№4 Чистовик

$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\geqslant\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}$$

Используем нер. Коши Буняковского

$$(a_1^2+b_1^2+c_1^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2)\geqslant(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)^2$$

$$\left(\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\right)(a+b+c)\geqslant\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)^2$$

Значит достаточно док. что

$$\frac{\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)^2}{a+b+c}\geqslant\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\Rightarrow$$

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geqslant a+b+c$$ используем AMGM

$$\frac{a^2}{b}+b\geqslant 2a\quad \frac{b^2}{c}+c\geqslant 2b\quad \frac{c^2}{a}+a\geqslant 2a$$ Просуммируем $\Rightarrow$ $$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geqslant a+b+c$$ ч.т.д.

5946

1

85

KL 114

СТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

1	2	3	4	5	6	сумма
3	4	4	0	3	3	17

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (8–9 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Душанбе

Дата 11.02.2019

* *

8–9 класс. Четвертый вариант

1. На свой день рожденья Вася принес в класс несколько конфет и все их раздал своим одноклассникам (каждому досталось не менее одной конфеты). Некоторые из них поделились с одноклассниками полученными конфетами. В результате у четверти всего класса оказалось по 2 конфеты, у трети класса — по 1 конфете, у Маши оказалось 6 конфет, а больше ни у кого конфет не осталось. Какое наибольшее количество конфет мог раздать Вася?

2. При каких a квадратные трехчлены x^2+ax-6 и $2x^2-5x+2a$ имеют общий корень?

3. В тетради карандашом нарисована квадратная сетка 2019×2019 клеток (сторона клетки равна 1). Петя и Вася играют в игру по следующим правилам. Ходят по очереди, начинает Петя. За один ход игрок стирает один единичный отрезок этой сетки. Выигрывает тот игрок, после чьего хода образуется клетка, все четыре стороны которой стерты. Кто из игроков может обеспечить себе победу вне зависимости от игры соперника?

4. Для положительных чисел a, b и c докажите неравенство

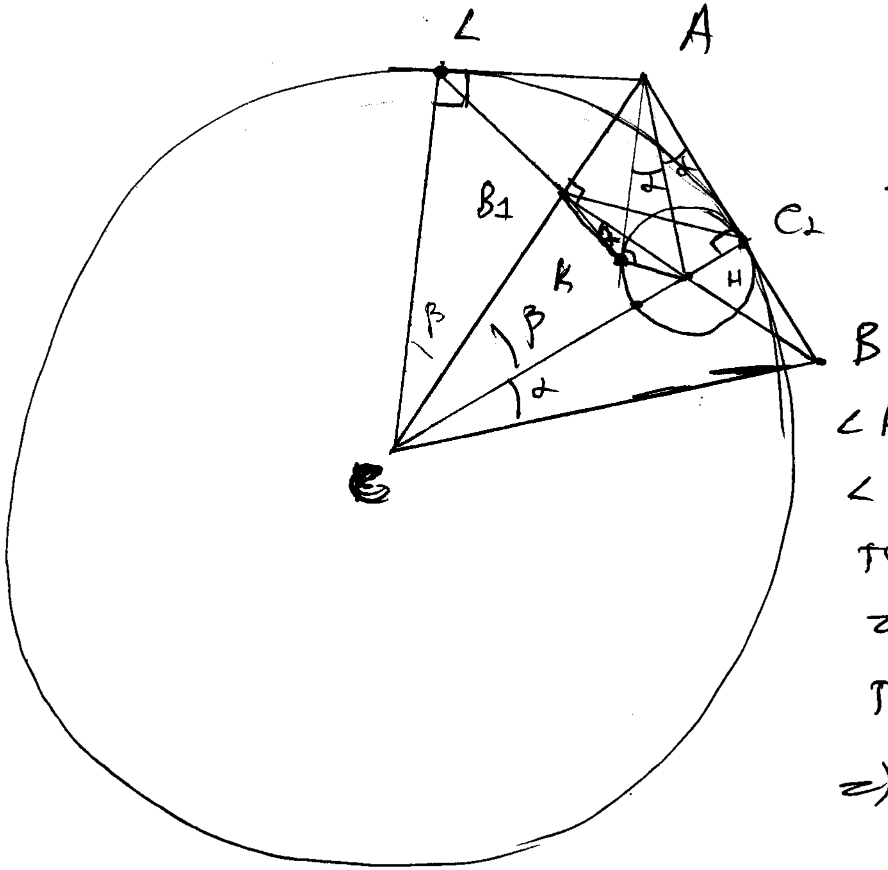
$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\geqslant\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}.$$

5. В остроугольном треугольнике ABC с наименьшей стороной AB провели высоты BB_1 и CC_1, они пересеклись в точке H. Через точку C_1 провели окружность ω с центром в точке H и окружность ω_1 с центром в точке C. Через точку A провели касательную к ω, касающуюся ее в точке K, а также касательную к ω_1, касающуюся ее в точке L. Найдите $\angle KB_1L$.

