№ 4

Заметим, что $2023_{10} = 13327_{16}$ (если $n=2023$)

Значит искомое число равно 1332713327_{16}

Заметим что 16^n $(n \in N) \equiv 1 \pmod 3$ значит

$13327\,13327_{16} \equiv (1+3+3+2+7) \cdot 2_{10} \pmod 3$ значит

$1332713327_{16} \equiv 2 \pmod 3$

Значит искомое число дает остаток 2 при делении на 3 $\Rightarrow$ это не квадрат, т. как квадрат натурального числа может давать остаток 0 или 1 при делении на 3

Ответ: n не может равняться 2023_{10}.

+1 +1 +1 +1 +1 мсб

…ргский государственный университет

1	2	3	4	5	6	сумма
4	4		0	4		12

424 60

6.2

Письменная работа участника олимпиады школьников СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Санкт-Петербург

Дата 24 февраля 2019

* *

10–11 класс. Второй вариант

√ **1.** Имеется 9 черных ладей и n белых. При каком наибольшем n их можно расставить на шахматной доске так, чтобы одноцветные ладьи не били друг друга? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

√ **2.** Даны положительные числа x, y, z. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{xyz\,(x+y+z)}{x^4+y^4+z^4}.$$

3. Окружность ω единичного радиуса проходит через вершины B и C треугольника ABC и вторично пересекает его стороны AB и AC в точках K и L соответственно. На лучах BL и CK отмечены соответственно такие точки P и Q, что $BP = AC$ и $CQ = AB$. Найдите расстояние между центрами описанных окружностей треугольников APQ и KBC.

√ **4.** Шестнадцатиричная запись квадрата натурального числа x представляет собой два одинаковых соседних блока из n цифр. Может ли n равняться 2023?

√ **5.** В однокруговом турнире по настольному теннису участвует $2k$ спортсменов. В каждом туре все участники проводят по одному матчу. Какое наименьшее число туров надо сыграть, чтобы при любом расписании игр обязательно нашлось трое теннисистов, сыгравших друг с другом?

6. Имеется три одинаковых конуса с общей вершиной, касающихся друг друга внешним образом, а также два шара, касающихся внешним образом друг друга и всех конусов. Радиусы шаров относятся как 1 : 3. Найдите угол при вершине конусов. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении).

№ 1

Ответ: не больше 17 ладей. ✓

Пример на 17: (x - чёрные, 0 - белые)

					0		
				0	x	0	
			0	x	0	x	0
		0	x	0	x	0	
	0	x	0	x	0		
		0	x	0			
0	x		0				
	0						

Оценка: заметим, что в каждой строчке шахматной доски белых ладей не больше чем чёрных на 1 ладью, т.е. если в строчке белых x, а чёрных y, то $x - y \leq 1$. Значит если в первой строчке белых ладей k_1, во второй k_2 и т.д., в восьмой k_8, то чёрных ладей не меньше чем $k_1 + k_2 + \ldots + k_8 - 8$ $\Rightarrow$ Если чёрных ладей у нас 9, то белых не больше чем $9 + 8 = 17$ //

№ 2

Ответ: $A_{макс} = 1$

Пример: $x = y = z = 1$ $\qquad \frac{1 \cdot 1 \cdot 1(1+1+1)}{1+1+1} = 1$

Оценка:

Заметим, что $x^4 + y^4 + z^4 \geqslant x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2$ так как

$$\frac{x^4+y^4}{2} \geqslant x^2y^2; \quad \frac{y^4+z^4}{2} \geqslant y^2z^2; \quad \frac{z^4+x^4}{2} \geqslant z^2x^2 \Rightarrow \frac{xyz(x+y+z)}{x^4+y^4+z^4} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{xyz(x+y+z)}{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}$$ Докажу, что $x+y+z \leqslant \frac{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}{xyz}$

$$\frac{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}{xyz} = \cancel{2\frac{xy}{4}} \quad \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}$$

Заметим, что $\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geqslant x + y + z$, т.к.

$$\frac{\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x}}{2} \geqslant y; \quad \frac{\frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}}{2} \geqslant z; \quad \frac{\frac{zx}{y} + \frac{xy}{z}}{2} \geqslant x$$

Значит

$$\frac{xyz(x+y+z)}{x^4+y^4+z^4} \leqslant \frac{xyz(x+y+z)}{x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2} \leqslant \frac{xyz \cdot \frac{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}{xyz}}{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2} = 1$$

✓ //

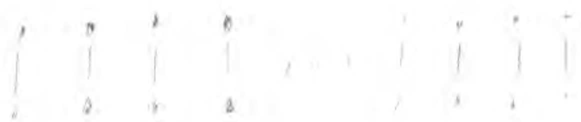
№ 5 Чистовик

Ответ: нужно сыграть не меньше $k+1$ ТУРА.

Расписание при котором k туров не хватает:

Разделим игроков на две группы по k человек

1 тур



2 тур

(с первым)

(с последним)

3 тур

и т. д. k туров

Каждый из одной группы сыграл с каждым из другой группы, но ~~между~~ внутри группы игр нету $\Rightarrow$ нет попарных троек.

Почему $k+1$ турнира достаточно:

После I тура образуется k пар игроков (•—•)

Возьмем игрока из одной пары. Заметим, что с $k-1$ оставшейся парой он может сыграть не

№ 5 (продолжение)

более $k-1$ туров. Иначе он сыграет с двумя игроками из одной пары $\Rightarrow$ образуется тройка. Значит ~~каждый~~ игрок, сыграв $1+k-1=k$ туров, в следующем $k+1$ туре образует тройку. //