3787

1

РГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

1	2	3	4	5	6	сумма
4	3	0,6	-	3	-	10,6

53

53

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Казань

Дата 02.03.2019

* *

10–11 класс. Второй вариант

1. Имеется 9 черных ладей и n белых. При каком наибольшем n их можно расставить на шахматной доске так, чтобы одноцветные ладьи не били друг друга? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Даны положительные числа x, y, z. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{xyz\,(x+y+z)}{x^4+y^4+z^4}.$$

3. Окружность ω единичного радиуса проходит через вершины B и C треугольника ABC и вторично пересекает его стороны AB и AC в точках K и L соответственно. На лучах BL и CK отмечены соответственно такие точки P и Q, что $BP = AC$ и $CQ = AB$. Найдите расстояние между центрами описанных окружностей треугольников APQ и KBC.

4. Шестнадцатиричная запись квадрата натурального числа x представляет собой два одинаковых соседних блока из n цифр. Может ли n равняться 2023?

5. В однокруговом турнире по настольному теннису участвует $2k$ спортсменов. В каждом туре все участники проводят по одному матчу. Какое наименьшее число туров надо сыграть, чтобы при любом расписании игр обязательно нашлось трое теннисистов, сыгравших друг с другом?

6. Имеется три одинаковых конуса с общей вершиной, касающихся друг друга внешним образом, а также два шара, касающихся внешним образом друг друга и всех конусов. Радиусы шаров относятся как $1 : 3$. Найдите угол при вершине конусов. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении).

2

Чистовик

Задача 1.

Пронумеруем столбцы от 1 до 8. Тогда пусть в 1 столбце стоит k_1 белых ладей, во втором k_2, … в 8 k_8. ~~Между двумя белыми ладьями, со стоящими в одном стол~~ И никакие 2 фигуры одного цвета не бьют друг друга. Между двумя ~~ладьями~~ ближайшими белыми ладьями, (~~межд~~ стоящими в одном столбце (между ними нет белых ладей) должна стоять хотя бы одна чёрная ладья, иначе эти белые ладьи будут бить друг друга, а мы предположили, что это не так $\Rightarrow$ В первом столбце стоит хотя бы $k_1 - 1$ чёрная ладья, во втором $k_2 - 1$, …, в 8 $k_8 - 1$. Тогда на доске 8×8 стоит хотя бы $k_1 + k_2 + .. + k_8 - 8$ черных ладей $\Rightarrow$ $k_1 + k_2 + .. + k_8 - 8 \leq 9$ (т.к. чёрных ладей всего 9) $\Rightarrow$ $k_1 + k_2 + .. + k_8 \leq 17$. С другой стороны на доске стоит $k_1 + k_2 + .. + k_8$ белых ладей $\Rightarrow$ $\max n = 17$. $\Rightarrow$ на доске может max стоять $n = 17$ белых ладей. Пример: б – белая ладья, ч – чёрная ладья

1	2	3	4	5	6	7	8
						б	
				б			
			б	ч	б	ч	б
		б	ч	б	ч	б	
	б	ч	б	ч	б		
б	ч	б	ч	б			
	б	ч	б				
		б					

~~Никакая белая ла~~ Никакие 2 фигуры одного цвета не бьют друг друга

Ответ: 17.

Чистовик

Задача 2.

Если $3(x^4+y^4+z^4) \geq (x^2+y^2+z^2)^2$ Тогда

$3x^4+3y^4+3z^4 \geq x^4+y^4+z^4+2x^2y^2+2x^2z^2+2y^2 \cdot z^2$

$2x^4+2y^4+2z^4 \geq 2x^2y^2+2x^2z^2+2y^2z^2$

По Неравенству Коши $x^4+y^4 \geq 2\sqrt[2]{x^4y^4} = 2x^2y^2$

($x^2, y^2, z^2 > 0$, т.к. $x, y, z > 0$) $x^4+z^4 \geq 2\sqrt[2]{x^4z^4} = 2x^2z^2$

$y^4+z^4 \geq 2\sqrt[2]{y^4z^4} = 2y^2z^2$

Сложим эти 3 нер-ва

и получим, что $2x^4+2y^4+2z^4 \geq 2x^2y^2+2x^2z^2+2y^2z^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3(x^4+y^4+z^4) \geq (x^2+y^2+z^2)^2$

Тогда $27(x^4+y^4+z^4) \geq 9(x^2+y^2+z^2)^2 = (3(x^2+y^2+z^2))^2$

Если $3(x^2+y^2+z^2) \geq (x+y+z)^2$ Тогда

$3x^2+3y^2+3z^2 \geq x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$

$2x^2+2y^2+2z^2 \geq 2xy+2yz+2zx$

По неравенству Коши ($x, y, z > 0$).

