выход 16-19 — приход 16.23

...ГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

1 791 83

1	2	3	4	5	6	сумма
4	0,5	4	0,5	3,5	4	16,5

...ННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Нижний Новгород

Дата 22.03.2019

* *

10–11 класс. Седьмой вариант

1. Имеется один черный ферзь и n белых. При каком наибольшем n эти фигуры можно расставить на шахматной доске так, чтобы белые ферзи не били друг друга? Ферзь не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Числа x, y, z — углы треугольника. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{\sin x \cdot \sin y \cdot \sin z}{\sin x + \sin y + \sin z}.$$

3. Дан остроугольный треугольник ABC. В него вписан прямоугольник $KLMN$ так, что точки M и N лежат соответственно на сторонах AB и AC, а точки K и L — на стороне BC. Пусть AD — медиана треугольника ABC, E — середина его высоты, опущенной из вершины A, O — точка пересечения диагоналей прямоугольника. Найдите угол DOE.

4. Даны натуральные числа x и y. В восьмеричной системе они $4n$-значные, причем в записи x цифры повторяются через одну, а в записи y — через три. Оказалось, что восьмеричная запись $x \cdot y$ состоит из последовательных блоков по 4 одинаковых цифры. При каких n это возможно?

5. В однокруговом турнире по настольному теннису участвовало n теннисистов с различными рейтингами ($n > 4$). Во всех партиях, кроме двух, победил участник с более высоким рейтингом, но теннисист с самым маленьким рейтингом выиграл у теннисиста с самым большим рейтингом, а теннисист с предпоследним рейтингом выиграл у теннисиста со вторым рейтингом. Сколькими способами можно расставить спортсменов в ряд так, что каждый (кроме самого правого) выиграл у своего соседа справа?

6. На столе лежат три конуса с общей вершиной, касаясь друг друга внешним образом. Оси симметрии первых двух конусов взаимно перпендикулярны. Два шара вписаны в третий конус и касаются друг друга внешним образом. Найдите максимальное отношение радиусов большего и меньшего шаров.

2 множества, причём левое не может состоять только из $n-1$
$2^{n-3}-1$ возможности.
Последний случай, в конце не 1 и не 2, и 2 стоит перед $n-1$. $(\ldots 2, n-1 \ldots 1, n \ldots)$ или $(\ldots 1, n \ldots 2, n-1 \ldots)$
число от 3 до $n-2$ надо разбить на 3 подмножества, ограничений нет. $3^{n-4} \cdot 2$ возможности.
Ответ: $2^{n-4}+1+(2^{n-3}-1)\cdot 2+3^{n-4}\cdot 2 = 2\cdot 3^{n-4}+5\cdot 2^{n-4}-1$

N4

$x = abab \ldots abab \qquad y = cdef \ldots cdef$
Пусть $ab = 22 \qquad cdef = 4000$, тогда $n=1$:
$x \cdot y = 1110000$
$n=2$: $x \cdot y = 1111222211110000$
$n=3$: $x \cdot y = 1111\,2222\,3333\,2222\,1111\,0000$ и т.д.

$n=7$: $x \cdot y = 1111\,2222\,3333\,4444\,5555\,666\,7777\,6666\,5555\,4444$
$3333\,2222\,1111\,0000$

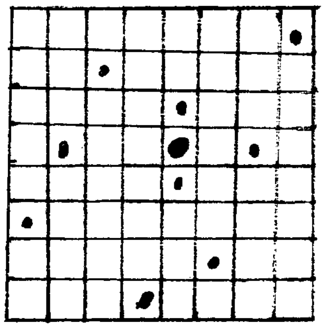
$x = \underbrace{1010\ldots101}_{4n-1} \cdot 22 \qquad y = \underbrace{100010001\ldots10001}_{4n-3} \cdot 4000$

Т.к. в восьмеричной системе счисления нет цифры 8, то произойдет искажение записи при $n=8$.
$n=8$: $x \cdot y = 10102020303040405050606070710100707060605050404030302020101 \cdot ab \cdot cdef$. Это число невозможно привести к желаемому виду. То же самое произойдет при $n > 8$.

