(60)

А0-88

УРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

1

1410

1	2	3	4	5	6	сумма
4	4	–	0	4	0	12

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Симферополь

Дата 24.03.2019

* *

10–11 класс. Третий вариант

1. При каком наибольшем n на шахматной доске можно расставить n королей и n ладей так, чтобы никакая фигура не была под боем?

2. Даны числа $x, y > 0$. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{xy\,(x+y)}{\sqrt{x^6 + y^6}}.$$

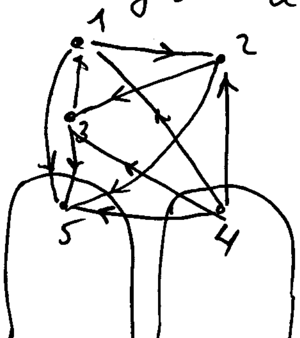
3. Дан острый угол BAD, где точка D отлична от A. На луче AB произвольным образом выбирается точка X, также отличная от A. Пусть P — точка пересечения касательных к описанной окружности треугольника ADX, проведенных в точках D и X. Найдите геометрическое место точек P.

4. Дано натуральное число x, десятичная запись которого n-значная и не содержит нулей. Числа x и x^2 в десятичной системе одинаково читаются слева направо и справа налево. Найдите все n, при которых такое x существует.

5. В однокруговом турнире по настольному теннису приняло участие 35 человек. По итогам турнира оказалось, что нет такой четверки игроков A, B, C, D, что A выиграл у B, B — у C, C — у D, а D — у A. Каково наибольшее количество троек участников, одержавших во встречах между собой ровно по одной победе? Ничьих в теннисе не бывает.

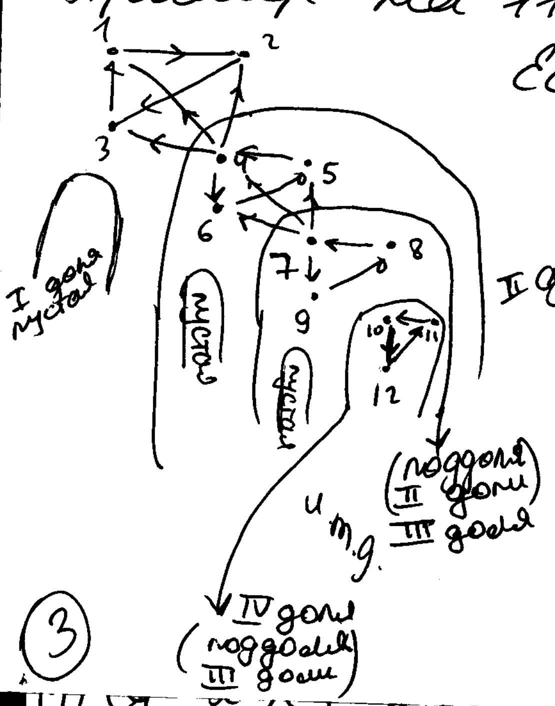
6. Четыре конуса с общей вершиной попарно касаются друг друга внешним образом. Первые два и последние два конуса имеют одинаковый угол при вершине. Найдите максимальный угол между осями симметрии первого и третьего конусов. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении).

Разделим всех оставшихся (не 1,2,3) игроков на две доли
В 1 доле игроки проигрывают 1,2,3; а во II — выигрыв.



