(50)

А0-53

·СКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

8345

1	2	3	4	5	6	сумма
4	4	2	0	0	0	10

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Владимир

Дата 16.03.2019

* *

10–11 класс. Второй вариант

1. Имеется 9 черных ладей и n белых. При каком наибольшем n их можно расставить на шахматной доске так, чтобы одноцветные ладьи не били друг друга? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Даны положительные числа x, y, z. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{xyz\,(x+y+z)}{x^4+y^4+z^4}.$$

3. Окружность ω единичного радиуса проходит через вершины B и C треугольника ABC и вторично пересекает его стороны AB и AC в точках K и L соответственно. На лучах BL и CK отмечены соответственно такие точки P и Q, что $BP = AC$ и $CQ = AB$. Найдите расстояние между центрами описанных окружностей треугольников APQ и KBC.

4. Шестнадцатиричная запись квадрата натурального числа x представляет собой два одинаковых соседних блока из n цифр. Может ли n равняться 2023?

5. В однокруговом турнире по настольному теннису участвует $2k$ спортсменов. В каждом туре все участники проводят по одному матчу. Какое наименьшее число туров надо сыграть, чтобы при любом расписании игр обязательно нашлось трое теннисистов, сыгравших друг с другом?

6. Имеется три одинаковых конуса с общей вершиной, касающихся друг друга внешним образом, а также два шара, касающихся внешним образом друг друга и всех конусов. Радиусы шаров относятся как $1:3$. Найдите угол при вершине конусов. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении).

Задача 1

Чистовик

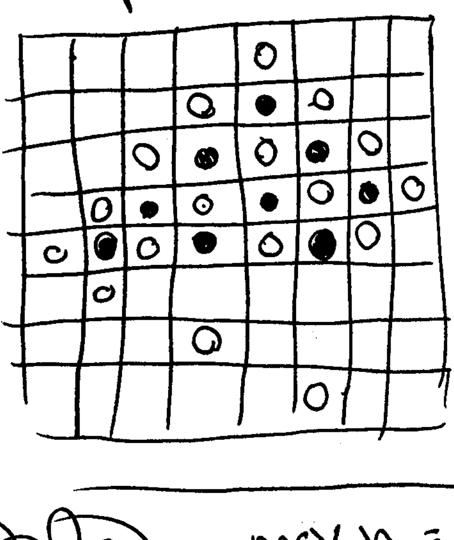
~~1. Заметим, что если в ряд стоит k ладей чёрного цвета, то в этом ряду может стоять максимум k+1 ладья белого цвета. Тогда по рядам будет максимум 2·8+1 ладья белого цвета. Аналогично по столбцам. Значит, максимум может быть 19 белых ладей.~~

~~Пример на 17 белых ладей.~~

1. Заметим, что если 2 ладьи стоят в 1 ряду и между ними нет фигур, то они бьют друг друга. Значит, если в каком-то ряду $n>1$ белых ладей, то в нём $n-1$ чёрная ладья. Т.к. всего на max может быть 8 рядов, то либо мы ставим ≤ 16 белых ладей, либо найдётся ряд где как минимум 3 белые ладьи. Чтобы расставить 16 ладей, нужно расставить между ними как минимум 8 чёрных ладей. Значит всего по рядам можно расставить max 17 ладей. Аналогично по столбцам.

Т.е. оценка сверху — 17.

Пример на 17 белых ладей.



$\boxed{\text{Ответ: } \max n = 17}$

Чистовик

Задача 2

$$A = \frac{xyz(x+y+z)}{x^4+y^4+z^4}$$

по неравенству Коши: $\sqrt[3]{xyz} \le \frac{x+y+z}{3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow xyz \le \frac{(x+y+z)^3}{27} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A \le \frac{(x+y+z)^3 \cdot (x+y+z)}{27\cdot(x^4+y^4+z^4)} = \frac{(x+y+z)^4}{27(x^4+y^4+z^4)}$$

$$(x+y+z)^4 = (x+y+z)^2 \cdot (x+y+z)^2.$$

$$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz.$$

лемма 1: $2xy \le x^2+y^2$. т.с. $(x-y)^2 \ge 0$: $x^2-2xy+y^2 \ge 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2xy \le x^2+y^2$ равенство при $x=0$

$$\Rightarrow (x+y+z)^2 \le (3x^2+3y^2+3z^2).$$

Тогда $(x+y+z)^4 \le (3x^2+3y^2+3z^2)^2$.

$$(3x^2+3y^2+3z^2)^2 = 9x^4+9y^4+9z^4+18x^2y^2+18y^2z^2+18z^2x^2.$$

по лемме 1 $(3x^2+3y^2+3z^2)^2 \le 27x^4+27y^4+27z^4$.

равенство при $x=y=z$.

Тогда $(x+y+z)^4 \le 27x^4+27y^4+27z^4$.

