КИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Ш

149

50

1	2	3	4	5	6	сумма
4	0	4	2			10

50

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Москва

Дата 10.03.2019

* *

10–11 класс. Десятый вариант

1. Какое наибольшее количество ладей можно расставить на шахматной доске так, чтобы каждую ладью било не более двух других? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Числа x, y, z — углы некоторого треугольника, один из которых не меньше $\frac{\pi}{2}$. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \cos x + \cos y + \cos z + \cos(x-y) + \cos(y-z) + \cos(z-x).$$

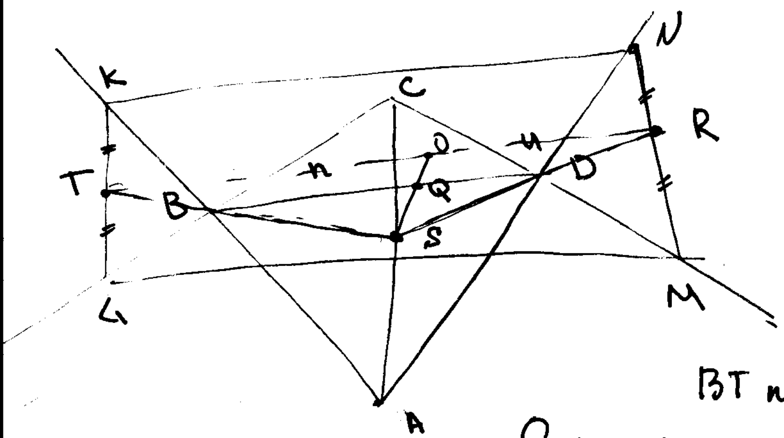
3. Дан четырехугольник $ABCD$, отличный от параллелограмма. На лучах AB, CB, CD и AD вне сторон четырехугольника $ABCD$ выбираются соответственно точки K, L, M и N так, что $KL \parallel MN \parallel AC$ и $LM \parallel KN \parallel BD$. Найдите геометрическое место точек пересечения диагоналей параллелограмма.

4. Натуральное число x в восьмеричной системе 2018-значное, и его цифры повторяются через одну. Оказалось, что восьмеричная запись x^2 содержит только цифры 3 и 4, причем в равном количестве. Найдите x^2 (в восьмеричной системе).

5. В однокруговом турнире по настольному теннису участвовало n теннисистов ($n \geqslant 3$). Будем говорить, что игрок A *круче* игрока B, если A выиграл у B или найдется такой игрок C, что A выиграл у C, а C выиграл у B. При каких n по итогам турнира могло оказаться так, что каждый игрок круче всех остальных? Ничьих в теннисе не бывает.

6. На столе лежат два конуса с общей вершиной O, касаясь друг друга внешним образом. Угол между их осями симметрии равен $\operatorname{arctg} \frac{12}{5}$. Найдите максимальный угол при вершине большего из двух конусов с вершиной O, которые лежат на столе и касаются внешним образом первых двух конусов. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении.)

№3.



① R - сер MN T - сер. KL.

$RD \cap AC = S$

$AS \parallel RN \Rightarrow \triangle SDA \sim \triangle RDN$

сл. $SA = RN \cdot \frac{SD}{DR}$

$RM \parallel CS \Rightarrow \triangle RDM \sim \triangle SDC$

сл. $CS = MR \cdot \frac{SD}{DR}$

сл. S - сер. CA.

BT перес. AC аналогично в сер. $\Rightarrow T \in BS$.

O - т. перес. диаг. если провести прямую $\ell \parallel KN$ она перес. NM и LK в сер. по св. пар-ма

сл. $O \in RT$ и $RT \parallel BD$

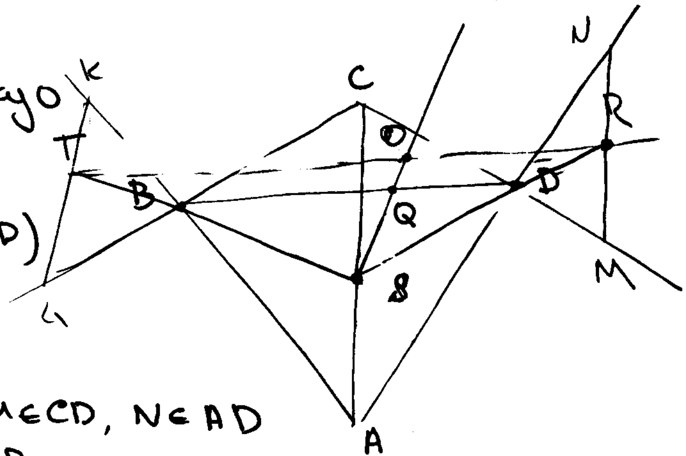
O делит RT пополам как т. перес. диаг. пар-ма

$D \in SR, B \in ST, BD \parallel TR \Rightarrow$ если SO мед. $\triangle SRT$ то и SDB (гомотетия)

Q - сер. BD сл. мы доказали что все центры получающихся построениями в задаче пар-мов лежат на луче SQ за точкой Q (M и N на продолж. сторон $\Rightarrow R$ на продолж. SD и D лежит между S и R $\Rightarrow Q$ между S и O)

② Докажем, что все точки на продолжении SQ за точку Q подходят.
(Q - сер. BD, S - сер AC)

~~O - задача~~ $Q \in OS$.



