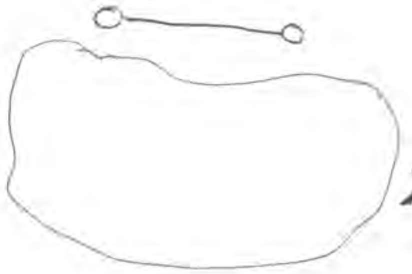
№5.

Давайте сначала ограничим ответ сверху: Если прошло более K туров: каждый участник — должен был сыграть — более K игр => рассмотрим 2 любых участников, игравших между собой (очевидно, что такие есть) => каждый из них, помимо игры между собой — должен был сыграть не менее K игр — с другими участниками, а всего участников, не считая их 2 — 2K − 2, при этом суммарно они сыграли 2K игр с этими 2K − 2 участниками => существует хотя бы 1 участник — с которым оба исходных участника — играли => все трое играли между собой => минимальное кол-во туров ≤ K + 1.



2K − 2

вершины - участники
ребра - игры.

А теперь докажем, что существует граф из 2K вершин, такой, что степени всех вершин = K, при этом никакие 3 вершины — не будут попарно соединены.

ГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

1	2	3	4	5	6	сумма
4	4	4	0	[illegible]	[illegible]	[illegible]

1786

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Санкт-Петербург

Дата 24.02.2019

* *

10–11 класс. Второй вариант

+ **1.** Имеется 9 черных ладей и n белых. При каком наибольшем n их можно расставить на шахматной доске так, чтобы одноцветные ладьи не били друг друга? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру. 17

+ **2.** Даны положительные числа x, y, z. Найдите максимальное значение выражения
$$A = \frac{xyz\,(x+y+z)}{x^4+y^4+z^4}.$$
1

+ **3.** Окружность ω единичного радиуса проходит через вершины B и C треугольника ABC и вторично пересекает его стороны AB и AC в точках K и L соответственно. На лучах BL и CK отмечены соответственно такие точки P и Q, что $BP = AC$ и $CQ = AB$. Найдите расстояние между центрами описанных окружностей треугольников APQ и KBC. 1

− **4.** Шестнадцатиричная запись квадрата натурального числа x представляет собой два одинаковых соседних блока из n цифр. Может ли n равняться 2023?

+ **5.** В однокруговом турнире по настольному теннису участвует $2k$ спортсменов. В каждом туре все участники проводят по одному матчу. Какое наименьшее число туров надо сыграть, чтобы при любом расписании игр обязательно нашлось трое теннисистов, сыгравших друг с другом? K + 1

+ **6.** Имеется три одинаковых конуса с общей вершиной, касающихся друг друга внешним образом, а также два шара, касающихся внешним образом друг друга и всех конусов. Радиусы шаров относятся как 1 : 3. Найдите угол при вершине конусов. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении). 60°

№1.

Фактически задача состоит в том, чтобы расставить как можно больше белых ладей так, чтобы после постановки 9 чёрных – одноцветные не били друг друга.

Заметим, что на пустое поле – максимум можно поставить 8 одноцветных ладей (каждая закрывает 1 вертикаль и 1 горизонталь, а всего их суммарно 16), а при постановке 1 чёрной ладьи – она будет закрывать собой 1 вертикаль и 1 горизонталь (на этой вертикали и горизонтали – можно ставить белую, при условии, что поле не бьётся с других сторон), но т.к. при постановке 8 ладей на пустое поле – каждое поле бьётся 2 раза (каждая клетка принадлежит и вертикали и горизонтали) => максимум можно доставить ~~кол-во~~ белых ладей – столько же сколько есть чёрных => 9. => всего $8+9=17$.

Ответ: $n_{max}=17$.

Пример:

Б – белые ладьи

Ч – чёрные ладьи.

