6279

РГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

1

63

1	2	3	4	5	6	сумма
4		4	0,5	4		12,5

63

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Москва

Дата 10.03.19

* *

10–11 КЛАСС. ДЕВЯТЫЙ ВАРИАНТ

√ **1.** Какое наибольшее количество ладей можно расставить на шахматной доске так, чтобы каждую ладью било не более трех других? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Числа x, y, z — углы треугольника, причем больший угол z не превосходит $\frac{\pi}{2}$. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \sqrt{\sin x \cdot \sin(z-y)} + \sqrt{\sin y \cdot \sin(z-x)}.$$

√ **3.** Дан четырехугольник $ABCD$, отличный от параллелограмма. На сторонах AB, BC, CD и DA выбираются соответственно точки K, L, M и N так, что $KL \parallel MN \parallel AC$ и $LM \parallel KN \parallel BD$. Найдите геометрическое место точек пересечения диагоналей параллелограмма $KLMN$.

4. Натуральное число x в восьмеричной системе 2019-значное, его младшая цифра равна 3, а все остальные цифры отличны от 3 и совпадают через одну. Число y получается записью цифр x в обратном порядке. Оказалось, что восьмеричное представление $x \cdot y$ содержит только цифры 1 и 6. Найдите $x \cdot y$ (в восьмеричной системе).

√ **5.** В однокруговом турнире по настольному теннису участвовало 100 спортсменов, причем ни один из них не выиграл все матчи. Будем говорить, что игрок A *круче* игрока B, если A выиграл у B или найдется такой игрок C, что A выиграл у C, а C выиграл у B. Каково наименьшее количество теннисистов, оказавшихся по итогам турнира круче всех остальных? Ничьих в теннисе не бывает.

6. На столе лежат два конуса с общей вершиной O, касаясь друг друга внешним образом. Угол между их осями симметрии равен $\operatorname{arctg} \frac{4}{3}$. Найдите максимальный угол при вершине меньшего из двух конусов с вершиной O, которые лежат на столе и касаются внешним образом первых двух конусов. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении.)

$\overline{abab\ldots ab3} = x$

$3\cdot 1 + b\cdot 8^1 + a\cdot 8^2 + b\cdot 8^3 + a\cdot 8^4 + \ldots$

$x = 3 + b(8 + 8^3 + 8^5 + 8^7 + \ldots) + a(8^2 + 8^4 + 8^6 + \ldots)$

$y = 3\cdot 8^{2018} + b(8 + 8^3 + \ldots + 8) + a(8^0 + 8^2 + 8^4 + \ldots)$

5

$3 \quad \overline{3ba}^{2018} \quad (a+3)b \quad 3 + a^{2018}\cdot 8^{2018} \quad a$

61

$3a + a\cdot b\cdot 8 + \ldots \quad 3a + (a+3)8b = y \quad 3\cdot 8^{2018} + a\cdot 8^{2018}$

