60

Выход 11^{00} - 11^{01}

О-23

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Ш

1	2	3	4	5	6	сумма
4	4	4				12

2925

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (8–9 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Саранск

Дата 13.03.2019.

* *

8–9 класс. Первый вариант

1. Маша на свой день рождения принесла в школу конфеты, оставила несколько конфет себе, а остальные раздала шестерым своим подружкам. Оказалось, что у всех девочек разное число конфет и количество конфет у любых четырех девочек больше, чем у трех оставшихся. Какое наименьшее количество конфет Маша могла оставить себе?

2. При каких a квадратные трехчлены $x^2 + ax - 2$ и $2x^2 - 3x + 2a$ имеют общий корень?

3. На столе лежит 2019 камней. Петя и Вася играют в игру по следующим правилам. Ходят по очереди, начинает Петя. За один ход можно взять со стола 1 или 2 камня, но один и тот же игрок два раза подряд не может брать 2 камня. Проигрывает не имеющий хода. Кто из игроков сможет обеспечить себе победу вне зависимости от игры противника?

4. Для любых положительных чисел a, b и c докажите неравенство

$$\frac{a}{2a^2+b^2+c^2} + \frac{b}{a^2+2b^2+c^2} + \frac{c}{a^2+b^2+2c^2} \leqslant \frac{9}{4(a+b+c)}.$$

5. Внутри треугольника ABC выбрана такая точка D, что $\angle ABD = \angle ACD$ и $\angle ADB = 90°$. Точки M и N середины сторон AB и BC соответственно. Найдите угол $\angle DNM$.

6. Найдите все пары простых чисел p и q, для которых $p^2 + pq + q^2$ является точным квадратом.

Оценка:

№1 Решение: Упорядочим всех девочек по количеству конфет:

$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 < a_7$. Тогда, из условий, сумма конфет $a_1+a_2+a_3+a_4 > a_5+a_6+a_7$. Так же заметим, что т.к кол-во конфет целое, то ~~[illegible]~~ $a_5 - a_2 \geq 3$, аналогично

$a_6 - a_3 \geq 3$, $a_7 - a_4 \geq 3$ $\Rightarrow$ $a_5+a_6+a_7 - a_4 - a_3 - a_2 \geq 9$, тогда, у a_1 девочки хотя бы $9+1=10$ конфет. Получается, что у ~~девочки~~ любой девочки не меньше 10 конфет, т.к их хотя бы 10 у девочки с наим. количеством $\Rightarrow$ у Маши не менее 10 конфет.

Пример:

$a_1 = 10$, $a_2 = 11$, $a_3 = 12$, $a_4 = 13$, $a_5 = 14$, $a_6 = 15$, $a_7 = 16$.

$\uparrow$

Маша

Ответ: 10.

№2.

$f(x) = x^2 + ax - 2$ $\qquad$ $g(x) = 2x^2 - 3x + 2a$

$$x_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2+8}}{2} \qquad x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-16a}}{4} \qquad 9 - 16a \geq 0$$

$a \leq \frac{9}{16}$.

Получим ~~[illegible]~~ совокупность:

$$\left[\begin{array}{ll} \frac{-a+\sqrt{a^2+8}}{2} = \frac{3-\sqrt{9-16a}}{4} & (\mathrm{I}) \\ \frac{-a+\sqrt{a^2+8}}{2} = \frac{3+\sqrt{9-16a}}{4} & (\mathrm{II}) \\ \frac{-a-\sqrt{a^2+8}}{2} = \frac{3-\sqrt{9-16a}}{4} & (\mathrm{III}) \\ \frac{-a-\sqrt{a^2+8}}{2} = \frac{3+\sqrt{9-16a}}{4}. & (\mathrm{IV}) \end{array}\right.$$

7 – ?, т.к неизвестно, сможем ли мы взять 2 камня, чтобы противник попал в 5 – ~~по~~ плохую позицию. 9 – хорошая, т.к мы берем 1 камень, попадаем в ?. Далее, после хода противника мы либо в $\underset{7}{?}$ позиции и тогда берем 2 камня и противник оказыв. в плохой, либо мы находимся в 6 – хорошей позиции, если противник взял 2 камня. 10 – плохая, т.к

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & 10 & & & & \\
 & \swarrow_{\text{мы}} & & \searrow^{\text{мы}} & & & \\
9 & & & 8 & \xrightarrow[\text{противник}]{} \cancel{8}\,7 & \xrightarrow{\text{мы}} & 6 \\
\Downarrow & & & & & & \times
\end{array}
$$

т.к на прошлом брали 2 камня

противник в хорошей

выигр. позиция у противника

⇒ мы проиграли.