Ответ: $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

№1 В каждой строке должно быть не более 1 белого ферзя кроме, одной, в которой находится чёрный ферзь. (В этой строке может быть 2 белых ферзя). => не может быть более 9 белых ферзей.

(шахматы 8x8)



При такой раскладе ни один белый ферзь не бьёт другие. Наибольшее $n=9$.

Ответ: 9 ✓

$$A=\frac{\sin x\cdot\sin y\cdot\sin z}{\sin x+\sin y+\sin z}$$

№2 В этом номере так же потребуется оценка и пример.

Пример: Пусть все $<=60°$, тогда получается 0,25.

докажем, что больше быть не может.

Перевернем искомое выражение почленно, далее поделим 3 на то, что получим, - получится утроенное искомое выражение. Перед нами среднее гармоническое $\sin x\cdot\sin y$; $\sin x\cdot\sin z$; $\sin y\cdot\sin z$. Используем неравенство о средней гармонической и геометрической:

$$\frac{3}{\frac{1}{\sin x\sin y}+\frac{1}{\sin x\cdot\sin z}+\frac{1}{\sin y\cdot\sin z}}\le\sqrt[3]{(\sin x\cdot\sin y\cdot\sin z)}^2$$

, далее докажем, что правая часть не больше 0,75. Для этого найдем $\max \sin x\cdot\sin y\cdot\sin z$. Используем производные. $\sin z=\sin(x+y)$

Ищем частную производную от нашего выражения по x.

$$\frac{\partial}{\partial x}:\ \sin y(\cos x\cdot\sin(x+y)+\cos(x+y)\sin x)=\sin y\cdot\sin(2x+y)$$

max при $2x+y=180°$ с производной по y аналогично

$\Downarrow$

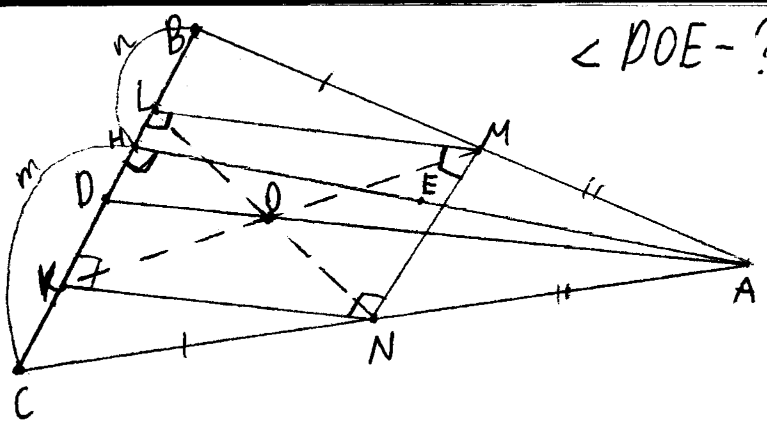
$$2x+y=x+2y=180°$$

$$x=y=60°$$

?

Ответ: 60°

Это не ответ



$\angle DOE$ - ?   H - основание высоты из A   №3

$\frac{CH}{HB}=\frac{m}{n}$ $k=\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$

Докажем, что O лежит на DE (где именно, зависит от k).

для этого докажем, что $\overline{DO}$ и $\overline{DE}$ - коллинеарны.