Б							
				Б			
			Б	Ч	Б		
		Б	Ч	Б	Ч	Б	
	Б	Ч	Б	Ч	Б	Ч	Б
		Б	Ч	Б	Ч	Б	
			Б	Ч	Б		
				Б			

№2.

$$\frac{xyz(x+y+z)}{x^4+y^4+z^4}.$$

Для начала – заметим, что (ср. арифм. и ср. геометр.)

$$\sqrt[3]{xyz}\le\frac{x+y+z}{3}\quad \text{(Н. Коши)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow xyz\le\frac{(x+y+z)^3}{3^3}\Rightarrow$$

Возводим в степень, т.к. все положительные

$$\Rightarrow \frac{xyz(x+y+z)}{x^4+y^4+z^4}\le\frac{(x+y+z)^4}{3^3(x^4+y^4+z^4)}$$

Далее заметим, что: (ср. арифм. и ср. квадр.)

$$\frac{x+y+z}{3}\le\sqrt[2]{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}\Rightarrow$$

① $\Rightarrow (x+y+z)^4\le 3^2(x^2+y^2+z^2)^2$, а теперь, что:

$$\frac{(x^2+y^2+z^2)}{3}\le\sqrt[2]{\frac{x^4+y^4+z^4}{3}}\Rightarrow (x^2+y^2+z^2)^2\le 3(x^4+y^4+z^4)\Rightarrow$$

② $\Rightarrow 3^2(x^2+y^2+z^2)^2\le 3^3(x^4+y^4+z^4)\Rightarrow$

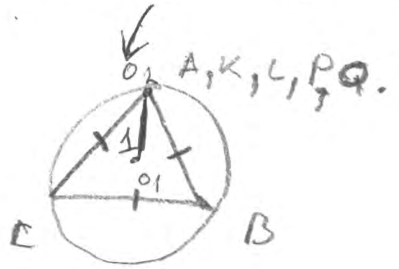
$\Rightarrow$ из ① и ②: $(x+y+z)^4\le 3^3(x^4+y^4+z^4)\Rightarrow$

$$\Rightarrow\frac{(x+y+z)^4}{3^3(x^4+y^4+z^4)}\le 1\Rightarrow\frac{xyz(x+y+z)}{x^4+y^4+z^4}\le 1\Rightarrow$$

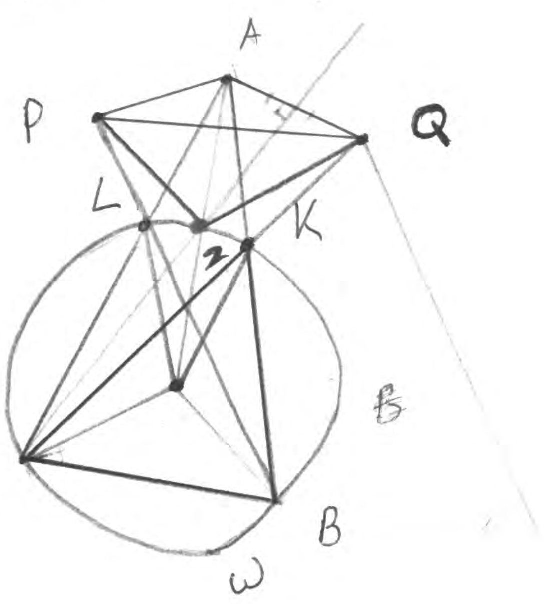
$\Rightarrow$ максимум $=1$, при $x=y=z=1$

$$\frac{1\cdot1\cdot1\,(1+1+1)}{1^4+1^4+1^4}=1.$$

№3. Расстояние между центрами описанных окружностей $= 1$, как минимум. из-за того, что в критическом случае, когда K и L - совпадают с A (ΔABC - равносторонний) - точки P и Q - тоже совпадут с A ⇒ центр описанной окружности, около APQ - в точке A, а около KCB - совпадет с центром опис. окр. с ABC, т.к. A - совпадёт с K. ⇒ расстояние между центрами $= r(\omega) = 1$.



Общий случай:



Окружность, описанная около ΔKBC - и есть ω (пересекает все 3 вершины).

$\angle CLB = \angle CKB$.

Z - равноудалена от P и A, т.к. $PB = AC$, и Z - равноудалена от A и Q, т.к. $CQ = AB$ ⇒ ⇒ Z - центр опис. окр.

Z - равноудалена от A, P, Q.

№4

$a \downarrow \qquad b \downarrow$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{n}\underbrace{\qquad\qquad}_{n}{}_{16}$ 4046 ~~зн~~ цифр.

