55

Выход $12^{10} - 12^{15}$

$13^{30} - 13^{40}$

А0-56

ГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

1

6360

1	2	3	4	5	6	сумма
4	4	–	1	2	–	11

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Владимир

Дата 16.03.2019

* *

10–11 класс. Первый вариант

1. Имеется 8 черных ладей и n белых. При каком наибольшем n их можно расставить на шахматной доске так, чтобы одноцветные ладьи не били друг друга? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Даны положительные числа x, y, z. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{xyz\,(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4 + (yz)^4 + (xz)^4}}\,.$$

3. Дан треугольник ABC с меньшей стороной AB. На сторонах AB и AC выбраны соответственно точки X и Y так, что $BX = CY$. Под каким углом прямая, проходящая через центры описанных окружностей треугольников ABC и AXY, пересекает прямую BC, если $\angle ABC = \beta$ и $\angle BCA = \gamma$?

4. Десятичная запись квадрата натурального числа x представляет собой два одинаковых соседних блока из n цифр. Может ли n равняться 20182019?

5. На однокруговой турнир по настольному теннису подало заявку 16 человек. Когда было сыграно n матчей, оказалось, что среди любых трех теннисистов найдутся двое, уже сыгравших между собой. При каком наименьшем n такое возможно?

6. Три конуса с общей вершиной, касающихся друг друга внешним образом, имеют высоту 2 и радиус основания $\sqrt{3}$. Два шара касаются внешним образом друг друга и всех конусов. Найдите отношения радиусов шаров (большего к меньшему).

Докажем, что $\underbrace{10^{2018\,2018} \le t \le 10^{2018\,2019}-1}$ Чистовик

$$\frac{10^2(10^{2018\,2019}+1)}{11^2} \ge 10^{2018\,2018}$$

$$10^2(10^{2018\,2019}+1) \ge 11^2 \cdot 10^{2018\,2018} \quad \Big| : 10^2$$

$$10^{2018\,2019}+1 \ge 11^2 \cdot 10^{2018\,2016}$$

$$10^{2018\,2016}(10^3-1) \ge 11^2-1$$

$$10^{2018\,2018}(999) \ge 120.$$

верно

$$\frac{10^2}{11^2}(10^{2018\,2019}+1) \le 10^{2018\,2019}-1 \quad \Big| \cdot 11^2$$

$$10^2(10^{2018\,2019}+1) \le 11^2 \cdot 10^{2018\,2019}-11^2.$$

$$10^{2018\,2021}+10^2 \le 11^2 \cdot 10^{2018\,2019}-11^2$$

$$11^2+10^2 \le 10^{2018\,2019}(11^2-10^2)$$

$$221 \le 10^{2018\,2019} \cdot 21$$

верно.

~~Мы подобрали такой x, что~~

Ответ: может.

Санкт-Петербургский государственный университет

№4. Чистовик.

Пусть $x = \overline{a_1 a_2 a_3 \ldots a_{20182019} a_1 \ldots a_{20182019}} =$

$= \overline{a_1 \ldots a_{20182019}} \cdot (\underbrace{100\ldots001}_{20182020 \text{ цифр}})$; $10\ldots01 = 1 + 10^{20182019}$ значит,

$$x = \underbrace{(a_1 \cdot 10^0 + a_2 \cdot 10^1 + \ldots + a_{20182019} \cdot 10^{20182018})}_{t} (10^{20182019} + 1)$$

если $a_{20182019} = 1$, остальные $a = 0$, то $t = 10^{20182018}$, если все a равны 9, то $t = 9(10^0 + 10^1 + \ldots + 10^{20182018}) = \frac{9 \cdot (10^{20182019} - 1)}{(10-1)} =$

$= 10^{20182019} - 1$. Возьмём $t = \frac{(10^{20182019} + 1) \cdot 100}{121} = \frac{(10^{20182019} + 1) \cdot 10^2}{11^2}$.

