2707

1

55

ГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

1	2	3	4	5	6	сумма
2	3	0	0	2	-	[illegible]

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Казань

Дата 02.03.2019

* *

10–11 класс. Второй вариант

1. Имеется 9 черных ладей и n белых. При каком наибольшем n их можно расставить на шахматной доске так, чтобы одноцветные ладьи не били друг друга? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Даны положительные числа x, y, z. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{xyz\,(x+y+z)}{x^4+y^4+z^4}.$$

3. Окружность ω единичного радиуса проходит через вершины B и C треугольника ABC и вторично пересекает его стороны AB и AC в точках K и L соответственно. На лучах BL и CK отмечены соответственно такие точки P и Q, что $BP = AC$ и $CQ = AB$. Найдите расстояние между центрами описанных окружностей треугольников APQ и KBC.

4. Шестнадцатиричная запись квадрата натурального числа x представляет собой два одинаковых соседних блока из n цифр. Может ли n равняться 2023?

5. В однокруговом турнире по настольному теннису участвует $2k$ спортсменов. В каждом туре все участники проводят по одному матчу. Какое наименьшее число туров надо сыграть, чтобы при любом расписании игр обязательно нашлось трое теннисистов, сыгравших друг с другом?

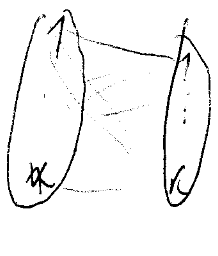
6. Имеется три одинаковых конуса с общей вершиной, касающихся друг друга внешним образом, а также два шара, касающихся внешним образом друг друга и всех конусов. Радиусы шаров относятся как 1 : 3. Найдите угол при вершине конусов. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении).

№5.

Ответ: k+1   Пусть вершины графа это люди, а игры это ребра между ними

Заметим, что если они сыграли не более k игр каждый то можно привести пример, когда нет 3 сыгравших между собой.

Пример: Разобьём людей на две доли по k людей. Пусть каждый сыграет со всеми из противоположной доли



Тогда треугольников из игр не будет т.к. в граф двудольный, а в двудольных графах нет нечётных циклов, порядок игр будет такой:

~~1 игра~~ 1 из первой доли играет в 1 туре с 1 из второй доли

во втором туре со вторым из первой доли

2 из первой доли играет в первом туре со 2 из второй доли

во втором туре с 3 из второй доли

и т.д

Более строго в l туре

i человек из 1 группы

играет с $i+l-1$ из второй группы

Если $i+l-1>k$ то играет

с $i+l-1-k$ человеком

№5 (продолжение)

Тогда ~~все~~ это будет составлять корректный турнир

Тогда докажем что если было k+1 игра то был треугольник

возьмём двух людей сыгравших между собой не считаю игры между собой у них ещё в сумме 2k игр, а ~~игр~~ людей не считая их двоих ~~кроме~~ 2k−2 значит они оба сыграли с каким-то человеком значит есть треугольник.

№4

Ответ: нет

Заметим, что по условию задачи $x = k\cdot(10^{2023}+1)$

т.к. $x = \overbrace{\ldots\ldots}^{k}\overbrace{\ldots\ldots}^{k}$

т.к. $10 \underset{11}{\equiv} -1$, то $10^{2023} \underset{11}{\equiv} -1 \Rightarrow x \vdots 11$

Беловик

№1 Ответ 17

Рассмотрим все ряды в шахматной доске по отдельности

Заметим, что если на ~~в~~ ряду стоит k-черных ладей, то тогда белых ладей не больше $k+1$ белых

Т.к между двумя подряд идущими ~~чёрными~~ белыми должна стоять ~~белая~~ черная

Тогда пусть на ~~I ряду~~ i ряду стоит a_i чёрных ладей, тогда на нём не более a_i+1 белых

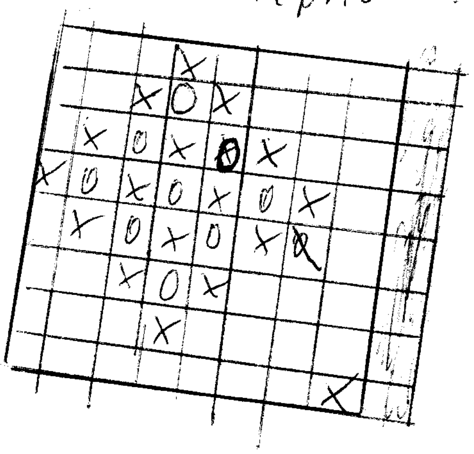
Тогда всего не более $(a_1+1)+(a_2+1)+(a_3+1)\dots$

$\dots+(a_8+1)$ - белых ладей т.к $a_1+a_2\dots+a_8=9$

то всего белых ладей не более $9+8=17$

Пример на 17:

O - черная ладья x - белая



Беловик

№2.