$x^2+y^2 \geq 2\sqrt{x^2y^2} = 2xy$

$x^2+z^2 \geq 2xz$

$y^2+z^2 \geq 2yz$

Сложив эти три нер-ва получим, что

$2x^2+2z^2+2y^2 \geq 2xy+2xz+2yz \Rightarrow$

$\Rightarrow 3(x^2+y^2+z^2) \geq (x+y+z)^2$

$(3(x^2+y^2+z^2))^2 \geq (x+y+z)^4$

Чистовик.

Санкт-Петербургский
государственный
университет

Задача 2 (продолжение).

$$27(x^4+y^4+z^4) \geqslant (3(x^2+y^2+z^2))^2 \geqslant (x+y+z)^4$$

$$x^4+y^4+z^4 \geqslant \frac{(x+y+z)^4}{27} \qquad x,y,z>0 \Rightarrow x+y+z>0$$

Тогда $\dfrac{1}{x^4+y^4+z^4} \leqslant \dfrac{27}{(x+y+z)^4}$

Тогда $A = \dfrac{xyz(x+y+z)}{x^4+y^4+z^4} \leqslant \dfrac{xyz(x+y+z)\cdot 27}{(x+y+z)^4} =$

$$= \frac{27xyz}{(x+y+z)^3}$$

По нер-ву о среднем арифметическом и среднем геометрическом для 3-х чисел

$$x+y+z \geqslant 3\sqrt[3]{xyz}$$

$$(x+y+z)^3 \geqslant 27xyz$$

$$A \leqslant \frac{27xyz}{(x+y+z)^3} \leqslant \frac{27xyz}{27xyz} = 1.$$

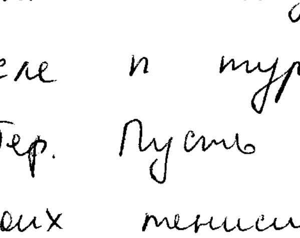
Тогда максимальное значение $A = 1$.

Ответ: 1.

Чистовик

Задача 5.

Пусть было сыграно n туров. Переформулируем нашу задачу. Спортсменов назовём вершинами графа. ~~Если двое спортсменов играли матч соедини~~ Будем соединять две вершины ребром, если эти два спортсмена играли матч. Тогда т.к. турнир круговой каждый сыграл с каждым не более 1-го одного раза ⇒ между любыми двумя ~~верш~~ вершинами проведено не более 1-го (1 или 0) ребра и каждый тур каждый из участников проводит по одному матчу. Тогда перед началом турнира в графе на $2k$ вершинах было проведено 0 рёбер, а после каждого ~~тур~~ тура кол-во рёбер увелич. на k (т.к. в каждом туре было проведено k матчей). ⇒ после n туров в графе будет проведено nk рёбер. Пусть после проведения n туров не нашлось троих теннисистов, сыгравших друг с другом. (доли) Тогда можно разделить наш граф на 2 подграфа, в одном из которых m, а в другом $2k-m$ вершин так, чтобы вершины из одного подграфа не имели общих рёбер друг с другом. (значит наш граф двудольный). ~~Тогда из перв~~ Тогда



m

~~2k-m~~
2k-m

из каждой вершины выходит по n рёбер (каждый участник сыграл по n матчей) ~~вн~~ в ~~противоп~~ ~~другут~~ в вершины другого подграфа. Тогда

Чистовик

Задача 5

(продолжение)

у ~~одной~~ одной доли выходит $n \cdot m$, а у другой $(2k-m) \cdot n$ рёбер. Т.к. ~~в графе~~ вершины из одной доли рёбрами не соединены, то $n \cdot m = (2k-m) \cdot n \Rightarrow m = 2k - m \Rightarrow m = k. \Rightarrow$ В каждой доле по k вершин.

Заметим, что нам граф можно будет поделить на две таких доли только, если кол-во рёбер в графе $\leq k^2$, иначе обязательно будет Δ (трое теннисистов, сыгравших друг с другом), т.к. в двудольном графе, в каждой доле которого по k вершин может быть max k^2 рёбер, иначе найдутся две вершины у одной доли, соед. друг с другом. Тогда ~~если теннисистов не нам~~ тройка теннисистов, сыгравших друг с другом точно найдется при любом расписании игр, если $nk > k^2 \Rightarrow n > k \Rightarrow n \geq k+1$. (т.к. n и k - целые)

~~Ответ: kn+1~~ $\Rightarrow$ ~~не~~ наименьшее число туров, которое нужно сыграть, чтобы обязательно нашлось трое теннисистов, сыгравших друг с другом $= k+1$

Ответ: $k+1$

Чистовик

Задача 3.

