А так как мы посчитали каждую ладью по два раза, то на доске можно расставить не более 17 ладей;

Пример такого расположения:
(o – белые, b – черные)

				o			
			o	b	o		
		o	b	o	b	o	
	o	b	o	b	o		
o	b	o	b	o			
	o	b	o				
		o				b	o
						o	

2

Ответ: 17

N5 ① Приведу пример:
когда было проведено K ~~[illegible]~~ туров – и не нашлось таких трёх игроков, что каждый сыграл с каждым.

② Возьмём любого игрока: он сыграл с K теннисистами. Всех игравших с ним: множество N. Неигравших с ним: множество M., таких будет: K-1.

③ Пусть теперь каждый из множества N сыграл с каждым игроком из множества M. Получим, что каждый сыграл по K-матчей, а также не нашлось трёх игроков которые играли между собой.

④ Теперь докажем, что K+1 туров будет достаточно для того чтобы выполнить условие задачи:
Возьмём случайного игрока, назовём – $\boxed{\text{Игрок 1}}$.
Среди тех K+1 игроков, с которыми он играл выберем случайного, назовём – $\boxed{\text{Игрок 2}}$. Игроков с которыми не играл $\boxed{\text{Игрок 1}}$ осталось K – 2. Т.к. мы знаем что $\boxed{\text{Игрок 2}}$ также сыграл K+1 матчей, поэтому обязательно найдётся игрок, который сыграл и с $\boxed{\text{Игроком 1}}$ и с $\boxed{\text{Игроком 2}}$

⑤ Получим, что после проведения K+1 туров – всегда найдутся, такие 3 человека, которые играли между собой.

• Значит, минимальное достаточное количество турниров будет: K+1

Ответ: K+1

80

РГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

9915

1	2	3	4	5	6	сумма
4	4		4	4	0	16

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада ~~г. Королёв~~ г. Владимир

Дата 16.03.19

* *

10–11 класс. Второй вариант

• **1.** Имеется 9 черных ладей и n белых. При каком наибольшем n их можно расставить на шахматной доске так, чтобы одноцветные ладьи не били друг друга? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

• **2.** Даны положительные числа x, y, z. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{xyz\,(x+y+z)}{x^4+y^4+z^4}.$$

3. Окружность ω единичного радиуса проходит через вершины B и C треугольника ABC и вторично пересекает его стороны AB и AC в точках K и L соответственно. На лучах BL и CK отмечены соответственно такие точки P и Q, что $BP = AC$ и $CQ = AB$. Найдите расстояние между центрами описанных окружностей треугольников APQ и KBC.

• **4.** Шестнадцатиричная запись квадрата натурального числа x представляет собой два одинаковых соседних блока из n цифр. Может ли n равняться 2023?

• **5.** В однокруговом турнире по настольному теннису участвует $2k$ спортсменов. В каждом туре все участники проводят по одному матчу. Какое наименьшее число туров надо сыграть, чтобы при любом расписании игр обязательно нашлось трое теннисистов, сыгравших друг с другом?

6. Имеется три одинаковых конуса с общей вершиной, касающихся друг друга внешним образом, а также два шара, касающихся внешним образом друг друга и всех конусов. Радиусы шаров относятся как 1 : 3. Найдите угол при вершине конусов. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении).

№2 $A=\frac{xyz\cdot(x+y+z)}{x^4+y^4+z^4}$: $x,y,z>0$.

① Запишем неравенство из 3-х переменных a, b, c:

$$(a^2+b^2+c^2)\cdot(b^2+c^2+a^2)\geq(ab+bc+ac)^2$$

Далее: Извлекаю квадратный корень, получу:

$$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ac$$

② Далее мы можем заметить, что:

$$x^4+y^4+z^4\geq x^2\cdot y^2+y^2\cdot z^2+x^2\cdot z^2$$

Следует, если $a=x^2$, $b=y^2$, $c=z^2$ $\Rightarrow$ тогда $A=\frac{xyz\cdot(x+y+z)}{x^4+y^4+z^4}\leq\frac{xyz(x+y+z)}{(x\cdot y)^2+(y\cdot z)^2+(x\cdot z)^2}=$

$$=\frac{x^2\cdot y^2\cdot z+x\cdot y^2\cdot z+xy\cdot z^2}{(xy)^2+(yz)^2+(xz)^2}.$$

③ Необходимо сделать замену:

$xy=a>0$

$yz=b>0$

$xz=c>0$

$$A\leq\frac{ab+bc+ac}{a^2+b^2+c^2}$$

Из этого, мы получаем, что $A\leq1$

Равенство достигается при:

$x=y=z$

$$A=\frac{x^3\cdot3x}{3\cdot x^4}=1$$

Ответ: 1.

N4

1. Пусть число которое образуется блоком цифр — это a

Тогда понятно, что $x^2=(16^{2023}+1)\cdot a$

Заметим, что если $(16^{2023}+1)$ делиться на некое p^2, то мы можем выбрать $x=\frac{16^{2023}+1}{p}$ и получить

$$x^2=(16^{2023}+1)\cdot\frac{16^{2023}+1}{p^2}$$

Теперь, необходимо доказать, что $16^{2023}+1$ делится на 17^2.

$$16^{2023}+1=(16+1)\cdot(16^{2022}-16^{2021}+\ldots+16^1+1)$$

- Можно заметить, что каждое слагаемое во второй скобке сравнимо с единицей по модулю 17.

Так как слагаемых 2023, а это число делится на 17, следовательно, вторая скобка, тоже делится на 17.

Значит $16^{2023}+1$ делится на 17^2.

Если $x=\frac{16^{2023}+1}{17}$, то $x^2=(16^{2023}+1)\cdot\frac{16^{2023}+1}{289}$.

Но в этом числе слишком мало знаков, потому что

$$\frac{16^{2023}+1}{289}<16^{2022}.$$

Необходимо домножить x на 16, тогда

$$x=(16^{2023}+1)\cdot\frac{16}{17}\ ;\quad x^2=(16^{2023}+1)\cdot\underline{256}\cdot\frac{16^{2023}+1}{289}$$

$256\cdot\frac{16^{2023}+1}{289}$ K|| в восьмеричной системе исчисления записывается ровно 2023, восьмеричная запись x^2 будет представлять из себя два одинаковых блока из n цифр.

Из этого следует: n может равняться 2023.

N1

Посмотрим сколько белых ладей можно разместить при наличие 9 чёрных, в каждой строчке и в каждом столбце может стоять только на одну белую ладью больше, чем там же стоит чёрных. (~~Белые~~ и черные стоят через одну)

Тогда просуммируем количество белых ладей по всем строкам и столбцам:

$18+16=304$