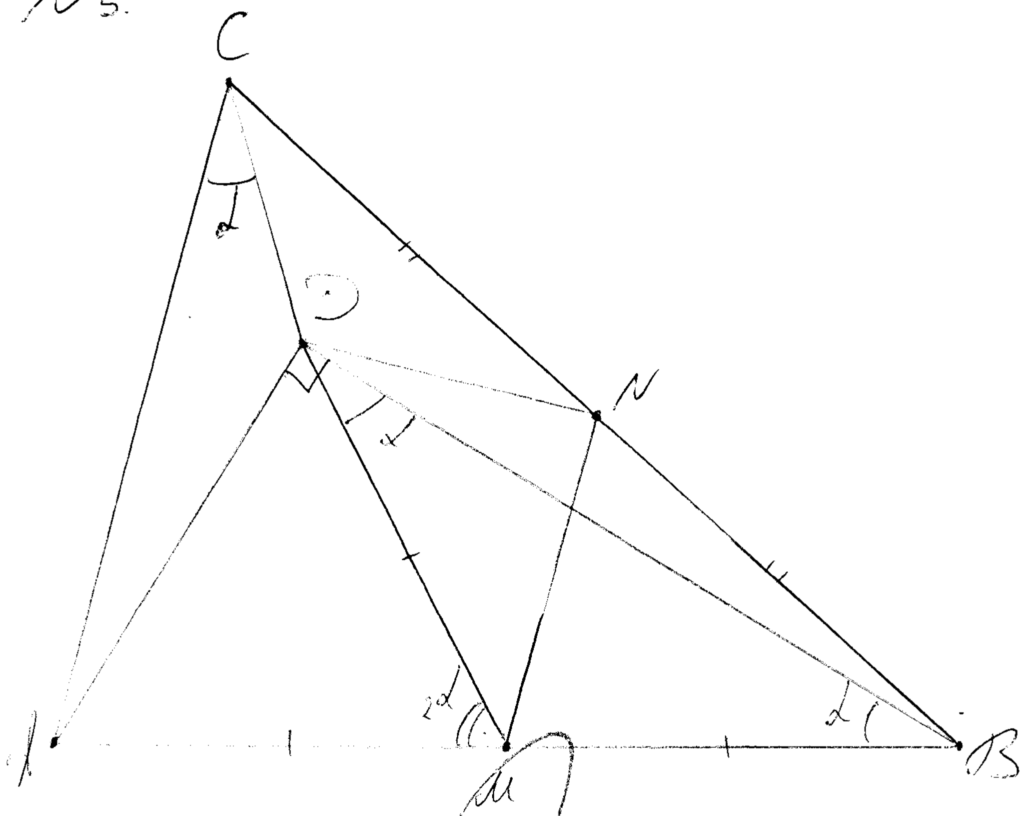
№5.



Решение:

Т.к. $\triangle ABD$ – прямоуг., => $DM = AM = BM$, => $\angle MDB = \alpha$, => $\angle DMA = 2\alpha$

Ответ: $\angle DNM = 90°$

0

Выход 11^{53} – 11^{57}

60

[illegible]СКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

1

907

1	2	3	4	5	6	сумма
4	4	0	0	0	4	12

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (8–9 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Саранск

Дата 13.03.2019

* *

8–9 класс. Первый вариант

1. Маша на свой день рождения принесла в школу конфеты, оставила несколько конфет себе, а остальные раздала шестерым своим подружкам. Оказалось, что у всех девочек разное число конфет и количество конфет у любых четырех девочек больше, чем у трех оставшихся. Какое наименьшее количество конфет Маша могла оставить себе?

2. При каких a квадратные трехчлены $x^2 + ax - 2$ и $2x^2 - 3x + 2a$ имеют общий корень?

3. На столе лежит 2019 камней. Петя и Вася играют в игру по следующим правилам. Ходят по очереди, начинает Петя. За один ход можно взять со стола 1 или 2 камня, но один и тот же игрок два раза подряд не может брать 2 камня. Проигрывает не имеющий хода. Кто из игроков сможет обеспечить себе победу вне зависимости от игры противника?

4. Для любых положительных чисел a, b и c докажите неравенство

$$\frac{a}{2a^2+b^2+c^2} + \frac{b}{a^2+2b^2+c^2} + \frac{c}{a^2+b^2+2c^2} \leqslant \frac{9}{4(a+b+c)}.$$

5. Внутри треугольника ABC выбрана такая точка D, что $\angle ABD = \angle ACD$ и $\angle ADB = 90°$. Точки M и N середины сторон AB и BC соответственно. Найдите угол $\angle DNM$.

6. Найдите все пары простых чисел p и q, для которых $p^2 + pq + q^2$ является точным квадратом.

№1.

Пусть у этих девочек конфет $a_1, a_2 \dots a_7$: $a_1 < a_2 \dots < a_7$.

$a_1+a_2+a_3+a_4 > a_5+a_6+a_7$, но $a_7 \geq a_6+1 \geq a_5+2 \geq a_4+3 \geq a_3+4 \geq a_2+5$,

т.е. $a_7 \geq a_4+3$, $a_6 \geq a_3+3$, $a_5 \geq a_2+3$.

$a_1+a_2+a_3+a_4 > 9+a_2+a_3+a_4 \iff a_1 > 9$, т.е. $a_1 \geq 10$.