чтобы не было особ. четв. 2354
4 выигрывает 5
Аналогично со всеми игроками в разных долях.
Все игроки в левой доле (I) проигрывают всем (~~но не между~~ между собой могут и выигрывать)

I II а все игроки во II доле (правой) выигрывают всех (между собой могут и проигрывать)
~~4 и 3 игроков отнесем к I доле, а 2 игр. ко II.~~
Ясное дело, что других троек с 1,2,3 не может образоваться и не может быть троек, ~~в кот.~~ если они все трое не из одной доли.
~~Таким образом, если есть тройка, то~~
В доле может образоваться тройка и тогда доля разделиться на две поддоли, ~~и т.д.~~ где такая же ситуация как и с 1,2,3 игроками и т.д (поддоли могут иметь свои поддоли)
Таким образом, если образовались тройки, то они отдельные (не имеют общих вершин)
Т.к. игроков 35, то троек $(35:3=11$ (ост. 2)$)$ 11
Также некоторые доли могут быть пустыми
Пример на 11:



Если между вершинами нет связи, то игроки с большим номером выигрывают у людей с меньшим номером

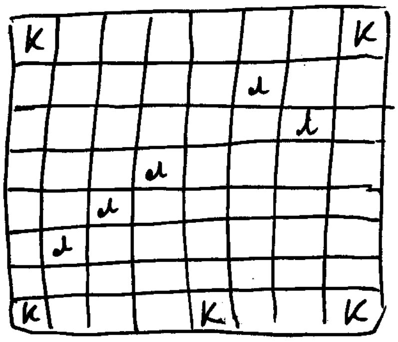
Ответ: 11

③

№1

Наибольшее n, при котором на шахматной доске можно расставить n королей и n ладей так, чтобы никакая фигура не была под боем — 5.

Пример на $n=5$:



К – король
л – ладья

Оценка: Допустим противное, что при $n>5$ такое может быть.

Мин. $n>5$ это $n=6$.

Каждая поставленная на доску ладья занимает строку и столбец, на которые нельзя поставить ~~для~~ никакую фигуру (будут под боем)

Тогда кол-во клеток, на которые нельзя поставить фигуры при $n=6$ будет $15+13+11+9+7+5=60$.

Всего клеток 64 значит, ~~в ладей~~ королей мы ~~должны расставить~~ можем поставить только на 4 оставшиеся клетки, а т.к. королей 6, мы этого не можем сделать.

Получили противоречие при $n=6$ такое невозможно

При $n>6$ кол-во клеток, на которые нельзя поставить фигуры (из-за ладей) будет увеличиваться, а кол-во оставшихся для королей клеток будет уменьшаться (<4) (а кол-во королей $n>6$)

При $n>5$ на доску нельзя поставить n корол и n ладей так, чтобы никакая фигура не была под боем.

Ответ: 5.

№2

$x,y>0$ $\quad A=\frac{xy(x+y)}{\sqrt{x^6+y^6}}=\frac{x^2y+xy^2}{\sqrt{x^6+y^6}}=\sqrt{\frac{x^4y^2+2x^3y^3+y^4x^2}{x^6+y^6}}=$

$=\sqrt{\frac{x^4y^2+y^4x^2}{x^6+y^6}+\frac{2x^3y^3}{x^6+y^6}}$

При $x,y>0$ докажем (1) $\frac{x^4y^2+y^4x^2}{x^6+y^6}\leq 1$ и (2) $\frac{2x^3y^3}{x^6+y^6}\leq 1$

Не умаляя общности пусть $y\geq x$

(1) т.к. $y\geq x$ ~~то~~ (а также $x,y>0$), то $y^2\geq x^2$; $y^4\geq x^4$

① $(y^2-x^2)(y^4-x^4)\geq 0$ верно при $y\geq x$, $x,y>0$

$y^4(y^2-x^2)-x^4(y^2-x^2)\geq 0$

$y^6-x^2y^4\geq x^4y^2-x^6$

$y^6+x^6\geq x^4y^2+x^2y^4$; $x,y>0$, $y^6+x^6>0$

$\dfrac{x^4y^2+x^2y^4}{y^6+x^6}\leq 1$ ч.т.д.

(2) $(x^3-y^3)^2\geq 0$ верно при $y\geq x$, $x,y>0$

$x^6-2x^3y^3+y^6\geq 0$

$x^6+y^6\geq 2x^3y^3$; $x,y>0$; $y^6+x^6>0$

$\dfrac{2x^3y^3}{x^6+y^6}\leq 1$ ч.т.д.

