⑥ p^2+pq+q^2

Пример: $p=3, q=5$

$9+15+25=49=7^2$

$p^2+pq+q^2=(p+q)^2-pq=x^2$

$(p+q)^2-x^2=pq$

$(p+q-x)(p+q+x)=\underbrace{pq}$

произведение простых чисел: $1, p, q, p\cdot q$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} p+q-x=1 \;;\; p+q-\sqrt{p^2+pq+q^2}=1 \\ p+q+x=p\cdot q \;;\; p+q+\sqrt{p^2+pq+q^2}=p\cdot q \end{cases} \Rightarrow p=3, q=5 \\ \begin{cases} p+q-x=p \;;\; q-x=0 \;;\; q=x \text{ -?!} \\ p+q+x=q \;;\; p+x=0 \;;\; p=-x \text{ -?!} \end{cases} \text{невозможно} \\ \begin{cases} p+q+x=1 \;;\; p+q+\sqrt{p^2+pq+q^2}=1 \text{, } p \text{ и } q \text{ - простые числа, в } \Sigma \neq 1 \text{?!} \\ p+q-x=p\cdot q \;;\; p+q-\sqrt{p^2+pq+q^2}=p\cdot q \end{cases} \text{невозможно} \\ \begin{cases} p+q+x=p \;;\; q+x=0 \;;\; q=-x \text{ -?! невозможно} \\ p+q-x=q \;;\; p-x=0 \;;\; p=x \end{cases} \end{array}\right.$

Ответ: $p=3, q=5$.

③ 2019 - нечетное число; $-1 \to$ четное

$-2 \to$ нечетное

0 - четное число

Т.о. Пете необходимо сделать так, чтобы после его хода всегда оставалось четное число камней. Только в этом случае Петя в независимости от ходов Васи сможет выиграть. Например возьмем 19 камней:

$19 \underbrace{-1}_{13} \underbrace{-2-2}_{14} -1 \underbrace{-1}_{12} -2 \underbrace{-2}_{3} -1 \underbrace{-1}_{6} -2 \underbrace{-2}_{2} -1 \underbrace{-1}_{0} \Rightarrow$ Петя выиграл.

(Вася может взять только 1, т.к. до этого взял 2 камня)

Ответ: Петя.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

1	2	3	4	5	6	сумма
4	4	1		0	0,5	[illegible]

22

1 48

2899

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (8–9 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Санкт-Петербург

Дата 24.02.2019

* *

8–9 класс. Первый вариант

1. Маша на свой день рождения принесла в школу конфеты, оставила несколько конфет себе, а остальные раздала шестерым своим подружкам. Оказалось, что у всех девочек разное число конфет и количество конфет у любых четырех девочек больше, чем у трех оставшихся. Какое наименьшее количество конфет Маша могла оставить себе?

2. При каких a квадратные трехчлены x^2+ax-2 и $2x^2-3x+2a$ имеют общий корень?

3. На столе лежит 2019 камней. Петя и Вася играют в игру по следующим правилам. Ходят по очереди, начинает Петя. За один ход можно взять со стола 1 или 2 камня, но один и тот же игрок два раза подряд не может брать 2 камня. Проигрывает не имеющий хода. Кто из игроков сможет обеспечить себе победу вне зависимости от игры противника?

4. Для любых положительных чисел a, b и c докажите неравенство

$$\frac{a}{2a^2+b^2+c^2}+\frac{b}{a^2+2b^2+c^2}+\frac{c}{a^2+b^2+2c^2} \leqslant \frac{9}{4(a+b+c)}.$$

5. Внутри треугольника ABC выбрана такая точка D, что $\angle ABD=\angle ACD$ и $\angle ADB=90°$. Точки M и N середины сторон AB и BC соответственно. Найдите угол $\angle DNM$.

6. Найдите все пары простых чисел p и q, для которых p^2+pq+q^2 является точным квадратом.

№2. I. x^2+ax-2 II. $2x^2-3x+2a$

I. $D=a^2+4\cdot 2\geq 0$ - и.

II. $D=9-4\cdot 2\cdot 2a=9-16a\geq 0$

$a\leq \frac{9}{16}$

по th Виета:

I. $x_1+x_2=-a$ II. $x_1'+x_2'=\frac{3}{2}$

$x_1\cdot x_2=-2$ $x_1'\cdot x_2'=a$

$\exists$ $x_1=x_1'$ (т.к. по условию надо найти a при котором есть 1 общий корень)

$$\begin{cases} x_1+x_2=-a & (1)\\ x_1\cdot x_2=-2 & (2)\\ x_1+x_2'=\frac{3}{2} & (3)\\ x_1\cdot x_2'=a & (4)\end{cases}$$

(3) − (1) $x_2'-x_2=\frac{3}{2}+a$; $\begin{cases} x_2'=\frac{3}{2}+a+x_2 & (*)\\ x_2'=-\frac{1}{2}a\cdot x_2 & (**)\end{cases}$

(4) : (2) $\frac{x_2'}{x_2}=-\frac{1}{2}a$;

$\frac{3}{2}+a+x_2=-\frac{1}{2}a x_2$

$\frac{1}{2}a x_2+x_2+\frac{3}{2}+a=0$

$x_2\left(\frac{1}{2}a+1\right)+\frac{3}{2}+a=0$

$x_2=\frac{-\left(\frac{3}{2}+a\right)}{\frac{1}{2}a+1}$

$$\begin{cases} x_1=\frac{3/2+a}{1/2a+1}-a=\frac{-a(1/2a+1)+3/2+a}{1/2a+1}\\ x_1=-2\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}a+1\right)}{\frac{3}{2}+a}=\frac{a+2}{3/2+a}\end{cases}$$

$\Downarrow$

$\frac{-a\left(\frac{1}{2}a+1\right)+\frac{3}{2}+a}{1/2a+1}=\frac{a+2}{3/2+a}$; $\frac{-1/2a^2+3/2}{1/2a+1}=\frac{a+2}{3/2+a}$

$\frac{3-a^2}{a+2}=\frac{2a+4}{3+2a}$

$-3a^2+9-2a^3+6a=2a^2+3a+8$

$2a^3+5a^2+2a-1=0$

$2a^3+2a^2+3a^2+3a-a-1=0$

$(a+1)(2a^2+3a-1)=0$

$\left[\begin{array}{l} a=-1\\ D=9+4\cdot 2\cdot 1=17;\ a=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{4}\end{array}\right.$

Ответ: $a=-1$; $a=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{4}$.

①] Маша оставила себе n конфет.

Тогда, самым крайним вариантом для условия: у $\forall$ 4 девочек было больше конфет, чем у 3 других будет случай, когда Σ 4 наименьших чисел будут > 3 наибольших (*).

Условие (*) может выполнится, если кол-во конфет будет образовывать последовательность чисел, отличающихся на 1 (в $\forall$ другой последовательности

например $\underline{4}$ $\underline{2}$ 5 6 $\underline{1}$ 8 $\underline{3}$ условие (*) точно не выполнится).

$1+2+3+4=10<5+6+8$

$\underbrace{n;\ n+1;\ n+2;\ n+3}_{4n+6}$ $\underbrace{n+4;\ n+5;\ n+6}_{3n+15}$

$4n+6=3n+15$; $\boxed{n=9}$ => если Маша оставила себе 9 конфет, а всем остальным раздала 10, 11 ... 15, то

кол-во конфет у 4 девочек $\geq$ кол-ва конфет у 3 девочек

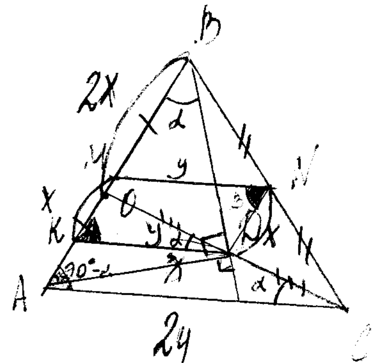
$\Downarrow$

по условию кол-во конфет у 4 дев. > кол-ва конфет у 3 дев. =>

минимальное значение $\boxed{n=10}$: $\underbrace{10,\ 11,\ 12,\ 13}_{46}$, $\underbrace{14,\ 15,\ 16}_{45}$ (крайний случай)

Ответ: 10.

⑤



1. $DK \parallel AC$ по th о ср. лин.

MN - ср. лин. => $MN=\frac{1}{2}AC$

$\exists MN=KD=y$ => $AC=2y$

$KMND$ - ▭ по опред. =>

$\angle DNM=\angle DKM=\angle CAK$ соот. при // пр.

Дано:

ΔABC

(·)D; $\angle ADB=90°$

$\angle ACD=\angle ABD$

MN - ср. лин.

$\angle DNM$ - ?

2. $DC\cap AB=$ (·)O

в ΔOBC: $DN\parallel AB$ по п. 1 и $BN=NC$ => DN - ср. лин.,

$DN=\frac{1}{2}MB$; $\exists$ $DN=x$ => $MB=2x$, $OD=DC$

3. в ΔABD: $\angle ABD=\alpha$, $\angle ADB=90°$

$\Downarrow$

$\angle DAM=90°-\alpha$; в ΔAOC: KD - ср. лин. по п. 1; $\angle ADK=\gamma$, $\angle DNM=\beta$

4. по th о вн. $\angle$ ΔAOD: $\alpha+\beta=90°+\gamma$; $\alpha+\beta=90°+\alpha-45°$

$\Downarrow$

$\beta=\angle DNM=45°$

Ответ: 45°