KL024

3289

2

60

УРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

1	2	3	4	5	6	сумма
4	4	2	1	1		12

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Калининград

Дата 16 марта

* *

10–11 класс. Третий вариант

1. При каком наибольшем n на шахматной доске можно расставить n королей и n ладей так, чтобы никакая фигура не была под боем?

2. Даны числа $x, y > 0$. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{xy\,(x+y)}{\sqrt{x^6+y^6}}.$$

3. Дан острый угол BAD, где точка D отлична от A. На луче AB произвольным образом выбирается точка X, также отличная от A. Пусть P — точка пересечения касательных к описанной окружности треугольника ADX, проведенных в точках D и X. Найдите геометрическое место точек P.

4. Дано натуральное число x, десятичная запись которого n-значная и не содержит нулей. Числа x и x^2 в десятичной системе одинаково читаются слева направо и справа налево. Найдите все n, при которых такое x существует.

5. В однокруговом турнире по настольному теннису приняло участие 35 человек. По итогам турнира оказалось, что нет такой четверки игроков A, B, C, D, что A выиграл у B, B — у C, C — у D, а D — у A. Каково наибольшее количество троек участников, одержавших во встречах между собой ровно по одной победе? Ничьих в теннисе не бывает.

6. Четыре конуса с общей вершиной попарно касаются друг друга внешним образом. Первые два и последние два конуса имеют одинаковый угол при вершине. Найдите максимальный угол между осями симметрии первого и третьего конусов. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении).

Чистовик $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MP}=\left\{\frac{x_0+1}{2}+\frac{tg^2\alpha}{2}; \frac{(x_0-1)tg\alpha}{2}+\frac{tg\alpha}{2}\right\}=$

$$=\left\{\frac{x_0+1+tg^2\alpha}{2}; \frac{x_0}{2}\right\}$$

Таким образом, координаты точки P равны $\left\{\frac{x_0+1+tg^2\alpha}{2}, \frac{x_0}{2}\right\}$, где x_0 — координата т. X. Значит, ГМТ P есть прямая (открытый луч)

$$y=x-\frac{1+tg^2\alpha}{2},$$

№5 Ответ: 1[redacted].

Решение. Переведем задачу на язык графов. Вершины — участники. Если A выиграл у B, проведем стрелку от A к B. (граф ориентированный). Из условия следует, что нет циклов длины 4 (назовем их плохими) в нашем графе. Требуется найти наибольшее возможное количество циклов длины 3 (наз. их хорошими)

Лемма. Пусть в графе на $n \geq 4$ вершинах имеется цикл длины 3. Тогда ~~после удаления вершин этого цикла со всеми выходящими из и входящими в них ребер число циклов длины 3 уменьш. не более, чем на n-2.~~ больше хороших циклов в этом графе нет.

Док-во. Рассмотрим граф на $n \geq 4$ вершинах. Пусть в нём нашелся цикл ~~A→B~~ $1\to2\to3\to1$. (назовем его неинтересным, все ост. — интерес.)

Рассмотрим произвольную вершину X, отличную от 1, 2, 3.

I) пусть $X\to1$. Тогда $X\to3$, иначе обр. цикл длины 4: $X\to1\to2\to3\to X$.

II) пусть $1\to X$. Тогда $2\to X$, иначе обр. плохой цикл $1\to X\to2\to3\to1$.

Чистовик

№1. Ответ: при $n=5$.

Решение: Приведем пример для $n=5$.

	Л						
					Л		
						Л	
			Л				
К		К					
							Л
К		К		К			

Легко убедиться, что ~~никакие две фигуры друг друга не бьют.~~ никакая фигура не под боем.

Докажем, ~~при~~ что при $n \geq 6$ найдётся фигура, бьющая другую ~~фигуру~~. Пусть это не так, предположим, нашлась такая расстановка. Тогда, если всего стоит хотя бы 6 ладей, причём они все стоят в разных строках и столбцах (иначе ладьи кого-то бы били), то свободными оказываются всего 2 строки и 2 столбца. Короли должны стоять на их пересечении. А их пересечение — это $2 \cdot 2 = 4$ клетки, и 6 королей на них разместить не удастся. Противоречие.

№2 Ответ: $\sqrt{2}$.

