50

ᵓГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

2489

1	2	3	4	5	6	сумма
1	0	0	4	4	1	10

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10-11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Владимир

Дата 16 марта 2019

* *

10–11 класс. Первый вариант

1. Имеется 8 черных ладей и n белых. При каком наибольшем n их можно расставить на шахматной доске так, чтобы одноцветные ладьи не били друг друга? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Даны положительные числа x, y, z. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{xyz\,(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4+(yz)^4+(xz)^4}}.$$

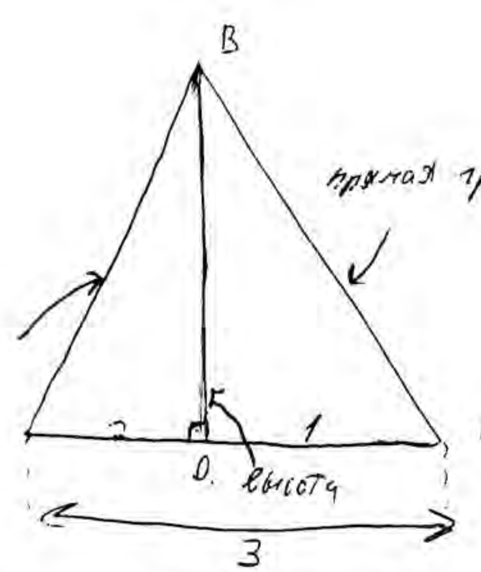
3. Дан треугольник ABC с меньшей стороной AB. На сторонах AB и AC выбраны соответственно точки X и Y так, что $BX = CY$. Под каким углом прямая, проходящая через центры описанных окружностей треугольников ABC и AXY, пересекает прямую BC, если $\angle ABC = \beta$ и $\angle BCA = \gamma$?

4. Десятичная запись квадрата натурального числа x представляет собой два одинаковых соседних блока из n цифр. Может ли n равняться 20182019?

5. На однокруговой турнир по настольному теннису подало заявку 16 человек. Когда было сыграно n матчей, оказалось, что среди любых трех теннисистов найдутся двое, уже сыгравших между собой. При каком наименьшем n такое возможно?

6. Три конуса с общей вершиной, касающихся друг друга внешним образом, имеют высоту 2 и радиус основания $\sqrt{3}$. Два шара касаются внешним образом друг друга и всех конусов. Найдите отношения радиусов шаров (большего к меньшему).

$AC = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2\sqrt{3} = 3$ из решения треугольников в п-те основания тетраэдра $\to AO = 2$.



оттуда же $AO : OC = 2:1$ по т-ме о медианах.

AB - ~~высота~~ оси исходного конуса

$AB = 2$

$\begin{cases} AB = 2 \\ \cancel{AB = 2} \end{cases} \to$ противоречие. Возможно из-за ошибки в цифрах, поэтому дописываем ответ в буквенном виде, обозначив a - сторона основания пирамиды, ~~радиус основания исходных конусов~~, h - их высоту

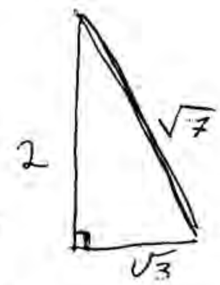
$AC = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2a = a\sqrt{3} \qquad AO = \frac{2a\sqrt{3}}{3} \qquad OC = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$AB = h. \qquad BO = \sqrt{h^2 - \frac{4a^2 3}{9}} = \sqrt{h^2 - \frac{4a^2}{3}}$

$\cancel{\sin} \angle ABO = \cancel{\arcsin \frac{AO}{AB}} =$

$= \operatorname{arctg} \frac{2a\sqrt{3}}{3\sqrt{h^2 - \frac{4a^2}{3}}}$ ~~tg...~~

Найдем угол между высотой и образующей конуса. Он равен $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2}$. $\left(\operatorname{arctg} \frac{r}{h}\right)$



Угол при вершине угла четвертого конуса ~~такого~~ равен удвоенной разности угла между ребром и высотой тетраэдра и угла между высотой и образующей ~~исходного~~ конуса, что видно из осевого сечения конуса, проходящего через центр основания нового конуса.

