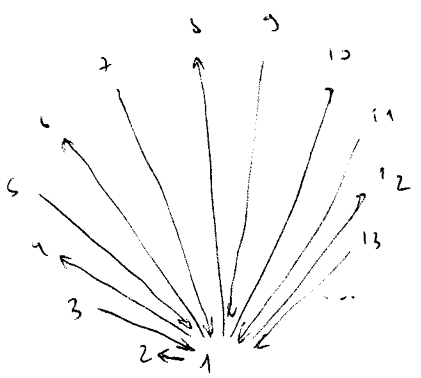
и (v < u), то у v и u разная чётность => u никак не может выиграть v). Нетрудно также заметить, что ~~его~~ любой спортсмен ~~выигрывает~~ проигрывает у одного из пары соседних, т.к. эти соседи имеют разную чётность. Для большего удобства приведу матрицу (где ~~на пересечении~~ в строке i, j стоит 1, если i победил j и 0, наоборот). Пронумеруем, что номера за круглым столом меняются от 1 до n по часовой стрелке.

	1	2	3	4	5	...
1		1	0	1	0	1
2	0		1	0	1	0
3	1	0		1	0	1
4	0	1	0		1	0
5	1	0	1	0		1
6	0	1	0	1	0	
...						

(i ⟶ j значит i победил j):



(рёбра проведены лишь для первого спортсмена, для лучшего понимания).

<u>Ответ:</u> такое возможно лишь при нечётных n.

<u>Задача 1.</u>

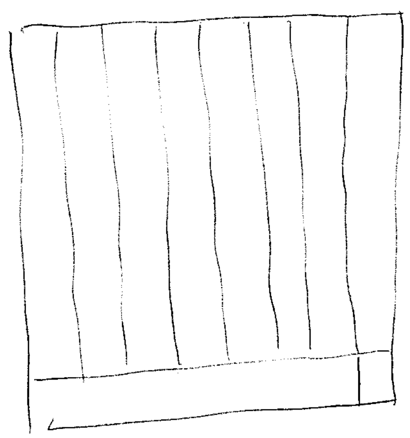
Заметим, что $n \le 10$, т.к. в каждом столбце может быть ~~максимум~~ максимум 1 белый ферзь (или 2, если в этом столбце есть чёрный ферзь => всего не более $6 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 10$ белых ферзей)

<u>Пример на 9 белых ферзей:</u>

			Б				
Б							
		Б	Ч	Б			
							Б
					Б		
			Б	Ч			
	Б						
				Б			

Ч – чёрный ферзь
Б – белый ферзь

10 ферзей быть не может.



Заодно разобьём доску на 9 полосок 7·1 и еще один квадрат. Тогда очевидно противоречие, если в верхних полосках стоит по одному ~~ферзю~~ ферзю, то в нижней ферзей нет => ~~[illegible]~~ у нас уже будет не более 9 ферзей, т.к. в нижней полосе нет ни одного ферзя.

Ответ: $n_{max} = 9$

ТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

318 1 60

1	2	3	4	5	6	сумма
0	4	4	–	4	–	12

60

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Екатеринбург

Дата ~~02.03.2018~~ 02.03.2019

* *

10–11 класс. Восьмой вариант

1. Имеется два черных ферзя и n белых. При каком наибольшем n эти фигуры можно расставить на шахматной доске так, чтобы одноцветные ферзи не били друг друга? Ферзь не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Числа x, y, z — углы треугольника. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{\cos x \cdot \cos y \cdot \sin z}{\cos x + \cos y + \sin z}.$$

3. Дан остроугольный треугольник ABC. У прямоугольника $KLMN$ вершины M и N лежат соответственно на на продолжениях сторон AB и AC за точку A, а K и L — на стороне BC. Пусть AD — медиана треугольника ABC, E — середина его высоты, опущенной из вершины A, O — точка пересечения диагоналей прямоугольника. Найдите угол DEO.

4. Даны натуральные числа x и y. В десятичной системе они $4n$-значные, причем в записи x цифры повторяются через одну, а в записи y — через три. Оказалось, что десятичная запись $x \cdot y$ состоит из последовательных блоков по 4 одинаковых цифры. При каких n это возможно?

5. В однокруговом турнире по настольному теннису участвовало n спортсменов ($n \geqslant 3$). По итогам турнира оказалось, что всех участников можно рассадить за круглым столом так, что для произвольной пары соседей A и B любой теннисист, отличный от A и B, проиграл хотя бы одному из теннисистов A и B. При каких n такое возможно?

