Для наименьшего значения:

Очевидно, что наименьшее значение должно быть отрицательным.

Тогда либо 1 из множителей <0, либо 3 множителя <0.

При возведении в квадрат во втором выражении это не будет иметь значения (или 3 мн-ля <0), так что пусть 1 множитель <0 и для определенности это a.

Для наименьшего значения abcd $a=-1$.

Тогда $b+c+d=1$

$b^2+c^2+d^2=11$

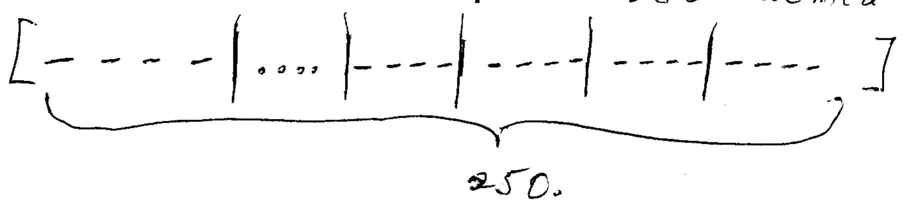
Ответ: макс. значения = 9.

№3.

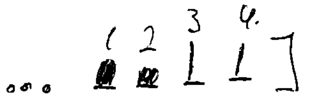
Рассмотрим самый неудачный расклад для Тома.

Введём обозначения: [- начало,] - конец, ‾ - одна доска, ● - красный цвет, | - синий цвет, | - разделение частей.

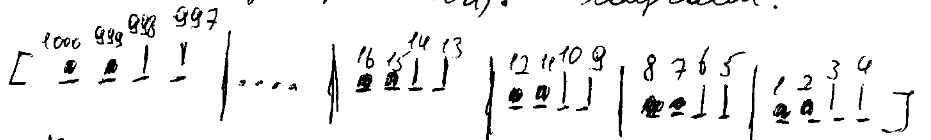
Разделим весь забор на 250 частей по 4 доски:



Рассмотрим начало игры и последнюю часть



Тому стоит покрасить 4-ую с конца доску в любой цвет, для определенности в красный. Проследим ход действий, максимально выгодный обоим игрокам (ходы пронумерованы). Получаем:



Всего пар получилось 499 пар.

Ответ: 499.

РГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

9801

2

53

1	2	3	4	5	6	сумма

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (8–9 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Москва

Дата 10.03.2019

* *

8–9 класс. Второй вариант

1. Из нескольких одинаковых белых кубиков Петя сложил большой куб и покрасил его грани в черный цвет. Оказалось, что число кубиков с одной черной гранью равно числу полностью белых кубиков. Сколько маленьких кубиков ровно с двумя черными гранями?

2. Найдите все такие квадратные трехчлены ax^2+bx+c с целыми коэффициентами, графики которых проходят через точки (a,b), (b,c) и (c,a) (среди этих точек могут быть совпадающие).

3. Том Сойер и Гекльберри Финн играют в игру, заключающуюся в покраске забора, состоящего из 1000 неокрашенных дощечек, в синий и красный цвета. Начинает Том, ходы делаются по очереди. За один ход игрок выбирает одну из неокрашенных дощечек и цвет, а затем красит эту дощечку в выбранный цвет. Игра заканчивается, когда будут покрашены все дощечки. Том хочет, чтобы по окончании игры было как можно больше пар соседних разноцветных дощечек, а Гек хочет, чтобы было как можно меньше пар соседних разноцветных дощечек. Какое максимальное число таких пар Том может обеспечить вне зависимости от игры Гека?

4. Вещественные числа a, b, c и d удовлетворяют соотношениям $a+b+c+d=0$ и $a^2+b^2+c^2+d^2=12$. Найдите наименьшее и наибольшее значения произведения $abcd$.

5. Дан неравнобедренный остроугольный треугольник ABC. На лучах AB и AC выбраны соответственно такие точки K и L, что четырехугольник $KBCL$ вписанный. Точка H — основание высоты, опущенной из вершины A на сторону BC. Докажите, что если $KH=LH$, то H — центр описанной окружности треугольника AKL.

6. Найдите все пары простых чисел p и q, для которых p^2+q^3 является точным кубом.

№2.

Уравнением графика будет являться выражение $y = ax^2+bx+c$.

Подставим вместо x и y координаты соответствующих точек.

Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} b = a^3+ab+c \\ c = ab^2+b^2+c \\ a = ac^2+bc+c \end{cases} \qquad \begin{cases} b = a^3+ab+c \\ \cancel{c}\ ab^2+b^2=0 \\ a = ac^2+bc+c \end{cases}$$

Из второго ур-ния.

$c = ab^2+b^2+\cancel{c}$

$b^2(a+1)=0$

$b^2=0$ или $a+1=0$

$b=0$ $\quad a=-1.$

При $b=0$ выражение перестаёт быть квадратным трёхчленом $\Rightarrow b=0$ не подходит. $\Rightarrow$

$-\cancel{a^2}$

$\Rightarrow$ Тогда получаем:

$$\begin{cases} a=-1 \\ b=-1-b+c \\ -1=-c^2+bc+c \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=-1 \\ b=\frac{c-1}{2} \\ -c^2+\frac{c(c-1)}{2}+c+1=0 \mid \cdot 2 \end{cases}$$

$-2c^2+c^2-c+2c+2=0$

$-c^2+c+2=0$

$D = b^2-4ac = 1+8=9>0$, 2 корня.

$c_{1;2} = \frac{-1\pm 3}{-2} = -1;\ 2.$

$\cancel{b_{1;2}}$ $b_1 = \frac{-1-1}{2} = -1$

$b_2 = \frac{2-1}{2} = 0,5.$

Ответ: $-x^2-x-1$; $-x^2+0,5x+2$.

Коэффициенты — целые!

№1.

Пусть изначально было m белых кубиков. Тогда Петя составил куб $m\times m\times m$. Всего в таком кубе m^3 кубиков. При этом после по-краски:

Полностью белых $(m-2)^3$ кубиков.

С 1 чёрной гранью $6(m-2)^2$ кубиков (все кубики, имеющие грани на 2 гранях большого куба будут иметь 2 чёрные грани; на 1 грани таких „не угловых" кубиков $(m-2)^2$, а граней всего 6).

С 3 чёрными гранями 4 кубика (в вершинах куба).

А все остальные кубики с 2 чёрными гранями.

По условию, $(m-2)^3 = 6(m-2)^2$ (одинаковое кол-во полностью белых кубиков и кубиков с 1 чёрной гранью.)

$6 = m-2$

$m=8.$

Таким образом кубиков с 2 чёрными гранями:

$m^3-(m-2)^3-6(m-2)^2-4 = 8^3-6^3-6\cdot 6^2-4 = 512-216-216-4 = 76.$

Ответ: 76. ?

№4.

Найдём наибольшее значение $abcd$.

~~Пр~~ Для выполнения первого условия пусть $a=-b$, $c=-d$. ?

Подставим во второе выражение.

$\cancel{a^2\ b=-a}$ $(-b)^2+b^2+(-d)^2+d^2=12$

$b^2+d^2=6.$

Для достижения наибольшего произв. bd пусть $b=d=\sqrt{3}$.

Тогда $a=-\sqrt{3}$ $\quad c=-\sqrt{3}$ и $abcd = \sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot(-\sqrt{3})\cdot(-\sqrt{3}) = 9.$