Чистовик

Задача 4.

Обозначим один блок за $\overline{ab\ldots c}$

Т.к. число x^2 имеет вид $\overline{ab\ldots c\,ab\ldots c}$, то

$x^2 = \overline{ab\ldots c} \cdot 10^{20182019} + \overline{ab\ldots c} = \overline{ab\ldots c}\left(10^{20182019}+1\right)$

Тогда $x^2 \vdots \left(10^{20182019}+1\right)$

$10^{11} \equiv -1 \pmod{121}$ по признаку делимости на 11.

$\Downarrow$

$10^{11\cdot 1834729} \equiv -1 \pmod{121}$

$\Downarrow$

$10^{20182019} \equiv -1 \pmod{121}$

$\Downarrow$

$10^{20182019}+1 \equiv 0 \pmod{121}$, т.е. $\frac{10^{20182019}+1}{121}$ - натуральное число.

Рассмотрим $\overline{ab\ldots c} = \frac{10^{20182019}+1}{121}\cdot 100$

Заметим, что в таком $\overline{ab\ldots c}$ 20182019 знаков (цифр).

В числе $10^{20182019}+1$ 20182020 знаков, тогда в числе $\frac{10^{20182019}+1}{121}$ 20182017 знаков т.к. $121>100$, а при делении на 100 число знаков в целой части уменьшается на 2.

Тогда в числе $\frac{10^{20182019}+1}{121}\cdot 100$ 20182019 знаков (цифр).

Заметим, что при таком $\overline{ab\ldots c}$, $\overline{ab\ldots c\,ab\ldots c}$ - полный квадрат.

$\overline{ab\ldots c\,ab\ldots c} = \overline{ab\ldots c}\left(10^{20182019}+1\right) =$

$= \frac{\left(10^{20182019}+1\right)}{121}\cdot 100\cdot\left(10^{20182019}+1\right) = \left(\frac{\left(10^{20182019}+1\right)}{11}\cdot 10\right)^2$

Итак, мы привели пример такого числа для $n=20182019$.

Ответ: да, может.

Чистовик

Рассмотрим осевое сечение нового конуса.

, $2r\sqrt{3}$, $l-1$

Чистовик

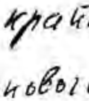
Задача 1.

~~Пусть можно расставить больше 15 белых ладей. Например, 16.~~

~~Тогда не удаётся~~

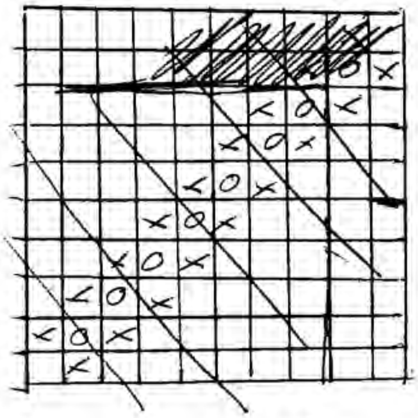
~~Если будет следующая расстановка~~

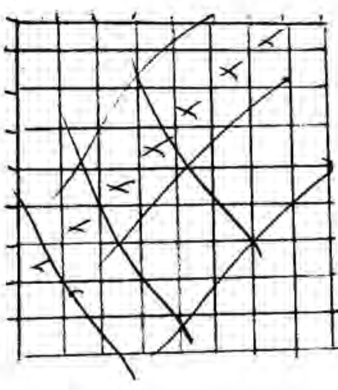
Каждая черная ладья может являться перегородкой максимум для двух пар белых ладей. Тогда ~~всех~~ белых ладей не более $2 \cdot 8 = 16$.

