$=\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot(7{:}70{:}01)$ – 2017 нулей, 2018 – семерок.

$\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot(7{:}7000{:}001)=\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot(7{:}757{:}70+11)$ – 2017 – семерок, затем пятерка, затем 2017 семерок

Заметим, что в восьмеричной системе исчисления $3^2$ это 11

$\Rightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot(7{:}757{:}70+11)=\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot(7{:}757000{:}000+7{:}70+11)=$

$=\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot(7{:}70000{:}000-110000{:}000+7{:}70+11)=4(7070{:}707000{:}000-10000{:}$

${:}000+70{:}7070+1)=$ $=34{:}343334{:}34344$ ?

1008 по 34 1009 раз по 34

Задача 5

Для четного числа участников: Предположим, что для всех четных $k<n$ не существует такого турнира на $k$ вершинах, что все круче всех, то мы сможем разбить множество $k=2$, т.к. все должны быть круче всех, то мы сможем разбить все множители на подмножители, такими чтобы были двумя множителями одна направлены. Кол-во множеств не меньше двух из условия на то, что все должны быть круче всех. Когда дальше мы либо получаем четное число множеств, либо одно из множеств четное по размеру. И тогда согласно индукции не существует турнира для четного $n$.

Для нечетных $m$ можем свести к $m-2$, разбив на $A$ и $B$ и остальных, где $A$ выигрывает у остальных, а $B$ проигрывает остальным и $B$ выигрывает $A$, тогда можем убрать $A$ и $B$ и рассмотреть для наименьшего числа $m-2$. Сводим к 3, а для этого есть пример: $A$ выигрывает у $B$, $B$ выигрывает у $C$, а $C$ выигрывает у $A$

Ответ: для всех нечетных $n$.





I 9409 1

50

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | сумма |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Москва

Дата 10 марта 2019

* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *

10–11 класс. Десятый вариант

**1.** Какое наибольшее количество ладей можно расставить на шахматной доске так, чтобы каждую ладью било не более двух других? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

**2.** Числа $x, y, z$ — углы некоторого треугольника, один из которых не меньше $\frac{\pi}{2}$. Найдите максимальное значение выражения

$$A=\cos x+\cos y+\cos z+\cos(x-y)+\cos(y-z)+\cos(z-x).$$

**3.** Дан четырехугольник $ABCD$, отличный от параллелограмма. На лучах $AB$, $CB$, $CD$ и $AD$ вне сторон четырехугольника $ABCD$ выбираются соответственно точки $K$, $L$, $M$ и $N$ так, что $KL\parallel MN\parallel AC$ и $LM\parallel KN\parallel BD$. Найдите геометрическое место точек пересечения диагоналей параллелограмма.

**4.** Натуральное число $x$ в восьмеричной системе 2018-значное, и его цифры повторяются через одну. Оказалось, что восьмеричная запись $x^2$ содержит только цифры 3 и 4, причем в равном количестве. Найдите $x^2$ (в восьмеричной системе).

**5.** В однокруговом турнире по настольному теннису участвовало $n$ теннисистов ($n\geqslant 3$). Будем говорить, что игрок $A$ *круче* игрока $B$, если $A$ выиграл у $B$ или найдется такой игрок $C$, что $A$ выиграл у $C$, а $C$ выиграл у $B$. При каких $n$ по итогам турнира могло оказаться так, что каждый игрок круче всех остальных? Ничьих в теннисе не бывает.

**6.** На столе лежат два конуса с общей вершиной $O$, касаясь друг друга внешним образом. Угол между их осями симметрии равен $\operatorname{arctg}\frac{12}{5}$. Найдите максимальный угол при вершине большего из двух конусов с вершиной $O$, которые лежат на столе и касаются внешним образом первых двух конусов. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении.)

Задача 3.

Поскольку KLMN - параллелограмм $LK=NM$. Треугольники $BKL$ и $ABC$, $ACD$ и $MDN$ — подобны. Таким образом: $\frac{DK}{AB} = \frac{LK}{AC} = \frac{BL}{BC}$ и $\frac{DN}{AD} = \frac{MN}{AC} = \frac{MD}{DC}$.

