13 отход 11 30 — 11 35

A0 55

81

ГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

1

6916

1	2	3	4	5	6	сумма
4	4	–	4	4	0,2	16,2

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Владимир

Дата 16.03.2019

* *

10–11 класс. Первый вариант

1. Имеется 8 черных ладей и n белых. При каком наибольшем n их можно расставить на шахматной доске так, чтобы одноцветные ладьи не били друг друга? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Даны положительные числа x, y, z. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{xyz\,(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4 + (yz)^4 + (xz)^4}}\,.$$

3. Дан треугольник ABC с меньшей стороной AB. На сторонах AB и AC выбраны соответственно точки X и Y так, что $BX = CY$. Под каким углом прямая, проходящая через центры описанных окружностей треугольников ABC и AXY, пересекает прямую BC, если $\angle ABC = \beta$ и $\angle BCA = \gamma$?

4. Десятичная запись квадрата натурального числа x представляет собой два одинаковых соседних блока из n цифр. Может ли n равняться 20182019?

5. На однокруговой турнир по настольному теннису подало заявку 16 человек. Когда было сыграно n матчей, оказалось, что среди любых трех теннисистов найдутся двое, уже сыгравших между собой. При каком наименьшем n такое возможно?

6. Три конуса с общей вершиной, касающихся друг друга внешним образом, имеют высоту 2 и радиус основания $\sqrt{3}$. Два шара касаются внешним образом друг друга и всех конусов. Найдите отношения радиусов шаров (большего к меньшему).

№1 чистовик

1) Заметим, что если в строке стоит n черных ладей, то max количество белых ладей в этой строке – n+1.

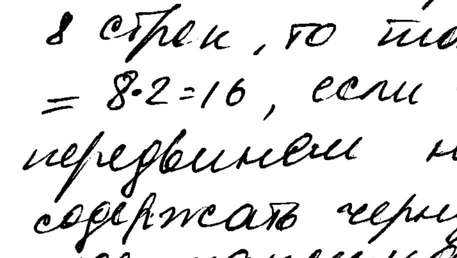
2) Заметим, что если в строке одна черная ладья, то max количество белых в той строке – 2. Если в 2-ух строках стоит по 1 черной, то max количество белых ладей в этих двух строках = 4. Если же на одной строке 2 ладьи (черных), а на второй нет черных, то max ~~из~~ количество белых ладей на этих 2-ух строках по-прежнему – 4 (max 3 на первой строке и max 1 на пустой)

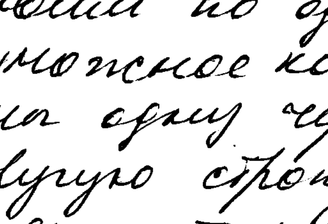
Аналогично можно заметить, ~~что~~ и для трех строк, в каком бы количестве по строкам мы не ставили 3 черные ладьи на 3 строки всегда max количество белых будет = 6. (например

Аналогично предыдущим рассуждениям как бы мы не распределили 8 черных ладей на 8 строк, максимальное количество белых будет равно 8 строк на 2 белых ладьи = 16.

(т.е. если мы расставим по одной черной на 8 строк, то max возможное количество белых будет = 8·2=16, если же мы одну черную ладью передвинем на другую строку (которая уже будет содержать черную ладью, что очевидно), то возможное максимальное количество белых ладей на строке, куда передвинули черную уменьшится на 1, по предыдущим рассуждениям, но передвинув эту ладью 1 строка освободится => max значение белых не изменится. Абсолютно аналогично и для других передвижений

Пример того, что max=16 достигается:



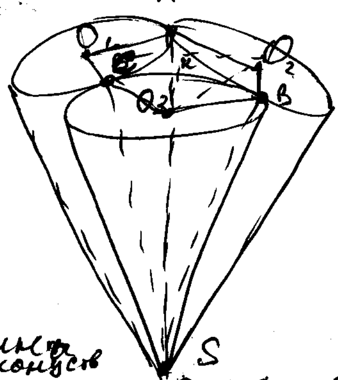


о – белая ладья

• – черная ладья

Чистовик:

№6.



O_1, O_2, O_3 - центры цилиндров.

S - т. вершина конуса

A, B, C - точки касания B - т. цилиндров с центрами O_3, O_2, а A - O_1, O_2

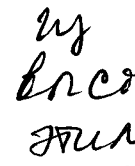
$O_2B = O_3B = O_3C = CO_1 = O_1A =$

$= AO_2 = \sqrt{3}$

$O_1O_2 \perp AS \Rightarrow$ можно посчитать расстояние от A до O_1O_2 по т. Пифагора (если k - т. пересечения O_1O_2 и AS, то уже ΔSO_2k)

тогда можно посчитать kO_2 тоже по Пифагору, но для ΔAkO_2), тогда ~~рас~~ мы знаем $\Delta O_1O_2O_3$.

можно рассмотреть тетраэдр $O_1O_2O_3S$, ~~O_3 у него в осн~~ он - правильная пирамида. У него можно найти $\angle$ между высотой и бок. стороной. Потом найти $\angle$ между образ. ~~цилиндра~~ конуса и высотой. Потом из $\angle$ угла, найденного в тетраэдре вычесть угол найденный из конуса. Это получится угол между высотой и образующей вписанного между этими тремя цилиндра и тогда задача сводится к планиметрии.