Если по отдельности рассматривать числа a и b, то: $a = b \cdot 16^n$, т.к. тоже число, но сдвинутое на n разрядов.

При делении на 16 - любой ~~натурал~~ квадрат - имеет остатки: 0, 1, 4, 9

$1^2 \Rightarrow 1$
$2^2 \Rightarrow 4$
$3^2 \Rightarrow 9$
$4^2 \Rightarrow 0$
$5^2 \Rightarrow 9$
$6^2 \Rightarrow 4$
$7^2 \Rightarrow 1$
$8^2 \Rightarrow 0$
$9^2 \Rightarrow 1$
$10^2 \Rightarrow 4$
$11^2 \Rightarrow 1$
$12^2 \Rightarrow 0$
$13^2 \Rightarrow 9$
$14^2 \Rightarrow 4$
$15^2 \Rightarrow 1$

$\Rightarrow$ аналогично для всех > 16, т.к.

$K^2 = (m16+1)^2(m16+1)^2$, где

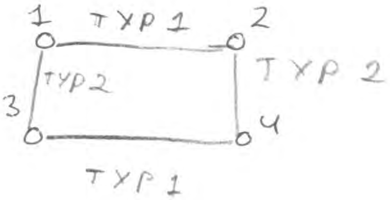
$0 < z < 16.$

№5 (продолжение).

Заметим, в терминах нашей задачи: существует расписание, т.ч. после K туров — никакие 3 теннисиста не сыграли друг с другом.

Построение графа:

научимся строить для $K = 2$:



— видно, что условие — выполняется. (из условия, что верно для K — докажем, что верно для $K+1$.)

давайте теперь увеличим K — на 1 =>

в исходный граф добавим 2, соединённые ребрам вершины следующим образом:

(не важно какая из 2 что)

3 вершины : X и y =>

=> из вершины X — проведём ребро в любую, назовём её A, из имеющихся в графе, затем из вершины y — во все, с кем соединена вершина A. (при таком соединении — условие задачи не нарушится, т.к. никакие 2 вершины из тех, с кем соединена A — не соединены между собой (иначе не выполняется условие, что верно для K), а y — не соединена ни с кем, кроме них и X, которая не соединена ни с одной, с кем соединена A). Далее из X — проведём рёбра во все оставшиеся вершины (которые не соединены ни с X, ни с y). => в таком случае — условие задачи не нарушится, т.к. никакие 3 из этих вершин попарно не соединены между собой, и никакая из них - не соединена с ~~A~~ A $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ при добавлении вершины X - условие задачи не нарушится. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ в получившимся графе - степень каждой вершины $= K+1$, но никакие 3 из них попарно не соединены $\Rightarrow$ Ч.Т.Д.

(потому что степень каждой вершины в исходном графе увеличилась на 1, а у вершины y - степень $k+1$, т.к. 1-ребро с X, и еще K - с тем, с чем соединена ~~A~~ A $\Rightarrow$ степень $x=K+1$)

