М 55

755

СКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

1

65

1	2	3	4	5	6	сумма
4	7	–	2	4	–	18

35

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Ростов-на-Дону

Дата 02.03.2019

* *

10–11 класс. Первый вариант

1. Имеется 8 черных ладей и n белых. При каком наибольшем n их можно расставить на шахматной доске так, чтобы одноцветные ладьи не били друг друга? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Даны положительные числа x, y, z. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{xyz\,(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4 + (yz)^4 + (xz)^4}}\,.$$

3. Дан треугольник ABC с меньшей стороной AB. На сторонах AB и AC выбраны соответственно точки X и Y так, что $BX = CY$. Под каким углом прямая, проходящая через центры описанных окружностей треугольников ABC и AXY, пересекает прямую BC, если $\angle ABC = \beta$ и $\angle BCA = \gamma$?

4. Десятичная запись квадрата натурального числа x представляет собой два одинаковых соседних блока из n цифр. Может ли n равняться 20182019?

5. На однокруговой турнир по настольному теннису подало заявку 16 человек. Когда было сыграно n матчей, оказалось, что среди любых трех теннисистов найдутся двое, уже сыгравших между собой. При каком наименьшем n такое возможно?

6. Три конуса с общей вершиной, касающихся друг друга внешним образом, имеют высоту 2 и радиус основания $\sqrt{3}$. Два шара касаются внешним образом друг друга и всех конусов. Найдите отношения радиусов шаров (большего к меньшему).

Чистовик лист 1

Задание №1

Для того, чтобы две фигуры одного цвета не били друг друга в одном ряду, между ними должна быть фигура другого цвета (например 4, 5, 4 — черные не могут бить друг друга)

В таком случае, если в ряду будет стоять n белых ладей, между ними и по сторонам можно расставить n+1 черных ладей (при этом белые не должны стоять у края или угла доски)

Для того, чтобы максимизировать количество черных ладей в одном ряду, максимальное количество белых ладей - 3 (т.к. при n=3 черных ладей 4, а при n=4 их там не 4 в оставшихся клетках)

Тогда, т.к. в каждом ряду n+1 черных от n белых, то в каждом ряду точно есть 1 черная ладья

Значит на всех рядах, кроме этих 8 ладей по одной в каждой, будет n черных от n белых => т.к. всего белых 8, то и стоять 8 -> черных ладей будет дополнительно

n (всего черных ладей) = 8+8=16

Докажем, что больше черных ладей быть не может — пусть n=17

Исходя из условия, что в ряду, в котором стоит n белых ладей, стоит n+1 черных ладей, т.к. всего черных 17, то по принципу Дирихле хотя бы в одном ряду

Задание №1 лист 2 (продолжение) Чистовик

будет будет $n<2$ чёрных ладей — тогда нельзя расставить чёрных и белых ладей так, чтобы они не били друг друга, т.к. по принципу Дирихле, хотя бы между двумя чёрными ладьями не будет белой

(Например: Ч, Ч, Б, Ч)

Значит $n \neq 17$

Приведём пример такой расстановки

							Ч
			Ч				
		Ч	Б	Ч			
	Ч	Б	Ч	Б	Ч		
Ч	Б	Ч	Б	Ч	Б	Ч	
	Ч	Б	Ч	Б	Ч		
		Ч					
				Ч			

Ч — чёрная ладья

Б - белая ладья

Ответ: 16

Задание №2

$$A = \frac{xyz(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4+(yz)^4+(xz)^4}}, \quad x>0,\ y>0,\ z>0$$ найти: $\max(A)$

Для того, чтобы найти максимальное значение, воспользуемся неравенством Коши и применим его к знаменателю:

$$\sqrt{(xy)^4+(yz)^4+(xz)^4} \geq \sqrt{3\sqrt[3]{x^8y^8z^8}}$$

$$\sqrt{(xy)^4+(yz)^4+(xz)^4} \geq \sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{x^4y^4z^4}$$

