САНКТ-ПЕТЕ... РГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

2408

68

1	2	3	4	5	6	сумма
2	3	4	1,5	3	0	13,5

68

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Москва

Дата 10.03.2019

* *

10–11 класс. Девятый вариант

1. Какое наибольшее количество ладей можно расставить на шахматной доске так, чтобы каждую ладью било не более трех других? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Числа x, y, z — углы треугольника, причем больший угол z не превосходит $\frac{\pi}{2}$. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \sqrt{\sin x \cdot \sin(z-y)} + \sqrt{\sin y \cdot \sin(z-x)}.$$

3. Дан четырехугольник $ABCD$, отличный от параллелограмма. На сторонах AB, BC, CD и DA выбираются соответственно точки K, L, M и N так, что $KL \parallel MN \parallel AC$ и $LM \parallel KN \parallel BD$. Найдите геометрическое место точек пересечения диагоналей параллелограмма $KLMN$.

4. Натуральное число x в восьмеричной системе 2019-значное, его младшая цифра равна 3, а все остальные цифры отличны от 3 и совпадают через одну. Число y получается записью цифр x в обратном порядке. Оказалось, что восьмеричное представление $x \cdot y$ содержит только цифры 1 и 6. Найдите $x \cdot y$ (в восьмеричной системе).

5. В однокруговом турнире по настольному теннису участвовало 100 спортсменов, причем ни один из них не выиграл все матчи. Будем говорить, что игрок A *круче* игрока B, если A выиграл у B или найдется такой игрок C, что A выиграл у C, а C выиграл у B. Каково наименьшее количество теннисистов, оказавшихся по итогам турнира круче всех остальных? Ничьих в теннисе не бывает.

6. На столе лежат два конуса с общей вершиной O, касаясь друг друга внешним образом. Угол между их осями симметрии равен $\operatorname{arctg} \frac{4}{3}$. Найдите максимальный угол при вершине меньшего из двух конусов с вершиной O, которые лежат на столе и касаются внешним образом первых двух конусов. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении.)

№2. чистовик

$A=\sqrt{\sin x\cdot\sin(z-y)}+\sqrt{\sin y\cdot\sin(z-x)}$.

Так как $x+y+z=180$ (углы треугольника), то выразим $z=180-x-y$.

Следовательно $\sin(z-y)=\sin(180-x-2y)=\sin(x+2y)$.

Выражение A принимает вид:

$A=\sqrt{\sin x\cdot\sin(x+2y)}+\sqrt{\sin y\cdot\sin(2x+y)}$

По неравенству о средних, получаем $\left[\begin{array}{l}\sqrt{\sin x\cdot\sin(x+2y)}\le\frac{\sin x+\sin(x+2y)}{2}\\ \sqrt{\sin y\cdot\sin(2x+y)}\le\frac{\sin y+\sin(2x+y)}{2}\end{array}\right.$

Таким образом $A\le\frac{\sin x+\sin y+\sin(x+2y)+\sin(2x+y)}{2}=\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\cdot$

$\cdot\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)+\sin\left(\frac{3x+3y}{2}\right)=(\cos x+\cos y)\cdot\sin(x+y)$

Так как при фиксир. сумме $x+y$ $(x,y\le\frac{\pi}{2})$,

Наибольшее значение $\cos x+\cos y$ достигается при $x=y$.

И, кроме того, известно, что $x+y\ge\frac{\pi}{2}$ (т.к. $z\le\frac{\pi}{2}$)

Тогда $\frac{\pi}{2}\ge x=y\ge\frac{\pi}{4}$ и $\cos(\frac{\pi}{4})\ge\frac{\pi}{2}$).

~~Значит максимум достигается при $x=y=\frac{\pi}{4}$.~~ ?

Подставим в наше неравенство о среднем.

Тогда исходное выражение $A\le\sqrt{2}$.