1 0 $\quad$ +5 −5 $\quad$ 5 3 0

3a $\quad$ 6 $\quad$ 1 1 6

$3a \quad 8^2 \quad a(8^{2018} - 1) + 3($

$\boxed{(3 + b\cdot 8)(a + b\cdot 8) \mid 6}$

$(a-3)(8^{2018} - 1)$

6 $\quad$ 1

$a = 2;\ 3 \quad 6+$

6

11 $\quad$ 66 $\quad$ 1 6 $\quad$ 12 $\quad$ 4

3 4 $\quad$ 2 $\quad$ 16 $\quad$ 5

4 1 7 18

21 21 16

5 6

1	2	3	4	5	6	7	8
1	4	1	0	1	4	1	

7

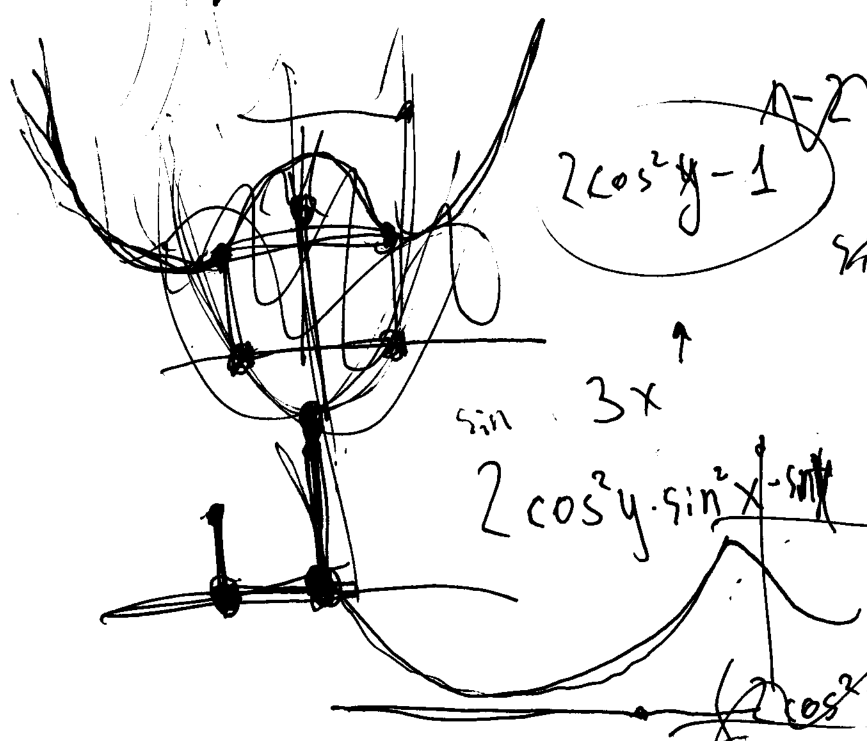
1	2	3	4	5	6	7
3	6	1	4	7	2	5

36 41 43

$$\sqrt{\sin x \cdot \sin(\cancel{x}+2y)} + \sqrt{\sin y \cdot \sin(2x+y)}$$

$\sin x \cdot \cos 2y + \sin 2y \cdot \cos x$

$\sin y(\sin 2x \cdot \cos y + \sin$



$2\cos^2 y - 1$ $\quad 1-2\sin^2 y$

$\sin^2 x \cdot 2y$

$\sin \quad 3x$

$$\frac{\sin 2y \cdot \cos 2y}{2}$$

$2\cos^2 y \cdot \sin^2 x \cancel{- \sin y}$

$(2\cos^2 y - 1)(1-2\sin^2 y)\sin^2 x +$

$\cancel{\sin(x+y)\cos y + \sin y \cdot \cos(x+y)}$

$+ \cancel{1-2\sin^2 x}$

$$\frac{\sin x \cdot \cos(x+2y) + \cos x \cdot \sin(x+2y)}{\sqrt{\sin x \cdot \sin(x+2y)}}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(2x+2y)}{\sqrt{\sin x \cdot \sin(x+2y)}} = \frac{2\sin y \cdot \sin(2x}{2\sqrt{\sin y \cdot \sin(}}$$

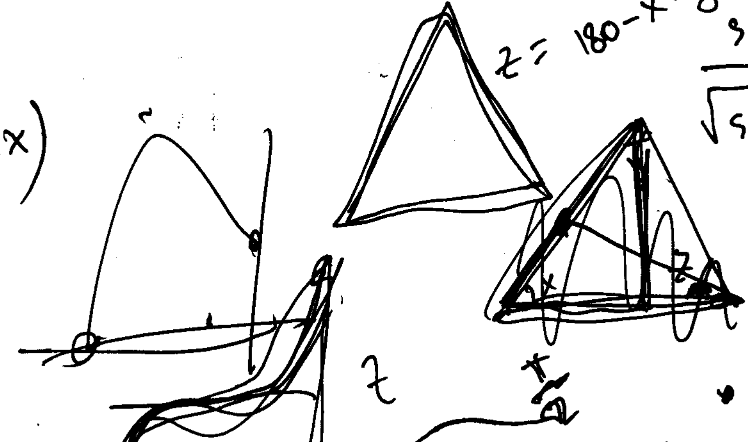
$$\sin(2x+2y) = \sqrt{\frac{\sin x \cdot \sin(}{\sin y \cdot}}$$

