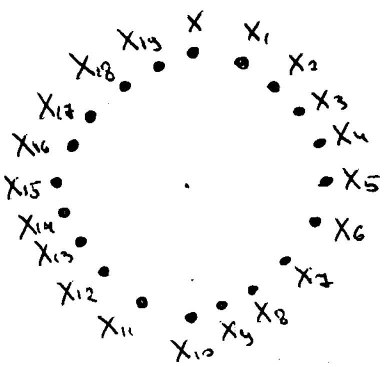
$f(9)=19\cdot 9-9^2=9(19-9)=9\cdot 10=90$

$f(10)=19\cdot 10-10^2=10(19-10)=10\cdot 9=90$ т.е. $f(9)=f(10)$

Тогда максимальное количество „серебряных" сувениров, которое может получить участник X: 90.

Максимальное кол-во „серебряных" сувениров, которые могут получить все участники: $20\cdot 90=1800$

Пример:



Назовём всех участников: $X, X_1, X_2 .. X_{19}$ - 20 человек

Каждый из них имеет либо 9 побед и 10 поражений, либо 10 побед и 9 поражений.

Допустим, участник X выиграл 9 участников, стоящих перед ним: X_1-X_9 и проиграл 10 участникам, идущим за ним: $X_{10}-X_{19}$.

Аналогично каждый последующий участник выигрывает 9 участников, стоящих перед ним и проигрывает 10 участникам, идущим за ним.

Ответ: 1800.

① доска 9×9
n королей, 6 ладей
$n_{наиб.}$ - ?

Пример для $n = 9$:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
9	K		K		K				
8									Л
7	K		K		K				
6								Л	
5	K		K		K				
4							Л		
3						Л			
2				Л					
1		Л							

Каждая ладья бьёт одну горизонталь и одну вертикаль, на которых она располагается. Соответственно, ладей на доске - шесть штук. Свободные клетки (не находящиеся под боем) можно рассчитать по формуле: $(9-6)^2$, где 9 - сторона доски, 6 - кол-во ладей на доске. Также нам известно, что на доске располагается n королей, поэтому составим неравенство:

$$(9-6)^2 \geq n$$
$$3^2 \geq n$$
$$9 \geq n$$
$$n_{наиб.} = 9$$

Ответ: 9.

② $x, y > 0$
A_{max} - ?

$$A = \frac{xy(x+y)}{\sqrt[4]{x^{12}+y^{12}}}$$

1) $(x^6-y^6)^2 \geq 0$; $x^{12}+y^{12} \geq 2x^6y^6$; $2(x^{12}+y^{12}) \geq x^{12}+2x^6y^6+y^{12}$; $x^{12}+y^{12} \geq \frac{1}{2}(x^6+y^6)^2$

пусть: $B = \frac{xy(x+y)}{\sqrt[4]{\frac{1}{2}(x^6+y^6)^2}}$; поскольку знаменатель B меньше знаменателя A, а числители равны, то вся дробь B будет больше дроби A ($A \leq B$)

$$B = \frac{\sqrt[4]{2}(x+y)xy}{\sqrt{x^6+y^6}}$$

2) $(x^3-y^3)^2 \geq 0$; $x^6+y^6 \geq 2x^3y^3$;
$2(x^6+y^6) \geq x^6+2x^3y^3+y^6$; $x^6+y^6 \geq \frac{1}{2}(x^3+y^3)^2$

пусть: $C = \frac{xy(x+y)\sqrt[4]{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}(x^3+y^3)^2}}$; поскольку знаменатель C меньше знаменателя B, а числители равны, то вся дробь C будет больше дроби B ($B \leq C$)

$$C=\frac{xy(x+y)\cdot 2^{\frac{1}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}}{x^3+y^3}=\frac{xy\cancel{(x+y)}\cdot 2^{\frac{3}{4}}}{\cancel{(x+y)}(x^2-xy+y^2)}\quad |:xy \quad =\frac{2^{\frac{3}{4}}}{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-1}$$

3) $\left(\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2\geq 0$; $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$

пусть $D=\frac{2^{\frac{3}{4}}}{2-1}$; поскольку знаменатель D меньше знаменателя C, а числители равны, то вся дробь D будет больше дроби C ($C\leq D$)

$$D=\frac{2^{\frac{3}{4}}}{1}=\sqrt[4]{2^3}$$

получили неравенство:

$$\frac{xy(x+y)}{\sqrt[4]{x^{12}+y^{12}}}=A\leq B\leq C\leq D=\sqrt[4]{2^3}$$

чтобы $A_{max}=\sqrt[4]{2^3}$, нужно, чтобы $A=B=C=D$, тогда $x=y$.

