САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

1

60

5407

1	2	3	4	5	6	сумма
4	4	0	0	4	0	12

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Санкт-Петербург

Дата 24.02.19

* *

10–11 класс. Первый вариант

? ✓ **1.** Имеется 8 черных ладей и n белых. При каком наибольшем n их можно расставить на шахматной доске так, чтобы одноцветные ладьи не били друг друга? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

✓ **2.** Даны положительные числа x, y, z. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{xyz\,(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4 + (yz)^4 + (xz)^4}}.$$

3. Дан треугольник ABC с меньшей стороной AB. На сторонах AB и AC выбраны соответственно точки X и Y так, что $BX = CY$. Под каким углом прямая, проходящая через центры описанных окружностей треугольников ABC и AXY, пересекает прямую BC, если $\angle ABC = \beta$ и $\angle BCA = \gamma$?

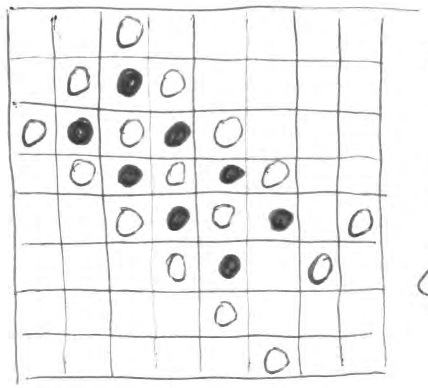
? ✓ **4.** Десятичная запись квадрата натурального числа x представляет собой два одинаковых соседних блока из n цифр. Может ли n равняться 20182019?

? ✓ **5.** На однокруговой турнир по настольному теннису подало заявку 16 человек. Когда было сыграно n матчей, оказалось, что среди любых трех теннисистов найдутся двое, уже сыгравших между собой. При каком наименьшем n такое возможно?

6. Три конуса с общей вершиной, касающихся друг друга внешним образом, имеют высоту 2 и радиус основания $\sqrt{3}$. Два шара касаются внешним образом друг друга и всех конусов. Найдите отношения радиусов шаров (большего к меньшему).

Задача 1.

Оценим снизу, для этого приведу пример:



Одноцветные ладьи не бьют друг друга, $n = 16$.

Докажем, что n не может быть > 16:

~~Пусть у нас есть $n = 17$, но при этом мы знаем, что в случае,~~

Пусть у нас есть доска с 8 белыми ладьями, которые не бьют друг друга, тогда заметим, что постановка одной чёрной ладьи означает появление возм. перегородки между двумя белыми, тогда в сумме мы можем лишь удвоить число белых $\Rightarrow n \leq 16$.

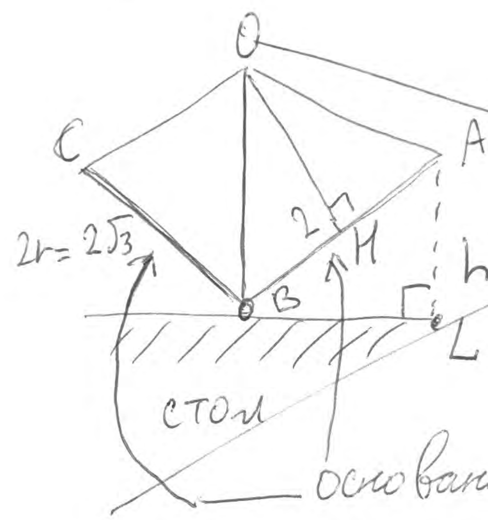
Ответ: $n = 16$.

Задача 3.

Ответ: $\dfrac{\pi - (\beta + \gamma)}{2}$

Задача 6.

Возьмём 2 конуса: Найдём величину $h = AL$



основания конусов.

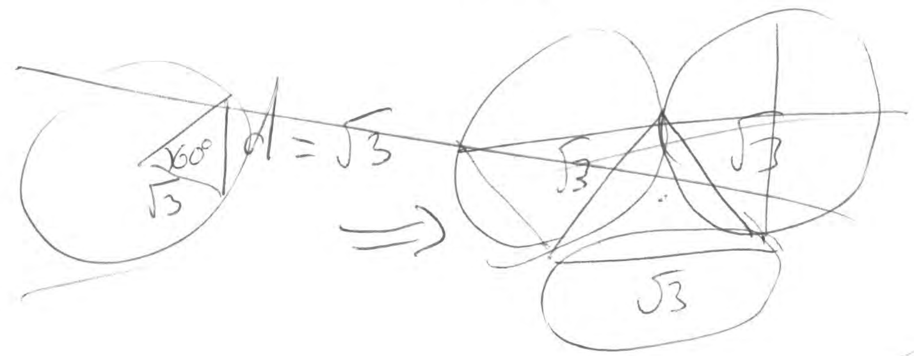
~~Знаем, что $OH = 2$, $AB = BC = 2r = 2\sqrt{3}$~~