Тогда $A \le \frac{27(x^4+y^4+z^4)}{27(x^4+y^4+z^4)} = 1$ равенство при $x=y=z$.

$\boxed{\text{Ответ: } \max A = 1}$

Чистовик.

Задача 4

Пусть в шестнадцатеричной записи x k знаков. Тогда $(16)^{k-1} \le x < (16)^k$

Тогда $(16)^{2k-2} \le x^2 < 16^{2k}$ в записи числа 16^{2k-2} $2k-1$ знак, а в записи числа 16^{2k} $2k+1$ знак. Т.к. x^2 представляет собой 2 одинаковых блока по n цифр, то длина записи x^2 в 16-ричной с.ч. должна быть чётной длины $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ длина записи $x^2 - 2k$. $\Rightarrow k = 2023$.

Т.к. x^2 представим в виде 2х одинаковых блоков длины n, то

$$x^2 = (16^n + 1) \cdot p, \text{ где } p < 16^n$$

т.к. $x < 16^n$, $x < 16^n + 1$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~...~~ $x = \frac{(16^n+1)}{m}$, $x = p \cdot m$, где m — делитель числа (16^n+1) отличный от 1 и $m < 16$ т.к. иначе блоки по n начинались с нуля.

Более того, если $x < \sqrt{16^{2n-1}}$ — ничего не работает, т.е. длина записи $x^2 \neq$ ~~2023~~ $2n$.

Тогда $x > \sqrt{4^{4n-2}} = 4^{2n-1} = \frac{16^n}{4} \Rightarrow m \le 4$.

однако 16^n+1 — нечётное $\Rightarrow m \neq 2$; $m \neq 4$.

Рассмотрим случай, если $m = 3$. Тогда $16^n \equiv 1 \mod 3$.

однако для $\forall$ квадрата целого числа верно, что $q^2 \equiv 1 \mod 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ т.к. n — нечётное $16^{n-1} \equiv 1 \mod 3$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~...~~

$16^{n-1} \cdot 16 = 16^{n-1} \cdot 4^2$ т.к. $4^2 \equiv 1 \mod 3$:

$16^{n-1} \cdot 4^2 \equiv 1 \mod 3 \Rightarrow 16^n \equiv 1 \mod 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 16^n + 1 \not\vdots\, 3 \Rightarrow$ Других m нет.

Задача 4 (продолжение): Черновик

Тогда таких x нет.

Ответ: нет, не может

Черновик.

Задача 5.

~~Рассмотрим наибольшее число ... что ∃ расписание~~
~~Пусть игрок A сыграл max кол-во игр. Тогда рассмотрим тех с кем он сыграл ... Тогда никакие двое из сыгравших с A не играли между собой (иначе треугольник). Значит если игрок A сыграл ... игр, то как минимум $\frac{a(a-1)}{2}$ игр не сыграно.~~

Рассмотрим наибольшее n, такое, что ∃ расписание, где никакие трое не сыграли между собой.

~~Разобьём вершины на вершины~~ 3 ~~группы~~ по ВМ

Рассмотрим полный граф на 2k вершин в нём $\frac{2k\cdot(2k-1)}{2}$ рёбер. Разобьём граф на все возможные треугольники. Таких будет $\frac{C_{2k}^3}{2} = \frac{\frac{(2k)!}{3\cdot(2k-3)!}}{2} = \frac{(2k-2)(2k-1)\cdot 2k}{6}$

Заметим, что каждое ребро лежит в 2k−2 треугольниках. Тогда, чтобы существовало расписание, где никакие тройки не сыграли между собой надо стереть как минимум $\frac{\frac{(2k-2)(2k-1)\cdot 2k}{6}}{(2k-2)}$ рёбер. Иначе будет ∃ треугольник. Тогда стереть как минимум $\frac{(2k-1)2k}{6}$ рёбер.

Тогда максимальное кол-во игр, для которого существует расписание такое, что никакие трое не сыграли:

$$\frac{2k(2k-1)}{2} - \frac{2k(2k-1)}{6} = \frac{2}{3}\left(\frac{2k(2k-1)}{2}\right) = \frac{2k(2k-1)}{3}$$

Чистовик

Задача 5 (продолжение).

