KL 017

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

5351

60

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | сумма |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 2 | 4 | 3 | 0 | 6 | 12 |

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Душанбе

Дата 11.03.2019

* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *

## 10–11 класс. Первый вариант

**1.** Имеется 8 черных ладей и $n$ белых. При каком наибольшем $n$ их можно расставить на шахматной доске так, чтобы одноцветные ладьи не били друг друга? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

**2.** Даны положительные числа $x, y, z$. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{xyz\,(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4+(yz)^4+(xz)^4}}\,.$$

**3.** Дан треугольник $ABC$ с меньшей стороной $AB$. На сторонах $AB$ и $AC$ выбраны соответственно точки $X$ и $Y$ так, что $BX = CY$. Под каким углом прямая, проходящая через центры описанных окружностей треугольников $ABC$ и $AXY$, пересекает прямую $BC$, если $\angle ABC = \beta$ и $\angle BCA = \gamma$?

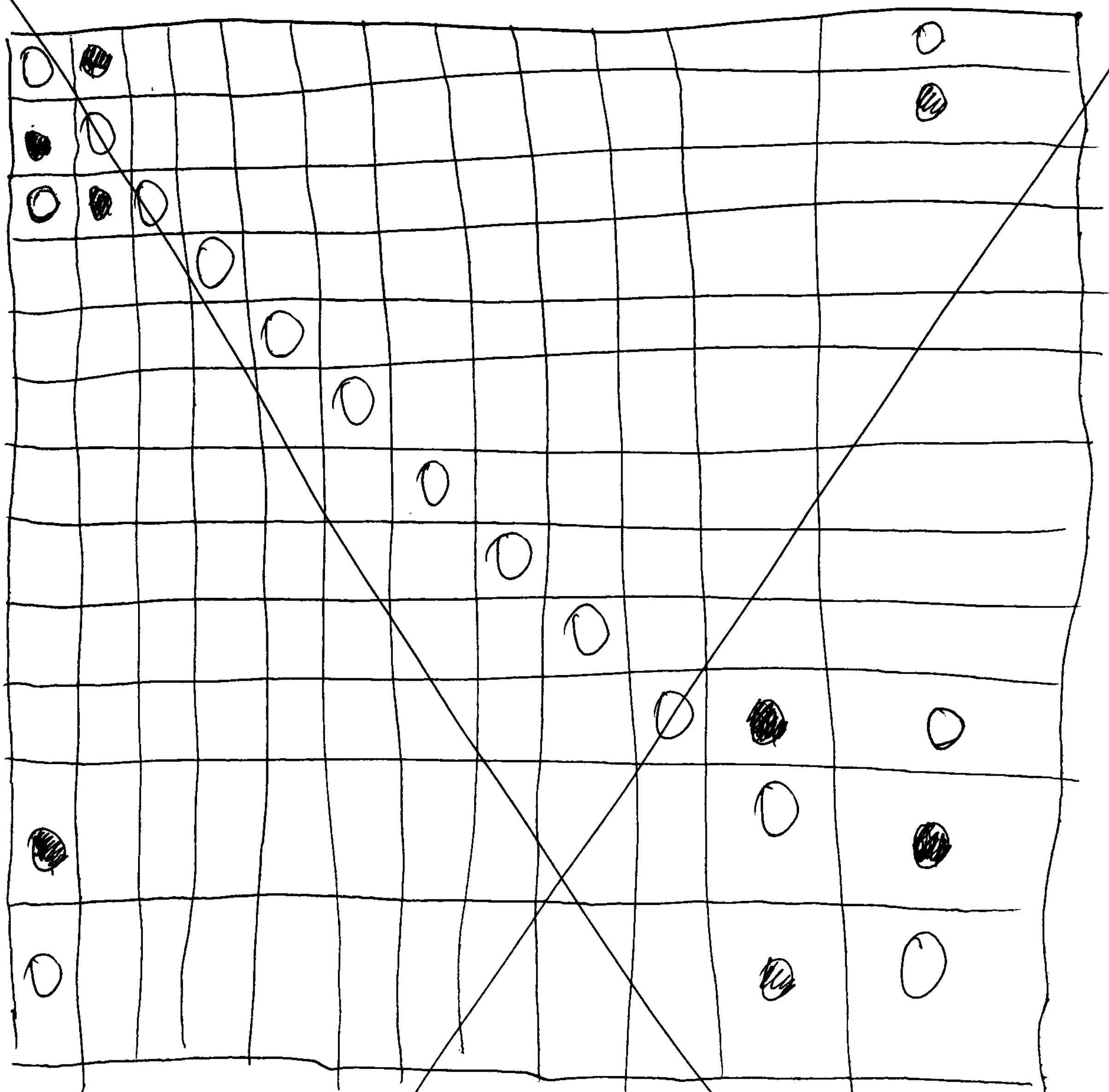
**4.** Десятичная запись квадрата натурального числа $x$ представляет собой два одинаковых соседних блока из $n$ цифр. Может ли $n$ равняться 20182019?