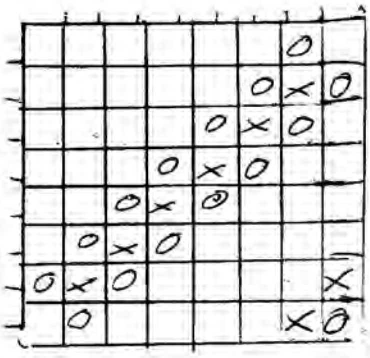
Докажем, что каждая черная ладья ~~является~~ не может являться перегородкой для двух пар белых ладей. Пусть может. Тогда на шахматную доску можно поставить 8 фигур вида , где в центральной клетке стоит черная ладья, а в крайних - белые, с соблюдением условия о том, что ладьи одинакового цвета не бьют друг друга, т.к. оптимальная возможность для такой расстановки — по диагонали, но её не хватает.

Тогда каждая черная ладья не может быть перегородкой для двух пар белых, тогда белых не более 16.

Приведем пример для 15:







О - белая ладья

х - черная ладья.

Ответ: 15.

Чистовик

Задача 4.

Обозначим один блок за $\overline{ab...c}$

Т.к. число x^2 имеет вид $\overline{ab...c\,ab...c}$, то

$$x^2 = \overline{ab...c} \cdot 10^{20182019} + \overline{ab...c} = \overline{ab...c}\,(10^{20182019}+1)$$

Тогда $x^2 \vdots (10^{20182019}+1)$

$10^{11} \equiv -1 \pmod{121}$ по признаку делимости на 11.

$$\Downarrow$$

$10^{11 \cdot 1834729} \equiv -1 \pmod{121}$ ~~...~~

$$\Downarrow$$

$10^{20182019} \equiv -1 \pmod{121}$

$$\Downarrow$$

$10^{20182019}+1 \equiv 0 \pmod{121}$, т.е. $\frac{10^{20182019}+1}{121}$ - натуральное число.

Рассмотрим $\overline{ab...c} = \frac{10^{20182019}+1}{121} \cdot 100$

докажем, что в таком $\overline{ab...c}$ 20182019 знаков (цифр).

В числе $10^{20182019}+1$ 20182020 знаков, тогда в числе $\frac{10^{20182019}+1}{121}$ 20182017 знаков т.к. $121 > 100$ а при делении на 100 число знаков в целой части уменьшается на 2.

Тогда в числе $\frac{10^{20182019}+1}{121} \cdot 100$ 20182019 знаков (цифр).

Докажем, что при таком $\overline{ab...c}$, $\overline{ab...c\,ab...c}$ - полный квадрат.

$$\overline{ab...c\,ab...c} = \overline{ab...c}\,(10^{20182019}+1) =$$

$$= \frac{(10^{20182019}+1)}{121} \cdot 100 \cdot (10^{20182019}+1) = \left(\frac{(10^{20182019}+1)}{11} \cdot 10\right)^2$$

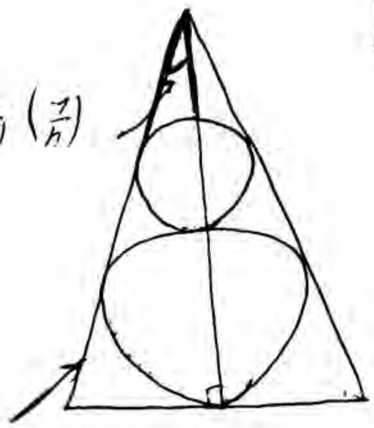
Итак, мы привели пример такого числа для $n = 20182019$.

Ответ: да, может.

Чистовик

Рассмотрим осевое сечение нового конуса.

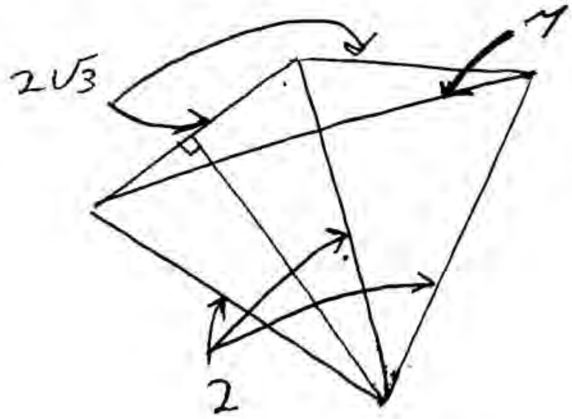
$$\operatorname{arctg} \frac{2r\sqrt{3}}{3\sqrt{h^2-\frac{4r^2}{3}}} - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{h}\right)$$