А равенство в последнем выражении достигается при $x=y=\frac{\pi}{4}$; $z=\frac{\pi}{2}$

Ответ: $\sqrt{2}$.

чистовик

№3.

Дано: ABCD-четырёхугольник
$KL \parallel MN \parallel AC$; $LM \parallel KN \parallel BD$

1) Так как $KLMN$ - параллелограмм, то $LK = NM$.
Треугольники ΔBKL и ΔABC, ΔACD и ΔMDN подобные.
Таким образом справедливы следующие отношения:

$$\frac{LK}{AC} = \frac{BK}{AB} = \frac{BL}{BC}$$

$$\frac{MN}{AC} = \frac{MD}{DC} = \frac{DN}{AD}$$

Как мы заметили выше, $LK = MN$, сл-но отношения равны друг другу.
Обозначим через n эти отношения.
Пусть $n \in (0; 1)$, тогда, если отложить на отрезке AB отрезок BK равный $n \cdot AB$, на отрезке BC отрезок BL равный $n \cdot BC$ и т.д., получим, что $LK \parallel AC \parallel MN$ и $LK = MN$, следовательно имеем параллелограмм $KLMN$.
Далее будем подразумевать под обозначением точки её координаты.
Тогда координаты точки пересечения диагоналей параллелограмма $O = \frac{M+K}{2}$.

$K = B + (A - B) \cdot n$.
$M = D + (C - D) \cdot n$

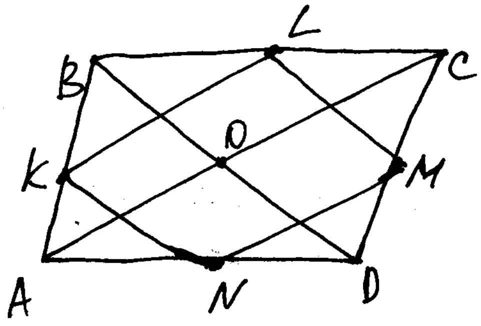
$$O = \frac{M+K}{2} = \frac{(B+(A-B)\cdot n) + (D+(C-D)\cdot n)}{2} = \frac{B+D}{2} + n \cdot \frac{A+C-(B+D)}{2}$$

Обозначим середину BD через E, а середину AC через F.

чистовик

Тогда вектор $\frac{\overrightarrow{A+C}-(B+D)}{2} = \overrightarrow{EF}$.

Так как $n \in (0;1)$, то ГМТ таких точек — это отрезок EF, не ~~концы~~ включая его концы.



№1.

O	O	O	O	O	O	O	O
O							O
O							O
O							O
O							O
O							O
O							O
O	O	O	O	O	O	O	O

Очевидно, что если ладья стоит на краю доски, её бьёт не более трёх других ладей.

Каждая ладья не должна быть закрыта другой ладьёй хотя бы с одной стороны, чтобы выполнялось условие, что ладью бьёт не более трёх других.

Следовательно, суммарное количество ладей ограничено сверху периметром доски (32), но учитывая то, что ладьи на угловых клетках считаются за две при подсчёте периметра, то максимальное число ладей равняется количеству граничных клеток, то есть 28.

Ответ: 28.

чистовик

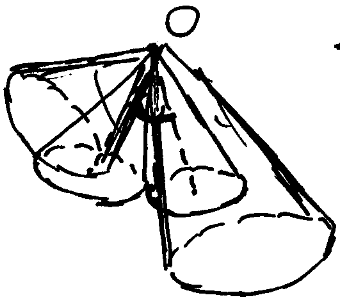
$x = 2525\ldots253$

$y = 35252\ldots52$

$x * y = 11616\ldots11616$ откуда ?

Ответ: 1,16 (1009 раз).

№6.



Дано:
$\angle \alpha = \operatorname{arctg} \frac{4}{3}$.

Максимальн. $\angle$ при вершине $=$
$= 2 \operatorname{arctg} \frac{4}{3}$.