обозначим $\overline{BC}-\bar{a}$; $\overline{HA}-\bar{h}$.   • $\overline{DK}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{k+1}\cdot\frac{m}{m+n}\right)\cdot\bar{a}$

• $\overline{DM}=\left(\frac{1}{k+1}\cdot\frac{n}{m+n}-\frac{1}{2}\right)\bar{a}+\frac{1}{k+1}\bar{h}$

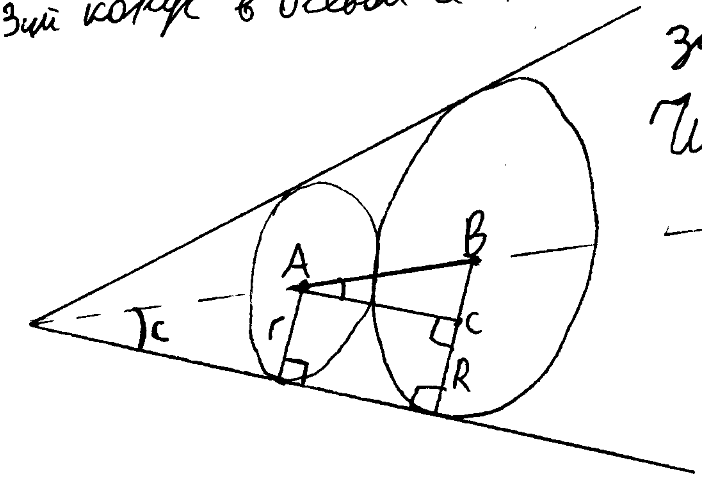
$\overline{DO}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k+1}\left(\frac{n-m}{m+n}\bar{a}+\bar{h}\right)$ • $\overline{DE}=\left(-\frac{1}{2}+\frac{n}{m+n}\right)\bar{a}+\frac{\bar{h}}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{n-m}{m+n}\bar{a}+\bar{h}\right)$

• $\overline{DO}=\frac{1}{k+1}\overline{DE}$ => D, O, E - лежат на 1 прямой, причём O между D и E. Ответ: 180°

№5

Пронумеруем их согласно рейтингу: 1-слабейший; n-сильнейший.
• Если 1 - самый правый (...1), то n становится самым левым - он сильнейший (n...1). Предположим перед 1 стоит 2, тогда перед ним 3 и т.д. (n, n-1 ... 3, 2, 1).
Если перед 1 не 2, тогда 2 стоит перед n-1 (n...2, n-1...1), причём на месте обоих многоточий числа стоят по возрастанию, значит надо разбить все числа от 3 до n-2 на 2 множества. Получим ещё 2^{n-4} способа.
Если в конце стоит не 1, тогда 1 стоит перед n (...1, n...)
Рассмотрим, во-первых, вариант, когда в конце 2 (...1, n..., 2)
Числа от 3 до n-1 опять разбиваем на 2 подмножества -> -2^{n-3}, кроме (..., 1, n, n-1, 2) => $2^{n-3}-1$ вариант.
Рассмотрим, во-вторых, вариант, когда в конце не 1 и не 2, тогда 2 перед 1 или перед n-1. Рассмотрим 1ый вариант (..., 2, 1, n...) и вновь числа от 3 до n-1 разбиваются на

3-й конус в осевом сечении



Задача №6

Чистовик.

Пусть углы между осями цилиндров и образующими — a, b, c соответственно. Очевидно, что искомое отношение зависит только от c, причём max оно будет при max c.

Докажем, что формально и выведем формулу пересчёта.

$$\sin c = \frac{BC}{AB} = \frac{R-r}{R+r} = \left(\frac{\frac{R}{r}-1}{\frac{R}{r}+1}\right) \qquad \frac{R}{r} = \frac{1+\sin c}{1-\sin c}.$$

С ростом $\sin c$, выражение $\frac{R}{r}$ растёт. Также с ростом $\operatorname{tg} c$, синус тоже растёт. Переходим к конусам.

Рассмотрим плоскость проходящую через оси первых 2 конусов. Угол между осями $= 90^\circ$, значит в этом сечении мы увидим 2 смежных угла. Введём систему координат, начало — вершина конусов, ось X — вдоль образующей первого конуса, которой он касается плоскости. По той же оси X (только в обратном направлении) второй конус касается плоскости. Пусть плоскость касания — XY, а ось Z — находится в плоскости осей.