~~Возвращаясь~~ тогда след. поле хорошее, т.к из него мы можем попасть в плохое, потом опять 2 – ?, т.к мы из них можем попасть или в хорошее или в плохое и так далее.

Тогда, получили цикл:

(х ? ? х П) (х ? ? х П) (х ? ? х П) ...

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15.

т.к цикл состоит из 5 элементов, а $2019 \underset{5}{\equiv} 4$ ⇒ 2019 – 4 элемент цикла, т.е 2019 – хорошая позиция ⇒ выиграет первый.

Ответ: победит Петя

№3. Чистовик.

Решение: будем называть:

1) Хорошая позиция (Х) – позиция, в которой мы гаранти ровинно выигрыв.

2) Плохая позиция (П) – позиция, в которой мы гарантир. проигрываем

3) Неизвестная позиция (?) – позиция, в которой можно выиграть и проиграть, например когда нам или противнику можно или нельзя взять 2 камня. ~~Так~~

Тогда, рассмотрим ситуации и найдем цикл

1/2/3/4/5/6/7/8/9/10/11/12/13/14/15/16....

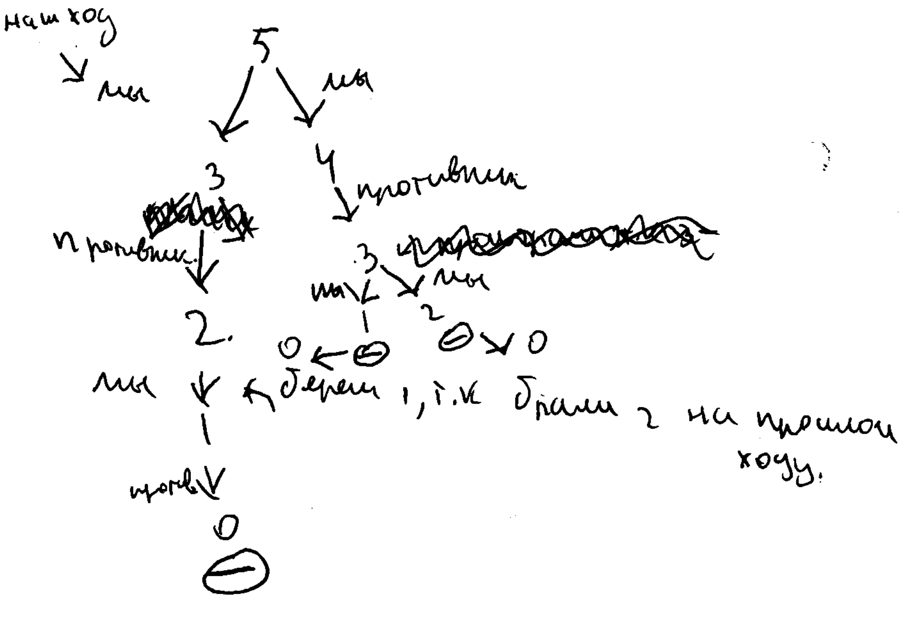
Х ? ? Х П Х ? ? Х П Х ? ? Х 17 Х ...

Номер позиции соотв. кол-ву камней в случае

Очевидно, что 1 позиция – хорошая.

2 и 3 ?, т.к все зависит от того, сможем ли мы или противник взять 2 камня. 4 – хорошая, т.к своим ходом мы возьмем 1 камень, далее после хода ~~его~~ противника в куче будет 2 или 1 камень, на прошлом ходу мы не брали 2 камня, то сможем взять на данном.