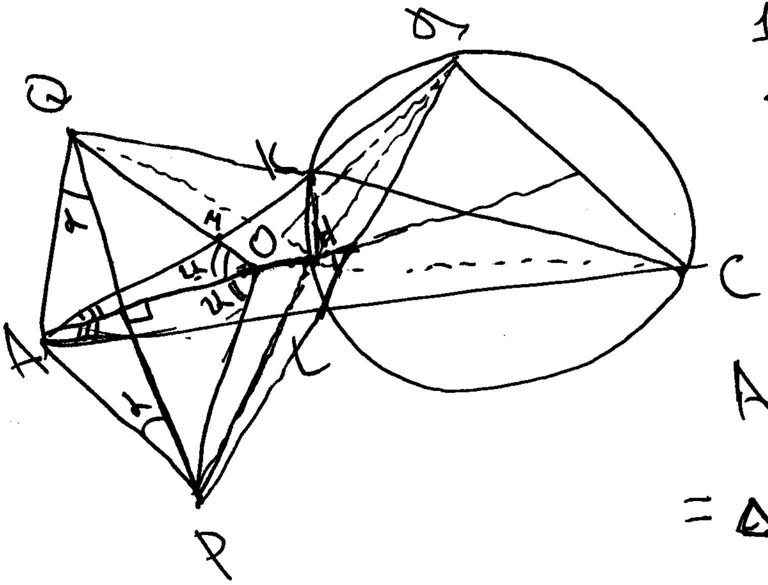
Тогда min кол-во, которое должен

сыграть 2k ~~кольцо~~ Дениксов, чтобы всегда нашлась тройка, где которые

сыграли между собой — $\frac{2k(2k-1)}{3}+1$.

Ответ: $\frac{2k(2k-1)}{3}+1$

Задача 3



1. Заметим, что $\angle KBL$ и $\angle KCL$ лежат на 1 дуге $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle KBL = \angle KCL$

т.к. $AB = CQ$ и $AC = BP$, $\triangle ABP = \triangle AQC$ по 2-м сторонам

и углу между ним. $\Rightarrow AP = AQ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle APQ = \angle PQA$. Пусть $\angle APQ = \alpha$. Пусть O — центр окружности, описанной вокруг $\triangle APQ$. Тогда O лежит на серпере к PQ $\Rightarrow$ на высоте из вершин A и

$\angle AOQ = 2\angle APQ = 2\alpha$

Рассмотри точку H. — пересечение высот $\triangle APQ$ из т. A и окружности ω. Т.к. $\triangle APB = \triangle CAQ$ и $\angle PAO = \angle QAO =$

$= 90 - \alpha$ $\angle HAC = \angle HAB$

Чистовик.

~~Тогда ... QMK~~

~~Тогда $\angle KHL = 2\alpha$~~

~~Тогда $\angle KHB = \angle BAH + \angle KBH$, ...~~

Тогда $\angle BHC = \angle BAH + \angle BHA + \angle HAC + \angle CHL =$

$= \angle BAH + \angle CHL = \angle KBL = \angle KCL \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BHC = \angle BHC + \angle BAC$.

~~$\angle BLC = 180 - \angle LCB - \angle LBC$~~

~~$\angle BKC = 180 - \angle KBC - \angle ...$~~

Заметим, что $\angle PLA = \angle AKQ = 2\alpha$.

$\angle PLA = \angle BLC$ как вертикальные.

$\Rightarrow \angle BHC = 2\alpha$

Т.к. AH — сер. пер. $\angle HQP = \angle HPQ$

$180 - (\angle QPH + \alpha + 90 - \alpha) = \angle AHP = 90 - \angle QPH$

Т.к. $HQHP$ центрально симметрична и $\triangle APQ$ равнобедренный

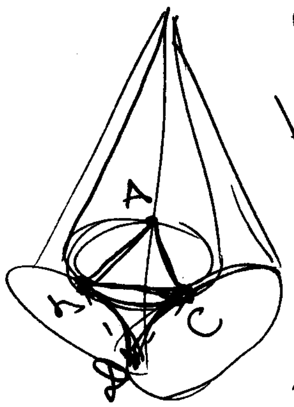
~~...~~

$\Rightarrow$ ~~...~~ $\Rightarrow \angle QHP =$ ~~...~~ $4\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow H = O. \Rightarrow$ $\boxed{\text{Ответ: } \; ... = 1}$

и следовательно

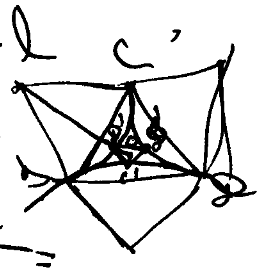
Задача 6



Т.к. ~~основания~~ конуса равны $\triangle ABC$ – ~~равнобед~~ равносторонний, где A – точка касания большего шара и конуса, B, C, – т. касания конусов

Тогда, l – радиус основание конус. Тогда.

$AB = BC = AC = \frac{\sqrt{3}}{\cancel{1}} l$



рассмотрим $\triangle BCD$.

$$\text{Тогда } \frac{BO}{OD'} = \frac{\frac{2}{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} l}{\frac{\sqrt{3}}{1} l - 1l} = \frac{l}{\sqrt{3}-1\,l} = \frac{1}{(\sqrt{3}-1)}$$

~~Тогда R большого шара в конусе~~

Тогда $\frac{h}{l} = \sqrt{3} \Rightarrow \cancel{\sin}\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = 30^\circ$

Ответ: $\varphi = 30^\circ$.