Обозначим соотношение этих сторон через n. Если для некоторого $n \in (0;+\infty)$ отложить на луче $AB$, за точкой $B$ отрезок $BK$ равный $n \cdot AB$, на луче $CB$ за точкой $B$ отрезок $BL$ равный $n \cdot CB$ и т.д. $\Rightarrow$ KLMN, является параллелограммом, т.к будет выполняться $LK \parallel AC \parallel MN$ и $LK=MN$

Обозначим координаты точек через их буквы. Посчитаем теперь координаты точки пересечение диагоналей параллелограмма, обозначим точкой O

Это середина одной из диагоналей, обозначим точкой O

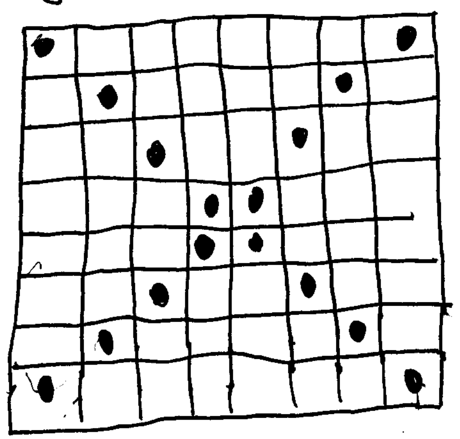
$O = \frac{M+K}{2}$ $\quad K = B+(B-A)\cdot n$

$M = D+(D-C)\cdot n$

$O = \frac{M+K}{2} = \frac{B+(B-A)\cdot n + D+(D-C)\cdot n}{2} = \frac{D+B}{2} + n\cdot\frac{B+D-(A+C)}{2}$. Тогда

Примем середину $BD$ за $X$, а середину $AC$ $Y$. Тогда $\overrightarrow{\frac{B+D-(A+C)}{2}} = \overrightarrow{YX}$. Так как $n \in (0;+\infty)$, то геометрическое место таких точек - это часть луча $YX$, за точкой $X$, не включающую эту точку

Задача 1.



По условию каждую ладью может бить не более двух ладей одновременно. Значит, каждая ладья должна быть открыта с 2-ух сторон. Представим, что у нас есть еще одна ладья, которая обойдя доску по периметру 10×10. Она не сможет побить кол-во фигур, превышающее размер параметра нашей ~~доски~~ 8×8, при этом она бьет каждую ладью 1 раза. Исходя из этого на доске с текущими условиями не может быть больше 16 ладей

Ответ: 16

Задание 4

Отметим интересное наблюдение: в восьмиричной системе исчисления признак делимости на 7 выглядит также, как признак делимости на 9 в десятичной системе исчисления. Число $x^2$ делится на 7, если сумма его цифр делится на 7 (числа 3 и 4 одинакового кол-ва)

Следовательно и x делится на 7.

Так как $ab:ab' \equiv 1008(a+b)$ по модулю 7, то $a+b$ делится на 7.

Посмотрим на последнюю цифру числа $x^2$.

По условию, она либо 3, либо 4. Т.к. $ab:ab' = 8(ab:ba)' + b$, то последняя цифра квадрата данного числа будет зависить от $b$. Переберем квадраты каждой цифры в восьмиричной системе исчисления.

$0^2=0$

$1^2=1$

$2^2=4$

$3^2=9=8+1$

$4^2=16=2\cdot 8+0$

Т.е. не одна из цифр не дает послед. цифру 3, а цифру 4 дают 2 и 6.

Кроме того $a+b$ делится на 7, значит либо $a=1$, $b=6$, либо $a=5$ $b=2$

Обратим внимание на две последние цифры $x^2$, т.к. $ab:ab' = 8^2(ab:ab')' + 8(a+b)$, то последняя цифра квадрата этого числа будет зависеть от a и b.

Возведем в квадрат оба этих варианта.

$(1\cdot 8+6)^2 = 1\cdot 8^2 + 12\cdot 8 + 36 = 3\cdot 8^2 + 0\cdot 8 + 4$ - не подходит, т.к. предпоследняя цифра 0.

$(5\cdot 8+2)^2 = 5\cdot 8^2 + 20\cdot 8 + 4 = 7\cdot 8^2 + 4\cdot 8 + 4$ - подходит, т.к. все остальные варианты невозможны, то число x в восьмеричной системе это: 5252:5252

Заметим что 52 в восьмиричной системе (42 в десятичной) это $\frac{2}{3}$, 77 ($\frac{2}{3}$ от 63 в десятичной) Т.е. $x^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot (7:7)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot (8^2\ 0{,}18 - 1)^2 =$

$= \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot (8^4\ 036 - 2\cdot 8^2\ 0{,}18 + 1) =$