Санкт-Петербургский государственный университет

$AB = CQ$, $AC = BP$,

$KBCL$ – впис. четырёхуг. в ω

$\Rightarrow \angle KBL = \angle KCL \Rightarrow$

$\angle ABP = \angle QCA \Rightarrow$

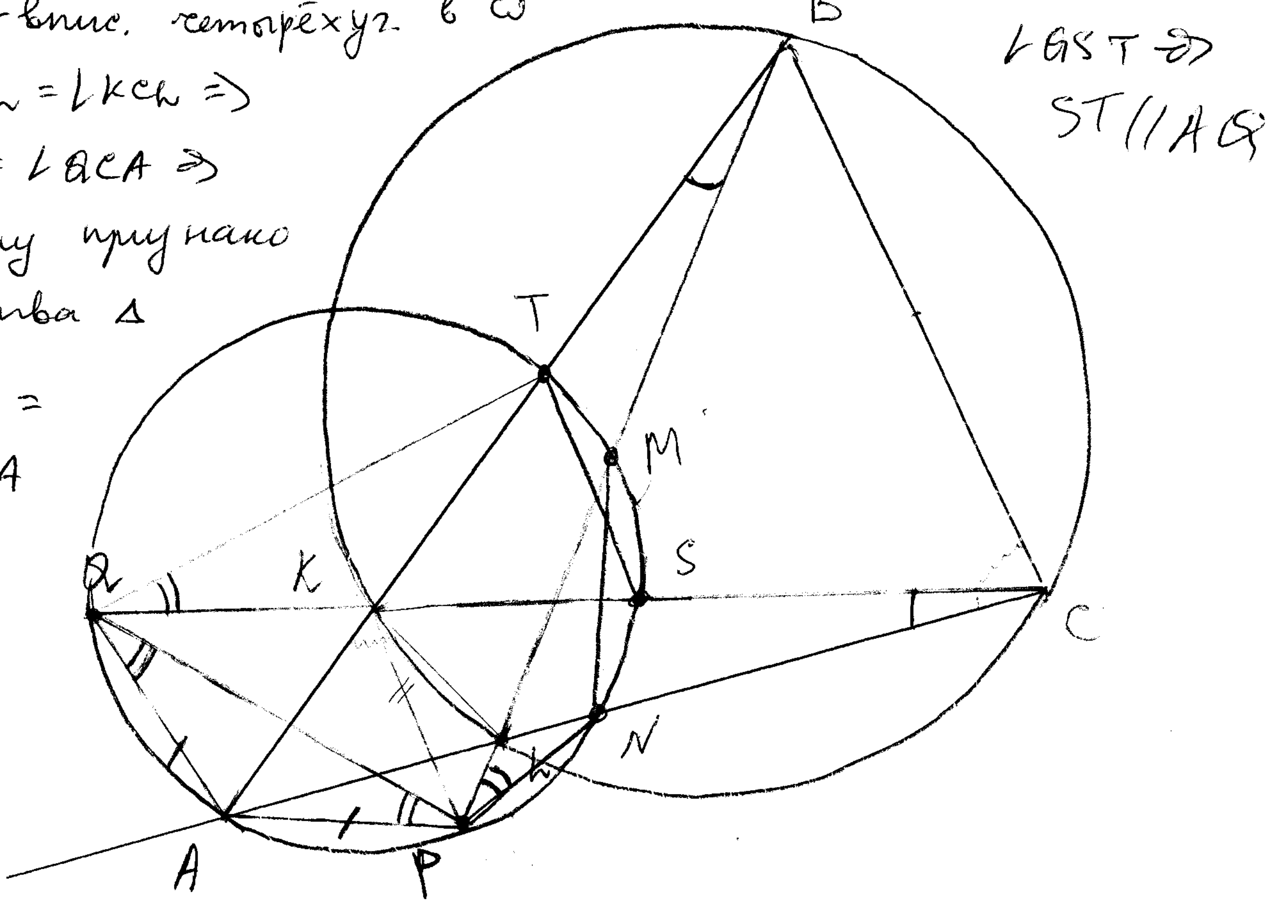
по 1-му признаку равенства Δ

$\Delta ABP =$

$= \Delta QCA$

$\Downarrow$

* $\angle QAT = \angle QST \Rightarrow ST \parallel AQ$



$\Rightarrow AQ = AP \Rightarrow \Delta AQP$ – равнобед. $\Rightarrow \angle AQP = \angle APQ$

$\Rightarrow$ т. O_1 – центр окр., опис. около $\Delta\ AQP$ лежит на биссектр., ~~медиане и высоте~~ $\angle QAP$.

$\Delta ABP = \Delta QCA \Rightarrow \angle AQC = \angle BAP \Rightarrow \angle AQP = \angle TQS =$))

$\angle QAC = \angle APB \Rightarrow \angle APQ = \angle MPN =$)) $\Rightarrow TS = MN = AP = AQ$

$\angle TQS = \angle MPN =$)) $\Rightarrow \angle TQM = \angle SQN$ $\quad TS = AQ \Rightarrow$

$AQTS$ – равнобед. трап. K – пересеч. её диаг. $\Rightarrow$ K – центр опис. окр. $\Delta\ AQP$ т.к. лежит на окр ω $\Rightarrow$ раст. между K и центром опис окр $\Delta\ KPC = 1.$ = радиусу ω Ответ: 1.

6