Рассмотрим случай, когда человек имеет 2 победы в тройке и 9 в турнире, тогда $10 \cdot \frac{9\cdot 8}{2}$ троек подходят.

(кол-во игроков с 3 победами; 2 соперника, которых он победил)

Всего $10(45+36)$ ~~троек~~ троек второго типа (где у одного из них 2 победы)

Всего C_{20}^3 троек => всего троек первого типа $C_{20}^3 - 810 = \frac{20\cdot 19\cdot 18}{6} - 810 =$

$= (19 \cdot 3 \cdot 2 - 81)\,10 = (38-27)\,30 = \underline{330 \text{ троек}}$ ✓

Ответ: 330

№2

$$A = \frac{(a-b)^2(b-c)^2(a-c)^2}{\left((a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2\right)^3}$$

$$\sqrt[3]{A} = \frac{\sqrt[3]{(a-b)^2(b-c)^2(a-c)^2}\cdot 3}{\left((a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\right)\cdot 3}$$

Заметим, что сверху среднее геометрическое, а снизу среднее арифметическое

$\Rightarrow \sqrt[3]{A} \le \frac{1}{3} \Rightarrow A < \frac{1}{27}$

(Равенство только если $(a-b)^2 = (a-c)^2 = (b-c)^2$, что верно только при $a=b=c$, что противоречит условию)

$A < \frac{1}{27}$

ГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

2

60

1	2	3	4	5	6	сумма
4	0	4		4		12

6798

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Барнаул

Дата 16.03.2019

* *

10–11 класс. Шестой вариант

1. Какое наибольшее количество фишек можно расставить на клетчатой доске 12×12 так, чтобы на каждой диагонали располагалось не более пяти фишек?

2. Даны различные числа a, b, c. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right)^3}.$$

3. На стороне BC остроугольного треугольника ABC выбрана точка D, а на продолжении стороны AB за точку B — точка X. Прямые, проходящие через X параллельно BC и AD, пересекают соответственно лучи AC и CB в точках Y и Z. Пусть M, K и N — середины отрезков BC, YZ и AD соответственно. Найдите угол KMN.

4. Восьмеричная запись натурального числа x — это написанная 2019 раз подряд пара каких-то цифр. Число y получено некоторой перестановкой цифр x. Может ли восьмеричная запись числа $x \cdot y$ представлять собой многократно повторенный блок из четырех цифр?

5. В однокруговом турнире по настольному теннису приняло участие 20 человек. Одна половина теннисистов одержала в турнире по 10 побед, вторая половина — по 9 побед. Сколько по итогам турнира оказалось троек участников, одержавших во встречах между собой ровно по одной победе? Ничьих в теннисе не бывает.

6. Три конуса с общей вершиной O касаются друг друга внешним образом. Первые два конуса имеют угол при вершине $\frac{2\pi}{3}$, а ось симметрии третьего конуса перпендикулярна осям симметрии первых двух. Еще один конус с вершиной O касается внешним образом трех других. Найдите его угол при вершине. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении.)

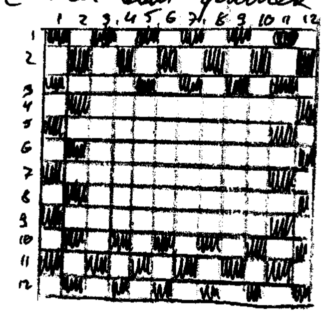
№1 Раскрасим нашу доску в шахматном порядке.

Заметим, что все диагонали, или на чёрных, или на белых клеточках. =>

=> если мы разместим наши фишки только на чёрных клеточках, то все „белые" диагонали будут пустыми. => можно найти максимальное кол-во фишек только на чёрных полях, а затем повторить расположение фишек для белых клеточек. (повернуть доску на 90° и все чёрные клеточки будут белыми)

Заметим, что каждая клеточка участвует в 2-х диагоналях =>

=> Если посчитать все фишки на диагоналях ↗, то их кол-во совпадёт с кол-вом фишек на диагоналях ↘.



(черные клеточки – клеточки на которых стоят фишки)

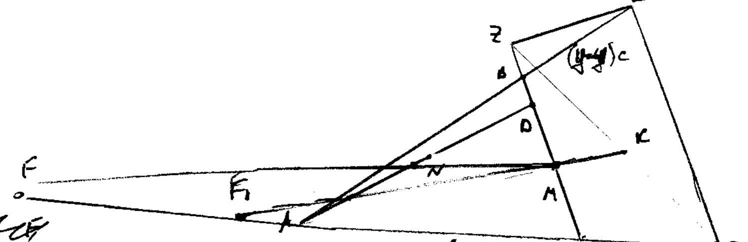
Заметим, что на доске ровно 12 ↗ диагоналей => максимум 60 фишек (на каждой диагонали ≤5 фишек), но клеточка (1;1) единственная на своей диагонали, как и клеточка (12, 12) => максимум 60−4−4 фишек

В диагонали $(3,1)$ $(2,2)$ $(1,3)$ только 3 клеточки => максимум 3 фишки, как и на диагонали $(12,10)$ $(11,11)$ $(10,12)$ => максимум $60-8-2-2$