6. На столе лежат три конуса с общей вершиной, касаясь друг друга внешним образом. Оси симметрии первых двух конусов взаимно перпендикулярны. Угол при вершине первого конуса равен $\arcsin \frac{5}{6}$. Два шара вписаны в третий конус и касаются друг друга внешним образом. Найдите отношение радиусов шаров (большего к меньшему).

2 Задача

Для начала заметим, что $x<90$ и $y<90$. От противного: пусть $x \geq 90$, тогда числитель не больше нуля. В знаменателе $y \leq 180 - x \Rightarrow$ $\Rightarrow \cos(y) \geq \cos(180-x) \Rightarrow \cos(y) \geq |\cos(x)| \Rightarrow$ знаменатель не меньше нуля $\Rightarrow$ все выражение не больше нуля. А я могу привести пример, когда выражение A больше нуля (он будет в ответе), аналогично $y<90$.

$$A = \frac{\cos x \cdot \cos y \cdot \sin z}{\cos x + \cos y + \sin z} = \frac{\cos x \cdot \cos y \cdot \sin(x+y)}{\cos x + \cos y + \sin(x+y)}$$

$$\left(\sin(x+y) = \sin(180-x-y) = \sin(z) = \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - (x+y)\right)\right)$$

Заметим, что теперь в числителе каждый член больше 0, воспользуемся неравенством Коши:

$$\cos(x) \cdot \cos(y) \cdot \sin(z) \leq \left(\frac{\cos(x) + \cos(y) + \sin(z)}{3}\right)^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A \leq \frac{(\cos(x) + \cos(y) + \sin(z))^2}{3^3}$$

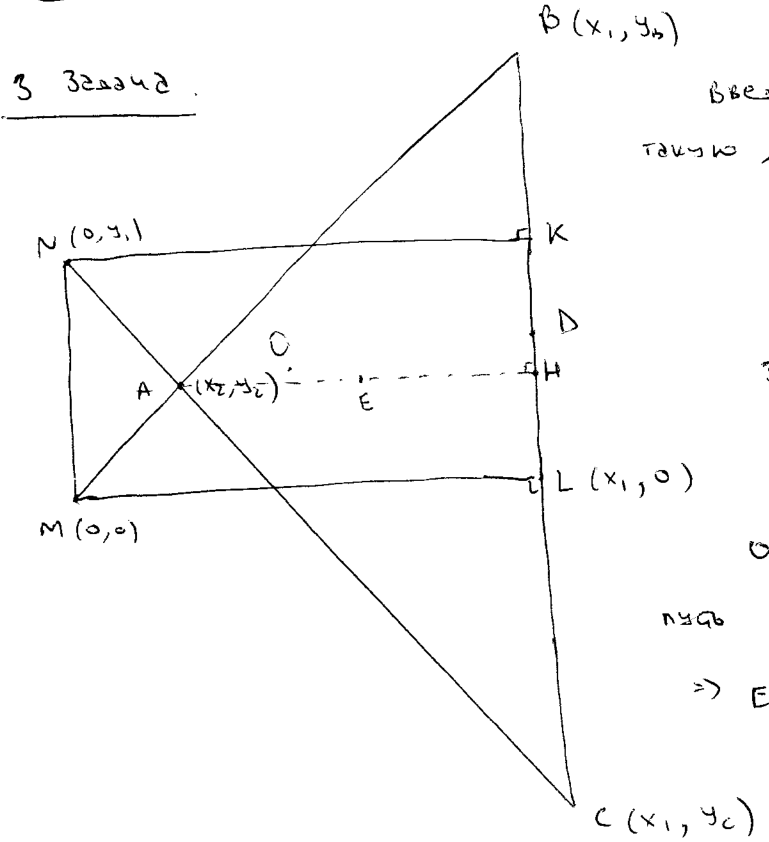
Из неравенства Йенсена имеем:

$$\cos(x) + \cos(y) + \sin(z) = \cos(x) + \cos(y) + \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - (x+y)\right) \leq 3 \cdot \cos\left(\frac{x+y+\frac{\pi}{2}-(x+y)}{3}\right) = 3 \cdot \cos\left(\tfrac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Значит, $A \leq \dfrac{\left(3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{3^3} = \dfrac{1}{4}$. Заметим, что при $x = y = \frac{\pi}{6}$; $z = \frac{2\pi}{3}$ равенство достигается.