Для знаменателей выполняется обратное нер-во:

$$\frac{1}{\sqrt{(xy)^4+(yz)^4+(xz)^4}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{x^4y^4z^4}}$$

Задание №2 (продолжение), лист 3, Иметовой

Тогда справедливо нер-во:

$$\frac{xyz(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4+(yz)^4+(xz)^4}} \leq \frac{xyz(x+y+z)}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{x^4y^4z^4}}$$

Т.к. мы применили нер-во Коши и функции имеют знак $\leq$, то максимум $\frac{xyz(x+y+z)}{\sqrt{3}\sqrt[3]{x^4y^4z^4}}$ является максимумом функции:

$$\frac{xyz(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4+(yz)^4+(xz)^4}} \Rightarrow$$

$$\frac{xyz(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4+(yz)^4+(xz)^4}} = \frac{(x+y+z)}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{xyz}} \Rightarrow$$

$$\sqrt{3}\sqrt[3]{x^4y^4z^4}(x+y+z) = (x+y+z)\sqrt{(xy)^4+(yz)^4+(xz)^4}$$

$$\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{x^4y^4z^4} = \sqrt{(xy)^4+(yz)^4+(xz)^4}$$

Равенство выполняется при $x=y=z=t$

$$\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{t^{12}} = \sqrt{t^8+t^8+t^8}$$

$$\sqrt{3}\cdot t^4 = \sqrt{3}\,t^4$$

$0=0 \Rightarrow$ Тогда максимум A при $x=y=z=t \Rightarrow$

$$A = \frac{t\cdot t\cdot t\cdot 3t}{\sqrt{t^8+t^8+t^8}} = \frac{3t^4}{\sqrt{3}\cdot t^4} = \sqrt{3}$$

Ответ: $\max(A) = \sqrt{3}$

Задание № 4

Пусть x – квадрат целого числа, тогда

$\overline{n}$ – целое число из 20182019 цифр

Тогда из условия:

$x = \overline{nn}$ – два подряд идущих одинаковых числа

Задание № 4, (продолжение), лист 4, Чистовик

Число икс (x) можно представить в виде:

$x = \overline{nn} = \overline{n} \cdot 10^{n} + \overline{n} = \overline{n}(10^{2018\,2019} + 1)$

(т.к. например $123123 = 123000 + 123 = 123 \cdot 10^3 + 123$, где 3 - количество цифр в блоке числа)

$x = \overline{n} \cdot 100\ldots001$, где $100\ldots001$ - число, состоящее из 2018 2020 цифр (т.к. $10^{2018\,2019}$ имеет 2018 2019 нулей и одну единицу)

Т.к. в числе $\overline{n}$ - 2018 2019 цифр, а в числе $100\ldots001$ - 2018 2020 цифр, то в числе p ($p = 100\ldots001$ - 2018 2020 цифр) на один разряд больше $\Rightarrow p > \overline{n} \Rightarrow$ значит $\overline{n} \neq p \Rightarrow$

в таком случае $\overline{n}$ должен иметь в себе помимо квадрата либо быть кратным числа p тем, чтобы их произведение было квадратом

По св-ву делимости числа на 11 (разность суммы цифр, стоящей на чётных позициях, и сумма цифр, стоящих на нечётных позициях, должна быть кратна 11. Например $121 \Rightarrow 1-2+1=0 \vdots 11$) $\Rightarrow$

Т.к. в числе p чётное число цифр и всего две единицы, одна из которых стоит на первом месте (нечётном), а другая на 2018 2020-м (чётном), то разность суммы чисел на чётных и нечётных позициях равна $0 \Rightarrow$ число $p \vdots 11$

Рассмотрим результат деления числа p на 11 $\Rightarrow$

Задание №4, продолжение, лист 5, Чистовик

$$\begin{array}{l|l} 10000\ldots001 & 11 \\ \hline & 9090\ldots9091 \end{array}$$

-99

$\_10$

-0

$\_100$

-99

$\_10$

0

...