Также на клетках $(1,1)$ $(2,2)$ $(3,3)$ $(10;10)$ $(11;11)$ $(12;12)$ не может стоять 6 фишек => ещё на 1 фишку меньше => максимум фишек $60-12-1=47$, а для 47 у меня есть пример. => максимум на чёрных клеточках 47 => всего максимум 94 фишки

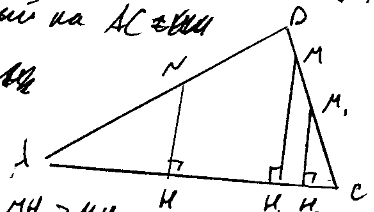
Ответ: 94. √

№3 ~~В Пусть~~



Рассмотрим $\triangle ADC$ и опустим перпендикуляр из точки M и N на AC

Пусть M_1 – середина DC, то перпендикуляр M_1H_2, опущенный на AC равен HN, а



$\triangle CMH_1 \sim \triangle CM_1H_2$ по 2-м углам => $\frac{MH_1}{MH_2} = \frac{CM}{CM_1} \geq 1$ т.к $CM = \frac{1}{2}BC$, а $CM_1 = \frac{1}{2}DC$, (т.к точка D лежит на BC) => $MH_1 \geq M_1H_2$ => $MH_1 \geq NH$ => если MN пересекает AC, то тогда за точку A. (если точка M лежит в DC, если M не лежит в DC, то MN пересекает отрезок AC)

Допустим, что $MN \parallel AC$, но т.к N – середина AD, то MN средняя линия $\triangle ADC$ => M – середина DC => D совпадает с точкой B => точка Z совпадает с точкой B => NK – средняя линия $\triangle ABY$ => $\angle KMN = 180°$ ($NM \parallel AC$; $NK \parallel AC$ => они лежат на одной прямой).

Пусть $MN \cap AC = F$, то по теореме Менелая в $\triangle ADC$ и секущей NM

$$\frac{DN}{NA} \cdot \frac{AF}{FC} \cdot \frac{CM}{MD} = 1$$

$$\frac{AF}{FC} = \frac{MD}{CM}$$

(Если M лежит на BD, то т. Менелая для $\triangle ADC$ и секущей FN

Пусть $AC = b$, а $AF = xb$, $BC = a$, то $\frac{AF}{FC} = \frac{x}{x+1} = \frac{2 \cdot MD}{a}$ => $MD = \frac{ax}{2x+2}$ => $BD = \frac{a}{2} - \frac{ax}{2x+2}$ $\frac{ax+a-ax}{2x+2}$

Рассмотрим $\triangle ABC$ и $\triangle AXY$ они подобны т.к $BC \parallel XY$. => $\frac{AB}{AX} = \frac{AC}{AY} = \frac{1}{y}$ => $CY = (y-1)b$

Пусть $AB = c$, то $BX = c(y-1)$

$\triangle ADB \sim \triangle XZB$ по 2-м углам => $\frac{AB}{BX} = \frac{BD}{ZB} = \frac{1}{y-1}$ => $ZB = (y-1)\frac{a}{2x+2}$

По теореме Менелая в $\triangle CZY$ и секущей MK ($MK \cap AC = F_1$)

$$\frac{ZM}{MC} \cdot \frac{CF_1}{F_1Y} \cdot \frac{YK}{KZ} = 1 \Rightarrow \frac{CF_1}{F_1Y} = \frac{BM}{ZM}$$

$$\frac{AF}{FC} = x \Rightarrow \frac{AF}{AF+b} = x \Rightarrow AF = \frac{b}{x-1}$$

$$\frac{CF_1}{F_1Y} = \frac{ZM}{BM} = \frac{\frac{a}{2} + \frac{a(y-1)}{2x+2}}{\frac{a}{2}} = \frac{a(x+1)+a(y-1)}{a(x+1)} = \frac{x+y}{x+1}$$

$$\frac{AF_1+b}{AF_1+yb} = \frac{x+y}{x+1}$$

$$AF_1(x+1) + bx + b = AF_1(x+y) + yxb + y^2b$$

$AF_1 = \frac{b}{x-1}$ => F_1 и F совпадают => MNK – прямая. => $\angle NMK = 180°$

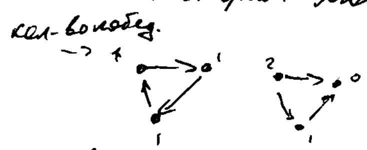
Ответ: 180° √

№5

Решим графом, где ребра – это кто, кого победил, а вершины – игроки.

Граф полный т.к всего вершин 20 => максимальное число рёбер 190 => как и кол-во побед. $(10\cdot10 + 10\cdot9)$

Рассмотрим любые 3 вершины существует 2 варианта



(Направление означает, кто кого победил)

Заметим, что только первый $\triangle$ подходит по условию.

Найдём кол-во вторых треугольников.

В таком $\triangle$ только один человек имеет 2 победы => если мы найдём все тройки, в которых один человек имеет 2 победы, то мы найдём все такие тройки. Рассмотрим 1 случай, когда человек имеет 2 победы в тройке, и 10 побед в турнире, тогда ровно $10 \cdot \frac{10 \cdot 9}{2}$ троек подходят и все они различные.