Посчитать не успеваю

№2 чистовик

$$A = \frac{xyz(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4+(yz)^4+(xz)^4}} \qquad x, y, z > 0$$

Решение:

Замена: Пусть $a = xy$, $b = yz$, $c = xz$, тогда $A = \frac{ab+bc+ca}{\sqrt{(a^2)^2+(b^2)^2+(c^2)^2}}$

По неравенству о средних $\sqrt{\frac{(a^2)^2+(b^2)^2+(c^2)^2}{3}} \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$, причем равенство достигается т.и.т.т. $a^2 = b^2 = c^2$

⇕ т.к. $a, b, c > 0$ т.к. $x, y, z > 0$.

$a = b = c$

Значит:

$$A = \frac{(ab+bc+ca)\sqrt{3}}{\sqrt{a^4+b^4+c^4}} \leq \frac{(ab+bc+ca)3}{a^2+b^2+c^2}$$

Значит для того, чтобы A приняло максимальное значение необходимо, чтобы было достигнуто равенство, а оно будет достигнуто т.и.т.т. $a = b = c$ (из предыдущих рассуждений)

Вернемся к x, y, z

Для достижения максимального A необходимо

$xy = yz = zx$ ⇒

⇕ т.к. $x, y, z > 0$

$x = z = y$

$$A_{max} = \frac{x^3 \cdot 3x}{\sqrt{3x^8}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

Проверка: пусть $x = y = z = 1$, тогда $A = \frac{1 \cdot 3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$, значит $\max = \sqrt{3}$ действительно достигается

Ответ: $\sqrt{3}$

№1.

1) Заметим, что если в строке/столбце стоит n черных ладей, то max количество белых ладей в этой строке — $n+1$, но для достижения этого максимума необходимо, чтобы черные ладьи не стояли у стенок. Значит не будем рассматривать случаи, при которых черные стоят у стенок.

2) Таким образом черных нужно ~~можно~~ поставить на ≤ 6 строк/столбцов

3) Заметим, что если в строке одна черная, то max количество белых в этой строке — 2 $\Rightarrow$ если в 2-ух строках по одной черной, то ~~в~~ max количество белых в этих строках — ~~2~~ 4.

Если же в строке 2 черных, то max количество белых в этой строке — 3. $\Rightarrow$ В таком случае если на одной строке стоит 2 черных и на 2-ой ни одного, то на 2-ух строках максимальное количес чистовик.

№4

1. Число ~~будет~~ может представлять собой 2 одинаковых соседних блока из 20182019 цифр т.и т.т.к оно делится на $(10^{20182019}+1)$

2. Докажем, что $10^{20182019}+1$ делится на 121:

$10^{11} \equiv -1 \pmod{121}$

$\Downarrow$

$10^{11k} \equiv -1 \pmod{121}$ для $\forall$ нечетного k

$\Downarrow$

$10^{11k}+1 \equiv 0 \pmod{121}$

$\Downarrow$

$10^{11\cdot 1834729}+1 = 0 \pmod{121}$ т.к $11 \cdot 1834729 = 20182019$.

3. ~~Заметим, что~~ Пользуясь предыдущими рассуждениями заметим, что число $\frac{(10^{20182019}+1)^2 \cdot 100}{121}$ подходит т.к является квадратом (по очевидным причинам), $(10^{20182019}+1)^2 \vdots 121$ по доказанному и состоит из $20182019 \cdot 2$ знаков т.к один блок получается в результате $\frac{(10^{20182019}+1)100}{121}$: $10^{20182019}+1$ — $2018 \cdot 2019$ знаков, при делении $10^{20182019}+1$ на 121 убирается 2 знака т.к $100 < 121 < 1000$ и при умножении на 100 эти 2 знака добавляются.

При умножении блока $\frac{(10^{20182019}+1)100}{121}$ на $(10^{20182019}+1)$ очевидно получается число, состоящих из двух блоков, каждый из которых $= \frac{(10^{20182019}+1)100}{121}$

Ответ: $\frac{(10^{20182019}+1)^2 100}{121}$

чистовик

№5

Сначала найдем максимальное количество несыгранных партий. Докажем, что для турнира, в котором участвовало $2k$ человек это максимальное значение $= k^2$

Докажем по индукции по k.

1. База: Для $k=1$ всего 2 человека $\Rightarrow$ условие очевидно будет выполнено

2. Пусть при k ~~ма~~ (для $2k$ человек) максимальное количество несыгранных партий $= k^2$. Докажем что для $k+1$: max значение не сыгранных партий $=(k+1)^2$. При $k+1$ количество человек в турнире $= 2k+2$

Выберем каких-то двух человек A и B. тогда максимальное количество игр, которые они могут не сыграть, не считая игры друг с другом $= 2k$. (т.к ~~для осна~~ каждый из оставшихся $2k+2-2=2k$ человек должен сыграть хотя бы с одним из людей A и B). $+1$ игра между A и B, которой то же может не быть, при этом условие будут удовлетворятся. Итого A и B могут не сыграть $2k+1$ партию, а оставшиеся $2k$ человек по предположению индукции могут не сыграть k^2 партий $\Rightarrow$ всего может быть не сыграно $2k+k^2+1$ партий, что $=(k+1)^2$ ч.т.д.

Значит max количество не сыгранных партий среди 16 человек $=\left(\frac{16}{2}\right)^2=64$

А общее количество партий $= \frac{16\cdot 15}{2} = 8\cdot 15 = 120$

Значит min количество сыгранных партий = общему количеству партий − max количество несыгранных, что $= 120-64=\boxed{56}$

Ответ: 56