Решение: По неравенству между средним квадратическим и средним арифметическим двух чисел имеем:

$$\sqrt{\frac{x^6+y^6}{2}} \geq \frac{x^3+y^3}{2} \Rightarrow A = \frac{xy(x+y)}{\sqrt{x^6+y^6}} \leq \sqrt{2}\,\frac{xy(x+y)}{x^3+y^3}.$$

Докажем, что $\frac{xy(x+y)}{x^3+y^3} \leq 1$, откуда будет следовать, что $A \leq \sqrt{2}$.

$$x^3+y^3 \geq xy(x+y) \Leftrightarrow (x+y)(x^2-xy+y^2) \geq xy(x+y) \Leftrightarrow (x+y)(x-y)^2 \geq 0.$$

чистовик

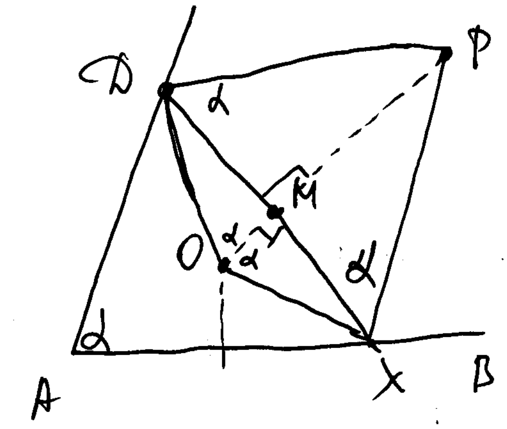
$x+y>0$, $(x-y)^2\geq 0$, значит, нер-во верно.

Итак $A\leq\sqrt{2}$. ~~Оценка~~ Равенство достигается, например,

при $a=b=1$: $A=\frac{1\cdot 1(1+1)}{\sqrt{1+1}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

№3 Ответ: прямая.

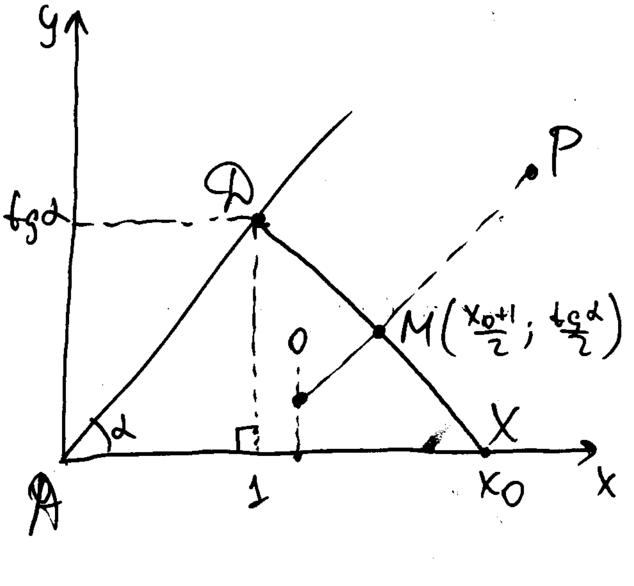
Решение. Заметим, что из р-ва отрезков касательных ~~точка~~ P лежит на сер.пер. к DX.



Центр O опис. окр. $\triangle ADX$ также лежит на серпере. Далее, если $\angle DAX=\alpha$, то $\angle DOX=2\alpha$ как центр., $\angle DOM=\angle MOX=\frac{\angle DOX}{2}=\alpha$ (M – сер. DX); и $\angle PDX=\angle PXD=\alpha=\angle DAX$ по теореме об угле м/у хордой и касательной.

Тогда $\operatorname{tg}\alpha=\frac{MX}{OM}=\frac{PM}{MX}\Rightarrow \operatorname{tg}^2\alpha=\frac{PM}{OM}$. $\overrightarrow{OM}\uparrow\uparrow\overrightarrow{MP}\Rightarrow\overrightarrow{MP}=\operatorname{tg}^2\alpha\,\overrightarrow{OM}$.