$\sqrt{4^2+h^2}$

Решив планиметрическую задачу в этом сечении получим ответ.

r можно выразить из осевого сечения двух исходных конусов: найдя sin угла и отрезки



Задача 5

~~Докажем, что у 2к не сыграно не более k^2 игр. Докажем это утверждение математической индукцией по k.~~
~~База: k=2, то есть команд 2k=2·2=4~~

Докажем, что у 2k игроков может быть не сыграно не более k^2 игр. Докажем это утверждение математической индукцией по k.
База: k=2, то есть в турнире участвовало 4 игрока. Чтобы между любыми тремя из четырех было сыграно игра, достаточно, чтобы было сыграно 2 игры, что не превосходит $k^2=4$.
Шаг: Пусть утверждение верно для k. Докажем его для k+1. Если несыгранных игр не было, то их число 0, что не превосходит $(k+1)^2$. Тогда в этом случае утверждение индукции выполнено. Если несыгранные игры были, то можно выбрать двух игроков, игра между которыми не состоялась. Игроков кроме этих двух $2k+2-2=2k$. Т.к. между этими двумя игроками игра не состоялась, а есть условие, что между любыми тремя игроками должна быть сыграна хотя бы одна игра, то с каждым из оставшихся 2k игроков мог не сыграть только какой-то один из двух выбранных, то есть с участием этих двух выбранных игроков было не сыграно не более $2k + \underbrace{1}_{\text{игра между двумя выбранными}}$ игр.

Тогда среди оставшихся 2k не сыграно не более k^2 игр по предположению индукции. Тогда всего несыгранных игр между этими 2k+2 игроками было более $k^2+2k+1 = (k+1)^2$. Тогда утверждение индукции доказано для k+1.
Подставив k=8 получим 2k=16 игроков, а по доказанному у них могло быть не сыграно не более $8^2=64$ игр.
~~Проведем~~
Всего между 16 игроками может быть сыграно $\frac{16\cdot 15}{2}=120$ игр. Тогда по доказанному сыграно не менее

1.

$120-64=56$ игр.

56 реализуется, т.к. если взять полный граф игр и выбросить из него 64 ребра так, чтобы не выкидывать три игры, являющиеся ребрами какого-то цикла из 3, то условие останется выполненым.

Ответ: 56

Задача 6

Т.к. шары касаются друг друга и всех трех конусов, то они лежат „между" конусами.

Впишем в пространство „между" конусами еще один конус. Построить этот конус можно так: рассмотрим п-ть, касающуюся всех трех конусов в их основаниях. Рассмотрим треугольник, образованный точкой касания каждого из трех конусов этой п-ти. Описанная окружность этого конуса будет основанием нового четвертого конуса, а вершина трех конусов также вершиной четвертого конуса.

~~Найдем угол вершины вписанного конуса.~~

Т.к. четвертый конус касается трех старых, а два шара тоже касаются старых конусов, то эти два шара вписаны в новый конус. Тогда задача сводится к нахождению угла при вершине этого конуса и решению планиметрической задачи в осевом сечении нового конуса.

~~Найдем угол при вершине четвертого конуса как модуль удвоенной разности углов~~

Найдем угол между высотой и ребром правильной треугольной пирамиды с вершинами в центрах оснований трех изначальных конусов и четвертой вершиной, являющейся вершиной конусов.

Высота этой пирамиды ~~совпадает~~ лежит на той же прямой, что и ось чого конуса. Сторона основания — линия центров между основаниями двух изначальных конусов, т.е. удвоенный радиус изначального конуса — $2\sqrt{3}$.

Тогда угол между гранью и высотой такого тетраэдра можно найти в п-ти проходящей через высоту ее ребро этого тетраэдра.