УРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

4426

1

60

1	2	3	4	5	6	сумма
3	1	4		4		12

60

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Москва

Дата 10 марта 2019

* *

10–11 класс. Десятый вариант

1. Какое наибольшее количество ладей можно расставить на шахматной доске так, чтобы каждую ладью било не более двух других? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Числа x, y, z — углы некоторого треугольника, один из которых не меньше $\frac{\pi}{2}$. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \cos x + \cos y + \cos z + \cos(x - y) + \cos(y - z) + \cos(z - x).$$

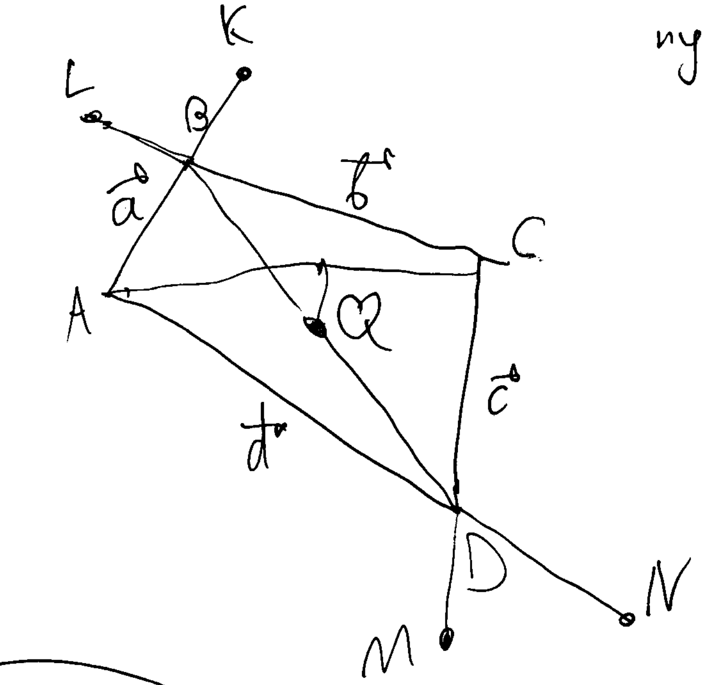
3. Дан четырехугольник $ABCD$, отличный от параллелограмма. На лучах AB, CB, CD и AD вне сторон четырехугольника $ABCD$ выбираются соответственно точки K, L, M и N так, что $KL \parallel MN \parallel AC$ и $LM \parallel KN \parallel BD$. Найдите геометрическое место точек пересечения диагоналей параллелограмма.

4. Натуральное число x в восьмеричной системе 2018-значное, и его цифры повторяются через одну. Оказалось, что восьмеричная запись x^2 содержит только цифры 3 и 4, причем в равном количестве. Найдите x^2 (в восьмеричной системе).

5. В однокруговом турнире по настольному теннису участвовало n теннисистов ($n \geqslant 3$). Будем говорить, что игрок A *круче* игрока B, если A выиграл у B или найдется такой игрок C, что A выиграл у C, а C выиграл у B. При каких n по итогам турнира могло оказаться так, что каждый игрок круче всех остальных? Ничьих в теннисе не бывает.

6. На столе лежат два конуса с общей вершиной O, касаясь друг друга внешним образом. Угол между их осями симметрии равен $\operatorname{arctg} \frac{12}{5}$. Найдите максимальный угол при вершине большего из двух конусов с вершиной O, которые лежат на столе и касаются внешним образом первых двух конусов. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении.)

№3



пусть $\vec{AB} = \vec{a}$

$\vec{CB} = \vec{b}$

$\vec{CD} = \vec{c}$ $\vec{AD} = \vec{d}$

~~из ∥ LK и AC BK~~

пусть $\vec{BK} = k\cdot\vec{a}$

заметим что $k \geq 0$, т.к. K на луче AB вне стороны.

$\vec{BL} = k\vec{b}$, ~~т.к.~~

из ∥ ~~BL~~ LK и AC

~~$\vec{BM}$~~ $\vec{DM} = k\cdot\vec{c}$, т.к. BD ∥ LM.

аналогично $\vec{DN} = k\vec{d}$

для любого $k \geq 0$ существует парал-грам

~~Заметим~~ т.к. из Т. Фалесса следует что LKNM - парал-грамм, то точка пересечения диагоналей - середина KM. Обозначим её за O. ~~$\vec{AO}$~~ середину BD обозначим за Q

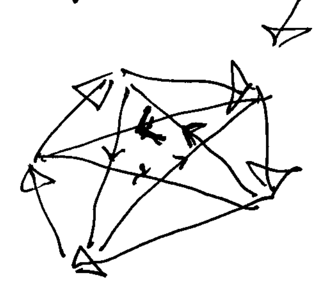
$\vec{AO} = \frac{\vec{a}+k\vec{a}+\vec{d}+k\vec{c}}{2}$, т.к. $\vec{AO}$ - медиана △AKM.