$\_100$

-99

$\_11$

-11

0

Заметим, что на нечётных операциях деления мы имеем:

$\frac{100}{99}$ ... $100 - 99 = 1$ — на нечётных позициях записываем 9

На чётных позициях:

$10 - 0 = 10$ — на чётных позициях записывается 0, кроме последнего, так как на последнем месте 1

Далее условие выполняется, т.к. имея число длиной n происходит $(n-2)$ операций деления (т.к. на каждую цифру по одной операции деления, кроме первых 3-х, которые мы считаем за 1) => в полученном числе

$m = 9090\ldots91$ будет $(n-2) = 20182020 - 2 = 20182018$ цифр

По признаку деления на 11 рассмотрим число n:

Т.к. на всех нечётных позициях стоит цифра 9, а само число имеет чётное число цифр, то в нём $\frac{n}{2} = 10091009$ девяток

на чётных позициях стоят только нули и одна единица => по признаку деления на 11 рассмотрим m:

$$10091009 \cdot 9 - 1 = 10091004 \cdot 9 + 9 \cdot 5 - 1 = \underbrace{9 \cdot 10091004}_{A} + \underbrace{44}_{Б} \ \vdots\ 11$$

$Б \ \vdots\ 44 \ \vdots\ 11$

$A \ \vdots\ 9 \cdot 10091004$

По признаку деления на 11 рассмотрим число 10091004:

Задание № 4, продолжение, лист № 6, Чистовик

10091004:

$1-0+0-9+1-0+0-4=2-13=-11 \vdots 11 \Rightarrow$

$10091004 \vdots 11 \Rightarrow A \vdots 11$

Т.к. и А и Б кратны 11, то и их разность кратна 11 $\Rightarrow m \vdots 11 \Rightarrow$ т.к. $p=m\cdot 11 \Rightarrow p \vdots 121$

Рассмотрим деление числа m на 11

$$\begin{array}{l|l} 9090\ldots91 & 11 \\ \hline -88 & 826\ldots \\ \;\;29 & \\ \;-22 & \\ \;\;\;70 & \\ \;\;-66 & \\ \;\;\;\;4\ldots & \end{array}$$

Т.к. 1-м делением мы использовали 2 цифры, а в последующих по одной, то всего было произведено n-1 операций деления, где n - число цифр в числе m $\Rightarrow$

Пусть $\frac{m}{11}=t \Rightarrow$ в числе t (20182018 - 1 = 20182017) цифр $\Rightarrow$ тогда в числе $t\cdot 100$ - 20182019 - цифр $\Rightarrow$ это именно столько цифр, сколько и в числе $\overline{П} \Rightarrow$ пусть $\overline{П}=t\cdot 100$

Т.к. $p=m\cdot 11 \Rightarrow p=t\cdot 121$

Тогда $x=\overline{П}\cdot p=t\cdot 100\cdot t\cdot 121=t^2\cdot 10^2\cdot 11^2 \Rightarrow$

Т.к. каждый множитель является квадратом, то такое число $\overline{ПП}$ - существует

Ответ: да, существует

Задание № 5

Мы имеем 16 игроков - разобьём их на две группы по 8 игроков!

Пусть в 1-й группе будут 1, 2, 3, 4..., 7, 8 игроки, а во 2-й 9, 10, 11, ..., 16 игроки.

Игроки из первой группы будут играть

Задание №5, продолжение, лист №7, Числовые

друг с другом, как и вторая
группа, т.к. матч круговой)

В каждой группе для того,
чтобы все сыграли друг с другом
понадобится 28 матчей (прогрессия $\frac{0+7}{2}\cdot 8=28$)
Т.к. групп 2, то пройдёт 56 матчей

Если брать 3-х игроков, то по
принципу Дирихле 2 из них точно будут
в одной группе, а значит они уже играли
друг с другом

При $n=55$ один матч в группе ~~не~~ будет
сыгран, а значит найдётся такая пара
из одной группы и один игрок из другой, при
котором условие не выполняется.

~~Если~~

Ответ: 56