Ответ: $A_{max} = \frac{1}{4}$ (при $x = y = \frac{\pi}{6}$; $z = \frac{2\pi}{3}$).

3 Задача



Введём прямоугольную систему координат такую, что: $M(0,0)$, $N(0,y_1)$, $L(x_1,0)$, $A(x_2,y_2)$.

Заметим, что $x_B = x_1$; $\dfrac{y_B - y_2}{y_2 - 0} = \dfrac{x_1 - x_2}{x_2 - 0} \Rightarrow$

$\Rightarrow y_B = \dfrac{x_1}{x_2} y_2$

O − середина прямоугольника $\Rightarrow O\left(\frac{x_1}{2}, \frac{y_1}{2}\right)$.

Пусть $H \in BC$; $AH \perp BC \Rightarrow H(x_1, y_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ E − середина AH $\Rightarrow E\left(\frac{x_1+x_2}{2}, y_2\right)$

$x_C = x_1$; $\dfrac{y_C - y_2}{y_2 - y_1} = \dfrac{x_1 - x_2}{x_2 - 0}$, откуда

$y_C = \dfrac{x_1}{x_2}(y_2 - y_1) + y_1$

D − середина BC $\Rightarrow D\left(x_1, \frac{y_B + y_C}{2}\right) \Rightarrow D\left(x_1, \dfrac{\frac{x_1}{x_2}(2y_2 - y_1) + y_1}{2}\right)$

Имеем: $O\left(\frac{x_1}{2}; \frac{y_1}{2}\right)$

$E\left(\frac{x_1+x_2}{2}, y_2\right)$

$D\left(x_1, \dfrac{\frac{x_1}{x_2}(2y_2 - y_1) + y_1}{2}\right)$

Заметим, что: $\dfrac{x_D - x_E}{x_E - x_O} = \dfrac{\frac{x_1 - x_2}{2}}{\frac{x_2}{2}} = \dfrac{x_1}{x_2} - 1$

$$\frac{y_D - y_E}{y_E - y_O} = \frac{\frac{x_1}{x_2}(2y_2 - y_1) + y_1 - 2y_2}{2y_2 - y_1} = \frac{(2y_2 - y_1)\left(\frac{x_1}{x_2} - 1\right)}{2y_2 - y_1} = \frac{x_1}{x_2} - 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ точки D, E, O лежат на одной прямой $\Rightarrow \angle DEO = 180^\circ$ (а т.к. $x_2 \leq x_1$, то $x_1 \geq \frac{x_1+x_2}{2}$ и $\frac{x_1+x_2}{2} \geq \frac{x_1}{2} \Rightarrow x_O \leq x_E \leq x_D \Rightarrow$ угол именно 180°, а не 0°.

Ответ: $\angle DEO = 180^\circ$.

Задача 5

- Пусть $n = 2k$, где $k \in N$ $(k>1)$. Тогда, если мы смогли рассадить спортсменов, то возьмём случайного. Оставшихся $2k-1$ разобьём на $(k-1)$ пару по 2 − останется «последний» спортсмен. Тогда наш спортсмен проиграл хотя бы одному из каждой $(k-1)$ пары, а если мы ещё и возьмём оставшегося «последнего» спортсмена с каким-то, что наш спортсмен победил, то получится, что наш спортсмен проиграл «последнему» (из или в какой-то из $(k-1)$ пар проиграл обоим). В любом случае, вывод однозначный. Любой спортсмен проиграл не менее, чем k раз, но тогда всего было не менее $2k \cdot k$ поражений, а всего игр было $\dfrac{n \cdot (n-1)}{2} = k \cdot (2k-1) < 2k \cdot k \Rightarrow n$ не может быть чётным.

- Для нечётного n пример всегда есть. Для этого раздадим людям номера от 1 до $2k+1$ $(n = 2k+1)$, по часовой стрелке. Тогда пусть спортсмен с номером j выигрывает спортсменов $j+1$, $j+3$... и так до n, и $j-2$, $j-4$... и так до 1, а остальным проигрывает. Нетрудно заметить, что противоречий не будет (т.к. j выигрывает всех i, больших него, если у i другая чётность, и выигрывает всех e, меньших него, если у e такая же чётность $\Rightarrow$ если V выигрывает