нет одного ребра, тогда очевидно выберем двойку тех вершин
вершины
∆ ту которых есть все рёбра, тогда очевидно, что они будут соединены с двумя другими и будут образовывать треугольник

Переход: • Пусть до 2k все доказано, тогда докажем для графа на 2k+2 вершинах.

$((k+1)^2+1)-(k^2+1) = 2k+1$

• Выберем вершины соединённые ребром, осталось 2k вершин:

меньше k^2+1 ребра, иначе есть ∆-ик, тогда ребер осталось хотябы $k^2+2k+2-k^2+1 = 2k+1$, т.е от выбранных вершин, max для 2k в граф с 2k-вершинами идёт хотябы 2k+1 ребро, тогда по принципу Дирихле найдётся вершина из 2k-вершин соединённая с каждой из 2ух выбранных => найдётся ∆-ик, что и требовалось доказать

⊛ Рассмотрим турнир, как граф где вершины-игроки, а матчи-рёбра.

• Тогда если не будет проведено больше 8^2 ребер (т.е. хотябы 8^2+1) найдётся ∆-ик из вершин в котором нет рёбер (по лемме - рассматривая антирёбра), т.е найдётся тройка игроков в которой не найдётся пара сыгравших. Тогда ребер надо провести хотябы:

2

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

1

1425

1	2	3	4	5	6	сумма
4	4	4	0	4		16

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Санкт-Петербург

Дата 24 февраля 2019

* *

10–11 класс. Первый вариант

1. Имеется 8 черных ладей и n белых. При каком наибольшем n их можно расставить на шахматной доске так, чтобы одноцветные ладьи не били друг друга? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Даны положительные числа x, y, z. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{xyz\,(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4+(yz)^4+(xz)^4}}.$$

3. Дан треугольник ABC с меньшей стороной AB. На сторонах AB и AC выбраны соответственно точки X и Y так, что $BX = CY$. Под каким углом прямая, проходящая через центры описанных окружностей треугольников ABC и AXY, пересекает прямую BC, если $\angle ABC = \beta$ и $\angle BCA = \gamma$?

4. Десятичная запись квадрата натурального числа x представляет собой два одинаковых соседних блока из n цифр. Может ли n равняться 20182019?

5. На однокруговой турнир по настольному теннису подало заявку 16 человек. Когда было сыграно n матчей, оказалось, что среди любых трех теннисистов найдутся двое, уже сыгравших между собой. При каком наименьшем n такое возможно?

6. Три конуса с общей вершиной, касающихся друг друга внешним образом, имеют высоту 2 и радиус основания $\sqrt{3}$. Два шара касаются внешним образом друг друга и всех конусов. Найдите отношения радиусов шаров (большего к меньшему).

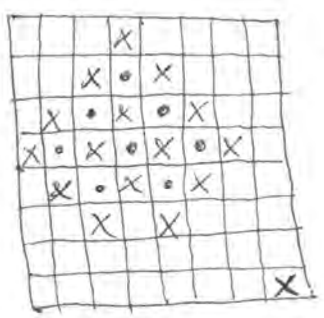
№1

Рассмотрим вертикаль. Если там нет чёрных ладей, то в неё можно поставить max 1 белую (иначе белые будут бить друг друга).

• При постановке чёрной ладьи между сторонами или чёрной ладьёй и стороной или чёрными ладьями, та часть куда поставили разбивается на 2, в которые при наличии в них клеток можно поставить белую ладью (только 1 иначе в части будут бить друг друга 2 белых, т.к. в определённых нами частях нет чёрных), т.е. при постановке чёрной ладьи добавилось max 1 часть (т.к. разбили 1 часть на 2, в которых возможность клетки), т.е. можно добавить max 1 ладью.

• Тогда вертикалей 8, значит изначально можно поставить 8 белых, а затем добавить 8 чёрных и добавить max 8 белых, т.е. всего белых max $8+8=16$.