Вначале докажем, что это число целое:

$\underline{10^{20182019} + 1 = (11-1)^{20182019} + 1 = \underbrace{11^{20182019} - \ldots}_{\vdots 11^2} + C_{20182019}^{20182018} \cdot 11 \underbrace{- 1 + 1}_{0}} \Rightarrow$

$\vdots 11^2$, т.к. 11 входит в эти слагаемые хотя б во второй степени.

надо доказать, что

$C_{20182019}^{20182018} \cdot 11 \vdots 121$

$C_{20182019}^{20182018} = 20182019$;

$2 - 0 + 1 - 8 + 2 - 0 + 1 - 9 = -11 \vdots 11 \Rightarrow$

$\Rightarrow 20182019 \vdots 11 \Rightarrow 20182019 \cdot 11 \vdots 121 \Rightarrow t = \frac{(10^{20182019} + 1) 10^2}{11^2}$ - целое

Черновик

№2 (продолжение).

Так же заметим, что $2(x^4y^4+y^4z^4+z^4x^4) \geq 2(x^3y^3z^2+y^3z^3x^2+z^3x^3y^2)$; (2)

$$x^4y^4+y^4z^4+z^4x^4 \geq x^3y^3z^2+y^3z^3x^2+z^3x^3y^2;$$

действительно, по неравенству Мюрхеда ~~для~~ $T_{440} \geq T_{332}$, так (440) мажорирует (332): $\begin{pmatrix} 4 \geq 3 \\ 4+4 \geq 3+3 \\ 4+4+0 \geq 3+3+2 \end{pmatrix}$

Сложив ~~эти~~ два неравенства, получаем:

$$3(x^4y^4+y^4z^4+z^4x^4) \geq 2(x^3y^3z^2+y^3z^3x^2+z^3x^3y^2)+x^4y^2z^2+y^4z^2x^2+z^4x^2y^2.$$

$$3(x^4y^4+y^4z^4+z^4x^4) \geq x^2y^2z^2(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx)$$

$$3(x^4y^4+y^4z^4+z^4x^4) \geq (xyz)^2(x+y+z)^2$$

$$\sqrt{3(x^4y^4+y^4z^4+z^4x^4)} \geq xyz(x+y+z)$$

$$\sqrt{3} \geq \frac{xyz(x+y+z)}{\sqrt{x^4y^4+y^4z^4+z^4x^4}}$$

ЧТД.

Чистовик.

Санкт-Петербургский государственный университет

№2. $x, y, z > 0$

A_{max}? $A = \frac{xyz(x+y+z)}{\sqrt{x^4y^4+y^4z^4+x^4z^4}}$

Ответ: $\sqrt{3} = A$, ~~[illegible]~~

равенство достигается при $x=y=z$,

$$\frac{x^3 \cdot 3x}{\sqrt{3(x^2)^4}} = \frac{x^4 \cdot 3}{\sqrt{3x^8}} = \frac{3 \cdot x^4}{x^4\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \boxed{\sqrt{3}}$$

$x=y=z=1$:

$$\frac{1 \cdot 1 \cdot 1(1+1+1)}{\sqrt{1^2+1^4+1^4}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

Докажем, что $\frac{xyz(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4+(yz)^4+(zx)^4}} \le \sqrt{3}$. знаменатель $>0 \Rightarrow$ мы можем домножить на него:

$xyz(x+y+z) \le \sqrt{3}\sqrt{(xy)^4+(yz)^4+(zx)^4}$, возведём в квадрат:

$$x^2y^2z^2(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx) \le 3((xy)^4+(yz)^4+(zx)^4)$$

$$x^4y^2z^2+y^4z^2x^2+z^4x^2y^2+2x^3y^3z^2+2y^3z^3x^2+2z^3x^3y^2 \le 3x^4y^4+3y^4z^4+3z^4x^4$$

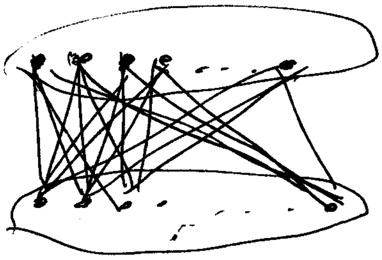
Заметим, что $x^4y^4+x^4z^4+y^4z^4 \ge x^4y^2z^2+y^4z^2x^2+z^4x^2y^2$ (1), ~~это нер-во мы докажем~~ действительно, по неравенству Мюрхеда ~~[illegible]~~ $T_{440} \ge T_{422}$, так как набор $(4\,4\,0)$ мажорирует над $(4\,2\,2)$ $\left(\begin{array}{l} 4 \ge 4 \\ 4+4 \ge 4+2 \\ 4+4+0 \ge 4+2+2 \end{array}\right)$

Чистовик.