Т.к. нам нужно для Маши наименьшее, то у Маши a_1 конфет.

~~Ответ~~ Т.е. Маша могла оставить себе не меньше 10 конфет.

Пример: Кол-во ~~не~~ конфет у девочек: 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16.

Все условия выполняются.

Ответ: 10.

№2.

$$\begin{cases} x^2+ax-2=0 \\ 2x^2-3x+2a=0 \end{cases} \quad x_{1,2}=\frac{-a\pm\sqrt{a^2+8}}{2}$$

$$x_{3,4}=\frac{3\pm\sqrt{9-16a}}{4} \qquad 9-16a\geq 0, \text{ т.е. } a\leq\frac{9}{16}.$$

$x^2+ax-2=2x^2-3x+2a$

$x^2-x(a+3)+2(a+1)=0$

По т. Виета $x_1=a+1$, $x_2=2$.

Т.е. $\left[\begin{array}{l} (a+1)^2+a(a+1)-2=0 \\ 4+2a-2=0 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 2a^2+3a-1 \\ a+1=0 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} a_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+8}}{4} \\ a=-1 \end{array}\right.$

$\frac{-3-\sqrt{17}}{4}<\frac{9}{16}$, т.к. $\frac{9}{16}>0$, а $\frac{-3-\sqrt{17}}{4}<0$, аналогично для $a=-1$.

$\frac{-3+\sqrt{17}}{4}<\frac{9}{16}$, т.к. $\iff 4\sqrt{17}<21 \iff 272<441$ — верно.

Т.е. это выполняется при $a=-1; \frac{-3\pm\sqrt{17}}{4}$

Ответ: при $a=-1; \frac{-3-\sqrt{17}}{4}; \frac{-3+\sqrt{17}}{4}$.

№6

Пусть $p^2+qp+q^2=x^2$, где $x\in N$

$p^2+pq+q^2=(p+q)^2-pq=x^2$

$(p+q)^2-x^2=pq$, т.е. $p+q>x$ и пусть, не умаляя общности $q>p$.

$(p+q-x)(p+q+x)=pq$, т.е. $p+q+x>p+q-x$, $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} p+q-x=p \\ p+q+x=q \end{cases} \\ \begin{cases} p+q-x=1 \\ p+q+x=pq \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} q=x \\ p=-x \end{cases} \text{— противоречие} \\ \begin{cases} p+q=x+1 \\ p+q=pq-x \end{cases} \end{array}\right.$

$p=x+1-q$, т.е. $p^2+pq+q^2-x^2 \iff x^2+q^2+1-2xq-2q+2x+xq+q-q^2+q^2=x^2$

$q^2+1-xq-q+2x=0$.

$x=\frac{q^2-q+1}{q-2}=\frac{q^2-2q+q+1}{q-2}=q+\frac{q+1}{q-2}$, т.е. $q+1 \vdots q-2$. Пусть $q+1=k(q-2)$

$q(k-1)=2k+1 \iff q=\frac{2k+1}{k-1}$, т.е. $2k+1 \vdots k-1$.

$\frac{2k+1}{k-1}=\frac{2k-2+3}{k-1}=\frac{3}{k-1}+2$, т.е. $3 \vdots k-1$, т.е. $\left[\begin{array}{l} k-1=-3 \\ k-1=-1 \\ k-1=1 \\ k-1=3 \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} k=-2 \text{ — не подходит} \\ k=0 \text{ — не подходит} \\ k=2 \\ k=4 \end{array}\right.$

$q=\frac{2k+1}{k-1}$, т.е. $q_1=3$; $q_2=5$.

$x=q+\frac{q+1}{q-2}$. $x_1=3+\frac{4}{1}$; $x_2=5+\frac{6}{3}$, т.е. $x=7$.

$p_1=x+1-q_1=8-3=5$, $p_2=x+1-q_2=3$

Т.е. единственная подходящая пара — 3 и 5: $9+15+25=49=7^2$.

Ответ: 3 и 5.

№4.

$$\frac{a}{2a^2+b^2+c^2}+\frac{b}{a^2+2b^2+c^2}+\frac{c}{a^2+b^2+2c^2}\leq\frac{a}{4\sqrt{a^4b^2c^2}}+\frac{b}{4\sqrt{a^2b^4c^2}}+\frac{c}{4\sqrt{a^2b^2c^4}}=\frac{1}{4\sqrt{bc}}+\frac{1}{4\sqrt{ac}}+\frac{1}{4\sqrt{ab}}=$$

$$=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})}{\sqrt{abc}}\leq\frac{9}{4(a+b+c)}$$

$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\leq\frac{a+b+c+3}{2}$

$\frac{2(a+b+c)(a+b+c+3)}{\sqrt{abc}}\leq 9$

$\frac{2\cdot\sqrt[3]{abc}\cdot\sqrt[6]{abc}}{\sqrt{abc}}=\frac{2\cdot\sqrt[6]{a^2b^2c^2\cdot abc}}{\sqrt{abc}}=\frac{2\sqrt{abc}}{\sqrt{abc}}=2\leq 9$ — верно.

ч.т.д.

№3.

Петя первым ходом берёт 1, и затем поддерживает чётность кол-ва оставшихся камней. В конце после его хода ~~будет x, 8~~ возможно сделать 3. Тогда как бы ни ходил Вася, Петя выиграет.