4294

РГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

1

65

1	2	3	4	5	6	сумма
2	3	4	1	3	0	13

65

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Москва

Дата 10.03.2019

* *

10–11 класс. Девятый вариант

1. Какое наибольшее количество ладей можно расставить на шахматной доске так, чтобы каждую ладью било не более трех других? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Числа x, y, z — углы треугольника, причем больший угол z не превосходит $\frac{\pi}{2}$. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \sqrt{\sin x \cdot \sin(z - y)} + \sqrt{\sin y \cdot \sin(z - x)}.$$

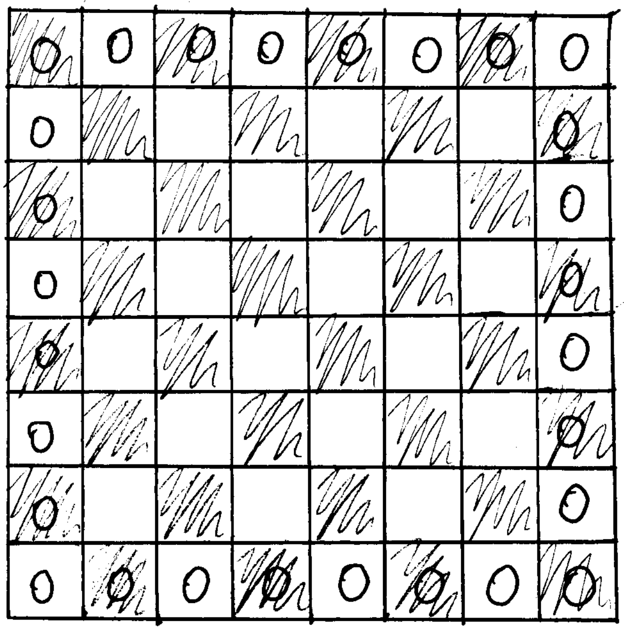
3. Дан четырехугольник $ABCD$, отличный от параллелограмма. На сторонах AB, BC, CD и DA выбираются соответственно точки K, L, M и N так, что $KL \parallel MN \parallel AC$ и $LM \parallel KN \parallel BD$. Найдите геометрическое место точек пересечения диагоналей параллелограмма $KLMN$.

4. Натуральное число x в восьмеричной системе 2019-значное, его младшая цифра равна 3, а все остальные цифры отличны от 3 и совпадают через одну. Число y получается записью цифр x в обратном порядке. Оказалось, что восьмеричное представление $x \cdot y$ содержит только цифры 1 и 6. Найдите $x \cdot y$ (в восьмеричной системе).

5. В однокруговом турнире по настольному теннису участвовало 100 спортсменов, причем ни один из них не выиграл все матчи. Будем говорить, что игрок A *круче* игрока B, если A выиграл у B или найдется такой игрок C, что A выиграл у C, а C выиграл у B. Каково наименьшее количество теннисистов, оказавшихся по итогам турнира круче всех остальных? Ничьих в теннисе не бывает.

6. На столе лежат два конуса с общей вершиной O, касаясь друг друга внешним образом. Угол между их осями симметрии равен $\operatorname{arctg} \frac{4}{3}$. Найдите максимальный угол при вершине меньшего из двух конусов с вершиной O, которые лежат на столе и касаются внешним образом первых двух конусов. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении.)

Рисунок к заданию №1



O - ладья

№2

$$A=\sqrt{\sin(x)\sin(z-y)}+\sqrt{\sin(y)\cdot\sin(z-x)}$$

Так как сумма углов Δ-ка $x+y+z=180$, значит $z=180-x-y$.

И наше выражение для A примет вид:

$$A=\sqrt{\sin x\sin(x+2y)}+\sqrt{\sin y\sin(2x+y)}$$

По неравенству о средних получаем:

$$\begin{cases}\sqrt{\sin x\cdot\sin(x+2y)}\leqslant\dfrac{\sin x+\sin(x+2y)}{2}\\ \sqrt{\sin y\cdot\sin(2x+y)}\leqslant\dfrac{\sin y+\sin(2x+y)}{2}\end{cases}$$

Тогда $A\leqslant\dfrac{\sin x+\sin y+\sin(x+2y)+\sin(2x+y)}{2}=\sin\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)+\sin\left(\dfrac{3x+3y}{2}\right)\cdot$

$\cdot\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)=\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)\cdot\left(\sin\left(\dfrac{x+y}{2}\right)+\sin\left(\dfrac{3x+3y}{2}\right)\right)=2\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)\cdot\sin(x+y)\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right)=$

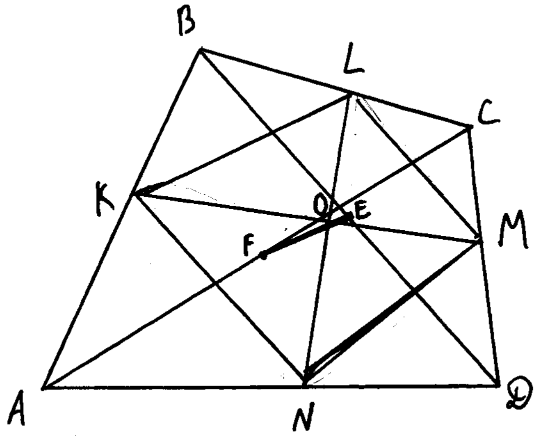
$=(\cos x+\cos y)\sin(x+y)$

Увидим, что ~~при определенной~~ по условию $x+y\geqslant\frac{\pi}{2}$, а ~~$x+y$~~ $\left((x,y)\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$. Наибольшее значение $\cos x+\cos y$ достигается при $x=y$.

