2

1

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

1	2	3	4	5	6	сумма
1	4	4		0	0,5	13,5

4144

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (8–9 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада САНКТ-ПЕТЕРБУРГ

Дата 24 февраля 2019 г.

* *

8–9 класс. Первый вариант

1. Маша на свой день рождения принесла в школу конфеты, оставила несколько конфет себе, а остальные раздала шестерым своим подружкам. Оказалось, что у всех девочек разное число конфет и количество конфет у любых четырех девочек больше, чем у трех оставшихся. Какое наименьшее количество конфет Маша могла оставить себе?

2. При каких a квадратные трехчлены x^2+ax-2 и $2x^2-3x+2a$ имеют общий корень?

3. На столе лежит 2019 камней. Петя и Вася играют в игру по следующим правилам. Ходят по очереди, начинает Петя. За один ход можно взять со стола 1 или 2 камня, но один и тот же игрок два раза подряд не может брать 2 камня. Проигрывает не имеющий хода. Кто из игроков сможет обеспечить себе победу вне зависимости от игры противника?

4. Для любых положительных чисел a, b и c докажите неравенство

$$\frac{a}{2a^2+b^2+c^2}+\frac{b}{a^2+2b^2+c^2}+\frac{c}{a^2+b^2+2c^2}\leqslant\frac{9}{4(a+b+c)}.$$

5. Внутри треугольника ABC выбрана такая точка D, что $\angle ABD=\angle ACD$ и $\angle ADB=90°$. Точки M и N середины сторон AB и BC соответственно. Найдите угол $\angle DNM$.

6. Найдите все пары простых чисел p и q, для которых p^2+pq+q^2 является точным квадратом.

Задача 1. Расположим девочек в порядке возрастания их количества конфет. Пусть x_i – кол-во конфет у i-ой девочки.

Поскольку у всех девочек разное число конфет, то разность между количеством конфет у пятой и второй ~~четвертой~~ девочкой не меньше трёх.

Аналогично: разность между количеством конфет у шестой и третьей, у седьмой и четвёртой, тоже не меньше 3.

Значит, число конфет у 5, 6, 7 девочек вместе больше чем у 2, 3, 4, хотя бы 9. Т.е. $x_5+x_6+x_7 \geq x_2+x_3+x_4+9$.

По условию, у каждой четверки больше конфет, чем у оставшейся тройки. Значит, у 1, 2, 3, 4 девочек больше конфет, чем у 5, 6, 7.

Т.о. $\underline{x_1+x_2+x_3+x_4} > x_5+x_6+x_7 \geq \underline{x_2+x_3+x_4+9}$.

Значит, $x_1 \geq 10$. Т.о. у любой девочки число конфет не меньше 10. (в т.ч. Маши)

Причём, 10 – может быть:

10 11 12 13 14 15 16 $\quad \Sigma = 91$.

у Маши

У любых трёх девочек число конфет не больше 45 (меньше половины), т.е. у оставшихся больше, чем у них.

<u>Ответ: 10</u>

Задача 2. Обозначим, $f(x) = x^2+ax-2$, $g(x) = 2x^2-3x+2a$.

Предположим, $f(x)$ и $g(x)$ имеют общий корень. Значит, это число является и корнем $g(x)-f(x) = x^2-(a+3)x+2(a+1) =$
$=(x-(a+1))\cdot(x-2)$.

(очевидное разложение по Т. Виета)

Значит, если $f(x)$ и $g(x)$ имеют общий корень, то он равен 2 или $a+1$.

Определим, при каких a 2 является общим корнем $f(x)$ и $g(x)$:

$f(2) = g(2) = 4+2a-2 = 2a+2$.

$\begin{cases} f(2)=0 \\ g(2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \underline{\underline{a=-1}}$

Определим, при каких a $(a+1)$ является общим корнем:

$f(a+1) = g(a+1) = a^2+2a+1+a^2+a-2 = 2a^2+3a-1$

$\begin{cases} f(a+1)=0, \\ g(a+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \underline{\underline{a = \frac{-3\pm\sqrt{17}}{4}}}$.

Ответ: $\left\{\frac{-3-\sqrt{17}}{4}; -1; \frac{-3+\sqrt{17}}{4}\right\}$

Задача №3. Ответ: Петя.

Первым ходом Петя должен взять один камень. После этого, если Вася возьмёт один камень, то Петя – два и наоборот. Значит, после трёх ходов останется 2015 камней и <u>право хода у Васи</u>.

Теперь предложу алгоритм, пользуясь которым, ~~он~~ Петя сможет после каждых двух пар ходов (двух его и двух Васиных) уменьшать количество камней на столе ровно на 5. (если кол-во камней на столе не меньше 5).

	ход Васи	ход Пети
I сл.	1	1
	1	2
II сл.	1	1
	2	1
III сл.	2	1
	1	1

~~Если Вася взял 1, то Петя возьмёт тоже 1 камень~~

~~Если Вася (первым ходом)~~

Вне зависимости от первого хода Васи, Петя сначала возьмёт 1 камень. Если первый и второй ход Васи – 1, то вторым своим ходом Петя возьмёт 2 камня, в остальных – 1.

При этом оба раза взять 2 камня Вася не имеет права.

Также необходимо заметить, что играть так Петя сможет всегда, т.е. не возникнет ситуации, когда ему пришлось бы два раза подряд взять 2 камня.

Значит, пользуясь этим алгоритмом, Петя сможет за $\frac{2015}{5}\cdot 2 = 86$ своих ходов не оставить на столе ни одного камня, т.е. Вася не сможет сделать ход!

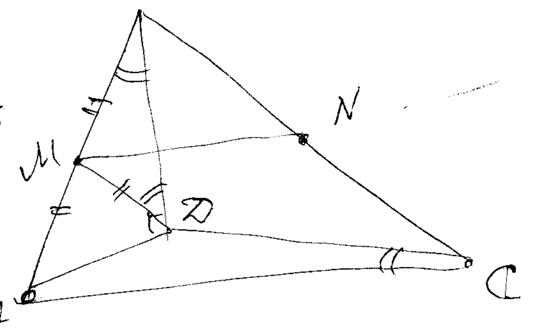
Задача №6. Ответ: $p=5, q=3$ и $p=3, q=5$.

~~Решение. Докажу, что одно из чисел p, q ⋮ 3. Предположим, что это не так.~~

~~Рассмотрим какой остаток при делении на 3 даёт число p^2+pq+q^2. $p^2 \underset{3}{\equiv} 1$, $q^2 \underset{3}{\equiv} 1$ (т.к. $p, q \not\vdots\, 3$)~~

~~Т.о. $p^2+pq+q^2 \underset{3}{\equiv} pq+2$.~~

Задача №5. Заметим, что $MN \parallel AC$, т.к. MN – средняя линия $\triangle ABC$.



Проведём DM. Это медиана прямоугольного тр-ка ABD, значит $|BM| = |MA| = |MD|$. Т.о. $\widehat{BDM} = \widehat{MBD}$.