№5. (продолжение).

Пример, что k^2 антирёбер может не хватить:

двудольный граф, в каждой доле k вершин, каждая вершина из 1-й доли соединена с каждой вершиной из 2-й доли:



У двудольного графа есть такое свойство, что в нём нет цикла нечётной длины $\Rightarrow$ цикла длины 3 нет $\Rightarrow$ нет треугольников.

Теперь докажем утверждение по индукции:

<u>База</u>: $n=2$; $2n=4$; $n^2+1=5$; всего в (полном) графе на 4 вершинах 6 рёбер, значит у нас есть 6 вариантов, чтобы выбрать, какое ребро мы не будем проводить:

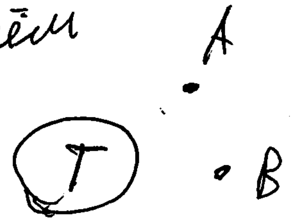

, треугольник нашёлся. База доказана.

<u>Переход</u>: $n \to n+1$, тогда $2n \to 2n+2$; $n^2+1 \to n^2+2n+2$.

Пусть у нас есть граф на $2n$ вершинах, добавим к нему 2 вершины и $(2n+1)$ ребро: ↓

№5 (продолжение)

~~1) Случай этих двух вершин соединённых ребром, тогда если мы добавим хотя бы одно ребро в граф Т, то в нём~~



~~1до~~ Пусть в графе Т $2n$ вершин и n^2 рёбер, добавим 2 вершины и $2n+1$ ребро, если мы добавим хотя бы одно ребро которое соединяет вершины, которые одновременно лежат в Т, то ~~[illegible]~~ утверждение будет верным, если мы не будем проводить рёбра из Т в Т, то все ~~вершины~~ рёбра будут ~~либо~~ содержать либо A, либо B.

1) AB - соед.
$\Downarrow$
из какой-то вершины выходит $\geq n$ рёбер.

2) AB - несоед.
то ~~[illegible]~~ из одной вершины выходит $\geq n+1$ ребро.

Заметим что если ($n+1$) проведено $n+2$ ~~[illegible]~~ ребра ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~, то треугольник найдётся.

Чтд.

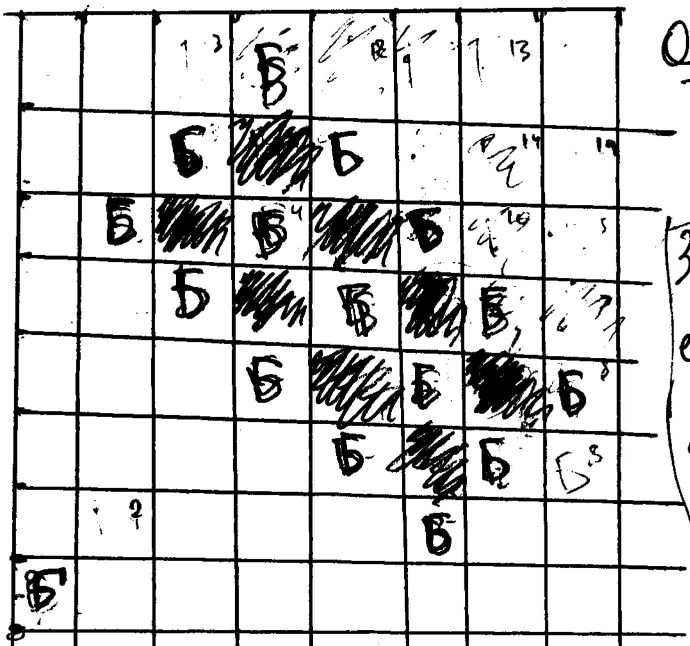
Санкт-Петербургский
государственный
университет

16

Чистовик.

