$\Rightarrow$ (самый крутой тоже $\Rightarrow$ ~~минимум~~ 3 самых крутых, ч.т.д.

№2

$z \le \frac{\pi}{2}$; $x+y \geq \frac{\pi}{2}$; $x+y+z=\pi$

$A = \sqrt{\sin x(\sin(z-y))} + \sqrt{\sin y \cdot \sin(z-x)}$

~~[illegible]~~ $\sin x = \sin(\pi - x) = \sin(z+y)$; $\sin y = \sin(\pi - y) = \sin(x+z)$

$A = \sqrt{\sin(z+y)\sin(z-y)} + \sqrt{\sin(z+x)\sin(z-x)}$

~~[illegible]~~ z - наиб. угол $\Rightarrow$ $z \in \left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$

x и y мы можем выбрать вне зависимости от z в зависимости друг от друга, но чем ближе z к $\frac{\pi}{2}$, тем меньше y, чтобы получить max $A \Rightarrow \sin(z-y)$ при $z\uparrow$, $y\downarrow$ - увелич. $\Rightarrow$ max A при

$z = \frac{\pi}{2} \Rightarrow A = \sqrt{\sin(\frac{\pi}{2}+y)\sin(\frac{\pi}{2}-y)} + \sqrt{\sin(\frac{\pi}{2}+x)\sin(\frac{\pi}{2}-x)} =$

$= \sqrt{\sin^2(\frac{\pi}{2}-y)} + \sqrt{\sin^2(\frac{\pi}{2}-x)} = \sin(\frac{\pi}{2}-y) + \sin(\frac{\pi}{2}-x)$, где

$x+y=z=\frac{\pi}{2} \Rightarrow A = \sin(x) + \sin(\frac{\pi}{2}-x) = \sin x + \cos x$

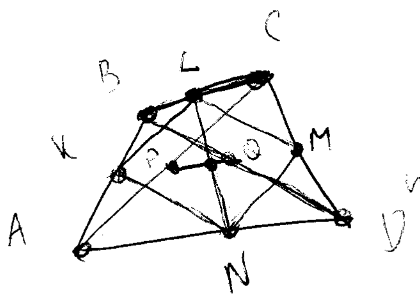
~~$A' = \cos x - \cos(\frac{\pi}{2}-x)$~~ $A' = \cos x - \sin x$

$x \in (0; \frac{\pi}{2}) \Rightarrow A' = 0$ при $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow$ max зн. при $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow y = \frac{\pi}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow A = \sqrt{\sin(\frac{\pi}{4})\cdot\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})} + \sqrt{\sin(\frac{\pi}{4})\cdot\sin(\frac{\pi}{2}-\pi/4)} = 2\sin(\frac{\pi}{4}) =$

$= \frac{2}{\sqrt{2}} = \boxed{\sqrt{2}}$

№3



P - сер AC ; Q - сер. B

Докажем, что ГМТ лежит на отр. PQ $\Rightarrow$ т.к. в пар-ме диагонали делят друг друга пополам: докажем, что PQ делит LN пополам.

Ответ: ГМТ на отр. PQ

7457 …РГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

1	2	3	4	5	6	сумма
4	2	0		4		10

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Москва

Дата ~~[illegible]~~ 10 марта 2019

* *

10–11 класс. Девятый вариант

1. Какое наибольшее количество ладей можно расставить на шахматной доске так, чтобы каждую ладью било не более трех других? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Числа x, y, z — углы треугольника, причем бо́льший угол z не превосходит $\frac{\pi}{2}$. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \sqrt{\sin x \cdot \sin(z-y)} + \sqrt{\sin y \cdot \sin(z-x)}.$$

3. Дан четырехугольник $ABCD$, отличный от параллелограмма. На сторонах AB, BC, CD и DA выбираются соответственно точки K, L, M и N так, что $KL \parallel MN \parallel AC$ и $LM \parallel KN \parallel BD$. Найдите геометрическое место точек пересечения диагоналей параллелограмма $KLMN$.

4. Натуральное число x в восьмеричной системе 2019-значное, его младшая цифра равна 3, а все остальные цифры отличны от 3 и совпадают через одну. Число y получается записью цифр x в обратном порядке. Оказалось, что восьмеричное представление $x \cdot y$ содержит только цифры 1 и 6. Найдите $x \cdot y$ (в восьмеричной системе).

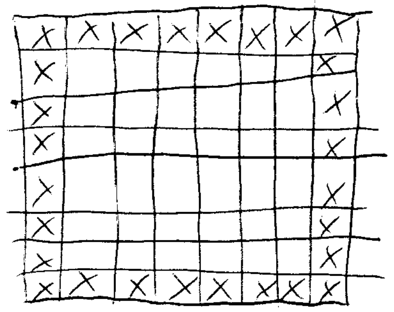
5. В однокруговом турнире по настольному теннису участвовало 100 спортсменов, причем ни один из них не выиграл все матчи. Будем говорить, что игрок A *круче* игрока B, если A выиграл у B или найдется такой игрок C, что A выиграл у C, а C выиграл у B. Каково наименьшее количество теннисистов, оказавшихся по итогам турнира круче всех остальных? Ничьих в теннисе не бывает.

