$$f'(x) = \frac{1}{4}\cdot\frac{12(x+r)^{11}\cdot r}{\sqrt[4]{(x^{12}+(x+r)^{12})^3}} = 3\,\frac{(x+r)^{11}\cdot r}{\sqrt[4]{(x^{12}+(x+r)^{12})^3}}$$

$g'(r) = 3x^2 + 2r$

, отсюда

~~$f'(r) = g'(r)$, при $r \geq 0$, а тогда~~

Отсюда

$\frac{f(r+\Delta r)}{f(r)} > \frac{g(r+\Delta r)}{g(r)}$, при $r \geq 0$, то есть

при $r \geq 0$ A - убывает

, так как

$A'(r) \leq 0$ всегда

$A(0)$, то есть при $x = y$,

$A(0)$ - наибольшее и тогда ($A(0) = \sqrt[4]{2^3}$

Ответ: $\sqrt[4]{2^3}$ - наибольшее значение A

№3

Ответ: Пусть O - центр описанной окружности треугольника ADX, тогда $P \in$ биссектрисе угла $\angle DOX$

№4

Для удобства переведём число x и число x^2 в двоичную систему, тогда число x - $4n$ значное и не имеет нулей, то есть $x = \underbrace{11\ldots11_2}_{4n \text{ знаков}}$ и тогда x^2 читается в обе стороны одинаково для $n \vdots 4$

Ответ: $n \vdots 4$, то есть $n = 4k$, где $k \in N$

50

40-3

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

4908

1	2	3	4	5	6	сумма
4	2	0	0	4	–	10

НАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Красноярск

Дата 22.03.19.

* *

10–11 класс. Четвертый вариант

1. При каком наибольшем n на доске 9×9 можно расставить n королей и 6 ладей так, чтобы никакая фигура не была под боем?

2. Даны числа $x, y > 0$. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{xy\,(x+y)}{\sqrt[4]{x^{12}+y^{12}}}.$$

3. Дан тупой угол BAD, где точка D отлична от A. На луче AB произвольным образом выбирается точка X, также отличная от A. Пусть P — точка пересечения касательных к описанной окружности треугольника ADX, проведенных в точках D и X. Найдите геометрическое место точек P.

4. Дано натуральное число x, шестнадцатиричная запись которого n-значная и не содержит нулей. Числа x и x^2 в шестнадцатиричной системе одинаково читаются слева направо и справа налево. Найдите все n, при которых такое x существует.

5. В однокруговом турнире по настольному теннису принимает участие 20 человек. Если тройка участников A, B, C такова, что A выиграл у B, а B — у C, то организаторы турнира вручают спортсменам из этой тройки соответственно “золотой”, “серебряный” и “бронзовый” сувениры. Участник, оказавшийся в нескольких тройках, получает сувенир за каждую из них. Какое наименьшее количество “серебряных” сувениров надо закупить организаторам, чтобы их хватило вне зависимости от результатов турнира? Ничьих в теннисе не бывает.

6. Четыре конуса с общей вершиной O касаются друг друга внешним образом, причем первые два и последние два их них имеют одинаковый угол при вершине. Пятый конус, отличный от четвертого, касается первых трех конусов внешним образом. Найдите максимальный угол при вершине пятого конуса. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении).

