ГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

3737

60

1	2	3	4	5	6	сумма
4	4	3,5	0,5	0	0	12

60

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (8–9 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Москва

Дата 10.03.2019

* *

8–9 класс. Второй вариант

1. Из нескольких одинаковых белых кубиков Петя сложил большой куб и покрасил его грани в черный цвет. Оказалось, что число кубиков с одной черной гранью равно числу полностью белых кубиков. Сколько маленьких кубиков ровно с двумя черными гранями?

2. Найдите все такие квадратные трехчлены ax^2+bx+c с целыми коэффициентами, графики которых проходят через точки (a,b), (b,c) и (c,a) (среди этих точек могут быть совпадающие).

3. Том Сойер и Гекльберри Финн играют в игру, заключающуюся в покраске забора, состоящего из 1000 неокрашенных дощечек, в синий и красный цвета. Начинает Том, ходы делаются по очереди. За один ход игрок выбирает одну из неокрашенных дощечек и цвет, а затем красит эту дощечку в выбранный цвет. Игра заканчивается, когда будут покрашены все дощечки. Том хочет, чтобы по окончании игры было как можно больше пар соседних разноцветных дощечек, а Гек хочет, чтобы было как можно меньше пар соседних разноцветных дощечек. Какое максимальное число таких пар Том может обеспечить вне зависимости от игры Гека?

4. Вещественные числа a, b, c и d удовлетворяют соотношениям $a+b+c+d=0$ и $a^2+b^2+c^2+d^2=12$. Найдите наименьшее и наибольшее значения произведения $abcd$.

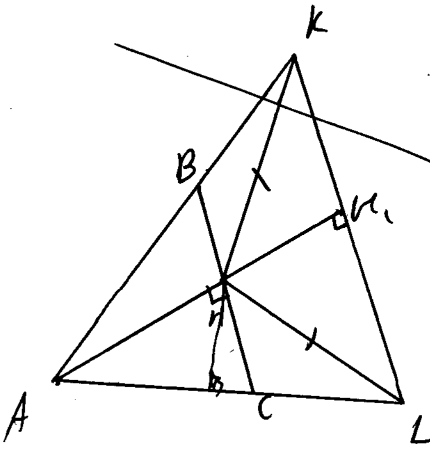
5. Дан неравнобедренный остроугольный треугольник ABC. На лучах AB и AC выбраны соответственно такие точки K и L, что четырехугольник $KBCL$ вписанный. Точка H — основание высоты, опущенной из вершины A на сторону BC. Докажите, что если $KH=LH$, то H — центр описанной окружности треугольника AKL.

6. Найдите все пары простых чисел p и q, для которых p^2+q^3 является точным кубом.

Итого Тем может обеспечить максимально 49 разноцветных пар вне зависимости от ходов Гека.

Ответ: 49 пар.

№ 5.



Чтв

1) ∢ т. K ∠CBK
(KB) ∩ (CL) = (·) A
AH — ⊥ BC; вокруг CBKL — можно опис о-ть
⇓
~~∠CBK —~~
⇓
AH ⊥ KL
⇓
Пусть AH ∩ KL = (·) H_1
тогда AH_1 — выс
⇓
~~H ∈ высоте и ...~~
⇓
~~... о-ти~~

Обосн
по черт.
по усл
по призн
как 2 прям ⊥ 3-й
по опр
по черт
т.к.

Дано
△ABC
(·) K ∈ [AB)
(·) L ∈ [AC)
BH — выс. △ABC
KH = HL

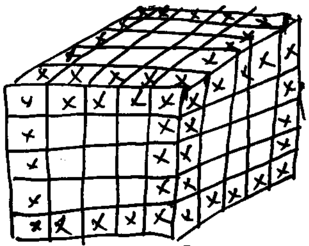
Д-ть, что
H — центр опис
о-ти △AKL

№ 6.

Из условия $p^2+q^3=a^3$; p, q ∈ прост
~~$(a^3-p^3)=q^2 \Rightarrow (a-p)(a^2+ap+p^2)=$~~
$(a^3-q^3)=p^2 \Rightarrow (a-q)(a^2+aq+q^2)=p^2$ произведение разности на неполный квадрат суммы ⇒ также не может дать точный квадрат ⇒ p и q ∄

Ответ: ∄

№ 1.



$n=5$

X - кубики, у которых закрашено более 1 грани.
Пусть n - число кубиков в 1 ряду 1 стороны т.е. куб $n \times n \times n$.
Тогда число кубиков, на 1 стороне большого куба, с 1 закрашенной стороной - $(n-2)^2$, а граней у куба шесть $\Rightarrow$ всего кубиков с 1 черной гранью $(n-2)^2 \cdot 6$. Т.к. внешние грани хоть с какой-то стороны покрашены, то внутри образуется куб из полностью белых квадратиков. В нем $(n-2)^3$ белых квадратиков. Из условия кол-во белых равно кол-ву куб с 1 черной стороной. Получаем ур-е

$$(n-2)^2 \cdot 6 = (n-2)^3 \Leftrightarrow (n-2)^2(n-8) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=2 \\ n=8 \end{array}\right.$$

Получается такой случай возможен только если у нас куб $2\times2\times2$ или $8\times8\times8$.
Если куб $2\times2\times2$, то кол-во кубиков с 2-мя черными гранями - 0.
Если куб $8\times8\times8$, то кубиков с 2-мя черными гранями

$$(n-2)\cdot 12 = (8-2)\cdot 12 = 72.$$

Ответ: 0 или 72.