№1.

Пример:



Ответ: $n=16$.

Оценка:

Заметим, что если в одной строке стоит a чёрных ладей, то белых ладей не более чем $(a+1)$. Всего 8 строк.

Пусть в 1 строке a_1 чёрных, во 2-й a_2 ..., в 8-й a_8 - чёрных, значит белых в 1 строке $\le a_1+1$, ..., в 8-й строке белых $\le a_8+1$

$\Downarrow$

всего $a_1+\dots+a_8=8$ чёрных

и белых $\le (a_1+1)+\dots+(a_8+1) = \underbrace{a_1+\dots+a_8}_{8}+8=\underline{16}$.

Значит более 16 ладей быть не может.

~~Утверждение:~~ Черновик. №~~(продолжение)~~

~~Если в графе на 2k вершинах проведено (k^2+1) ребро, то треугольник найдётся. Позже мы докажем это утверждение.~~

~~Если в графе 2k вершин,~~ №5. (Продолжение)

~~тогда~~ ~~Заметим, что если в графе будет проведено (k^2+1) рёбер~~ то ~~в нём всё~~ равно

Если в графе 2k вершин и в нём проведено наибольшее кол-во антирёбер, и в этом графе нет треугольников, то проведено не более k^2 антирёбер, если проведено $\geq k^2+1$ антирёбер то треугольник найдётся, запомним это утверждение, а позже докажем его.

Всего у нас $\frac{2k(2k-1)}{2} = (2k^2-k)$ рёбер, я говорю, что мы можем провести не более k^2 антирёбер, чтобы не было треугольника из антирёбер, если мы проведём k^2+1 антиребро, то треугольник из антирёбер обязательно будет. Значит если мы проведём менее $((2k^2-k)-(k^2+1)) = (k^2-k)$ рёбер, то обязательно найдётся три вершины которые не соединены друг с другом. Подставляем $k=8$, получаем $k^2-k = 8^2-8 = 56$ рёбер мы должны провести.

~~Если проведено ≤ 56 рёбер, то треугольник ...~~.

Докажем утверждение по индукции, напомню утверждение: Если в графе на 2k вершинах проведено $\geq(k^2+1)$ антиребро, то найдётся треугольник из антирёбер. Если проведено k^2 антирёбер, я могу привести пример, когда нет треугольника из антирёбер.

↓

Чистовик.

№5.

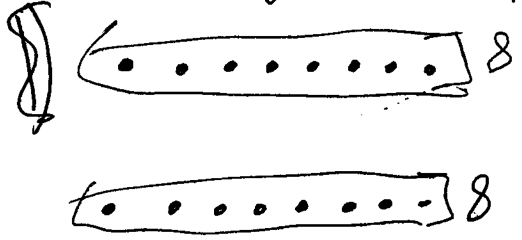
Всего играет 16 человек, значит всего ~~[illegible]~~ матчей

$\frac{16\cdot15}{2}=15\cdot8=120$.

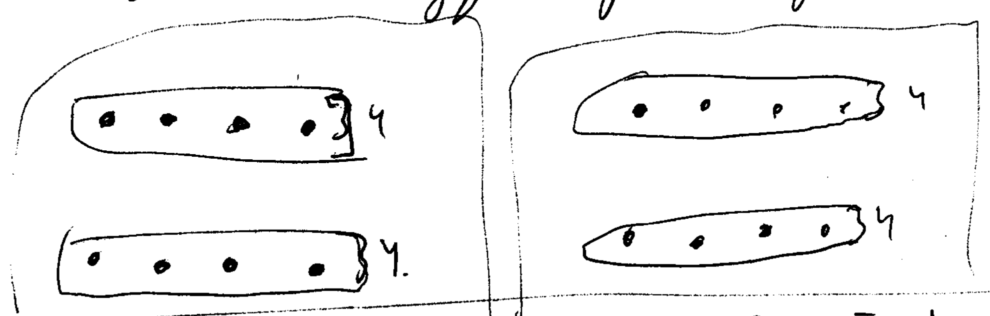
Будем соединять точку A и B, если A сыграл с B.