№5

Заметим, что серебряных сувениров будет ровно столько же, сколько всего найдётся троек A, B, C для которых выполняется условие. Заметим, что количество троек при определённом B равняется $X \cdot n$, где X — количество поражений участника B, а n — количество его побед, и раз всего игр сыграно каждым по 19 (по одной против каждого), то $X + n = 19$ и тогда количество троек при определённом B равно: $X \cdot (19 - X) = 19X - X^2$, заметим, что $19X - X^2$ — квадратный трёхчлен с отрицательным старшим коэффициентом, тогда $19x - x^2 \leq 19x_0 - x_0^2$, где x_0 — координата вершины параболы (квадратного трёхчлена) по оси Ox, то есть $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{19}{2 \cdot (-1)} = \frac{19}{2}$, но x_0 — не целое, а $x \in \mathbb{Z}$, тогда $19x - x^2$ — принимает наибольшее значение при наименьшем $|x - x_0|$, а наименьшее $|x - x_0| = \frac{1}{2}$, так как $\frac{19}{2} - 9 = \frac{1}{2}$ и $10 - \frac{19}{2} = \frac{1}{2}$, то есть $19x - x^2 \leq 19 \cdot 9 - 9^2 = 19 \cdot 10 - 10^2 = 90$, то есть ≤ 90. Но тогда количество троек для определённого B ≤ 90. Но тогда количество троек не больше, чем $90 \cdot 20$ (где 20 — количество вариантов выбрать определённого B из 20 участников), то есть всего серебряных сувениров ≤ 1800. Заметим, что существует комбинация результатов игр, при которой достигается 1800 серебряных сувениров, приведём пример такой комбинации:

Расположим всех участников по кругу и пусть каждый выиграет у 9-ти следующих по правую сторону от него и проиграет 9-ти следующим слева от него, а с противоположным для каждого выиграет любым образом, тогда $X \cdot n = 9 \cdot 10 = 90$, то есть $X = 10$ или $x = 9$ и тогда каждый получит ровно 90 — серебряных сувениров и тогда организаторы должны изготовить серебряных сувениров $\geq 90 \cdot 20 = 1800$

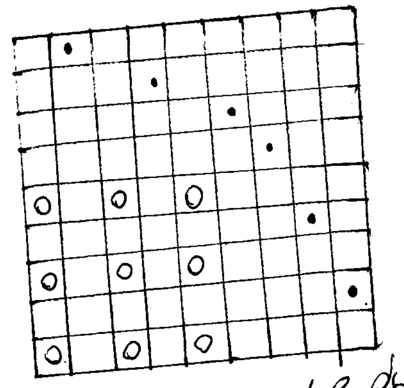
То есть необходимое и гарантированно достаточное количество серебряных сувениров не больше 1800 и не меньше 1800, но тогда оно равно 1800 и тогда.

Ответ: 1800.

№1

Заметим, что если на поле стоит 6 ладей не бьющих друг друга, то каждая ладья полностью бьёт одну строку и один столбец, то есть ходы частично не задевают (после ладей) остаются только три строки и три столбца. Заметим, что если клетка лежит на пересечении полностью битого столбца или строки и ещё какой-то строки или столбца соответственно, то эта клетка — битая и туда ставить фигуру нельзя, тогда соответственно оставшихся и коней можно поставить только на клетки пересечения не полностью битой строки и не полностью битого столбца, а таких клеток не более, чем 3×3 (3 строки x 3 столбца), то есть $n \leq 3 \times 3 = 9$, то есть $n \leq 9$, а пример на $n = 9$ я привести могу:

Расставим фигуры следующим образом (где „o" - кони, а „•" - ладьи



(n=9)

Никакие фигуры не бьют друг друга и раз ранее мы доказали, что $n \leq 9$, то $n = 9$ - наибольшее (есть пример)

Ответ: $n = 9$ - наибольшее

№2

$A = \frac{xy(x+y)}{\sqrt[4]{x^{12} + y^{12}}}$, при $x = y$ $A = \frac{2x^3}{\sqrt[4]{2x^{12}}} = \frac{2}{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{2^3} = \sqrt[4]{8} =$ $(x>0)$

теперь пусть $x \leq y$ (из симметрии) и тогда $y = x + r$, где $r \geq 0$ и тогда

$A = \frac{x(x+r)(2x+r)}{\sqrt[4]{x^{12} + (x+r)^{12}}}$, примем X — за константу, возрастает быстрее $g(r) = x(x+r)(2x+r)$ и докажем, что $f(r) = \sqrt[4]{x^{12} + (x+r)^{12}}$, то есть $\frac{f(r+\Delta)}{f(r)} > \frac{g(r+\Delta)}{g(r)}$