80

Выход 10^{46} – 10^{47}

О-22

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

I

1	2	3	4	5	6	сумма
4	0	4		4	4	16

7593

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (8–9 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Саранск

Дата 13.03.2019

* *

8–9 класс. Первый вариант

1. Маша на свой день рождения принесла в школу конфеты, оставила несколько конфет себе, а остальные раздала шестерым своим подружкам. Оказалось, что у всех девочек разное число конфет и количество конфет у любых четырех девочек больше, чем у трех оставшихся. Какое наименьшее количество конфет Маша могла оставить себе?

2. При каких a квадратные трехчлены $x^2 + ax - 2$ и $2x^2 - 3x + 2a$ имеют общий корень?

3. На столе лежит 2019 камней. Петя и Вася играют в игру по следующим правилам. Ходят по очереди, начинает Петя. За один ход можно взять со стола 1 или 2 камня, но один и тот же игрок два раза подряд не может брать 2 камня. Проигрывает не имеющий хода. Кто из игроков сможет обеспечить себе победу вне зависимости от игры противника?

4. Для любых положительных чисел a, b и c докажите неравенство

$$\frac{a}{2a^2+b^2+c^2} + \frac{b}{a^2+2b^2+c^2} + \frac{c}{a^2+b^2+2c^2} \leqslant \frac{9}{4(a+b+c)}.$$

5. Внутри треугольника ABC выбрана такая точка D, что $\angle ABD = \angle ACD$ и $\angle ADB = 90°$. Точки M и N середины сторон AB и BC соответственно. Найдите угол $\angle DNM$.

6. Найдите все пары простых чисел p и q, для которых $p^2 + pq + q^2$ является точным квадратом.

№5

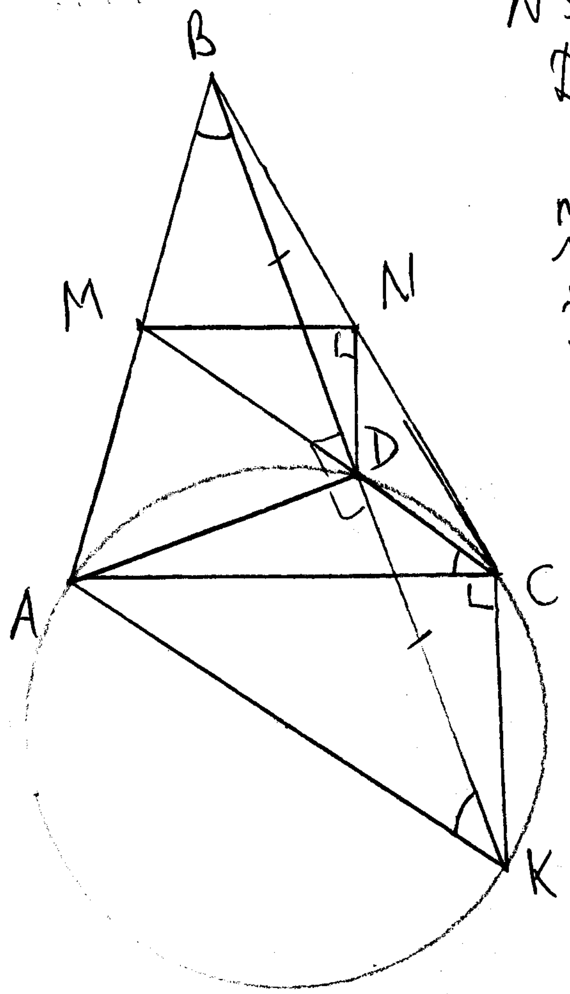
Дано: $\triangle ABC$. $\angle ABD = \angle ACD$, т. $D \in \triangle ABC$

$\angle ADB = 90°$

т. M - серед. AB; т. N - серед BC.

Найти: $\angle DNM$ - ?