• Пример на 16:



• - чёрная
x - белая

№2

$$x^4y^4+x^4z^4+y^4z^4=\frac{1}{2}\left(x^4(y^4+z^4)+y^4(x^4+z^4)+z^4(y^4+x^4)\right)\ge$$
$$\ge\frac{1}{2}\left(2x^4y^2z^2+2y^4x^2z^2+2z^4y^2x^2\right)=x^4y^2z^2+y^4x^2z^2+z^4y^2x^2=$$
$$=x^2y^2z^2(x^2+y^2+z^2)$$

$$A=\frac{xyz(x+y+z)}{\sqrt{x^4y^4+z^4y^4+x^4z^4}}\le\frac{xyz(x+y+z)}{\sqrt{x^2y^2z^2(x^2+y^2+z^2)}}=\frac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\le(*)$$

т.к. знаменатель неувеличили

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}\ge\frac{x+y+z}{3}\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ge\frac{x+y+z}{\sqrt{3}}$$

неравенство о средних

$$(*)\le\frac{x+y+z}{\frac{x+y+z}{\sqrt{3}}}=\sqrt{3}$$, т.е. $A\le\sqrt{3}$

• $\sqrt{3}$ достигается при $x=y=z=1$:

$$A=\frac{1\cdot1\cdot1(1+1+1)}{\sqrt{(1\cdot1)^4+(1\cdot1)^4+(1\cdot1)^4}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

Ответ: $\sqrt{3}$

№5

Лемма: • Если в графе $2n$ вершин ($n\ge2$) и n^2+1 ребро, то в таком графе есть треугольник (т.е. 3 вершины попарно соединённые рёбрами) - частный случай теоремы Турана

• Докажем по индукции:

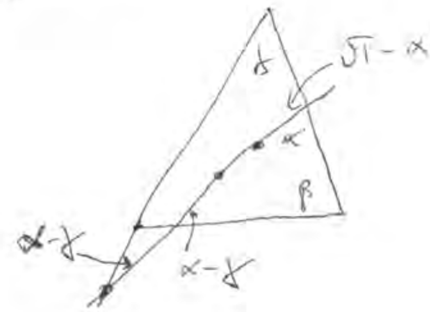
• База: $n=2$

$2^2+1=5$

$\frac{4\cdot3}{2}=6$ - всего рёбер можно провести, т.к.

№3 (продолжение)

• Если OQ пересекает сначала AB, а затем AC – рассуждения аналогичны (все);

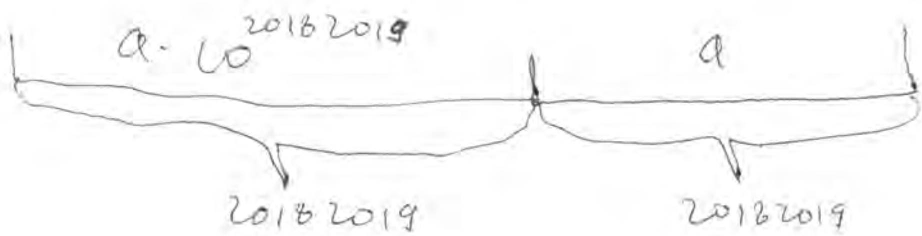


• И если △ABC – тупоугольный рассуждения тоже будут аналогичны с точностью до выбора обозначаемых точек.

Ответ: $\dfrac{\pi-\beta+\gamma}{2}$

№4

Число имеет вид $x^2 = a\cdot 10^{2018\,2019} + a$, где a – это число образованное цифрами из блока в 2018 2019 цифр,



Тогда $x^2 = a(10^{2018\,2019}+1)$

в x^2: 2 · 2018 2019 цифр, т.е тогда $x < 10^{2018\,2019}$, но больше $10^{2018\,2018}$, при этом $10^{2018\,2019}+1 > 10^{2018\,2019}$, но все его множители больше 10, а значит при их переносе в a, получим число меньше b, но тогда такого числа нет

№5 (продолжение).