проведем $TR \parallel BD$ через точку O

$T \in SB$, $R \in SD$

SQ - мед. $\triangle BSD$ (т.к. Q - сер. BD)

$BD \parallel TR$, $R \in SD, T \in SB$

$\Rightarrow SO$ - мед. $\triangle SRT$.

пров. $MN \parallel CA$, $R \in NM$, $M \in CD$, $N \in AD$

и $KL \parallel CA$, $T \in KL$, $K \in AB$, $L \in BC$

$\triangle TBL \sim \triangle BSC$, $\triangle KBT \sim \triangle ABS$, $\triangle DSA \sim \triangle DRN$, $\triangle SDC \sim \triangle RDM$

сл. $KT = AS \cdot \frac{TB}{BS}$ $TL = CS \cdot \frac{BS}{TB}$ $NR = SA \cdot \frac{DR}{DS}$ $RM = CS \cdot \frac{DR}{DS}$

$CS = AS$, $BD \parallel TR \Rightarrow \frac{SB}{TB} = \frac{SD}{DR}$ - по теор. Фалеса

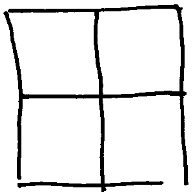
сл. $KT = TL = NR = RM$ $\Rightarrow KL = MN$, $KL \parallel MN$ - по постр.

сл. $KLMN$ - пар-м по признаку.

N1.

Докажем по индукции, что в квадрате $n \times n$ не больше $2n$ ладей.

База:



2×2

всего 4 клетки => не больше 4 ладей.

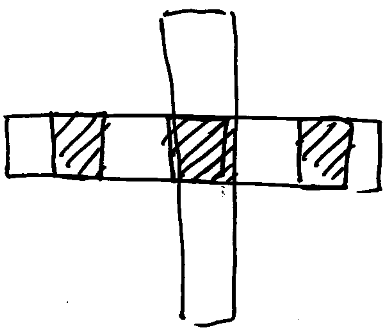
(+)

Переход:

Пусть для $k \times k$ - верно

Рассмотрим таблицу $(k+1) \times (k+1)$

пусть мы смогли раставить $> 2k+2$ ладей тогда найдутся строчка и столбец где стоит 3 ладьи.
посмотрим на такую строчку в ней хотя бы 1 ладья стоит между двумя другими в этой строчки (т.к. их хотя бы 3) эту ладью уже бьют две => с ней в одном столбце никто не стоит. => Мы нашли столбец с одной ладьёй.

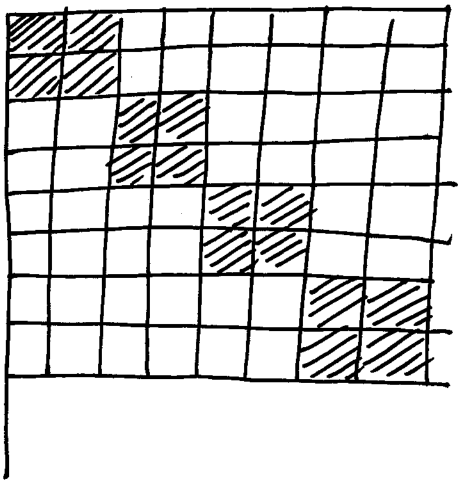


Если удалить этот столбец по условие, что каждую ладью бьёт не более 2 не утратится т.к. от удаления пустой клетки между ладьями ничего не изменится и для изначальной строчки тоже (теперь две соседки бьют друг друга вместо удаленной ладьи)

Заметим, что ~~з~~ столбик с 3 ладьями мы не удалили аналогично с помощью него найдем строчку всего с 1 ладьей и удам её

Таким образом мы удалили 2 ладьи и получили таблицу $k \times k$ с правильной расстановкой => осталось не больше $2k$ ладей по предположению индукции => в расстановке в таблице ~~#~~ $(k+1) \times (k+1)$ было не больше $2k+2$ ладей. ∎

Пример:



Ладьи стоят в закрашенных клетках в каждом столбце и в каждой строке по 2 ладьи $\Rightarrow$ любую бьют не более двух других.