Решение:



Доп. постр.: т. K $\in$ пр. BD так, что $BD = DK$

$BD = DK$ (по постр.) $\Rightarrow$ AD - медиана

$\angle ADB = 90°$ (по усл.) $\Rightarrow$ AD - высота $\Big| \Rightarrow$

$\triangle ABK$ - р/б $\triangle$ (по призн.) $\Rightarrow \angle ABD = \angle AKD$ (по св-ву р/б $\triangle$)

$\angle ACD = \angle ABD = \angle AKD \Rightarrow$ чет-к AKCD - вписан. (т.к. сторона AD видна из точек K и C под равными углами)

$\Downarrow$

$\angle ADK = \angle ACK$ (как вписан., опир. на дугу AK)

$\parallel$

$90°$ (т.к. ADK - прямая)

т. N - серед. BC (по усл.)

т. D - серед. BK (по постр.) $\Big| \Rightarrow$ DN - средняя линия в $\triangle BCK$ (по опр.)

$\Downarrow$

$DN = \frac{1}{2} KC$ (по св-ву средней линии)

т. N - серед. BC (по усл.)

т. M - серед. AB (по усл.) $\Big| \Rightarrow$ MN - средняя линия в $\triangle ABC$ (по опр.)

$\Downarrow$

$MN = \frac{1}{2} AC$ (по св-ву средней линии)

т. M - серед. AB (по усл.)

т. D - серед. BK (по постр.) $\Big| \Rightarrow$ DM - средняя линия в $\triangle ABK$ (по опр.)

$\Downarrow$

$MD = \frac{1}{2} AK$ (по св-ву средней линии)

Тогда $\frac{DN}{KC} = \frac{MN}{AC} = \frac{MD}{AK} = \frac{1}{2} \Rightarrow \triangle MDN \sim \triangle ACK$ (по 3 пропорциональным сторонам)

$\Downarrow$

$\angle DNM = \angle ACK = \angle ADK = 90°$

Ответ: $\angle DNM = 90°$.

№1

Обозначим за x (шт.) - наименьшее количество конфет, которое Маша могла оставить себе. Заметим, что если Маша оставила себе наименьшее количество конфет из возможных, то Маша оставила себе наименьшее количество конфет среди её подруг (иначе Маша могла оставить себе то количество конфет, которое у девочки с наименьшим количеством конфет среди её подруг). Тогда у девочки, у которой количество конфет меньше, чем у всех её подруг, кроме Маши $\geq x+1$ конфета.

У следующей $\geq x+2$ к.
У третьей по возрастанию кол-ва конфет.
У четвёртой $\geq x+3$ к.
У пятой $\geq x+4$ к.
У шестой $\geq x+5$ к.
У седьмой $\geq x+6$ к.

Каждое следующее количество конфет $\geq$ предыдущего (по возрастанию) хотя бы на 1 т.к. у всех девочек разное количество конфет. При этом у любых четырёх девочек конфет больше, чем у трёх оставшихся.

Возьмём за эти четырёх девочек - девочек с наименьшим кол-вом конфет. Тогда по условию:

$$x+(x+1)+(x+2)+(x+3) > (x+4)+(x+5)+(x+6)$$
$$4x+6 > 3x+15$$
$$x > 9 \Rightarrow x \geq 10.$$

Тогда наименьшее количество конфет, которое могла оставить себе Маша $=10$. Пример: $x=10$ $x+1=11$ $x+2=12$ $x+3=13$ и т.д. $x+6=16$

Если четыре наименьших числа из 7 возможных больше оставшихся, $\underbrace{10+11+12+13}_{47} > \underbrace{14+15+16}_{45}$ т.к. в других неравенствах левая часть будет увеличиваться (т.к. 4 наименьших числа это наименьшее возможное значение левой части неравенства), а правая уменьшаться (т.к. 3 наибольших числа это наибольшее возможное значение правой части неравенства).

Примечание: Если в ряду, составленном по возрастанию конфет у семи девочек, какие-то соседние числа отличаются $>$, чем на 1, то и все числа, стоящие в ряду возрастания после этой пары чисел отличаются от наибольшего в паре $>$, чем на 2; больше, чем на 3 и т.д. Что только увеличивает x, как разность суммы ~~чисел~~ трёх наибольших чисел и суммы четырёх наименьших.

Ответ: 10.

Выход $10^{46} - 10^{47}$ О-22

ВЕРСИТЕТ

№3

Ответ: первый игрок может обеспечить себе победу вне зависимости от игры противника при следующей стратегии.

Стратегия:

1-ый ход 1-го игрока: 1 камень.