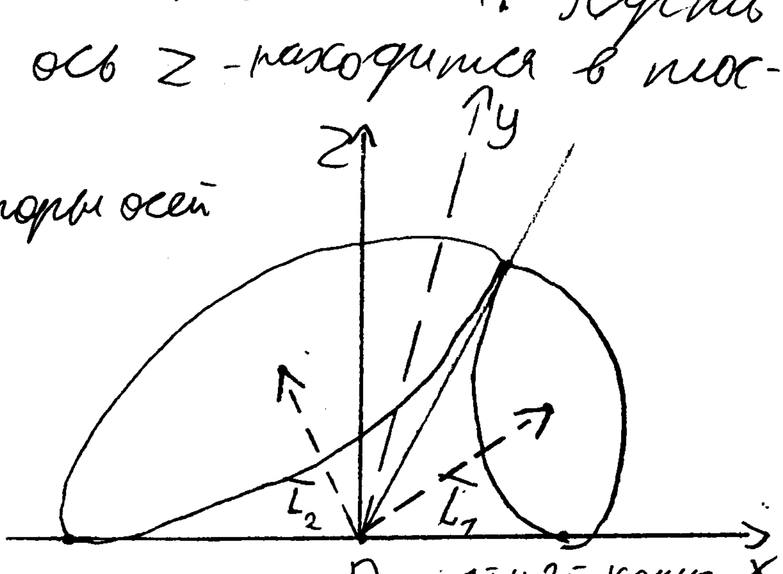
Пусть $\overline{L_1}; \overline{L_2}; \overline{L_3}$ — направ. векторы осей цилиндров

$\overline{L_1} = (\cos a, 0, \sin a)$

$\overline{L_2} = (-\sin a, 0, \cos a)$

и пусть

$\overline{L_3} = (x, y, z)$



1й и 2й конусы в осевом сечении

Условие касания 3его конуса плоскости xy такого — $\bar{l}_3$ образует $\angle C$ с плоскостью xz.

Условия касания 3его цилиндра остальных: $\angle$ между $\bar{l}_3$ и $\bar{l}_1 = a + C$, между $\bar{l}_3$ и $\bar{l}_2 = b + C$, где $= 90^\circ - a + C$

Запишем это через скалярные произведения:

$\bar{l}_3 \cdot (0,0,1) = \sin C$

M-27-2J

$\bar{l}_3 \cdot \bar{l}_1 = \cos(a+C)$

$\bar{l}_3 \cdot l_2 = \cos(b+C) = \sin(a-C)$ Таким образом:

$z = \sin C$

$\cos(a+C) = x\cos a + z\sin a$ $\sin(a-C) = -x\sin a + z\cos a$

Домножим последнее равенство на $\cos a$, а предыдущее на $\sin a$ и сложим их. $\sin a \cdot \cos(a+C) + \cos a \cdot \sin(a-C) = z$

Используя формулы cos суммы и sin разности преобразуем левую часть

$\sin a \cos(a+C) + \cos a \cdot \sin a(a-C) = z$

$\sin a \cos a \cos C - \sin^2 a \sin C + \cos a \sin a \cos C - \cos^2 a \sin C = \cos C \sin 2a - \sin C$

вспомнив, что $z = \sin C$ получим: $\cos C \sin 2a = 2\sin C$

$$tg\, C = \frac{\sin 2a}{2}$$

max правой части $= 0{,}5$ и достигается при $a = 45^\circ$, то есть когда первые 2 цилиндра одинаковые.

max C, определяется условием $tg\, C = 0{,}5$, откуда $ctg\, C = 2$ $\frac{1}{\sin^2 C} = 5$ и $\sin C = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$$\frac{R}{r} = \frac{1+\sin C}{1-\sin C} = \frac{1+\frac{1}{\sqrt{5}}}{1-\frac{1}{\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} \qquad tg\, C = \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{\sin^2 C} = 5$$

$2a = 90^\circ$ $\frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ Ответ: $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ V