(65)

A0-51

'СКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

5804

1	2	3	4	5	6	сумма
4	4	0	1	4	0	13

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Владимир

Дата 16.03.2019

* *

10–11 класс. Второй вариант

1. Имеется 9 черных ладей и n белых. При каком наибольшем n их можно расставить на шахматной доске так, чтобы одноцветные ладьи не били друг друга? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Даны положительные числа x, y, z. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{xyz\,(x+y+z)}{x^4+y^4+z^4}.$$

3. Окружность ω единичного радиуса проходит через вершины B и C треугольника ABC и вторично пересекает его стороны AB и AC в точках K и L соответственно. На лучах BL и CK отмечены соответственно такие точки P и Q, что $BP = AC$ и $CQ = AB$. Найдите расстояние между центрами описанных окружностей треугольников APQ и KBC.

4. Шестнадцатиричная запись квадрата натурального числа x представляет собой два одинаковых соседних блока из n цифр. Может ли n равняться 2023?

5. В однокруговом турнире по настольному теннису участвует $2k$ спортсменов. В каждом туре все участники проводят по одному матчу. Какое наименьшее число туров надо сыграть, чтобы при любом расписании игр обязательно нашлось трое теннисистов, сыгравших друг с другом?

6. Имеется три одинаковых конуса с общей вершиной, касающихся друг друга внешним образом, а также два шара, касающихся внешним образом друг друга и всех конусов. Радиусы шаров относятся как $1:3$. Найдите угол при вершине конусов. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении).

№1

Пример на 17

			O				
		O	X	O			
	O	X	O	X	O		
O	X	O	X	O	X	O	
	O	X	O	X	O		
		O	X	O			
			O				
							O

X - обозначим черную ладью
O - обозначим белую ладью

Теперь докажем, что больше нельзя. Рассмотрим произвольный столбец, пусть в нем k черных ладей. Тогда белых ладей туда можно поставить не больше чем $k+1$ (Иначе какие-то две будут бить друг друга). Тогда всего на доске стоит не больше чем $(k_1+k_2+k_3+k_4+k_5+k_6+k_7+k_8)+8$ белых ладей, где k_i - количество черных ладей в i-ом столбце. Понятно, что $k_1+k_2+\ldots+k_8$ не больше 9. Тогда получаем оценку на $17=8+9$ (белых ладей не больше чем $8+9=17$)

№5

~~Допустим мы построили „самый плохой, ну просто ужасный случай". А именно, граф с максимальным количеством ребер без полных подграфов из 3 с пунктирными вершинами. Тогда в нем какие две вершины не выбери ~~две из них~~ в подграфе состоящем из них есть 2 ребра (вершины - это теннисистки, м/д ними есть ребро, если они сыграли партию. Если не сыграли нет ребра)~~

Иначе мы можем до

~~давайте перебирать~~ p Чистовик

Будем выписывать остатки по модулю p до цикла если они циклятся без $p-1$, то такое точно ~~один~~ p не подходит

$3: \ 2 \to 1 \to 2$

$5: \ 2 \to 4 \to 3 \to 1 \to 2$ ~~не подходит т.к.~~ подходит

$$\begin{array}{r|l} 2023 & 4 \\ 20 & \ldots \\ 23 & \\ 20 & \\ 3 & \end{array}$$

~~$7: \ 2 \to 4 \to 1 \to 2$~~

$11:$

~~значит 2~~

$2^{2023 \cdot 4} = 16^{2023} = 2^{8092}$

~~8092 mod 4 =~~

$8092 \underset{\text{mod}4}{\equiv} 4$

значит $(1+2^{8092}) \vdots 5$

$k = \frac{1+2^{8092}}{5}$

$x^2 = \left(\frac{1+2^{8092}}{5}\right)^2$

Остатки 2^a при делении на 25 в зависимости от a

$2 \to 4 \to 8 \to 16 \to 7 \to 14 \to 3 \to 6 \to 12 \to \underset{}{\overset{24}{-1}} \to$

$\to \underset{23}{-2} \to \underset{21}{-4} \to \underset{17}{-8} \to \underset{9}{-16} \to \underset{18}{-7} \to \underset{11}{-14} \to 22 \to$