1-ый ход 2-го игрока: 1 камень — 1 камень

2-ой ход 1-го игрока: 2 камня — 2 камня

1 камень

$\underbrace{}_{4 \text{ камня}}$ $\underbrace{}_{4 \text{ камня}}$

Таким образом, за первые 3 хода 2-ух игроков первый, вне зависимости от хода второго сможет набрать 4 камня. Тогда останется $2019-4=2015$ камней.

n-ый ход 2-го игрока: 1 камень — 2 камня

n+1-ый ход 1-го игрока: 1 камень — 1 камень

n+1-ый ход 2-го игрока: 1 камень — 2 камня — 1 камень (т.к. 2 раза подряд взять по 2 камня нельзя)

2-ой ход 1-го игрока: 2 камня — 1 камень — 1 камень

5 камней — 5 камней — 5 камней

~~$\in [2, 4, 6$~~, где $n \geq 2$. За каждые такие 4 хода 2-ух игроков после хода 1-го игрока количество камней уменьшается на 5 вне зависимости от ходов второго (n+1-ым ходом 1-ый игрок всегда сможет взять 1 камень независимо от того, какой его ход был до этого). Так как $2015 \vdots 5$, то когда останется 5 камней 1-ый игрок также заберёт последний камень и выиграет.

№2

при $a=-1$

$x^2-x-2=0$

$D=1+8=9$

$x_1=\frac{1-3}{2}=-1$

$x_2=\frac{1+3}{2}=2$

$2x^2-3x-2=0$

$D=9+16=25$

$x_3=\frac{3-5}{4}=-\frac{1}{2}$

$x_2=\frac{3+5}{4}=2$ — общий корень 2.

реди,

одряд

победу

. Точки M

адратом.

N6

Чистовик

$p^2+pq+q^2=a^2$, где p и q — простые числа

$\Updownarrow$

$p^2+2pq+q^2=a^2+pq$

$\Updownarrow$

$(p+q)^2-a^2=pq$

$\Updownarrow$

$(p+q-a)\cdot(p+q+a)=p\cdot q$

Если $p+q-a=p$, то $a=q$, а значит $p=0$ (аналогично если $p+q-a=q$)

Если $p+q+a=p$, то $a=-q$, а значит $p^2-pq=0$ и $p\neq q$ (иначе $a=p=q$, $a^2<p^2+q^2$)

$p=0$ (аналогично, если $p+q+a=q$)

Тогда, т.к. p и q — простые числа и других простых множителей быть не может.

$\begin{cases} p+q-a=1 \\ p+q+a=pq \end{cases}$ $\quad 2\cdot(p+q)=pq+1$

($a>0$, т.к. p и $q>0 \Rightarrow p^2+pq+q^2>0$) $\begin{cases} p+q=a+1 \\ pq=2a+1 \end{cases}$ $\quad pq+p+q+1=3a+3$

$(p+1)(q+1)=3\cdot(p+q)$, т.к. $p+q=a+1$

1) p и q — нечётные простые числа:

Если $p=q=2$, то $p^2+pq+q^2=4+4+4=12\neq a^2$

Если не умоляя общности $p=2$, то $\cancel{3}\cdot(q+1)=\cancel{3}\cdot(q+2)$

$q+1=q+2$, чего быть не может.

2) Предположим, что $p,q \not\vdots\, 3$

$p+1$ или $q+1 \,\vdots\, 3 \Rightarrow p$ или $q \equiv_3 2$

Не умоляя общности $p\equiv_3 2$, тогда $q\equiv_3 1 \Rightarrow p+q\equiv_3 0$

Но т.к. $a+1=p+q \Rightarrow a\equiv_3 2 \Rightarrow a^2\equiv_3 1$.

$p\equiv_3 2 \Rightarrow p^2\equiv_3 1$; $q\equiv_3 1 \Rightarrow q^2\equiv_3 1$ и $p\cdot q\equiv_3 2$

Тогда $p^2+pq+q^2\equiv_3 1+2+2\equiv_3 2\not\equiv_3 a^2$

Тогда $p\,\vdots\, 3$ (не умоляя общности) $\Rightarrow p=3$ (т.к. p — простое)

$4\cdot(q+1)=3\cdot(3+q)$

$4q+4=9+3q$

$q=5$

Ответ: $p=3$; $q=5$ $\qquad 9+15+25=49=7^2=a^2$.

