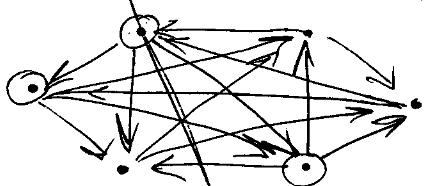
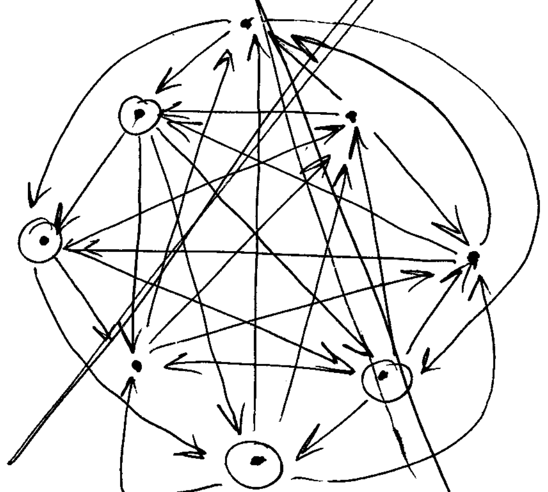
2) 6 вершин $n=2$

добавим 2 вершины (1 ⊙ и 1 ·) и получим

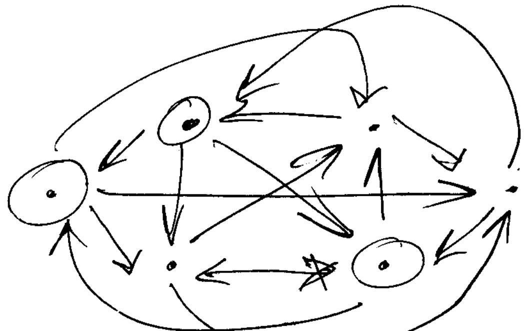
$S = \cancel{2+3+1+1} = 7$



3) 8 вершин $n=3$



$S = \cancel{7 + 3 + 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 + 1} = 19$



Можно заметить, что строим граф мы по следующему принципу: новая ⊙ → новая ·

новая ⊙ ← старые (те, что были ⊙ раньше)

новая ⊙ → старые ·

новая · → старые ⊙

новая · ← старые ·

=> Вывод (о том как изменяется величина S при переходе от $2n$ до $2(n+1)$ вершин)

1) $+n$ (столько образуется треугольничков вида нов⊙ → нов· → стар.⊙ → нов⊙)

2) + кол-во отрезков, соединяющих ст.⊙ и ст.· (они образуют по треугольничку 1 из 2 видов: 1) н.⊙ → ст.· → ст.⊙ → н.⊙ 2) н.· → ст.⊙ → ст.· → н.·)

таких отрезков n^2

Итак, при переходе от $2n$ к $2n+2$ участникам число троек увеличивается на $n+n^2$

Если участников 20, то число троек равно:

$2+1+1^2+2+2^2+3+3^2+\ldots+9+9^2 =$

$= 47+1+4+9+16+25+36+49+84+81 = 47+285 = 332$

KL091

6007

55

ургский государственный университет

1	2	3	4	5	6	сумма
4	1	4	0	2	0	

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Минск

Дата 14 марта 2019 г.

*

10–11 класс. Шестой вариант

1. Какое наибольшее количество фишек можно расставить на клетчатой доске 12×12 так, чтобы на каждой диагонали располагалось не более пяти фишек?

2. Даны различные числа a, b, c. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right)^3}.$$