№ 2

Т.к. графики проходят через эти 3 точки, составим систему

$$\begin{cases} b = a^3+ab+c \\ c = ab^2+b^2+c \\ a = ac^2+bc+c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2(a+1)=0 \\ b = a^3+ab+c \\ a = ac^2+bc+c \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=0 \\ 0=a^3+c \\ a=ac^2+c \end{cases} \\ \begin{cases} a=-1 \\ b=-1-b+c \\ -1=-c^2+bc+c \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} c=-a^3 \\ b=0 \\ a=a\cdot a^6-a^3 \end{cases} \quad (1) \\ \begin{cases} a=-1 \\ b=\frac{c-1}{2} \\ -1=-c^2+\frac{(c-1)\cdot c}{2}+c \end{cases} \quad (2) \end{array}\right.$$

$$(1)\begin{cases} b=0 \\ c=-a^3 \\ a(a^6-a^2-1)=0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=0 \\ a=0 \\ c=0 \end{cases} \\ \begin{cases} b=0 \\ c=-a^3 \\ a^6-a^2-1=0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$a^6-a^2-1=0$ не имеет реш в целых числах т.к. $D=5$
$\Downarrow$
не удовлетв условию задачи
$\Downarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}$

(3) $-1=-c^2+\frac{(c-1)\cdot c}{2}+c \quad | \cdot 2$

$-2=-2c^2+c^2-c+2c$

$-2=-c^2+c$

$c^2-c-2=0$

$\left[\begin{array}{l} c=2 \\ c=-1 \end{array}\right.$

(2) $\begin{cases} a=-1 \\ b=\frac{c-1}{2} \\ -1=-c^2+\frac{(c-1)\cdot c}{2}+c \text{ (3)} \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} c=2 \\ b=\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \text{не удовл усл} \\ a=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} c=-1 \\ b=-1 \\ a=-1 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ c=-1 \\ b=-1 \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases} \\ \begin{cases} a=-1 \\ b=-1 \\ c=-1 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow$ Квадратные трехчлены $0x^2+0x+0$ и $-x^2-x-1$ ~~не квадратный трехчлен~~

Ответ: коэффициенты $(0;0;0)$; $(-1;-1;-1)$ ✓

№3.

Т.к. Том ходит первым, а Гек ~~ходит~~ последним, то Гек всегда может найти забор какого-то цвета и покрасить соседний в такой же, тем самым уменьшив различающиеся пары. Т.е. всего каждый сделал 500 ходов и при этом Гек за каждый ход способен увеличить количество пар одноцветных соседних заборов на 1. Если он будет играть по такой стратегии, то Том какую стратегию не будет использовать, но 500 пар одноцветных соседних заборов будет, а всего пар соседних заборов — 999, т.е. гарантировано Том может получить только 449 пар различающихся цветами соед. заборов.

Пример реализации Томом 449 пар разноцветных:

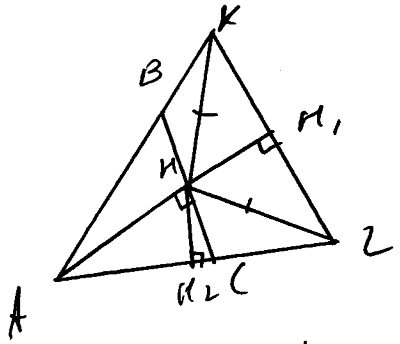
1) 1 доску красит в любой цвет.

2) После хода Гека, Том красит незакрашенный забор рядом с закрашенным, в противоположный от того цвет (если ~~соседний~~ раскрашен красный, то соседний Том красит в синий и наоборот соответственно). Затем ходит ~~Т~~ Гек и так до тех пор, пока не раскрасят весь забор

№ 5.

Ч.т.в

Обосн



Дано:

$\triangle ABC$

(.) $K \in [AB)$

(.) $L \in [AC)$

BH – выс $\triangle ABC$

$KH = HL$

Д-ть, что

H – центр окр о-ти $\triangle AKL$

1) $\triangle KHL$ – р/б

$\Downarrow$

KH_2 – мед, $\perp$

$\Downarrow$

H_2H – сер $\perp$, H_1H – сер

$\Downarrow$

H – сер окр о-ти

Шмитовик

№4

Т. к. Σ квадратов 12, а квадраты неотрицательны следовательно по модулю они не больше $2\sqrt{3}$
Наименьшее произведение будет если оно будет отрицательным, а числа находиться недалеко друг от друга (по модулю) например 3 1 1 1
$abcd = -3$
Минимальное значение $abcd = -3$
максимального - 3.

Чистовик