РГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

5265

60

1	2	3	4	5	6	сумма
2	0	4	4	2		12

60

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада г. Москва

Дата 10 марта 2019

* *

10–11 класс. Десятый вариант

1. Какое наибольшее количество ладей можно расставить на шахматной доске так, чтобы каждую ладью било не более двух других? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Числа x, y, z — углы некоторого треугольника, один из которых не меньше $\frac{\pi}{2}$. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \cos x + \cos y + \cos z + \cos(x-y) + \cos(y-z) + \cos(z-x).$$

3. Дан четырехугольник $ABCD$, отличный от параллелограмма. На лучах AB, CB, CD и AD вне сторон четырехугольника $ABCD$ выбираются соответственно точки K, L, M и N так, что $KL \parallel MN \parallel AC$ и $LM \parallel KN \parallel BD$. Найдите геометрическое место точек пересечения диагоналей параллелограмма.

4. Натуральное число x в восьмеричной системе 2018-значное, и его цифры повторяются через одну. Оказалось, что восьмеричная запись x^2 содержит только цифры 3 и 4, причем в равном количестве. Найдите x^2 (в восьмеричной системе).

5. В однокруговом турнире по настольному теннису участвовало n теннисистов ($n \geqslant 3$). Будем говорить, что игрок A *круче* игрока B, если A выиграл у B или найдется такой игрок C, что A выиграл у C, а C выиграл у B. При каких n по итогам турнира могло оказаться так, что каждый игрок круче всех остальных? Ничьих в теннисе не бывает.

6. На столе лежат два конуса с общей вершиной O, касаясь друг друга внешним образом. Угол между их осями симметрии равен $\operatorname{arctg} \frac{12}{5}$. Найдите максимальный угол при вершине большего из двух конусов с вершиной O, которые лежат на столе и касаются внешним образом первых двух конусов. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении.)

№4. Заметим, что в 8-ричной С.И. признак делимости на 7 такой же, как признак дел-ти на 9 в 10-ичной С.И.

т.к $\overline{\ldots k \ldots} = 8^n \cdot k \equiv 1^n \cdot k \equiv k$ по модулю 7 т.е число сравнимо по модулю с 7 и Σ его цифр)

Число x^2 делится на 7 т.к сумма его цифр делится на семь (x^2 по условию состоит из 3 и 4) $\Rightarrow$ x тоже делится на 7.

т.к $\overline{abab\ldots abab} = 1008(a+b)$ по модулю 7, то $a+b$ делится на 7.

Обратим внимание на последн. цифру x^2: по условию это либо 3 либо 4. Т.к $\overline{abab\ldots abab} = 8(\overline{abab\ldots ab})+b$, то посл. цифра квадрата этого числа будет зависеть от b.

Квадрат. кажд. цифры в 8-ной С.И.

$0^2=0$
$1^2=1$
$2^2=4$
$3^2=9=8+1$
$4^2=16=2\cdot8+0$
$5^2=25=3\cdot8+1$
$6^2=36=4\cdot8+4$
$7^2=49=6\cdot8+1$

Т.е ни одна из цифр не дает „3" в конце а „4" дают 2 и 6.

$(a+b):7 \Rightarrow$ либо $a=1$; $b=6$, либо $a=5$ $b=2$

Последние две цифры x^2 (т.к $\overline{abab\ldots abab} = 8^2(\overline{abab\ldots ab}) + 8a+b$ последняя цифра квадрата числа будет зависеть от a и b)

проверим оба варианта в квадрат.

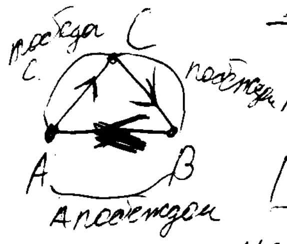
$(1\cdot8+6)^2 = 3\cdot8^2+0\cdot8+4$ (ложно т.к последняя цифра 0)

$(5\cdot8+2)^2 = 7\cdot8^2+4\cdot8+4$ — верно (т.к ост. варианты неверны)

то x это $\underbrace{5252\ldots5252}_{2018 \text{ раз}}$

Ответ. ↓ на доп листе.

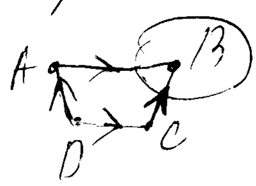
№5. Первая ~~необходимая~~ нужная нам комбинация будет при $n=3$. Теннисист А побеждает В (А круче В), теннисист В побеждает теннисиста С (В круче С + А круче С) теннисист С побеждает А (С круче А + С круче В) при $n=3$ каждый круче всех остальных. Попробую нарисовать это:



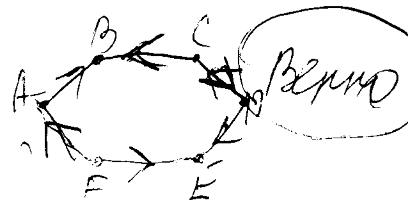
→ это стрелка, к кому направлена, тот и поедший (указывает на победителя)

Выигрышная для условия ситуация, когда из каждой вершины (теннисиста) выходит одна стрелка и одна приходит →C→ (т.е. один матч он выигрывает, один проигрывает)

Итак, для победы каждый теннисист должен выиграть один раз и один проиграть, теннисистов выигравших или проигравших два раза быть не должно.



Для того, чтобы не было игроков проигравших или победивших два раза число участвующих должно быть кратно 3 (3;6;9....) т.е $\frac{n}{3}=k$, $k \in Z$



Ответ: $\frac{n}{3}=k,\ k \in Z$

№3. Т.к $KL \parallel MN$, а $LM \parallel KN$, $KLMN$ - параллелограмм.

$\triangle BKL \sim \triangle ABC$ $\quad \triangle ACD \sim \triangle MDN$

$$\frac{LK}{AC}=\frac{BK}{AB}=\frac{BL}{BC} \quad ; \quad \frac{MN}{AC}=\frac{MD}{DC}=\frac{DN}{AD}$$

Т.к $MN=LK$ все отношения равны между собой.

Обозначим их через a. Заметим, что если отложить на луче AB за точку B отрезок $BK=a\cdot AB$, а за точку B на луче CB отрезок $BL=a\cdot BC$ (аналогично с остальными точками)

Ответ: $\underbrace{34\ldots34}_{2018}\,3\,\underbrace{434\ldots344}_{2018}$. V из всех этих отрезков мы получим KLMN-параллелограмм

Введем координаты точек, используя их буквы. Посчитаем теперь координаты точки пересечения диагоналей параллелограмма т.к это середина одной из его диагоналей; то это точка O. $O = \frac{M+K}{2}$ (M и K уже координаты)

$$K = B + (B-A)a; \quad M = D + (D-C)a;$$

$$O = \frac{B+(B-A)a+D+(D-C)a}{2} = \frac{B+D}{2} + a\frac{B+D-(A+C)}{2};$$

обозначим середину BD через Q а середину AC через P, тогда

№2. преобразуем A;

$A = \cos x + \cos y + \cos z + \cos x \cos y + \sin x \cdot \sin y + \cos y \cdot \cos z + \sin y \sin z + \cos z \cos x + \sin z \sin x$

т.к выражение симметрично, ~~$x \geq \frac{\pi}{2}$~~ примем $x \geq \frac{\pi}{2}$, тогда $\cos x \leq 0$

$A = -|\cos x| + \cos y + \cos z - |\cos x| \cos y + \sin x \sin y + \cos y \cdot \cos z + \sin y \sin z - |\cos x| \cos z + \sin z \sin x;$