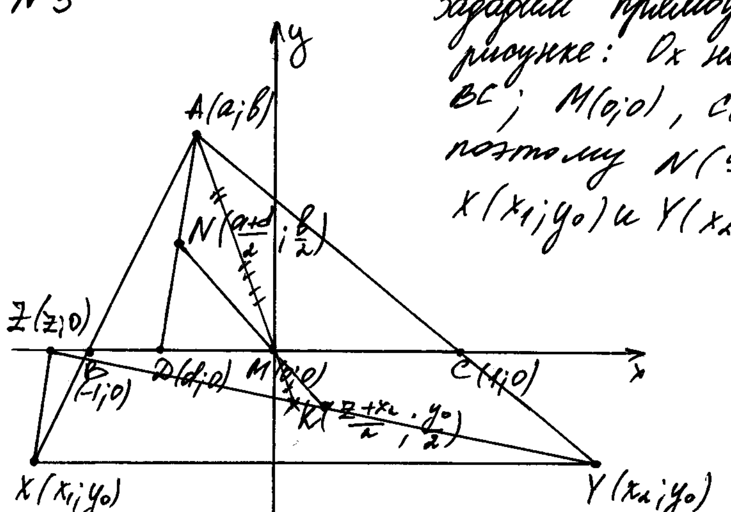
3. На стороне BC остроугольного треугольника ABC выбрана точка D, а на продолжении стороны AB за точку B — точка X. Прямые, проходящие через X параллельно BC и AD, пересекают соответственно лучи AC и CB в точках Y и Z. Пусть M, K и N — середины отрезков BC, YZ и AD соответственно. Найдите угол KMN.

4. Восьмеричная запись натурального числа x — это написанная 2019 раз подряд пара каких-то цифр. Число y получено некоторой перестановкой цифр x. Может ли восьмеричная запись числа $x \cdot y$ представлять собой многократно повторенный блок из четырех цифр?

5. В однокруговом турнире по настольному теннису приняло участие 20 человек. Одна половина теннисистов одержала в турнире по 10 побед, вторая половина — по 9 побед. Сколько по итогам турнира оказалось троек участников, одержавших во встречах между собой ровно по одной победе? Ничьих в теннисе не бывает.

6. Три конуса с общей вершиной O касаются друг друга внешним образом. Первые два конуса имеют угол при вершине $\frac{2\pi}{3}$, а ось симметрии третьего конуса перпендикулярна осям симметрии первых двух. Еще один конус с вершиной O касается внешним образом трех других. Найдите его угол при вершине. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении.)

№3



Зададим прямоугольную систему координат как на рисунке: Ox на BC, Oy на серединном перпендикуляре к BC; M(0;0), C(1;0), B(-1;0), A(a;b), D(d;0); N — середина AD, поэтому $N(\frac{a+d}{2};\frac{b}{2})$; Z(z;0); XY ∥ BC, поэтому $X(x_1;y_0)$ и $Y(x_2;y_0)$; K — середина ZY, поэтому $K(\frac{z+x_2}{2};\frac{y_0}{2})$

Покажем, что $K\in(NM) \Rightarrow \angle KMN=180°$

Зададим уравнение прямой NM:

$y=\frac{b}{a+d}x$

Докажем, что $K\in(NM)$, т.е.

$\frac{y_0}{2}=\frac{b}{a+d}\cdot\frac{z+x_2}{2} \Leftrightarrow y_0(a+d)=b(z+x_2)$ (*)

(1) т.к. $X\in(AB)$ (AB: $y=(x+1)\frac{b}{a+1}$), то $y_0=(x_1+1)\frac{b}{a+1}$

(2) т.к. $Y\in(AC)$ (AC: $y=(x-1)\frac{b}{a-1}$), то $y_0=(x_2-1)\frac{b}{a-1}$

(3) т.к. AD ∥ XZ, то $k_1=k_2$, где k_1 и k_2 — угловые коэффициенты прямых AD и XZ соответственно ($k_1=\frac{b}{a-d}$ и $k_2=\frac{y_0}{x_1-z}$) $\Rightarrow y_0=\frac{b(x_1-z)}{a-d}$

из п(1) и (3) $x_1=\frac{a+za+z-d}{d+1}$ (4)

из п.(1) и (4) $y_0=\frac{b(a+za+z+1)}{(d+1)(a+1)}=\frac{b(z+1)(a+1)}{(d+1)(a+1)}=\frac{b(z+1)}{d+1}$

из п.(1) и (2) $x_2=\frac{x_1(a-1)+2a}{a+1}$ (5)

из (4) и (5) $x_2=\frac{(z+1)(a-1)}{d+1}+1$

(*) $\Leftrightarrow$ $\frac{b(z+1)}{d+1}(a+d)=b\cdot\left(z+\frac{(z+1)(a-1)}{d+1}+1\right)$

$\Updownarrow$

$(z+1)(a+d)=z(d+1)+(z+1)(a-1)+(d+1)$

$\Updownarrow$

$(z+1)(a+d-a+1)=(d+1)(z+1) \Leftrightarrow (z+1)(d+1)=(d+1)(z+1)$ — истина

Сл-но, (*) верно, т.е. $K\in(NM)$ и $\angle KMN=180°$

Ответ: 180°.