$\sqrt{\sin X\cdot\sin(z-y)}+\sqrt{\sin y\cdot\sin(z-x)}$

$z=180-x-y$

$\frac{\sin(z-y)\cdot\cos X}{\sqrt{\sin X\cdot\sin(z-y)}}+$

$y\cdot\cos 2x)$



$-\frac{\sin y\cdot\cos(z-x)\cdots}{\sqrt{\sin y\cdot\sin(z-x)}}=0$

$\sqrt{\sin x\cdot\sin(z-y)}+\sqrt{\sin y}$

$\sqrt{\cdot\sin(z-x)}$

$\frac{1}{2}$

28

$8+12$

8

$\sqrt{\sin y}$

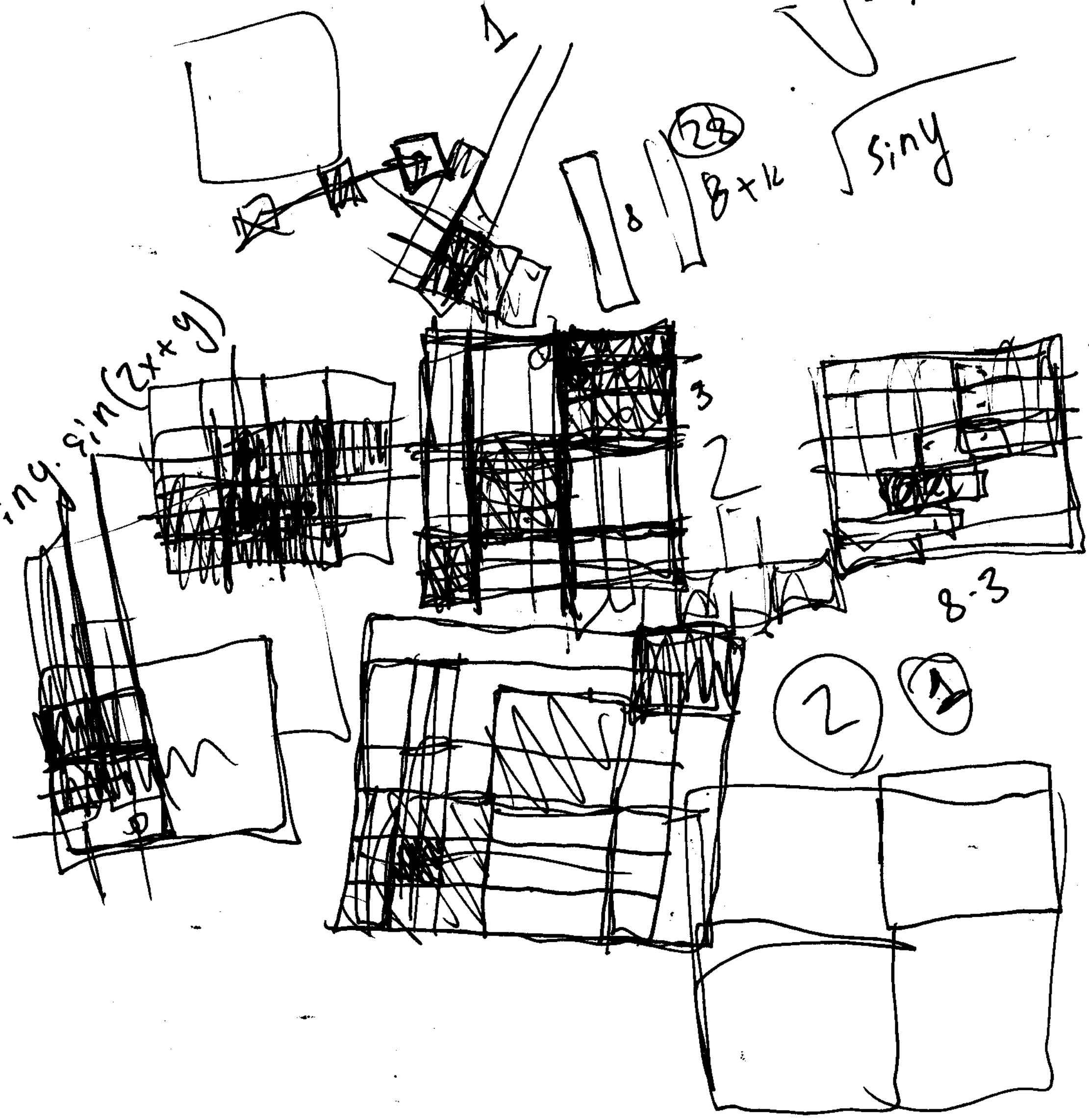
$+y)$ $=0$

$x+y)$

$2\sin y\cdot\sin(2x+y)$

$x+2y)$

$\sin(2x+y)$



3

2

3

$8\cdot3$

2

1

Чистовик 5

Санкт-Петербургский государственный университет

~~=> все~~ Назовём это множество спортсменов — C. Тогда все спортсмены из C круче ∀ любого спортсмена не из C (т.к. все спортсмены не из C проиграли самому крутому, а все из C выиграли у самого крутого) При этом есть спортсмен из C который круче всех других спортсменов из C => этот спортсмен тоже круче всех => противоречие => есть хотя бы 2 ~~сам~~ спортсмена которые круче всех.

Теперь докажем, что их хотя бы 3:

Предположим, что их только 2. Пусть это A и B, причём A выиграл у B. Тогда рассмотрим множество C спортсменов которые выиграли у A. Аналогично, среди них будет спортсмен который круче всех, и этот спортсмен, очевидно, не B => противоречие => спортсменов которые круче всех хотя бы 3.

Пример для 3:

Спортсмены A; B; C выиграли
у всех остальных а между