№1

Обозначим за x (шт.) - наименьшее количество конфет, которое Маша могла оставить себе. Заметим, что если Маша оставила себе наименьшее количество конфет из возможных, то Маша оставила себе наименьшее количество конфет среди её подруг (иначе Маша могла оставить себе то количество конфет, которое у девочки с наименьшим количеством конфет среди её подруг). Тогда у девочки, у которой количество конфет меньше, чем у всех её подруг, кроме Маши $\geq x+1$ конфета.

У следующей $\geq x+2$ к.
У третьей по возрастанию кол-ва конфет.
У четвёртой $\geq x+3$ к.
У пятой $\geq x+4$ к.
У шестой $\geq x+5$ к.
У седьмой $\geq x+6$ к.

Каждое следующее количество конфет $\geq$ предыдущего (по возрастанию) хотя бы на 1, т.к. у всех девочек разное количество конфет.
При этом у любых четырёх девочек конфет больше, чем у трёх оставшихся.

Возьмём за эти четырёх девочек - девочек с наименьшим кол-вом конфет.
Тогда по условию: $x+(x+1)+(x+2)+(x+3) > (x+4)+(x+5)+(x+6)$

$$4x+6 > 3x+15$$

$$x > 9 \Rightarrow x \geq 10.$$

Тогда наименьшее количество конфет, которое могла оставить себе Маша $=10$. Пример: $x=10$ $x+1=11$ $x+2=12$ $x+3=13$ и т.д. $x+6=16$
Если четыре наименьших числа $\underbrace{10+11+12+13}_{47} > \underbrace{14+15+16}_{45}$
из 7 возможных больше оставшихся,
т.к. в других неравенствах левая часть будет увеличиваться (т.к. 4 наименьших числа это наименьшее возможное значение левой части неравенства), а правая уменьшатся (т.к. 3 наибольших числа это наибольшее возможное значение правой части неравенства)

Примечание: Если в ряду составленном по возрастанию конфет у семи девочек, какие-то соседние числа отличаются $>$, чем на 1, то и все числа, стоящие в ряду возрастания после этой пары соседних чисел отличаются от наибольшего в паре $>$, чем на 2; больше, чем на 3 и т.д. Что только увеличивает x, как разность суммы ~~чисел~~ трёх наибольших чисел и суммы четырёх наименьших.

Ответ: 10.

№3

Ответ: первый игрок может обеспечить себе победу вне зависимости от игры противника при следующей стратегии.

Стратегия:

1-ый ход 1-го игрока: 1 камень. 1 камень

1-ый ход 2-го игрока: 1 камень 2 камня

2-ой ход 1-го игрока: 2 камня 1 камень

4 камня 4 камня.

Таким образом, за первые 3 хода 2-ух игроков первый, вне зависимости от хода второго сможет набрать 4 камня. Тогда останется $2019-4=2015$ камней.

n-ый ход 2-го игрока: 1 камень 2 камня

n+1-ый ход 1-го игрока: 1 камень 2 камня 1 камень

n+1-ый ход 2-го игрока: 1 камень 2 камня 1 камень (т.к. 2 раза подряд взять по 2 камня нельзя)

n+2-ой ход 1-го игрока: 2 камня 1 камень 1 камень

5 камней 5 камней 5 камней

~~n ∈ {2, 4, 6, …}~~, где $n \geq 2$. За каждые такие 4 хода 2-ух игроков после хода 1-го игрока количество камней уменьшается на 5 вне зависимости от ходов второго (n+1-ым ходом 1-ый игрок всегда сможет взять 1 камень независимо от того, какой его ход был до этого). Так как $2015 \vdots 5$, то когда останется 5 камней 1-ый игрок также заберет последний камень и выиграет.

№2

При $a=-1$

$$x^2-x-2=0$$
$$D=1+8=9$$
$$x_1=\frac{1-3}{2}=-1$$
$$x_2=\frac{1+3}{2}=2$$

$$2x^2-3x-2=0$$
$$D=9+16=25$$
$$x_3=\frac{3-5}{4}=-\frac{1}{2}$$
$$x_2=\frac{3+5}{4}=2$$ — общий корень 2.