Кроме того, мы знаем, что $x+y\geqslant\frac{\pi}{2}$ (т.к. $z\leqslant\frac{\pi}{2}$). Значит, $\frac{\pi}{2}\geqslant x=y\geqslant\frac{\pi}{4}$

см. далее →

№ 3



Дано: $ABCD$ - четырехугольник;
$KL \parallel MN \parallel AC$
$LM \parallel KN \parallel BD$

Найти: геометрическое место точек пересечения ~~в~~ диагоналей параллелограмма $KLMN$

Решение:

Так как по усл. $KLMN$ - параллелограмм, поэтому $LK = MN$. Подобные $\triangle$-ки: ACD и MDN, а также BKL и ABC.

Значит получается:

$$\frac{LK}{AC} = \frac{BK}{AB} = \frac{BL}{BC}$$

$$\frac{MN}{AC} = \frac{MD}{DC} = \frac{DM}{AD}$$

Из-за того, что $MN = LK$, все эти отношения являются равными между собой. Обозначим их через a. Можно увидеть, что если для некоторого $a \in (0;1)$ отложить на отрезке AB отрезок BK, равный $a \cdot AB$, а, в свою очередь, на CB отрезок BL, равный $a \cdot BC$ и так далее; то мы сможем получить параллелограмм $KLMN$, так как будет выполн. $LK \parallel AC \parallel MN$ и $LK = MN$.

Обозначим координаты точек через их буквы. Посчитаем теперь координаты точек пересечения диагоналей параллелогр. Так как это середина одной диагонали, то это точка

$$O = \frac{M+K}{2}.$$

$$K = \frac{B+(A-B)\cdot a}{1} = B+(A-B)\cdot a$$

$$M = D+(C-D)\cdot a$$

$$O = \frac{M+K}{2} = \frac{B+(A-B)\cdot a + D+(C-D)\cdot a}{2} = \frac{B+D}{2} + \frac{a(A+C-(B+D))}{2}$$

Обозначим середину BD через E, а середину AC через F.
Тогда вектор $\frac{A+C-(B+D)}{2} = \overrightarrow{EF}$.
Так как $a \in (0;1)$, то геометрическое место точек - это отрезок EF, не включая его концы. √

№1

Можно увидеть, что, если ладья будет стоять на краю доски, то её всегда будет бить не более 3 ~~тд~~ ладей (край доски - это крайние столбцы и строки).
Можно заметить, что, т.к. каждую ладью бьют не более 3ёх других, то значит каждая ладья будет просматриваться (не будет закрыта другими) хотя бы с одной из сторон, значит выйдет таким образом, что суммарное количество открытых ладей ≤ 32 (периметр доски), при чём каждую не угловую ладью мы посчитали как минимум один раз, а угловые посчитали по два раза (если угловые использованы не все, то мы можем их добавить, т.к. они бьют только те ладьи, которые стоят на краю доски, а их могут бить максимум 3 других), значит максимальное кол-во ладей, которое можно разместить на доске при таком условии - 28

Ответ: 28

рисунок см. на обороте →

Чистовик

№2 (продолжение)

$\cos\frac{\pi}{4} \geqslant \cos\frac{\pi}{2}$. Значит максимум будет достигнут при значениях $x = y = \frac{\pi}{4}$.

Подставим в неравенство о среднем. Тогда исходное выражение $A \leqslant \sqrt{2}$

Значит равенство будет достигаться при $x = y = \frac{\pi}{4} = 45°$; $z = \frac{\pi}{2} = 90°$

Ответ: $\sqrt{2}$

№5

Докажем, что на любом подмножестве игроков найдётся хотя бы 1 игрок, который будет круче всех в данном множестве. Возьмём игрока, который выиграл больше всех матчей, назовём его A. Теперь возьмём любого, которому он проиграл, назовём его Б. Игрок Б проиграл какому-то игроку, у которого выиграл A, т.к. иначе игрок Б выиграет больше матчей, чем A. Это было бы противоречие.

Получается, что A - лучше всех, потому что любой игрок, которому он проиграл - в свою очередь, проиграл тому, у кого выиграл A.

Возьмем игрока, который круче всех на множестве из 100 игроков, назовем его α. Далее возьмем множество игроков, у которых он проиграл. На этом множестве найдётся свой „круче всех", который выиграл у α соответственно, он через одно колено выиграл у всех, у кого выиграл α, а также он „круче всех" на множестве тех, кому α проиграл. Значит, мы нашли второго „круче всех", назовём его α_2.

см. далее →

№5 (продолжение)

Аналогично, используя α_2 в качестве аргумента условия выше, найдём α_3.

Приведём пример, где среди 100 игроков – 3 „круче всех":

α_1 - выиграл у α_2

α_2 - выиграл у α_3

α_3 - выиграл у α_1

И каждый из них оказался „круче" всех остальных.

Ответ: 3.

№4.

Допустим, x выглядит как ababab...ab3, а y как 3baba...ba, поскольку xy заканчивается на 1 либо 6. Тогда y может заканчиваться только на 2. Подбором получим, что b = 5. Таким образом:

$x = 252525\ldots253$

$y = 3525252\ldots52$

$x \cdot y = 1616..1616161616$ Откуда?

После 1ой единицы и до второй имеем 1009 пар и после второй единицы имеем тоже 1009 пар.

№6