$\Downarrow$

минимальное кол-во туров $> K$ $\Rightarrow$

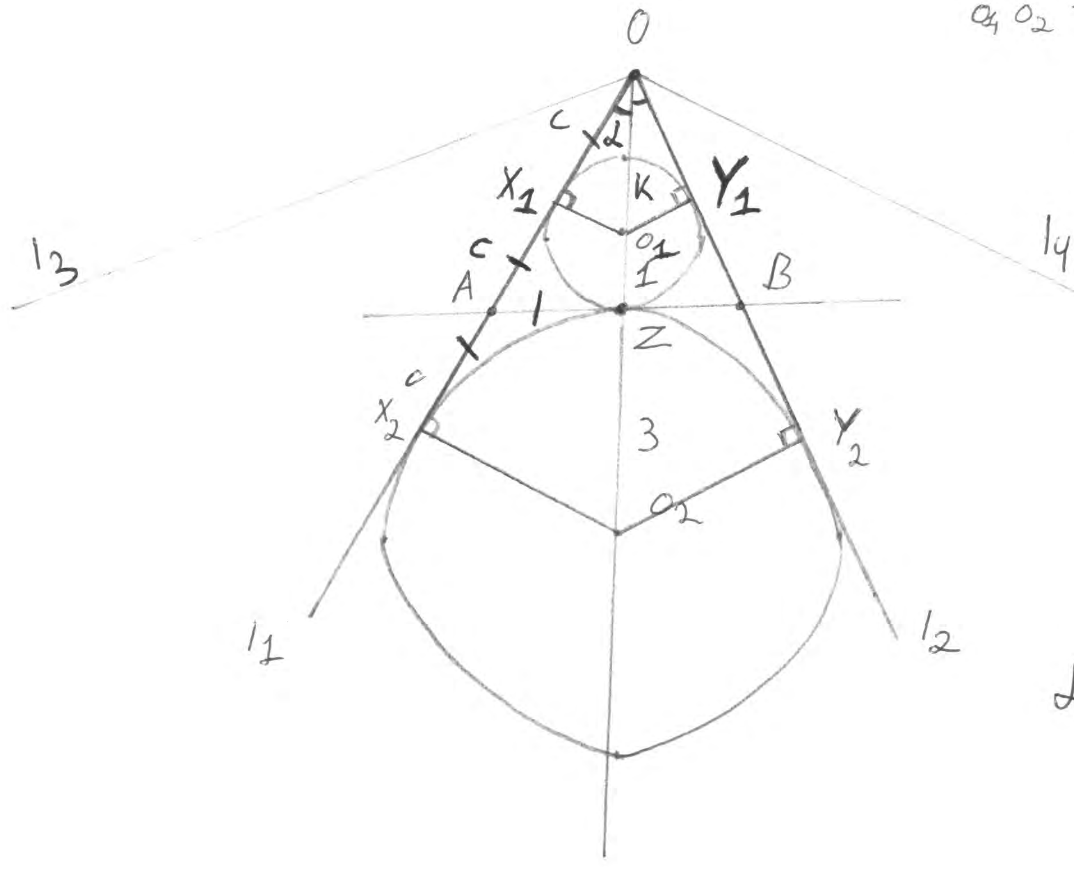
$\Rightarrow$ получаем:

$$\begin{cases} t > K \\ t \le K+1 \end{cases} \Rightarrow t = K+1 \text{ - минимальное кол-во туров.}$$

№ 6.

Рассмотрим сечение получившейся конструкции:

l_1, l_2. получаются 2 прямые, образованные общей вершиной конусов и их точками касания с шарами.
И 2 окружности.
O - вершина конусов.
O_1, O_2 - центры окружностей.



O, O_1, O_2 - лежат на одной прямой (биссектрисе угла с вершиной O).

Z - точка касания окружностей.

$\alpha = \angle X_1 O O_1$.

Проведём касательную к обеим окружностям через их точку касания, назовём её пересечение со сторонами как A и B. Теперь проведём из центра каждой из окружностей - радиус в точку касания с l_1 и l_2 (точки пересечения обозначим как X_1, Y_1 и X_2, Y_2.) А так как радиус - ⊥ касательной. (K точка касания) =>

$\Rightarrow \angle OX_1O_1 = \angle OX_2O_2 = \angle OY_1O_1 = \angle OY_2O_2 = 90°. \Rightarrow$

заметим, что $\triangle OX_1O_1 \sim \triangle OX_2O_2$ (по стороне и двум углам) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{OX_1}{OX_2} = \dfrac{X_1O_1}{X_2O_2} = \dfrac{1}{3}$. Д.т.к. расстояние от вершины до точек касания с окружностью -равны $\Rightarrow AX_1 = AZ$, а $AZ = AX_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow AX_1 = AX_2 = c. \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{OX_1}{OX_2} = \frac{OX_1}{OX_1 + 2c} = \frac{1}{3} \Rightarrow OX_1 = c = AX_1.$$

$\exists\ OO_1 = k \Rightarrow$ (опять же из подобия)

$$\Rightarrow \frac{c}{k} = \frac{3c}{k+4} \Rightarrow c(k+4) = 3ck \Rightarrow 4c = 2ck \Rightarrow$$

$\Rightarrow k = 2 \Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30° \Rightarrow$

$\Rightarrow X_1OX_2 = 60°$ = угол при вершине конуса в осевом сечении.

это не тот угол