6. Найдите все пары простых чисел p и q, для которых $\frac{p^3+1700}{q^2+96}=q^2$.

№5 чистовик.

AA_1 – высота



Пусть $\angle C_1CB = \alpha$, $\angle B_1CC_1 = \beta$

$\Rightarrow$ т.к. A, C_1, C, A_1 – цикличны $\Rightarrow \angle HAC_1 = \alpha$

$\angle KAC_1 = \angle HAK$ т.к. H центр. $\angle HKA = 90 \Rightarrow \angle HB_1A = 90$

тогда точки A, B_1, K, H – цикличны $\Rightarrow \angle KB_1H = \alpha$

$\angle B_1CC_1 = \angle LCA = \beta$ т.к. $\angle ACC_1 = \angle LCA$ т.к. C – центр.

$\angle B_1CB = 90-\beta-\alpha$ и $\angle B_1BC = \angle B_1C_1C = 90-\beta-\alpha$ т.к.

точки B_1, C_1, B, C – цикличны. т.к. $\triangle ALC = \triangle AC_1C$

$\Rightarrow \angle CLB_1 = \angle CC_1B = 90-\beta-\alpha \Rightarrow \angle B_1LA = \alpha+\beta$.

т.к. $\angle ABC_1 = \beta \Rightarrow \angle CAC_1 = 90-\beta = \angle LAC = 90-\beta$

$\Rightarrow \angle LB_1A = 90-\alpha$ $\angle LB_1K = \cancel{90+\alpha+90}$ $\angle LB_1A +$

$+\angle AB_1H + \angle KB_1H = 180$. L, B_1, K – на одной прямой

Ответ: $\angle KB_1L = 180°$

Чистовик.

№1

Пусть в классе N учеников. Так как после того как все получили конфеты некоторые из них поделились ими тогда общее количество конфет $\frac{N}{4}\cdot 2+\frac{N}{3}+6$. Так как каждый из них получил не менее одной конфеты тогда количество конфет не менее чем N. => отсюда следует что

$$\frac{N}{2}+\frac{N}{3}+6\geq N \Rightarrow 6\geq \frac{N}{2}-\frac{N}{3} \Rightarrow 6\geq\frac{N}{6}\Rightarrow N\leq 36$$

Значит максимальное количество участников 36.

Ответ: 36.

№2

$x^2+ax-6=0$, $2x^2-5x+2a=0$ Пусть корни I ур. x_1, x_2 II ур. x_1, x_3

По теореме Виетта ① $x_1+x_2=-a$ ② $x_1\cdot x_2=-6$

и ③ $x_1+x_3=\frac{5}{2}$ и ④ $x_1\cdot x_3=a$ => ①+③ => $2x_1+x_2+x_3=-a+\frac{5}{2}$

②+④ = $x_1(x_2+x_3)=a-6$ => $2x_1+\frac{a-6}{x_1}=-a+\frac{5}{2}$ =>

=> $2x_1^2+a-6=\left(-a+\frac{5}{2}\right)x_1$ => $2x_1^2+a-6=-ax_1+\frac{5}{2}x_1$

=> $2x_1^2+\left(a-\frac{5}{2}\right)x_1+a-6=0$ => $D=\left(a-\frac{5}{2}\right)^2+(a-6)8$

$\sqrt{2}$ Чистовик.

$x^2+ax-6=0 \qquad 2x^2-5x+2a=0$

$2x^2+2ax-12=0$; $2x^2-5x+2a=0 \Rightarrow (2a+5)x = 2a+12 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{2a+12}{2a+5}$ значит их общий корень равен этому значению ~~D_a~~ $(\cancel{-a+})$. Теперь вычислим корни 1 ур.

$D = a^2+24 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-a\pm\sqrt{a^2+24}}{2} \qquad D_2 = 25-16a>0$

$a<\frac{25}{16}$

1) $x_1 = x \Rightarrow \frac{-a+\sqrt{a^2+24}}{2} = \frac{2a+12}{2a+5}$

$\left(\sqrt{a^2+24}\,(2a+5)\right)^2 = \cancel{(2a+12)\cdot 2}\ (2a^2+9a+24)^2$

$(4a^2+20a+25)(a^2+24) = 4a^4+81a^2+24^2+36a^3+96a^2+18\cdot24a$

$4a^4+96a^2+20a^3+480a+25a^2+25\cdot24 = 4a^4+81a^2+24^2+36a^3+96a^2+18\cdot24a$

$48a+24 = 56a^2+16a^3 \Rightarrow 2a^3+7a^2-6a-3=0$

$(a-1)(2a^2+9a+3)=0$ 1.1) $a=1$ 1.2) $2a^2+9a+3=0$

$D = 81-3\cdot2\cdot4 = 57$

$a_{1,2} = \frac{-9\pm\sqrt{57}}{4} < \frac{25}{16}$ и

2) $x_2 = x$

$\frac{-a-\sqrt{a^2+24}}{2} = \frac{2a+12}{2a+5} \Rightarrow$ как и в I случае $a=1, \frac{-9\pm\sqrt{57}}{4}$

(Проверка $a=1$ $\quad x^2+x-6=0,\ 2x^2-5x+2=0$

$x_{1,2} = \frac{-1\pm5}{2} = 2,-3 \qquad x_{3,4} = \frac{5\pm3}{4} = 2, \frac{1}{2}$ верно)

Ответ: $a=1$, $a=\frac{-9\pm\sqrt{57}}{2}$.