Далее, разбираем случаи в виде дерева



=> в любом случае 0 на наш ход и мы проиграли

Позиция 6 хорошая, т.к взяв 1 камень противник окажется в плохой позиции.

III) $\dfrac{-a-\sqrt{a^2+8}}{2} = \dfrac{3-\sqrt{9-16a}}{4}$ $/\cdot 4$

$-2a-2\sqrt{a^2+8} = 3-\sqrt{9-16a}.$

$3+2a = \sqrt{9-16a}-2\sqrt{a^2+8}$ $/\wedge 2.$

$(3+2a)^2 = \left(\sqrt{9-16a}-2\sqrt{a^2+8}\right)^2$

$\cancel{9}+12a+\cancel{4a^2} = \cancel{9}-16a+\cancel{4a^2}+32-4\sqrt{(a^2+8)(9-16a)}$

$28a-32=-4\sqrt{(a^2+8)(9-16a)}$ $/:4$

$7a-8=-\sqrt{(a^2+8)(9-16a)}$ $/\wedge 2.$

$49a^2-112a+64=9a^2-16a^3+72-128a.$

$16a^3+40a^2+16a-8=0$

$2a^3+5a^2+2a-1=0$

$(a+1)(2a^2+3a-1)=0.$

$a=-1$

$a=\dfrac{-3\pm\sqrt{17}}{4}.$

IV) т.к $\dfrac{-a-\sqrt{a^2+8}}{2} \le 0$, а $\dfrac{3+\sqrt{9-16a}}{4}>0$, то решений нет

Ответ: $a=-1$; $a=\dfrac{-3\pm\sqrt{17}}{4}.$

Чистовик.

I) Домножим на 4

$-2a+2\sqrt{a^2+8} = 3-\sqrt{9-16a}$.

$3+2a = \underbrace{2\sqrt{a^2+8}+\sqrt{9-16a}}_{\geq 0}$ /^2 $\Rightarrow 3+2a\geq 0$

$a\geq -\frac{3}{2}$.

$(3+2a)^2 = (2\sqrt{a^2+8}+\sqrt{9-16a})^2$

$\cancel{9}+12a+\cancel{4a^2} = \cancel{4a^2}+32+4\sqrt{(a^2+8)(9-16a)}+\cancel{9}-16a$

$28a-32 = 4\sqrt{(a^2+8)(9-16a)}$ /:4

$7a-8 = \sqrt{(a^2+8)(9-16a)}$ /^2 ~~т.к. ... ≥ 0, то тогда ... т.к. a должно быть $\leq \frac{9}{16}$.~~

~~$49a^2-112a+64 = 9a^2-16a^3+72-128a$~~

~~$16a^3-40a^2+16a-8=0$ /:8~~

~~$2a^3-5a^2+16a-8=0$~~

~~$(a+1)($~~

но, тогда $7a-8\geq 0 \Rightarrow a\geq\frac{8}{7}$, но тогда D $\varnothing$, т.к. $a\leq\frac{9}{16}$.

II) $\frac{-a+\sqrt{a^2+8}}{2} = \frac{3+\sqrt{9-16a}}{4}$ /·4

$-2a+2\sqrt{a^2+8} = 3+\sqrt{9-16a}$

$3+2a = (2\sqrt{a^2+8}-\sqrt{9-16a})$ /^2. $a\geq -\frac{3}{2}$.

$(3+2a)^2 = (2\sqrt{a^2+8}-\sqrt{9-16a})^2$

$\cancel{9}+12a+\cancel{4a^2} = \cancel{4a^2}+32-4\sqrt{(a^2+8)(9-16a)}+\cancel{9}-16a$ /:4.

$\sqrt{(a^2+8)(9-16a)} = 8-7a$. /^2. $a\leq\frac{8}{7}$

$9a^2-16a^3+72-128a = 64-112a+49a^2$

$16a^3+40a^2+16a-8=0$ /:8

$2a^3+5a^2+2a-1=0$.

$(a+1)(2a^2+3a-1)=0$.

$\Rightarrow a=-1$;

$a=\frac{-3-\sqrt{17}}{4}$ ~~не подходит~~

$a=\frac{-3+\sqrt{17}}{4}$