№3 чистовик.

KL 113

У Васи есть стратегия для выигрыша
он будет стирать тот отрезок который
симметричен отрезку
стёртой Петей относительно центру
квадрата т.е. после каждого хода
Васи квадрат 2019×2019 будет симметричен
относительно центру.
Пусть через несколько ходов выиграет
Петя т.е. до его хода был квадрат
у которого были три стороны которые
были стёрты т.к. квадрат 2019×2019 был симметричен
относительно его центра то до хода Пети
было два квадрать у которого три стороны
стёрты т.е. до хода Васи был как
минимум один квадрат три стороны
которого были закрашены т.е. Вася закрасит
четвёртую сторону того квадрата.
Ответ: Вася выграет

УДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

1	2	3	4	5	6	сумма
1	3	4	0	2	0	10

1

7 336

50

БОТА УЧАСТНИКА
КОЛЬНИКОВ СПбГУ
2018–2019
заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (8–9 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Душанбе

Дата 11:02:2019

* *

8–9 класс. Четвертый вариант

1. На свой день рожденья Вася принес в класс несколько конфет и все их раздал своим одноклассникам (каждому досталось не менее одной конфеты). Некоторые из них поделились с одноклассниками полученными конфетами. В результате у четверти всего класса оказалось по 2 конфеты, у трети класса — по 1 конфете, у Маши оказалось 6 конфет, а больше ни у кого конфет не осталось. Какое наибольшее количество конфет мог раздать Вася?

2. При каких a квадратные трехчлены $x^2 + ax - 6$ и $2x^2 - 5x + 2a$ имеют общий корень?

3. В тетради карандашом нарисована квадратная сетка 2019×2019 клеток (сторона клетки равна 1). Петя и Вася играют в игру по следующим правилам. Ходят по очереди, начинает Петя. За один ход игрок стирает один единичный отрезок этой сетки. Выигрывает тот игрок, после чьего хода образуется клетка, все четыре стороны которой стерты. Кто из игроков может обеспечить себе победу вне зависимости от игры соперника?

4. Для положительных чисел a, b и c докажите неравенство
$$\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geqslant \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}.$$

5. В остроугольном треугольнике ABC с наименьшей стороной AB провели высоты BB_1 и CC_1, они пересеклись в точке H. Через точку C_1 провели окружность ω с центром в точке H и окружность ω_1 с центром в точке C. Через точку A провели касательную к ω, касающуюся ее в точке K, а также касательную к ω_1, касающуюся ее в точке L. Найдите $\angle KB_1L$.

6. Найдите все пары простых чисел p и q, для которых $\frac{p^2+1700}{q^2+96} = q^3$.

№1

Пусть всего x учеников т.е. количество конфет больше равно $x-1$ но всего конфет $2\cdot\frac{x}{4}+\frac{x}{3}+6$ т.е. $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+6 \geq x-1$ т.е. $42 \geq x$

т.е. максимум 42 ученика то всего конфет максимум

$\frac{42}{2}+\frac{42}{3}+6=41$

Ответ: 41

№2

Пусть $x^2+ax-6=(x-x_1)(x-x_2)=x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2 \Rightarrow \frac{-6}{x_1}+x_1=-a$

$2x^2-5x+2a=2(x-x_1)(x-x_3)=2x^2-2(x_1+x_3)x+2x_1x_3 \Rightarrow \frac{a}{x_1}+x_1=2{,}5$

$\Rightarrow x_1=\frac{a+6}{a+2{,}5}$

т.к. $x_1^2+ax_1-6=0$ то

$\left(\frac{a+6}{a+2{,}5}\right)^2+a\left(\frac{a+6}{a+2{,}5}\right)-6=0$

т.е. $\frac{4a^3-10a^2-48a+54}{(2a+5)^2}=0$

т.е. $(a-1)\left(a-\frac{6+12\sqrt{6}}{8}\right)\left(a-\frac{6-12\sqrt{6}}{8}\right)=4a^3-10a^2-48a+54=0$

т.е. $a=1$

$a=\frac{6+12\sqrt{6}}{8}$

$a=\frac{6-12\sqrt{6}}{8}$

Ответ: $1;\ \frac{6+12\sqrt{6}}{8};\ \frac{6-12\sqrt{6}}{8}$

№4

$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2} \geq \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}$ умножим обе части на $a^2b^2c^2$ то

$a^5c^2+b^5a^2+c^5b^2 \geq a^4bc^2+b^4ca^2+c^4ab^2$ то по неравенству $AM \geq GM$

получим что:

$$\begin{aligned}
&14a^5c^2+3b^5a^2+2c^5b^2 \geq 19a^4bc^2\\
+\ &14b^5a^2+3c^5b^2+2a^5c^2 \geq 19b^4ca^2\\
&14c^5b^2+3a^5c^2+2b^5a^2 \geq 19c^4ab^2
\end{aligned}$$

$19(a^5c^2+b^5a^2+c^5b^2) \geq 19(a^4bc^2+b^4ca^2+c^4ab^2)$ т.е.

$a^5c^2+b^5a^2+c^5b^2 \geq a^4bc^2+b^4ca^2+c^4ab^2$

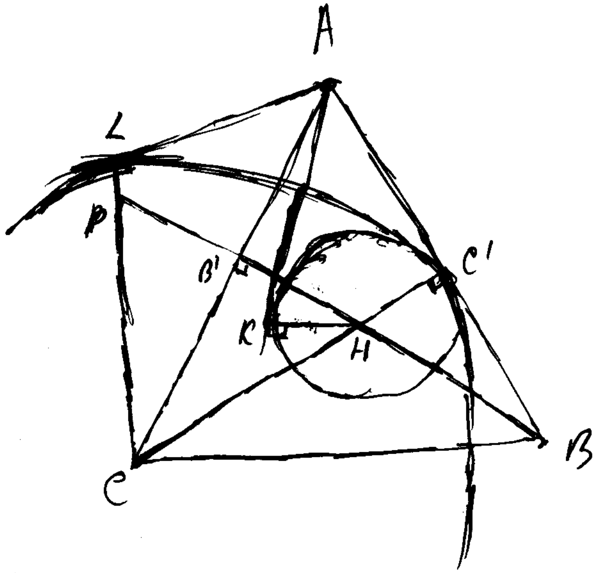
Что и требовалось доказать.

чистовик.

№5

Пусть $\angle ABC = B$ то $\angle HAB = 90 - B$ то $\angle HAK = 90 - B$ т.к. $HKB'A$ - цикличны то $\angle KB'H = 90 B$ то $\angle KB'A = 180 - B$ т.к. L - симметричен C' относительно AC то H симметричен P относительно A то $\angle HAC' = \angle PAL = 90 - B$ т.к. $B'PLA$ - цикличны то $\angle PAL = \angle PB'L = 90 - B$ то $\angle AB'L = B$ то $\angle KB'L = 180$ т.е. K, B', L - лежат на одной прямой

Ответ: 180



2

чистовик.