№2 Не нарушая общности, пусть $a>b>c$

Пусть $a-b=x$, $b-c=y$, $x,y\in\mathbb{R}^+$; тогда $a-c=x+y=z$, $z\in\mathbb{R}^+$

$A=\frac{x^2y^2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^3}$

По неравенству между средним арифметическим и геометрическим: $\frac{x^2+y^2+z^2}{3}\geq\sqrt[3]{x^2y^2z^2} \Rightarrow (x^2+y^2+z^2)^3\geq 3^3x^2y^2z^2$

$\Downarrow$

$\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^3}\leq\frac{1}{27x^2y^2z^2}$

$\Downarrow$

$A=\frac{x^2y^2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^3}\leq\frac{x^2y^2z^2}{27x^2y^2z^2}=\frac{1}{27}$

Сл-но $A\leq\frac{1}{27}$. Равенство достигается лишь при $x^2=y^2=z^2$

$z^2=(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$ и $z^2=x^2$

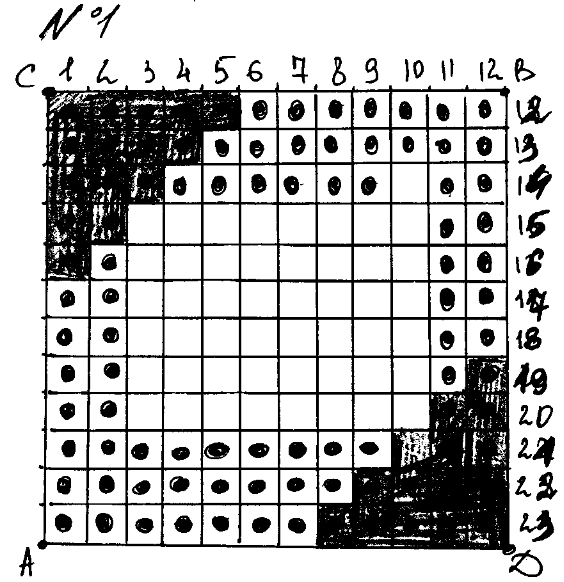
$\Rightarrow x^2=x^2+y^2+2xy$;

$y^2+2xy=0$;

$y(y+2x)=0$ — Однако $y>0$ и $y+2x>0$

Сл-но равенство не достигается и $A<\frac{1}{27}$.

№1



Присвоим диагоналям номера: диагональ имеет номер i, если она параллельна главной диагонали AB таблицы и содержит клетку с номером i (см. рис.)

Тогда на диагоналях 1 и 23 стоит не более, чем по 1 фишке; на диагоналях 2 и 22 — не более, чем по 2; на 3 и 21 — по 3; на 4 и 20 — по 4; и на диагоналях с 5 по 19 — не более, чем по 5.

Итого общее число фишек $\leq 2\cdot1+2\cdot2+2\cdot3+2\cdot4+15\cdot5=95$

На рисунке выше показано как расставить 94 фишки в таблице (точки — это фишки) так, чтобы расстановка удовлетворяла условию.

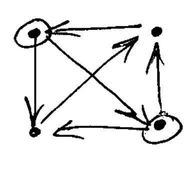
95 фишек быть не может, иначе (это следует из выше сказанного) в закрашенной области на рисунке в каждой клетке будет стоять по фишке. Тогда на главной диагонали CD будет стоять не менее 6 фишек, что противоречит условию. $\Rightarrow$ общее число фишек ≤ 94

Ответ: 94.

№5 Рассмотрим граф: вершины графа — участники турнира, а ребра-стрелочки ведут от победителя к проигравшему.

Рассмотрим граф из 4 вершин и будем добавлять к нему по 2 вершины и считать кол-во замкнутых треугольников S (такой треугольник  — это тройка участников, одержавших по 1 победе во встречах друг с другом)

1) 4 вершины (4 участника)



Будем обозначать через $\odot_n$ участников турнира из 2n игроков, набравших n и n−1 очков (побед) соответственно.

S = 2