$\frac{16\cdot 15}{2} - 8^2 = 8\cdot 15 - 8^2 = 8\cdot 7 = 56$

всего мах   мах можно не провести

Пример на 56 партий:

Разделим 16 теннисистов на 2 группы по 8 и пусть каждый сыграл со всеми в своей группе, тогда ~~всего~~ партий: $2\cdot \underbrace{\frac{8\cdot 7}{2}}_{\text{внутри группы}} = 56$

Выбирая 3 их, мы точно выберем 2 их из одной группы, но они сыграли, т.е. то что нам нужно

Ответ: 56 матчей

№3

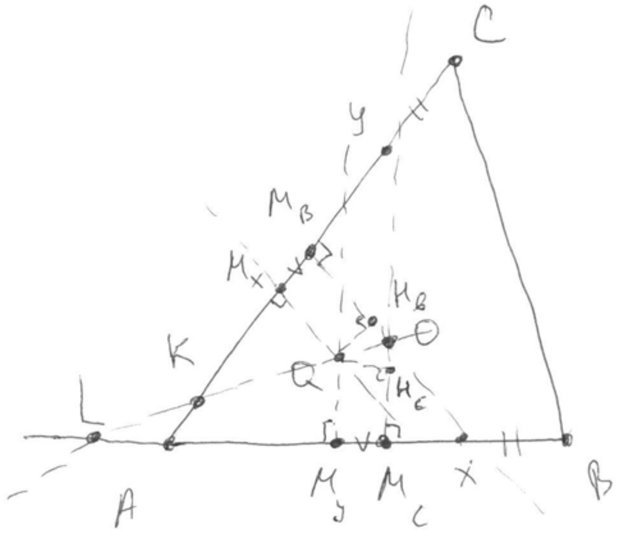
Центр описанной окружности это точка пересечений серединных перпендикуляров.

Тогда центр опис окр. $\triangle ABC$ - это точка пересения сер. перп к AB и AC, а для $\triangle AXY$ это т. пересечения сер. перп к AX и AY, но $XB = YC$, а значит то на сколько сдвинуты середины AX и AY от соответственно ~~AB~~ середин AB и AC равно, т.к равно половине $XB = YC$

(продолжение на обороте)

O – центр опис. окр △ABC

Q – центр. опис. окр. △AXY

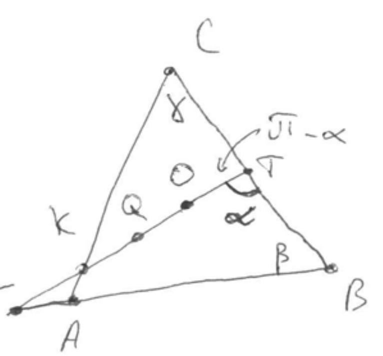


• Продлим OQ до пересечения с AC и AB.

• Опустим перпендикуляр из Q на M_CO и из Q на M_BO, тогда $M_XM_BH_BQ$ и $M_CM_YQH_C$ – прямоугольники $\Rightarrow QH_C = M_YM_C = M_XM_B = QH_B$, а тогда прямоугольные $\triangle QH_BO$ и $\triangle QOH_C$ – равны (QO – общая), а тогда равны: $\angle H_BQO = \angle OQH_C$.

• $QH_C \perp OM_C$ и $LM_C \perp OM_C \Rightarrow QH_C \parallel LM_C \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle KLA = \angle OQH_C$

• Аналогично $\angle CKO = \angle H_BQO$, а $\angle LKA = \angle CKO =$
$= \angle H_BQO = \angle OQH_C = \angle KLA$.



тогда в $\triangle KCT$: $\angle CKT = \pi - \gamma - \pi + \alpha = \alpha - \gamma$, тогда $\angle LKA = \alpha - \gamma \Rightarrow \angle KLA = \alpha - \gamma$, зн. в $\triangle LTB$: $\pi = \alpha + \beta + \alpha - \gamma$

$2\alpha = \pi - \beta + \gamma$

$\alpha = \dfrac{\pi - \beta + \gamma}{2}$ $(AB < AC \Rightarrow \gamma < \beta \Rightarrow \alpha < \frac{\pi}{2}$