Далее идёт счёт в координатах: $A(0;0)$ $Ox=[AB)$, $D(1;\operatorname{tg}\alpha)$, $X(x_0;0)$



Проекция O на AX – сер. AX $\Rightarrow O\left(\frac{x_0}{2};y_0\right)$. Для того, чтобы найти y_0, рассмотрим равенство $AO^2=OD^2$ (как радиусы)

$$\frac{x_0^2}{4}+y_0^2=\left(1-\frac{x_0}{2}\right)^2+(\operatorname{tg}\alpha-y_0)^2$$

$$1-x_0+\operatorname{tg}^2\alpha-2\operatorname{tg}\alpha\, y_0=0$$

$$y_0=\frac{\operatorname{tg}^2\alpha+1-x_0}{2\operatorname{tg}\alpha}.$$

$M\left(\frac{1+x_0}{2};\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}\right)$ (полусумма коорд. D и X)

$$\overrightarrow{OM}=\left\{\frac{1+x_0}{2}-\frac{x_0}{2};\ \frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}-\frac{\operatorname{tg}^2\alpha+1-x_0}{2\operatorname{tg}\alpha}\right\}=\left\{\frac{1}{2};\ \frac{x_0-1}{2\operatorname{tg}\alpha}\right\}$$

$$\overrightarrow{MP}=\operatorname{tg}^2\alpha\,\overrightarrow{OM}=\left\{\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{2};\ \frac{(x_0-1)\operatorname{tg}\alpha}{2}\right\}$$

Чистовик

№4 Ответ: $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

Решение. Приведем пример для $n \in \{1, \ldots 9\}$

$n=1$: $x=1$, $x^2=1$

$n=2$ $x=11$, $x^2=121$

$n=3$ $x=111$, $x^2=12321$

$n=4$: $x=1111$, $x^2=1234321$

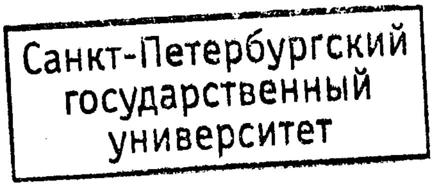
$n=5$: $x=11111$, $x^2=123454321$

$n=6$: $x=111111$, $x^2=12345654321$

$n=7$, $x=1111111$, $x^2=1234567654321$

$n=8$: $x=11111111$, $x^2=123456787654321$

$n=9$: $x=111111111$, $x^2=12345678987654321$,

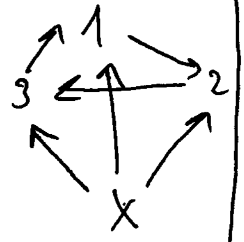


Чистовик

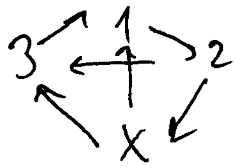
№5 — продолжение. (I)

1) Пусть $X \to 2$:

Здесь интересных циклов нет.



2) Пусть $2 \to X$:



~~Здесь есть 1 интересный цикл: 1→2→X→1~~

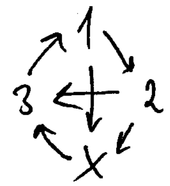
Плохой цикл: $1 \to 2 \to X \to 3 \to 1$

(II)

1) Пусть $3 \to X$.

Тогда интересных циклов нет, т.к. X проиграл всем.

2) Пусть $X \to 3$



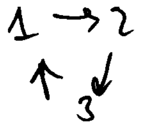
~~Здесь есть 1 интер. цикл: 1→3→X→3~~

Плохой цикл $1 \to 2 \to X \to 3 \to 1$

Итак, интересных циклов нет. Значит, цикл $1 \to 2 \to 3 \to 1$ единств. хороший цикл.

Приведём пример ~~на 38 вершинах~~ графа на 35 вершинах, в кот. есть хор. цикл и нет плохих. Будем строить его поэтапно.

1) Возьмём цикл



2) Добавим 4ю вершину, и проведём к ней стрелки от 1, 2, 3

3) Добавим 5ю вершину и пров. к ней стрелки от 1, 2, 3, 4.

k) Добавим $(k+2)$ю вершину и пров к ней стр. от $1, 2, \ldots, (k+1)$

33) Добавим 35ю вершину и пров к ней стр. от $1, 2, \ldots, 34$

В таком графе нет плохого цикла. Предположим, он нашелся: $A \to B \to C \to D \to A$. Рассмотрим A — наиб. из чисел A, B, C, D. Оно хотя бы 4. Из построения видно, что при $k \geq 4$ k-я вершина выигр. у всех верш. от 1 до $k-1$. Значит, A не могла проиграть ~~ABD~~ B. Противоречие.