KL083

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

60

1023

1	2	3	4	5	6	сумма
4	4	2	1	0	1	12

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (8–9 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада г. Череповец

Дата 16.03.19

* *

8–9 класс. Второй вариант

1. Из нескольких одинаковых белых кубиков Петя сложил большой куб и покрасил его грани в черный цвет. Оказалось, что число кубиков с одной черной гранью равно числу полностью белых кубиков. Сколько маленьких кубиков ровно с двумя черными гранями?

2. Найдите все такие квадратные трехчлены ax^2+bx+c с целыми коэффициентами, графики которых проходят через точки (a,b), (b,c) и (c,a) (среди этих точек могут быть совпадающие).

3. Том Сойер и Гекльберри Финн играют в игру, заключающуюся в покраске забора, состоящего из 1000 неокрашенных дощечек, в синий и красный цвета. Начинает Том, ходы делаются по очереди. За один ход игрок выбирает одну из неокрашенных дощечек и цвет, а затем красит эту дощечку в выбранный цвет. Игра заканчивается, когда будут покрашены все дощечки. Том хочет, чтобы по окончании игры было как можно больше пар соседних разноцветных дощечек, а Гек хочет, чтобы было как можно меньше пар соседних разноцветных дощечек. Какое максимальное число таких пар Том может обеспечить вне зависимости от игры Гека?

4. Вещественные числа a, b, c и d удовлетворяют соотношениям $a+b+c+d=0$ и $a^2+b^2+c^2+d^2=12$. Найдите наименьшее и наибольшее значения произведения $abcd$.

5. Дан неравнобедренный остроугольный треугольник ABC. На лучах AB и AC выбраны соответственно такие точки K и L, что четырехугольник $KBCL$ вписанный. Точка H — основание высоты, опущенной из вершины A на сторону BC. Докажите, что если $KH = LH$, то H — центр описанной окружности треугольника AKL.

6. Найдите все пары простых чисел p и q, для которых p^2+q^3 является точным кубом.

№1

Известно, что из нескольких кубиков Петя сложил большой и покрасил его грани в чёрный. При этом, оказалось, что число кубиков с одной чёрной гранью ($6\cdot(x-2)^2$) равно числу полностью белых кубиков ($(x-2)^3$). Составим уравнение

$$6(x-2)^2=(x-2)^3 \quad / : (x-2)^2$$
$$6=x-2$$
$$x=8$$

Следовательно, 8^3 (512) кубиков ~~было изначально~~ всего. Из них 216 ($(8-2)^3=6^3$) полностью белых, столько же имеют одну чёрную грань и 8 кубиков закрашены 3 грани. Отсюда 72 ($512-216\cdot2-6=512-440$) кубиков имеют 2 чёрные грани.

Ответ: 72 кубика с двумя чёрными гранями.

№2

$y=ax^2+bx+c$

Функция $y=ax^2+bx+c$ проходит через точки (a,b), (b,c) и (c,a). Составим систему уравнений.

$\cancel{a=a^3+ab+c}$

$\cancel{b=ab^2+b^2+c}$

$$\begin{cases} b=a^3+ab+c \\ c=ab^2+b^2+c \\ a=ac^2+bc+c \end{cases}$$

Решим второе уравнение:

$\cancel{c}=ab^2+b^2+\cancel{c}$

$b^2(a+1)=0$

$$\left[\begin{array}{l} b=0 \\ a=-1 \end{array}\right.$$

Отсюда, $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=a^3+c \\ b=0 \\ a=ac^2+c \end{cases} \\ \begin{cases} b=-1-b+c \\ a=-1 \\ -1=-c^2+bc+c \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} c=-a^3 \\ b=0 \\ a=ac^2+c \end{cases} \\ \begin{cases} b=\frac{c-1}{2} \\ a=-1 \\ -1=-c^2+bc+c \end{cases} \end{array}\right.$

Решим первую систему:

$$\begin{cases} b=0 \\ c=-a^3 \\ a=ac^2+c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=0 \\ c=-a^3 \\ a=-a^4-a^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=0 \\ c=-a^3 \\ \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a^3+a^2+1=0 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=0 \\ c=-a^3 \\ \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a^2(a+1)+1=0 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=0 \\ c=-a^3 \\ \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a^2=-\frac{1}{a+1} \end{array}\right. \end{cases}$$