№6 Чистовик.

$\frac{p^3+1700}{q^3+96} = q^3 \Rightarrow p^3+1700 = q^6+96q^3$

$q^6+96q^3-1700 = p^3$

Пусть $q \geq 32$ $96 \cdot q^3 > 1700$

$(q^2+1)^3 \overset{(2)}{>} q^6+96q^3-1700 \overset{(1)}{>} (q^2)^3$ (1) верно

$q^6+3q^4+3q^2+1 > q^6+96q^3-1700 \Rightarrow 3q^4+3q^2+1701 > 96q^3$

$3q^4 \geq 96q^3$ $3q \geq 96$ $q \geq 32$ и $\Rightarrow$ противоречие.

$\Rightarrow q < 32$ или $q \leq 31$. $q^6+96q^3 > 1700$ $q \geq 5 \Rightarrow q \geq 5$

$31 \geq q \geq 5$ число в кубе $q^3 \equiv 0, \pm 1 \pmod 7$ т.к.

$1^3 \equiv 1,\ 2^3 \equiv 1,\ 3^3 \equiv -1,\ 4^3 \equiv 1,\ 5^3 \equiv -1,\ 6^3 \equiv -1,\ 7^3 \equiv 0 \pmod 7$

$\Rightarrow q^3 \equiv 0, \pm 1$ $q^6 \equiv 0, 1 \pmod 7$. если $q^3 \equiv +1 \pmod 7$

$\Rightarrow q^6+96q^3-1700 \equiv 1+96-1700 \equiv 0 \pmod 7 \Rightarrow p \,\vdots\, 7 \Rightarrow p = 7$

$q^6+96q^3-1700 = 7^3$ $q \geq 5$ $q^6 \geq 5^6 > 100^3 = 10000$

$q^6+96q^3-1700 > 7^3$ $\varnothing$ если $q^3 \equiv -1 \pmod 7 \Rightarrow$

$q^6+96q^3-1700 \equiv 1-96-1700 \equiv -(95+1700) = -(4+6) \equiv 4 \pmod 7$

$p^3 \equiv 4 \pmod 7$ что неверно т.к. $b^3 \equiv 0, \pm 1 \pmod 7$ $\forall b \in \mathbb{N}$

$q \equiv 0 \pmod 7 \Rightarrow q = 7$ $7^6 + 96 \cdot 7^3 - 1700 = p^3$

$343(343+96) - 1700 = 343 \cdot 439 - 1700 = 150577 - 1700$

$= 148877 = p^3$ $148877 > 50^3$

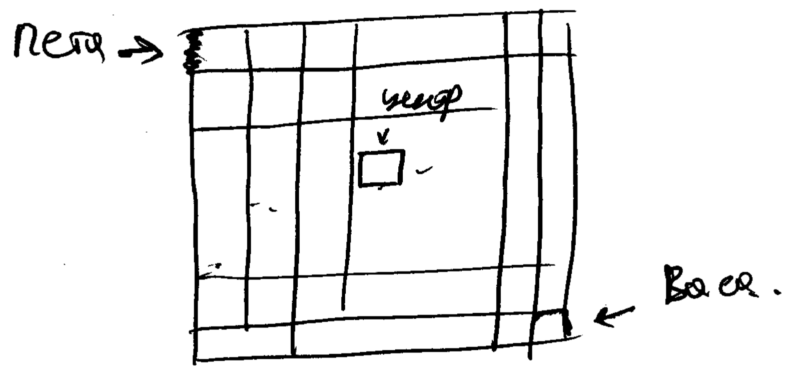
$53^3 = 148877 \Rightarrow p = 53$ $(7;53)$ Ответ: $(7;53)$

Чистовик

№3

Выигрывает Вася. Так как он будет ходит следующим образом. Если Петя стирает ~~(ходит в любую клетку он сы)~~ любой отрезок Вася выбероет отрезок симметричный центру квадрата. Таким образом в конце они сделают одинаковое количество ходов. После чего ходит Петя который стероет отрезок клетки у которого уже стёрты 2 отрезка после чего Вася стерает последний отрезок этой клетки.

Пример Васиного хода.



Они сделают одинаковое кол-во ходов т.к если ~~Вас~~ Петя ~~сделал~~ стёр какой-то отрезок. и если отрезок симметричный этому отрезку стёрт ~~Вася~~ тогда до этого, его уже стерали если его стёр Петя то он не мог выбрать ту первоначальную клетку, если же его стёр Вася значит ~~д~~ симметр. ~~от~~ центру отрезок не мог выбрать Петя