$\vec{AO} = \vec{AQ} + \frac{k\vec{a}+k\vec{c}}{2} = \frac{k}{2}\cdot(\vec{a}+\vec{c})$, т.к. заметим, что $\frac{\vec{a}+\vec{d}}{2} = \vec{AQ}$. заметим что вектор $\vec{a}+\vec{c}$ ∥ прямой, проходящей через середины диагоналей фигура ABCD. Из того что $k \geq 0$ это - луч, имеющий начало в Q и параллельный вектору $\vec{a}+\vec{c}$, при этом ~~сонаправлен с~~ направление ~~луч~~ ~~имеет~~ луча ~~такое~~ совпадает с направлением вектора $\vec{a}+\vec{c}$

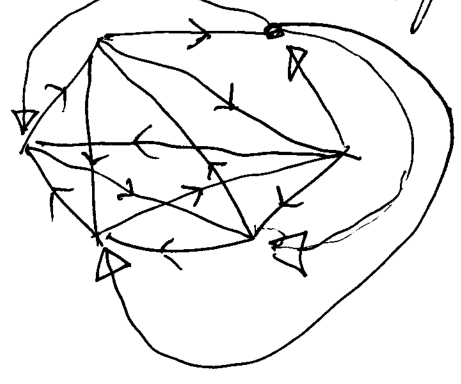
№5 A → B обозначение обозначает что A выиграл B

пример для n=3

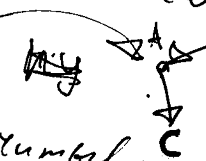
пример для n=5

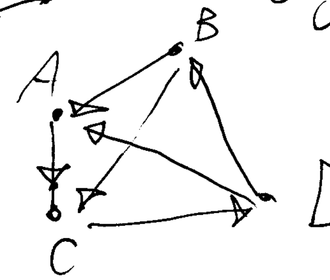


докажем что пример картинки симметрична относительно каждого из игроков, поэтому достаточно док-ть ~~что~~ для ~~любого~~ одного, что он „взаимокрут" с каждым оставшимся с его соседями по сторонам пятиугольника образуется конструкция примера для n=3, ~~с А~~ если человек не сосед по стороне пятиугольника, то ~~...~~ конструкция для них с ~~ним~~ их общим соседом по стороне пятиугольника образуется. Пример для шести:



докажем что n=4 не подходит рассмотрим какого-то из игроков (A) он должен кому-то проиграть (B) кого-то победить (C)



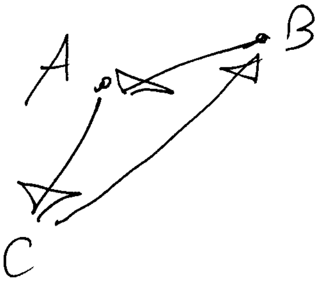


если C ~~в~~ проиграл B, что он должен выиграть хотя бы раз, учитывая он выигрывает D, а D должен выиграть A и B, ~~чтоб~~ чтоб быть круче них

Чистовик

Санкт-Петербургский государственный университет

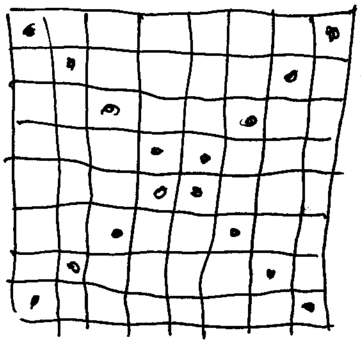
№5 (продолжение.
но тогда A не круче чем B.
значит C должен победить B



картинка симметрична относительно A; B; C.
пусть D выиграл у A и B
а проиграл C тогда B не круче D.
если D проиграл A и B
и выиграл C, то D не круче A, ~~все~~ все ~~случаи рассмо~~
всех выиграть и всем проиграть D не мог.
все случаи рассмотрены, ~~n≠4~~. $n \neq 4$.
~~докажем, что если~~ ~~если~~ докажем, что если
подходит n, то подходит n+2
~~конструкцию~~ построим конструкцию