Заметим, что ~~можно~~ выражение симметрично относительно x, y, z тогда пусть $x \geq y \geq z$

Докажем, что $\frac{xyz(x+y+z)}{x^4+y^4+z^4} \leq 1$.

Заметим, что если ~~каждо~~ x, y, z домножить на одно и то же число k, то значение выражения не изменится

$$\frac{k \cdot x \cdot k \cdot y \cdot k \cdot z(kx+ky+kz)}{(kx)^4+(ky)^4+(kz)^4} = \frac{k^4(x \cdot yz)(x+y+z)}{k^4(x^4+y^4+z^4)} =$$

$$= \frac{xyz(x+y+z)}{x^4+y^4+z^4}$$

Заметим, что можно выбрать k так, чтобы $kz = 1$, тогда можно принять, что $z = 1$, тогда $x \geq 1$ и $y \geq 1$

Тогда получаем такое:

$$\frac{xy(x+y+1)}{x^4+y^4+1} \leq 1$$

(4) $xy(x+y+1) \leq x^4+y^4+1$ также т.к $2x^2y^2 \leq x^4+y^4$

т.к. $2ab \leq a^2+b^2$

$x^2y + xy^2 + xy \leq x^4+y^4+1$ тогда докажем что:

$x^2y+xy^2+xy \leq 2x^2y^2+1$

№ 2 (продолжение) $x^2y+xy^2+xy \leq 2x^2y^2+1$.

Заметим, что при

$x=1$ и $y=1$

~~это не~~ это верно, так как

$3 \leq 3$. Докажем, что если

это выражение верно для пары (x,y) то

верно для пары $(x+l,y)$ где $l \geq_{N} 0$

Посмотрим на ~~разность между~~ то поскольку

изменится выражения слева и справа

Было: $x^2y+xy^2+xy \leq 2x^2y^2+1$

Стало $(x+k)^2y+(x+k)y^2+(x+k)y \leq 2(x+l)^2y^2+1$

$x^2y+k^2y+2xky+xy^2+ky^2+xy+ky \leq 2x^2y^2+2l^2y^2+4xly^2+1$

Значит значение слева

увеличилось на l^2y+2xl

$(\cancel{l^2y+2xly+ky^2}+ky)$

и значение справа на

$2l^2y^2$

Стало $(x+l)^2y+(x+l)y^2+(x+l)y \leq 2(x+l)^2y^2+1$

З~~аметим~~ Тогда значение слева

увеличилось на

$2xly+l^2y+ly^2+ly$

и значение справа

на

$2l^2y^2+4xly^2$

Беловик №2 (продолжение)

Докажем, что значение на которое увеличилось слева меньше или равно значению на которое увеличилось справа тогда ~~не~~ неравенство останется верным

$2xly + l^2y + ly^2 + ly \le 4xly^2 + 2l^2y^2$

Сократим на $l \ge 0$

$2xy + ly + y^2 + y \le 4xy^2 + 2ly^2$

т.к. $x \ge 1$ и $y \ge 1$

то $2xy \le 2xy^2$ т.к. $1 \le y$

$y^2 \le xy^2$ $\quad 4xy^2$ т.к. $1 \le x$

$y \le xy^2$ т.к. $1 \le xy$

$ly \le 2ly^2$ т.к. $1 \le 2y$

Значит неравенство, которое мы хотим доказать верно

Значит можно сделать переход из $(x;y)$ в $(x+1;y)$. Заметим, что можно аналогично доказать возможность перехода из $(x;y)$ в $(x;y+1)$. т.к. можно проделать всё то же самое

тогда т.к. то, что $x^2y + xy^2 + xy \le 2x^2y^2 + 1$ верно для пары $(1;1) \Rightarrow$ верно для пары $(x;1) \Rightarrow$ верно для $(x;y)$

Черновик

№2 (продолжение)