$A=\sqrt{\dfrac{x^4y^2+y^4x^2}{x^6+y^6}+\dfrac{2x^3y^3}{x^6+y^6}}\leq\sqrt{2}$

(т.к. $\dfrac{x^4y^2+y^4x^2}{x^6+y^6}\leq 1$ и $\dfrac{2x^3y^3}{x^6+y^6}\leq 1$)

Причем равенство достижимо только при $x=y$

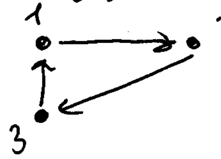
$A=\dfrac{x^2\cdot 2x}{\sqrt{2x^6}}\overset{x>0}{=}\dfrac{2x^3}{\sqrt{2}x^3}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

Максимальное зн-е $A=\sqrt{2}$

Ответ: $\sqrt{2}$

№5.

Если есть такая тройка, что во всех встречах между собой у каждого ровно по одной победе.

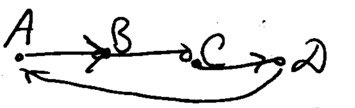


Точки – вершины.

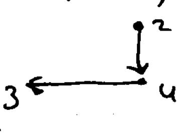
Ребра – встреча двух игроков

$x\longrightarrow y$ – x победил y в партии

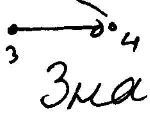
Назовем четверку особенной, если



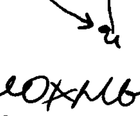
Т.к. не особенных четверок, то не может быть ситуаций (для рис)



(четверка 1243 - особенная),



(1234 - ос.),



(1423 - ос)

Значит, возможны только два случая

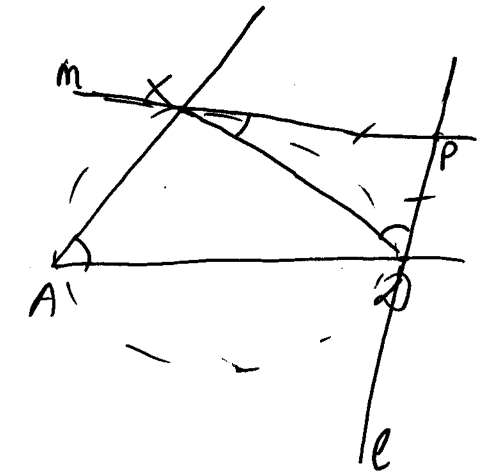
4 ~~все~~ выигрывает 1, 2, 3 или проигрывает 1, 2, 3

Любой другой (не 1, 2, 3) либо выигрывает 1, 2, 3, ~~или~~ либо или проигрывает.

~~Разделим оставшихся (не 1, 2, 3) на две доли~~

№3

Дано:
$\angle BAD$; $X \in AB$
P – т. пересеч. касат. к опис. окр. треугол ADX, проведенных в т. D и X.



Т.к. l – касат. к опис. окр. вок. $\triangle ADX$, то $\angle XDP = \angle XAD$
Т.к. m – касат. к опис. окр. вокруг $\triangle ADX$, то $\angle PXD = \angle XAD$
$\triangle PXD$ – равнобедренный $\triangle$, у которого углы при основании равны величине угла $\angle BAD$

Причем D – фиксированная точка, а X – нет.

№4.

~~$a \in N$~~, n может быть от 1 до 9.

Пример:
$n=1$ $x=1$ $x^2=1$
$n=2$ $x=11$ $x^2=121$
$n=3$ $x=111$ $x^2=12321$
$n=4$ $x=\underbrace{1111}_{4}$ $x^2=1234321$
$\vdots$
$n=9$ $x=\underbrace{11\ldots1}_{9}$ $x^2=123\ldots898\ldots1$

4