**5.** На однокруговой турнир по настольному теннису подало заявку 16 человек. Когда было сыграно $n$ матчей, оказалось, что среди любых трех теннисистов найдутся двое, уже сыгравших между собой. При каком наименьшем $n$ такое возможно?

**6.** Три конуса с общей вершиной, касающихся друг друга внешним образом, имеют высоту 2 и радиус основания $\sqrt{3}$. Два шара касаются внешним образом друг друга и всех конусов. Найдите отношения радиусов шаров (большего к меньшему).

Задача №1

Покажем это на рисунке примером!



1. Заполняем по диагонали ладьи белых цветов с лева на право ~~в итоге~~ получаем 12 белых ~~ладей~~ ставим
2. По краям белые ладьи и на против каждого ставим чёрной
3. Стало 14 белых и 4 чёрных ладей.

осталось и чёрных ладей в бока белых и заполняем так чтоб ни одна ~~одноцветная~~ не могла ~~бы~~ бить другого. При том что ладья не бьёт на ~~скв~~ сквозь через другую фигуру

в итоге 16 белых и 4 чёрных $n = 16$

Ответ: 16

Задача № 2

$x, y, z > 0$

$$A = \frac{xyz(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4+(yz)^4+(xz)^4}} = \frac{xyz(x+y+z)}{x^2y^2z^2\cdot\frac{(x+y+z)^2}{3}}$$

$$\left((xy)^2+(yz)^2+(xz)^2\right)^2 \geq (xy)^2(xz)^2+(xy)^2(yz)^2+(xz)^2(yz)^2 =$$

$$= x^2y^2z^2\cdot(x^2+y^2+z^2) \geq x^2y^2z^2\cdot\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^2 =$$

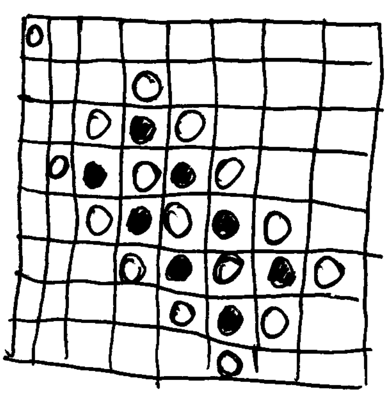
$\Rightarrow$ Ответ: $\sqrt{3}$ $\max A = \sqrt{3} \Rightarrow x=y=z$

По неравенству Коши-Шварца $x^2+y^2+z^2 \geq \frac{(x+y+z)^2}{3}$

$$\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{1}+\frac{z^2}{1} \geq \frac{(x+y+z)^2}{3}$$

Ответ: $\sqrt{3}$

Задача № 1 Покажем это на рисунке примером:



Чтобы это было максимально будем заполнять ладьи и чёрные и белые по диагонали и между каждой белой добавляем чёрную так как в условии сказано что ни одна одноцветная ладья не ~~бьёт~~ должна бить ни одну другую и они не могут бить насквозь через другую фигуру. Поставим ладьи через одну и ставив между ними ладью другого цвета

Возьмём кол-во белых за $n$

$n \leq (x_1+1)+(x_2+1)+(x_3+1)\ldots(x_8+1) = (x_1+x_2\ldots+x_8)+8=16$

Отсюда $n \leq 16$ макс белых ладей когда $n=16$

Привели пример $n=16$

Ответ: 16

2