6. На столе лежат два конуса с общей вершиной O, касаясь друг друга внешним образом. Угол между их осями симметрии равен $\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$. Найдите максимальный угол при вершине меньшего из двух конусов с вершиной O, которые лежат на столе и касаются внешним образом первых двух конусов. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении.)

№1.

Ответ: 28 ладей

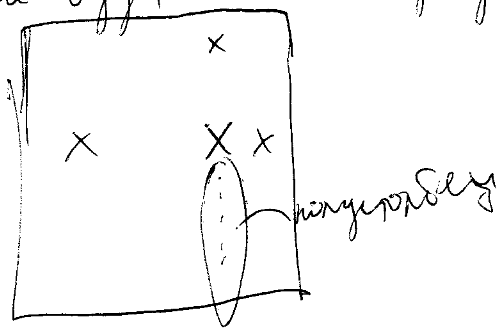
Пример:



каждую из ладей находящихся с краю может бить ≤3 других, т.к. за край доски ставить ладей нельзя

Всего мест с краю 28

∃ можно поставить ≥28 ладей => хотя бы одна будет стоять не с краю => она будет иметь пустую полустроку / полустолбец, т.к.



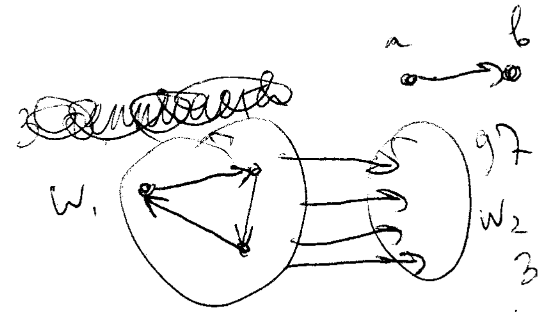
её бьют ≤3 ладей => этот пустой полустолб./полустр. имеет в себе одну крайнюю клетку => на ней не стоит ладья => ещё хотя бы одна ладья не с краю. Заметим, что у этой ладьи тоже имеется пустой полуст./полустр., отличная от полуст./полустр. первой ладьи, т.к. иначе бы полустолбец первой ладьи содержал бы вторую ладью не с краю, а он должен был быть пуст. ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ => каждая ладья запрещает ставить ладью на крайнюю клетку, либо сама стоит на этой крайней клетке

кр. клеток 28 => всего ладей ≤28, ч.т.д.

№5.

Ответ: 3

Пример: ~~[illegible]~~



a выиграл b; b проиграл a

Все теннисисты из W_1 выиграли каждого из W_2. При этом каждый из 3 теннисистов W_1 круче каждого другого, т.к. образуют цикл длиной в 3.

При этом теннисисты из W_2 не могли быть круче всех, т.к. от W_2 не идёт ни одной стрелки к W_1

1) Докажем, что всегда найдется самый крутой теннисист (T)

Возьмём T, у которого больше всего побед => т.к. каждый сыграл по 99 игр, а побед и поражений одинаковое кол-во, то у $T \geq 50$ побед => он выиграл ≥ 50 человек (W_3), а проиграл ≤ 49 людям (W_4)

∃ кто-то из W_4 выиграл всех из W_3 => у него $\geq 50+1$ (теннисиста, у которого больше всех побед) побед => у этого T из W_4 столько же побед сколько у T с наиб. кол-вом и ещё победа над ним самим => пр-ие, т.к. мы выбрали изначально T с наиб. кол-вом побед => все из W_4 проиграли кому-то из W_3 => наш выбранный T всегда может по двум стрелкам дойти до любого из W_3 (через кого-то из W_4) => всегда найдется самый крутой.

2) Докажем, что всегда найдутся 2 самых крутых T

Возьмём T с наиб. кол-вом побед => по 1) - он самый крутой, а W_3 - это те, кого он победил; W_4 - те, кому проиграл.

По 1) внутри W_4 найдется локальный самый крутой, который круче всех из W_4 => он выиграл выбранного T, а тот выиграл всех из W_3 => лок. крутой из W_4 круче всех из W_3 => он тоже круче всех

3) ~~[illegible] T с наиб. кол-вом побед проиграл ≥1 другому~~

-ся Возьмём двух самых крутых A и B, где НУО $A \to B$

A кому-то проиграл. ∃ $A \leftarrow C$

∃ у нас больше нет самых крутых кроме A и B, тогда $B \to C$, т.к. иначе $C \to A$ и $C \to B$ => C тоже круче всех

∃ $A \leftarrow (W_1)$ => (W_1) круче A; $(W_1) \to A \to B$

∃ $A \to B$ и $A \to (W_2)$, где (W_2) - группа T, проигравших A без B.

=> $(W_1) \to A \to (W_2)$ => т.к. самых крутых больше нет, а (W_1) круче всех кроме C, то $C \to (W_1)$ => $C \to A \to (W_2)$; $C \to A \to B$; $C \to (W_1)$ =>