Разобьём граф на две доли:

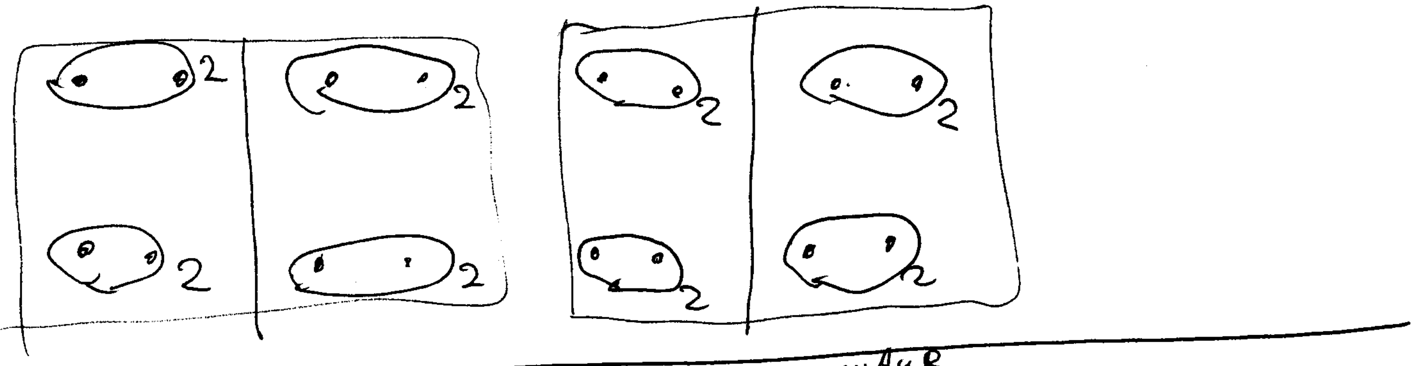
На языке графов утверждение, которое надо доказать: среди любых трёх вершин найдутся две которые соединены ребром



Разобьём каждую из долей на две части по 4 вершины:



Разобьём каждую из частей на 2 части по 2 вершины:

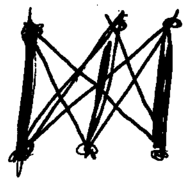


Будем проводить антирёбра между A и B, если A и B не играли, тогда утверждение задачи равносильно тому, что в любом треугольнике проведено ~~не более~~ меньше трёх антирёбер, то есть не более двух антирёбер, то есть, что нет треугольника из антирёбер, ~~если будет~~

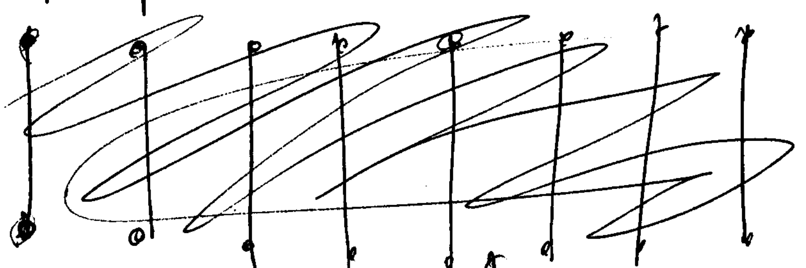
~~Утверждение~~ ~~если~~ будет проведена ~~[illegible]~~

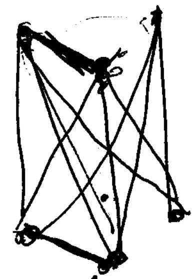
Черновик.

16 человек.



Всего рёбер $2k^2-k$.





среди любых трёх найдутся двое сыгравшие матч

$64 \quad 120 - 64 = 56 \quad 64$

... k k^2 рёбер.

... k.

$2k^2-k-k^2=k^2-k$.

нет треугольника из антирёбер.

$(2k^2-k)$ − (анти)рёбер.

~~(k^2-k) рёбер~~