допустим: $x=y=1$

проверка: $A=\frac{1\cdot 1(1+1)}{\sqrt[4]{1^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt[4]{2}}=2^{\frac{4-1}{4}}=\sqrt[4]{2^3}$ - верно

Ответ: $\sqrt[4]{2^3}$

5) 20 человек

$A>B>C$ (A - золото; B - серебро; C - бронза)

Наименьшее кол-во „серебряных" сувениров - ?

Возьмём произвольного участника X. Сыграл он 19 матчей.

Пусть: знак „$X>$" означает „участник X победил."

знак „$>X$" означает „участник X проиграл"

n участников проиграли участнику X.

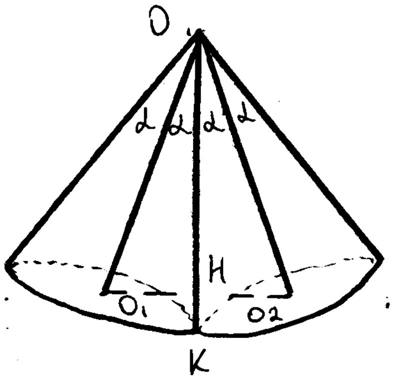
$(19-n)$ участников выиграли участника X.

$$\underset{(19-n)\text{ сп.}}{?}>X>\underset{n\text{ сп.}}{?}$$

Всего образовавшихся троек с участием X можно составить:

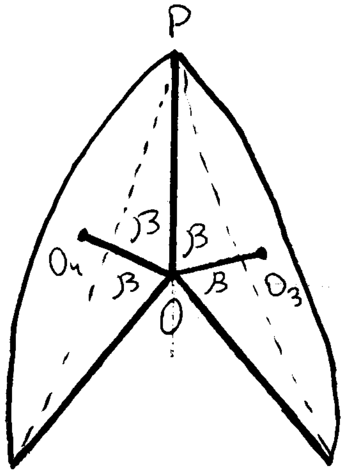
$((19-n)\cdot n)$ способов.

6



повернём рисунок

на 90° в бок.



Первые два конуса:

OK – общая образующая

ΔOO_1O_2 – р/б ($OO_1 = OO_2$ – опр.)

сл., O_1K – сер.пер. к O_1O_2.

$OK \cap O_1O_2 = H$

OH – мед., выс., бисс. (св-во)

угол при вершине каждого конуса: 2α

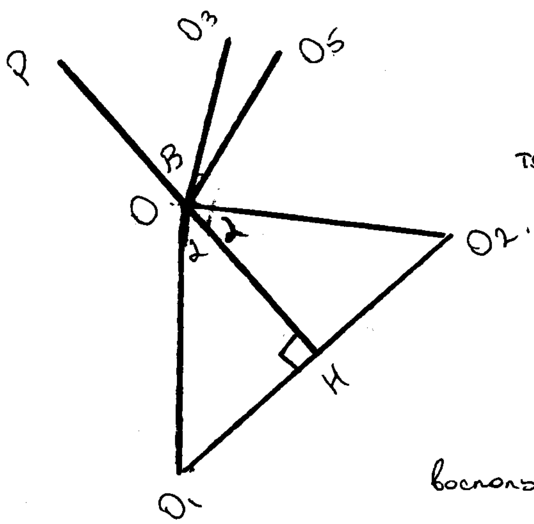
Вторые два конуса:

OP – общая образующая

точки H, O, O_3, O_4 лежат в одной пл-ти

угол при вершине каждого конуса: 2β

из соображений симметрии: $(OO_1O_2) \perp (HO_3O_4)$



$(\cdot) O_5 \subset (HO_3O_4)$

допустим, угол при вершине 5-го конуса: 2γ

$2\gamma_{max}$ – ?