$\to 19 \to 13 \to \underset{\text{цикл}}{1} | \to 2$ наш пример не работает

$11: \ 2 \to 4 \to 8 \to 5 \to -1$

также $(2^{8092}+1) \vdots 11$ и получаем $x^2 = \frac{(2^{8092}+1)^2}{121}$

$k^2x^2 = 2^{8092}+1$ $\quad (kx+1)(kx-1) = 2^{8092}$ - чего не бывает

значит и $n=2023$ - не может быть

Санкт-Петербургский государственный университет

Чистовик

№ 2

$$\frac{xyz(x+y+z)}{x^4+y^4+z^4} = \frac{x^2yz+y^2xz+z^2xy}{x^4+y^4+z^4}$$

~~Т.к. $x^4+y^4+z^4$ мажорирует над $x^2yz+y^2xz+z^2xy$~~

~~поэтому $x^4+y^4+z^4 \geq x^2yz+y^2xz+z^2xy$ и поэтому~~

~~Докажем~~ Покажем, что $A \leq 1$

Пример на $A=1$ $x=y=z=1$

$$\frac{1\cdot(1+1+1)}{1+1+1} = 1 = A$$

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3} \Rightarrow xyz \leq \frac{(x+y+z)^3}{27}$$

$$\frac{x+y+z}{3} \leq \sqrt[4]{\frac{x^4+y^4+z^4}{3}} \Rightarrow \frac{(x+y+z)^4}{81} \leq \frac{x^4+y^4+z^4}{3}$$

Тогда

$$A \leq \frac{(x+y+z)^3(x+y+z)}{27(x^4+y^4+z^4)} = $$

$$= \frac{(x+y+z)^4}{27(x^4+y^4+z^4)} \leq \frac{(x+y+z)^4\cdot 81}{27(x+y+z)^4\cdot 3} = 1$$

Значит $A \leq 1$

№ 4

Из условие ~~[illegible]~~ число x^2 можно представить как $(16^{2023}+1)k$ при этом $k < 16^{2023}$

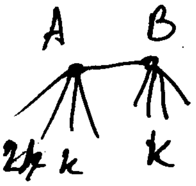
Тогда понятно, что $16^{2023}+1$ — не простое число и делится на p^{α} — простое

Чистовик

№5 Ответ: $k+1$

Сначала покажем что при $k+1$ такой игрок найдется. Пусть игроки - это вершины, ~~тогда~~ если два игрока ~~то~~ сыграли друг с другом, то соединим соответствующие им вершины ребром. Тогда схема ~~из~~ текущего ~~по~~ положения дел турнира представляет собой граф.

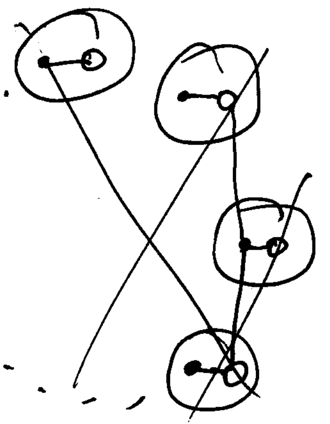
Допустим, что сыграли $k+1$ тур и нет ни одного полного подграфа с 3-мя вершинами. Тогда возьмем игроков A и B которые друг с другом сыграли.



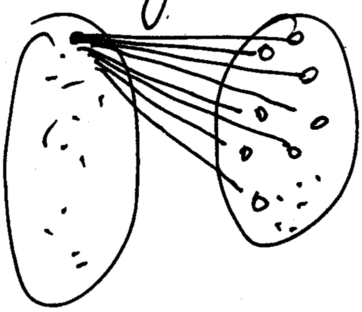
Каждый из них сыграл еще с k другими игроками при этом ~~едер~~ у них не окажется общих соперников иначе общий соперник, A и B ~~и~~ составят „полный подграф с 3-мя вершинами", сократим до ПЗ. Тогда в турнире участвуют ~~A+B~~ ~~1+1~~ A, B, соперники A, соперники B. Всего хотя бы $1+1+k+k = 2k+2$ участников, что противоречит условию о кол-ве участников, значит $k+1$ всегда хватит.

Чистовик

Теперь построим такое расписание на первые k туров, чтобы ПЗ не появилось. Ну возьмем двудольный граф. ~~Из двух на~~ Разобьем игроков на две группы так, что в каждой группе k вершин. Назовем вершины из первой группы белыми, а из второй черными. ~~Тогда~~ Пусть черные играют только с белыми, а белые только с черными. Всего они сыграют k туров



~~Тогда~~ Пусть теперь у нас найдена ПЗ. Тогда пусть есть черная вершина в ПЗ, тогда других черных вершин там нет т.к. черные с черными не играли. Значит там две белые вершины, а белые с белыми не играли. Значит ПЗ не содержит черных вершин и содержит только белые. А никакие белые друг с другом не играли значит и ПЗ нет.



Также отметим, что мы пронумеруем белых и черных от 1 до k. Пусть в первом туре черный с номером i играет с белым под номером i; Во ~~втором~~ i-ом туре черный под номером ~~второй~~ i играет с белым номер которого равен $(i-1) \bmod k$. Так в каждом туре у всех будут соп