

VL031



5274<sup>2</sup> 50

ЯГУСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

1	2	3	4	5	6	сумма
4	2	0	0	4	0	10

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА  
ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПБГУ  
2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада ЯКУТСК

Дата 16.03.19

\*\*\*\*\*

10–11 КЛАСС. ЧЕТВЕРТЫЙ ВАРИАНТ

1. При каком наибольшем  $n$  на доске  $9 \times 9$  можно расставить  $n$  королей и 6 ладей так, чтобы никакая фигура не была под боем?

2. Даны числа  $x, y > 0$ . Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{xy(x+y)}{\sqrt[4]{x^{12}+y^{12}}}.$$

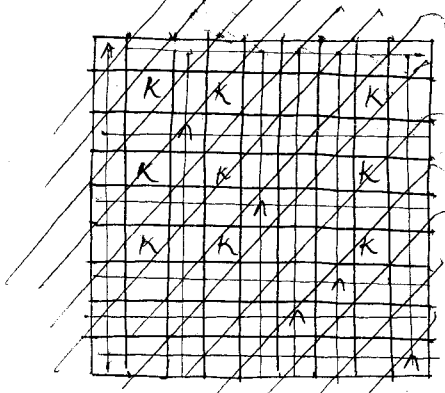
3. Дан тупой угол  $BAD$ , где точка  $D$  отлична от  $A$ . На луче  $AB$  произвольным образом выбирается точка  $X$ , также отличная от  $A$ . Пусть  $P$  — точка пересечения касательных к описанной окружности треугольника  $ADX$ , проведенных в точках  $D$  и  $X$ . Найдите геометрическое место точек  $P$ .

4. Дано натуральное число  $x$ , шестнадцатиричная запись которого  $n$ -значная и не содержит нулей. Числа  $x$  и  $x^2$  в шестнадцатиричной системе одинаково читаются слева направо и справа налево. Найдите все  $n$ , при которых такое  $x$  существует.

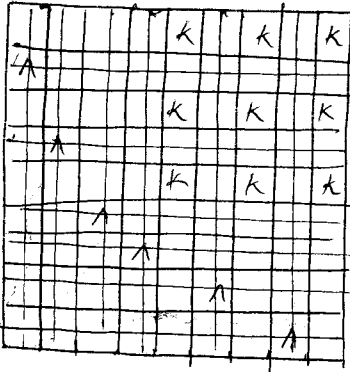
5. В однокруговом турнире по настольному теннису принимает участие 20 человек. Если тройка участников  $A, B, C$  такова, что  $A$  выиграл у  $B$ , а  $B$  — у  $C$ , то организаторы турнира вручают спортсменам из этой тройки соответственно “золотой”, “серебряный” и “бронзовый” сувениры. Участник, оказавшийся в нескольких тройках, получает сувенир за каждую из них. Какое наименьшее количество “серебряных” сувениров надо закупить организаторам, чтобы их хватило вне зависимости от результатов турнира? Ничьих в теннисе не бывает.

6. Четыре конуса с общей вершиной  $O$  касаются друг друга внешним образом, причем первые два и последние два из них имеют одинаковый угол при вершине. Пятый конус, отличный от четвертого, касается первых трех конусов внешним образом. Найдите максимальный угол при вершине пятого конуса. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении).

1.



Пример:



Расставим по одной ладье на стол.  
Первая ладья будет жить 8 клеток по горизонт. там, 8 по верт. — значит, если не считать эти клетки, то 7 ладья будет жить 15 клеток и т.д. Если мы расставим 6 ладей, то останется 9 клеток (81-17-15-13-11-9). В эти девять клеток расставим королей. Отв.:  $n=9$ .

Т.е. останется свободных клеток 81-17. Если поставим еще одну ладью, то она там же будет жить 8 по верт., 8 по гориз. одна по одну клетку из гориз. и одну по верт. уже будет 1 ладья, значит, если не считать эти клетки, то 7 ладья будет жить 15 клеток и т.д. Если мы расставим 6 ладей, то останется 9 клеток (81-17-15-13-11-9). В эти девять клеток расставим королей. Отв.:  $n=9$ .

2.  $A = \frac{xy(x+y)}{\sqrt[4]{x^2+y^2}}$ ; воспользуемся производной по  $x$ :

$$A' = \frac{(yx + y(x+y))\sqrt[4]{x^2+y^2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{12x^{11}}{\sqrt[4]{(x^2+y^2)^3}} xy(x+y)}{\sqrt[4]{x^2+y^2}} = 0;$$

$$\frac{(2xy + y^2)(x^2 + y^2) - 3x^{11}(xy + x^2y)}{\sqrt[4]{(x^2+y^2)^3}} = 0$$

$$2x^{13}y + 2xy^{13} + y^2x^{12} + y^{14} - 3x^{13}y - 3x^{12}y^2 = 0$$

Если  $y=0$ , то  $A=0$ .

Тогда пусть  $y \neq 0$ : Т.к.  $y \neq 0$  ( $y > 0$ ):

$$2x^{13} + 2xy^{12} + yx^{12} + y^{13} - 3x^{13} - 3x^{12}y = 0$$

$$-x^{13} + 2xy^{12} - 8x^{12}y + -x^{13} + 2xy^{12} - 2x^{12}y + y^{13} = 0$$

$$y^{13} - x^{13} + 2xy(y^{11} - x^{11}) = 0$$

$$(y-x)(x^{12} + x^{11}y + \dots + xy^{11} + y^{12}) + 2xy(y-x)(y^{10} + y^9x + \dots + x^9y + x^{10}) = 0$$

$$(y-x)(x^{12} + x^{11}y + \dots + xy^{11} + y^{12} + 2xy(y^{10} + y^9x + \dots + x^9y + x^{10})) = 0$$

Очевидно, что правая часть положительна  $\Rightarrow$

$y-x=0 \Rightarrow x=y$  — точка максимума.

$$A = \frac{x \cdot x \cdot 2x}{\sqrt[4]{2x^{12}}} = \frac{2x^3}{\sqrt[4]{2x^{12}}} = \sqrt[4]{2^3} = \sqrt[4]{8}. \text{ Отв.: } \sqrt[4]{8}.$$

5. Чтобы получить "серебряный" сувенир, нужно кому-нибудь проиграть и кого-нибудь выиграть.

Допустим, что у одного игрока 9 побед, 1 поражение.

Тогда у него получится 99 "серебряных" сувениров, т.е.  $x(19-x)$  для общего случая.

Найдем наибольшее значение произведения числа  $x(19-x)$ , где  $0 \leq x \leq 19, x \in \mathbb{Z}$

$x(19-x) = 19x - x^2$  — парабола с ветвями вниз  $\Rightarrow$  max значение — вершина параболы. Т.е.  $\max = -\frac{b}{2a} = -\frac{19}{-2} = +9,5$ ; Числа 9 и 10 равноудалены от max значения, т.е. явл. max-ми, когда  $x$  — целое. Т.е.  $9 \cdot 10$  — max-ми.

Пусть 10 чел. выиграли 9 раз и пр. 10 раз, а остальные наоборот. Тогда получится, что число выигранных равно числу проигранных, что верно.

Пример (для 5 игроков)

И	1	1	0	0
О	И	1	1	0
О	0	И	1	1
О	0	0	И	1
О	0	0	0	И

Аналогично и для двадцати.

Т.е. всего серебряных сувениров будет  $9 \cdot 10 \cdot 20 = 1800$

Ответ: 1800 серебряных сувениров