Значит мы доказали неравенство, которое хотели доказать

Т.к. $x^2y + xy^2 + xy \leq 2x^2y^2 + 1$, а

$2x^2y^2 + 1 \leq x^4 + y^4 + 1$

$\Downarrow$

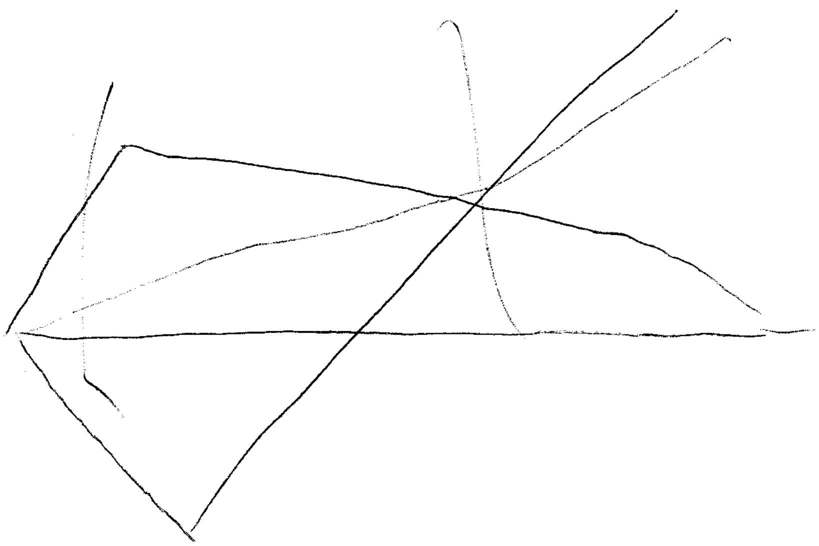
$x^2y + xy^2 + xy \leq x^4 + y^4 + 1$

$\Downarrow$ т.к. все преобразования эквивалентны

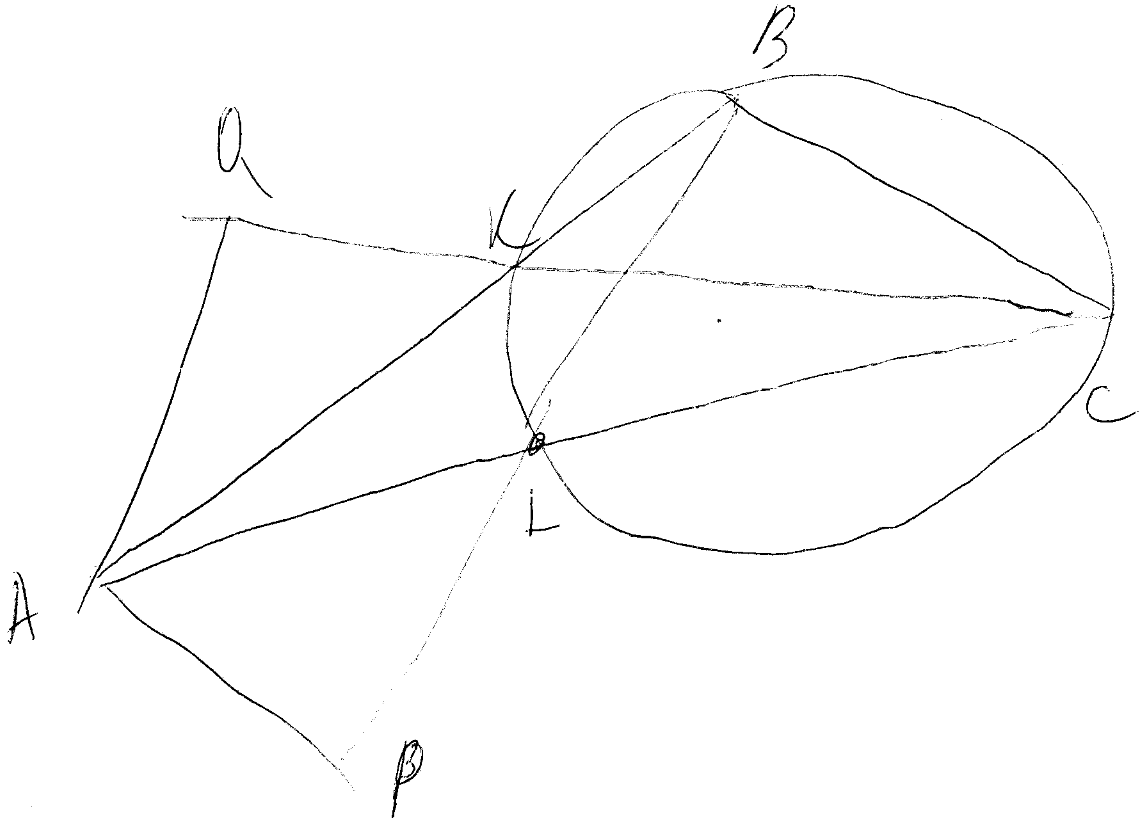
$\frac{xyz(x+y+z)}{x^4+y^4+z^4} \leq 1$ $\Rightarrow$ максимальное $A = 1$

при $x = 1$ $y = 1$ $z = 1$

№3.



№ 3



Заметим что $\angle KBL = \angle KCL$, т.к

опираются на одну дугу

тогда $\triangle ABP = \triangle AQL$ т.к. $BP = AL$

и $QL = AB$ и $\angle KBL = \angle KCL$

тогда $\angle AQL = \angle PAB$ и $\angle QAL = \angle APB$

и $AQ = AP$