для n, затем возьмём двух
оставшихся игроков (A и B)
пусть $A \to B$ все из конструкции для n победили A, а ~~все~~ B победил всех из конструкции для n. ~~отсюда~~ → выполнено условие. отсюда подходят все нечётные ≥ 3 и все чётные ≥ 6
т.е. все числа ≥ 3 кроме четырёх

№1 пример на 16 докажем, что больше нельзя. ~~предположим, что можно расставить хотя бы 17~~



~~докажем по индукции такое утверждение: для доски 2k×2k можно поставить не более чем~~ 4k

пусть можно хотя-бы 17 тогда ~~найдётся такая строка, в которой хотя-бы 3~~ ладьи ~~фишки~~ ~~рассмотрим среднюю из них.~~

~~Назовём ладью лишней, если она стоит ещё хотя-бы с двумя ладьями в одной строке или столбце, при этом находится не~~ ~~ниже.~~ Заметим, что ~~если ладья лишняя, то ладей можно ставить только на~~ если рассмотреть строку и столбец на которой она стоит (крест), то ~~либо~~ с ней в одном кресте другие ладьи, которые стоят ~~либо только в строке либо только в столбце,~~

17, тогда рассмотрим. Пусть ладей хотя-бы лишняя ладья. значит есть хотя-бы одна в которой стоит только одна. пусть столбец/строка,

Осталось 7 столбцов для 16 ладей ⇒ хотя-бы 2 лишние ⇒ минус 2 строки. ⇒ ~~Осталось 6 строк.~~ для 4 по столбцам.

на 6 строках 15 ладей - хотя бы 3 - лишние ⇒

на 5 столбцах 14 ладей - хотя бы 4 лишние ⇒

на 4 строках 13 ладей - хотя бы 5 лишних ⇒

на 3 столбцах 12 ладей - хотя-бы 6 лишних ⇒

Чистовик

№1 (продолжение)

на 2 ~~столбцах~~ строках 11 ладей => хотя-бы 7 лишних => на одном столбце 9 ладей — противоречие.

* Ладья называется лишней по строке/столбцу, если с ней ~~в строке/столбце~~ ~~стоят~~ на одной строке/столб. стоят две ладьи, ~~которые~~ между которыми она находится или это не на одном столбце. заметим, что ладья лишняя по строке единственная в своём столбце, а ладья лишняя по столбцу единственная в своей строке.

№2. ~~пусть~~ cos — чётная функция, выражение симметрично относительно (x; y; z) => без ограничения общности пусть z - наибольший из углов треугольника. зафиксируем z. докажем, что ~~когда~~ значение выражения наибольшее, когда если x=y.

т.к. $z \geq \frac{\pi}{2}$, то $x + y \leq \frac{\pi}{2}$; $x \geq 0$, $y \geq 0$ $\Rightarrow 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

на интервале $(0; \frac{\pi}{2})$ функция cos выпукла вверх => по нер-ву ~~Ен~~ Енсена $\cos x + \cos y \leq$ $2\cos\frac{x+y}{2}$ при этом $x=y$

Отсюда $\cos(x-y)$ достигает максимум 1 когда

№2. ~~докажем что~~ т.к. $\cos$ – чётная функция, то данное выражение симметрично относительно $x; y; z$ ⇒ пусть $z \geq \frac{\pi}{2}$.
~~докажем, что максимум~~

$\cos(y-z)+\cos(z-x)=2\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x+y-2z}{2}\right)=$
$2\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi-3z}{2}\right)$

$\cos x+\cos y=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

отсюда $\cos x+\cos y+\cos(y-z)+\cos(z-y)=$
$2\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi-3z}{2}\right)+\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)=2\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\cdot 2\cos\left(\frac{\pi-2z}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{z}{2}\right)$

заметим, что $\frac{\pi-z}{2}$ ... каждая из скобок ~~возрастает~~ монотонно убывает, а от $\frac{\pi}{2}$, до π $\cos$ монотонно ~~убывает~~ возрастает, и также что

отсюда максимум произведения неотрицательных величин достигается при $z=\frac{\pi}{2}$, а $x=y=\frac{\pi}{4}$.

эта величина достигает при данном значении $2\sqrt{2}$

заметим, что оставшиеся ~~так~~ значения $(\cos z; \cos(x-y))$ также слагаемые достигают максимума при данных значениях $\cos(x-y)=1$ т.к. $x=y$

$\cos z=0$ т.к. $z=\frac{\pi}{2}$ (иначе он отрицателен)

Отсюда max A при $x=y=\frac{\pi}{4}$, $z=\frac{\pi}{2}$

$\max A=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+0+0+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

Ответ: $2\sqrt{2}$