тогда:

$\angle O_1OH = \alpha$.

$\angle O_1OO_3 = \alpha + \beta$

$\angle O_1OO_5 = \alpha + \gamma$

$\angle POO_3 = \beta$.

$\angle HOO_5 = \pi - (2\beta + \gamma)$

воспользуемся теоремой о 3-х косинусах для ~~O_1OHO_3~~: O_1OHO_3:

$\cos\angle O_1OH \cdot \cos\angle HOO_3 = \cos\angle O_1OO_3$

$\cos\alpha \cdot (-\cos POO_3) = \cos(\alpha+\beta)$

$-\cos\alpha \cdot \cos\beta = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$2\cos\alpha\cos\beta = \sin\alpha\sin\beta$ $\quad \cancel{|:\cos\alpha\cos\beta}$

$\cancel{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = 2}$

$\cancel{\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1-2} = -(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)}$

воспользуемся теоремой о 3-х косинусах для O_1OKO_5:

$\cos\angle O_1OK\cdot\cos\angle KOO_5=\cos\angle O_1OO_5$

$\cos\alpha\cdot\cos(\pi-(2\beta+\gamma))=\cos(\alpha+\gamma)$

$-\cos\alpha\cos(2\beta+\gamma)=\cos(\alpha+\gamma)$

$-\cos\alpha(\cos2\beta\cos\gamma-\sin2\beta\sin\gamma)=\cos\alpha\cos\gamma-\sin\gamma\sin\alpha$

$-\cos2\beta\cos\gamma\cos\alpha+\sin2\beta\sin\gamma\cos\alpha=\cos\alpha\cos\gamma-\sin\gamma\sin\alpha$ (делаем подстановку $2\cos\alpha\cos\beta=\sin\alpha\sin\beta$)

$-(2\cos^2\beta-1)\cos\gamma\cos\alpha+2\sin\beta\cos\beta\sin\gamma\cos\alpha=\cos\alpha\cos\gamma-\sin\alpha\sin\gamma$

$-2\cos^2\beta\cos\gamma\cos\alpha+\cancel{\cos\gamma\cos\alpha}+\sin\beta\sin\gamma\sin\alpha\sin\beta=\cancel{\cos\alpha\cos\gamma}-\sin\alpha\sin\gamma$

$-\cos\gamma\cos\beta\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta\sin\gamma\sin\alpha=-\sin\alpha\sin\gamma\ \Big|:\sin\alpha$

$\sin\gamma\sin^2\beta+\sin\gamma=\cos\gamma\cos\beta\sin\beta\ \Big|:\cos\gamma$

$\operatorname{tg}\gamma(\sin^2\beta+1)=\sin\beta\cos\beta$

$$\operatorname{tg}\gamma=\frac{\sin\beta\cos\beta}{\sin^2\beta+1}=\frac{\sin\beta\cos\beta}{2\sin^2\beta+\cos^2\beta}$$

используем неравенство о средних:

$$\frac{\sqrt2\sin\beta+\cos\beta}{2}\ge\sqrt{\sin\beta\cos\beta\sqrt2}$$

$2\sin^2\beta+\cos^2\beta+2\sqrt2\sin\beta\cos\beta\ge4\sqrt2\sin\beta\cos\beta$

$2\sin^2\beta+\cos^2\beta\ge2\sqrt2\sin\beta\cos\beta$

$$\operatorname{tg}\gamma=\frac{\sin\beta\cos\beta}{2\sin^2\beta+\cos^2\beta}\ \overset{\text{(поскольку знаменатель меньше)}}{\le}\ \frac{\sin\beta\cos\beta}{2\sqrt2\sin\beta\cos\beta}=\frac{1}{2\sqrt2}$$

$\gamma_{max}=\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2\sqrt2}\right)$

$2\gamma=2\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2\sqrt2}\right)$

рав-во достигается при $\sqrt2\sin\beta=\cos\beta$.

$\sqrt2\operatorname{tg}\beta=1$.

$\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{\sqrt2}$.

Ответ: $2\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2\sqrt2}\right)$.