Чтобы соблюдалось это равенство $a^2=-\frac{1}{a+1}$, a должно быть меньше -1 (иначе a^2 будет отрицательным). В таком случае $-\frac{1}{a+1}$ будет не целым. Следовательно a^2 и a тоже не будут целыми. Отсюда следует, что данное равенство не верно. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} b=0 \\ c=-a^3 \\ a=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=0 \\ c=0 \\ a=0 \end{cases}$$

Решим вторую систему:

$\cancel{b=-1-b+c}$

$\cancel{-1=-c^2+bc+c}$

$\cancel{a=-1}$

$$\begin{cases} a=-1 \\ b=\frac{c-1}{2} \\ -1=-c^2+\frac{c(c-1)}{2}+c \quad /\cdot 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=\frac{c-1}{2} \\ -2=-2c^2+c^2-c+2c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=\frac{c-1}{2} \\ -c^2+c+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=\frac{c-1}{2} \\ c^2-c-2=0 \end{cases}$$

Чистовик

Решим последнее уравнение:

$c^2+c-2=0$

$a=1, b=-1, c=-2$

$D=b^2-4ac=1-4\cdot1\cdot(-2)=1+8=9$

$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{+1+3}{2}=\frac{4}{2}=2$

$x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2}=\frac{+1-3}{2}=-\frac{2}{2}=-1$

$c=\pm1$

Следовательно,

$b=\frac{c-1}{2}=\left[\begin{array}{l}\frac{1-1}{2}\\ \frac{-1-1}{2}\end{array}\right.=\left[\begin{array}{l}0{,}5\\ -1\end{array}\right.$ ~~$\Rightarrow$ Отсюда, $\left\{\begin{array}{l}a=-1\\ \left[\begin{array}{l}c=1\\ b=0\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}c=-1\\ b=-1\end{array}\right.\end{array}\right.$~~

Т.к. $a,b,c \ni Z$ (по условию), $b\neq0{,}5$. Следовательно, $\left\{\begin{array}{l}a=-1\\ b=-1\\ c=-1\end{array}\right.$

Подставлям систему в совокупность: ~~и получае~~

$\left[\begin{array}{l}a=b=c=0\\ a=b=c=-1\end{array}\right.$

Ответ: $0; -(x^2+x+1)$

№3

Чтобы помешать Тому сделать наибольшее количество разноцветных пар дощечек, Гек будет каждой свой ход повторять цвет дощечки Тома. Т.е. забор будет выглядеть так:

СCKKCCKK... KCCKK (С - синий, К - красный).

Или наоборот, если Том начнёт красить с красного цвета. Получается, что бы Гек не делал, все дощечки кроме первой и последней образуют разноцветные пары. Следовательно, 499 разноцветных пар ($\cdot\frac{1000-2}{2}=\frac{998}{2}$) — максимальное количество таких пар, которое Том может обеспечить вне зависимости от игры Гека

Ответ: 499

№4

$\left\{\begin{array}{l}a+b+c+d=0\\ a^2+b^2+c^2+d^2=12\end{array}\right.$

Нужно найти наименьшее и наибольшее значение числа $abcd$. ~~Т.к.~~ $a^2+b^2+c^2+d^2=12$, $|3|^2+|1|+|1|+|1|=12$ только если одно число (например, a) равно $|3|$, а остальные $|1|$ или одно число $=0$ (например, a), а остальные 2. $0+|2|^2+|2|^2+|2|^2=12$ Из этих вариантов под первое неравенство подходит только первый. Следовательно, мы можем составить систему.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=3\\ b=c=d=-1\end{cases}\\ \begin{cases}a=-3\\ b=c=d=1\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} abcd=3\cdot(-1)^3=3\cdot -1=-3\\ abcd=-3\cdot 1^3=-3\end{array}\right. \Rightarrow abcd=-3$$

Ответ: $-3; -3$

№6

$p=13,\ q=7$

$p^2+q^3=13^2+7^3=169+343=512=8^3$

Ответ: $p=13,\ q=7$

№5

Дано:

$\triangle ABC$

$B\in KA, C\in AL$

$AH\perp BC$

$KH=LH$

$KBCL$ - вписанный

Доказать:

H - центр окружности, описанной около $\triangle KAL$

Доказательство:

(Чтобы доказать, что H - центр. окр., описан. около $\triangle KAL$, нужно доказать, что $AA_1\perp KL$, $KK_1\perp AL$, $LL_1\perp AK$)

$KBCL$ вписанный (по усл.) $\Rightarrow \angle KBC+\angle KLC=180^\circ$, $BC+KL=KB+CL$.

$KH=HL \Rightarrow \triangle KHL$ - равнобедр. $\Rightarrow \angle HKL=\angle HLK$