√

N2.

$$A = \cos x + \cos y + \cos z + \cos(x-y) + \cos(y-z) + \cos(z-x)$$

1) Зафиксируем x (н.у.о. $x \geq \frac{\pi}{2} \Rightarrow y, z \leq \frac{\pi}{2}$)

тогда $y+z = \pi - x$ $|y-z| = t$

$$A = \cos x + 2\cos\frac{y-z}{2}\cos\frac{y+z}{2} + \cos t + 2\cos\frac{z-y}{2}\cos\frac{2x-y-z}{2} =$$

$$= \cos x + 2\cos\frac{t}{2}\cos\frac{\pi-x}{2} + \cos t + 2\cos\frac{t}{2}\cos\frac{3x-\pi}{2}$$

Заметим что ~~на промежутке~~ $\cos t$ принимает свой максимум при ~~...~~ $t=0$, также $\cos\frac{t}{2}$, принимает свой максимум при $t=0$, $\cos\frac{\pi-x}{2}$ и $\cos\frac{3x-\pi}{2}$ ≥ 0 т.к. $\pi \geq x \geq \frac{\pi}{2}$ (сумма углов треуг. π)

$0 \leq \pi - x \leq \frac{\pi}{4}$ $\Leftarrow$

$\frac{\pi}{4} \leq 3x - \pi \leq \frac{\pi}{2}$

сл. A - достигает максимального значения при $t=0$.

$$A_m = \cos x + 2\cos\frac{\pi-x}{2} + 1 + 2\cos\frac{3x-\pi}{2} = \cos x + 1 + 4\cos\frac{\pi-x+3x-\pi}{4} \cdot$$

$$\cdot \cos\frac{\pi-x-3x+\pi}{4} = \cos x + 1 + 4\cos\frac{x}{2}\cos x = \cos x\left(1 + 4\cos\frac{x}{2}\right) + 1$$

$\pi \geq x \geq \frac{\pi}{2}$ $\quad \frac{\pi}{2} \geq \frac{x}{2} \geq \frac{\pi}{4} \Rightarrow \cos\frac{x}{2} \geq 0$

сл. max значение A при $x = \frac{\pi}{2}$ иначе $\cos x\left(1+4\cos\frac{x}{2}\right) < 0$

сл. $A_{max} = 1$.

Чистовик

Санкт-Петербургский
государственный
университет

TR - соед. сер. противополож. сторон. пар-ма $KLMN \Rightarrow KN \parallel TR \parallel LM$

$\Rightarrow KN \parallel BD \parallel LM$

и сер. TR - точка перес. диагоналей пар-ма, O - сер. TR по док.

$\Rightarrow$ O - т. п. диаг. пар-ма LKNM

такого что L лежит на CB за т. B, K на AB за т. B, N на AD за т. D, M на CD за т. D

(Q лежит между O и S $\Rightarrow$ D - между S и R $\Rightarrow$ M и N на продолж. сторон., аналог. L и K - на продолж. сторон.)

$\Rightarrow$ O подходит под условие

ГМТ т. перес. диаг. пар-мов KLMN - луч SQ за точкой

√ Q, где Q - сер. BD, S - сер. AC (отрезок SQ - не включается)

N4

Пусть $x = \overline{ab\ldots ab}$

тогда $b^2 \equiv 3 \pmod 8$ или $b^2 \equiv 4 \pmod 8$

y	1	2	3	4	5	6	7	0
y^2	1	4	1	0	1	4	1	0

сл. $b = 2$ или $b = 6$.

$2^2 = 4$ $\quad 6^2 = 4 \cdot 8 + 4$

$\times \begin{array}{r} \overline{ab\ldots abab} \\ \overline{ab\ldots abab} \end{array}$

$\cancel{ab}\, b^2$

ab

$b^2 \; ab \; b^2$

$a^2 \; ab$

b^2

$ab \cdot 8 + b^2$

$2ab + 2k \equiv 4 \pmod 8$ т.к.

$2(ab+k)$ - чет.

$\Rightarrow \not\equiv 3 \pmod 8$

① $b = 2$

$4a \equiv 4 \pmod 8$

$a = 1$ нет. перехода ~~перехода~~ через разряд.

$b^2 + a^2 + b^2 = 1 + 4 + 4 = 1$

⊖

т.к. ост. по модулю 8 3 или 4 по усл.

② $b = 6$

$2 \cdot 6 \cdot a \equiv 0 \pmod 8$

$a \,\vdots\, 2$.

I. $a \,\vdots\, 4$

то переход через разряд всегда чет.

т.к. $kb^2 \,//\, 8$ - чет.

$ka^2 \,//\, 8$ - чет.

и $kab \,//\, 8$ - чет.

и сумма в столбце чет (при умнож. в столбик)

$\Rightarrow$ всегда будут чет цифры, а 3 и 4 по равну ⊖.

?

II. $a \not\vdots\, 4$.

если $a = 2$

третья цифра с конца у x^2 7 ⊖

сл. $a = 6$

тогда каждая ~~...~~ цифра

$44k + m$

m - переход через разряд

число $x^2 =$

$= 33 \ldots 3344$

в числе 4036 цифр.