~~$OB = OA = OC = \sqrt{4+3} = \sqrt{7}$~~

~~$BL = \dfrac{S_{AOB} \cdot 2}{OB} = \dfrac{2 \cdot AB \cdot OH}{2 \cdot OB} = \dfrac{2\sqrt{3} \cdot 2}{\sqrt{7}} = 4\sqrt{\dfrac{3}{7}}$~~

~~$h = \sqrt{12 - \dfrac{48}{7}} = \sqrt{\dfrac{84-48}{7}} = \dfrac{6}{\sqrt{7}}$~~

~~бред.~~



~~тоже бред.~~

Задача 2. $x, y, z > 0$ (Чистовик)

Пусть $a = xy$, $b = yz$, $c = xz$. $\Rightarrow a, b, c > 0$

Тогда $xyz = \sqrt{x^2y^2z^2} = \sqrt{xy \cdot yz \cdot xz} = \sqrt{abc}$

$$x = \sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{xy \cdot xz}{yz}} = \sqrt{\frac{ac}{b}}$$

Аналогично:

$$y = \sqrt{\frac{ab}{c}}$$

$$z = \sqrt{\frac{bc}{a}}$$

$$A = \frac{xyz(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4+(yz)^4+(xz)^4}} = \frac{\sqrt{abc}\left(\sqrt{\frac{ac}{b}}+\sqrt{\frac{ab}{c}}+\sqrt{\frac{bc}{a}}\right)}{\sqrt{a^4+b^4+c^4}} =$$

ср. кв. $\geq$ ср. арифм.

$$= \frac{ab+ac+bc}{\sqrt{a^4+b^4+c^4}} = \frac{ab+ac+bc}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{a^4+b^4+c^4}{3}}} \leq \frac{ab+ac+bc}{\sqrt{3}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}(ab+ac+bc)}{(a^2+b^2+c^2)} \leq \sqrt{3} \quad (\text{т. к. } ab+ac+bc \leq a^2+b^2+c^2)$$

Равенство достигается при $a = b = c \Leftrightarrow x = y = z$.

Ответ: $A_{max} = \sqrt{3}$

Задача 4.

Заметим, что если число имеет вид:

$\underbrace{\overline{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n}}_{n \text{ цифр}} \underbrace{\overline{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n}}_{\text{те же } n \text{ цифр}}$, то оно конечно же делится на $10^m + 1$.

В данном случае $m = 20182019 = n$

Если $(10^m + 1)$ - не квадрат, то либо число делится на $(10^m+1)^2$, что невозможно, т.к. если длина (10^m+1) это $m+1$, то длина числа $(10^m+1)^2 = 2m+1 > 2n$, что доказывается тривиальным делением в столбик, либо $n \neq 20182019$.

?

Утверждение: $10^{20182019} + 1$ - не квадрат, тогда

Ответ: $n \neq 20182019$.

Доказем утверждение:

Пусть число типа $1\underbrace{0 \ldots 0}_{\text{нули}}1$ - это квадрат,

Значит мы его как-то получили, например $1\underbrace{0 \ldots 0}_{\text{нули}}1 = k^2$

Очевидно, что последняя цифра числа k либо 1, либо 9.

1 быть не может, т.к. ~~мы~~ непонятно, как из нулей получать 1 умножением, а 9 не может быть, т.к. получим число $k = \ldots 8889$ и т.д., ~~не~~ придя к противоречию.

Ответ: не может.

Задача 5. Чистовик

Давайте разделим теннисистов на 2 команды по 8 человек, тогда [~~в кажд~~] пусть в каждой команде каждый сыграет с каждым (итого $2 \cdot \left(\frac{8 \cdot 7}{2}\right) = 56$ матчей), тогда по принципу Дирихле мы всегда [~~не~~], взяв 3 человека, будем знать, что 2 из них [~~уже~~] в одной команде $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ играли друг с другом. Тогда оценка сверху $= 56$.

Докажем, что меньше нельзя:

Пусть ~~номе~~ снова разделим на те же 2 команды, ~~но~~ но теперь мы в одной команде нашли тех, кто не играл друг с другом $\Rightarrow$ должно быть ребро от одного из пары до 3-его человека, тогда, ~~у~~ удаляя одну игру в одной команде, мы всегда проводим ребро в другую (при наборе 2 из одной и 1 из другой), тогда меньше не получается, вот и все

?

Ответ: 56.

Задача 6.

Чистовик