$\boxed{№ 2}$

$A = \cos x + \cos y + \cos z + \cos(x-y) + \cos(y-z) + \cos(z-x)$

$x + y + z = \pi$

углы треугольника

$\Downarrow$

$z = \pi - (x+y)$

(*) $A = \cos x + \cos y + \cos(\pi - (x+y)) + \cos(x-y) + \cos(-\pi + 2y + x)$ ⊕

⊕ $\cos(\pi - (2x+y)) = \cos x + \cos y - \cos(x+y) + \cos(x-y) - \cos(2y+x)$ ⊕

⊕ $-\cos(2x+y)) = \cos x + \cos y + \cos(x-y) - \cos(x+y) - (\cos(2y+x) + \cos(2x+y))$

$\cos(2y+x) + \cos(2x+y) = 2\cos\left(\frac{3}{2}(x+y)\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

(*) – не умаляя общности, x – тот наибольший угол $\geq \frac{\pi}{2}$

Будем двигать x и y друг к другу, фиксируя их суммы, если докажем, что при этом A увеличивается, можно будет рассмотреть только случай, при котором $x = \frac{\pi}{2}$

$x \in [\frac{\pi}{2}; \pi)$; $y \in (0; \frac{\pi}{2})$

$A = \cos x + \cos y + \underbrace{\cos(x-y)}_{\text{увеличивается}} - \underbrace{\cos(x+y)}_{\text{const}} - (\cos(2y+x) + \cos(2x+y))$

$\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\underbrace{\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}_{\text{увеличивается}}$ $\quad 0 < x+y < \pi \Rightarrow \frac{x+y}{2} \in (0; \frac{\pi}{2}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)}_{\text{const}} > 0$

$-(\cos(2y+x) + \cos(2x+y)) = -2\cos\left(\frac{3}{2}(x+y)\right)\underbrace{\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}_{\text{увеличивается}}$

$\frac{\pi}{2} < x+y < \pi \Rightarrow \frac{3}{2}(x+y) \in \left(\frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos\left(\frac{3}{2}(x+y)\right) < 0$

$\Rightarrow \underbrace{-2\cos\left(\frac{3}{2}(x+y)\right)}_{>0 \ \text{const}}\underbrace{\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}_{\text{увелич}}$

$\Rightarrow A$ – увелич., т.к. каждое её слагаемое, либо const

случай, когда $x = \frac{\pi}{2}$: $\quad z = \frac{\pi}{2} - y \Rightarrow \cos z = \sin y$, $\cos$ $\quad y \in (0; \frac{\pi}{2})$

$A = 0 + \cos y + \sin y + \sin y + \cos(y - \frac{\pi}{2} + y) + \cancel{\sin} y = \cancel{3\sin y + \cos y + \cos 2y}$

$= 2(\sin y + \cos y) + \cos(2y - \frac{\pi}{2}) = 2\sqrt{2}\cos(y - \frac{\pi}{4}) + \cos(2(y - \frac{\pi}{4}))$

Замена: $\cos(y - \frac{\pi}{4}) = t \in (\frac{\sqrt{2}}{2}; 1]$

$A = 2\sqrt{2}t + 2t^2 - 1 = 2t^2 + 2\sqrt{2}t - 1 \leq$

$\leq 2\sqrt{2} + 1$

Значение $(2\sqrt{2}+1)$ достигается при $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ y = \frac{\pi}{4} \\ z = \frac{\pi}{4} \end{cases}$

Ответ: $2\sqrt{2} + 1$

…РГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

248

65

1	2	3	4	5	6	сумма
3	4					13

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Москва

Дата 10.03.19

* *

10–11 класс. Десятый вариант

1. Какое наибольшее количество ладей можно расставить на шахматной доске так, чтобы каждую ладью било не более двух других? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Числа x, y, z — углы некоторого треугольника, один из которых не меньше $\frac{\pi}{2}$. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \cos x + \cos y + \cos z + \cos(x-y) + \cos(y-z) + \cos(z-x).$$

3. Дан четырехугольник $ABCD$, отличный от параллелограмма. На лучах AB, CB, CD и AD вне сторон четырехугольника $ABCD$ выбираются соответственно точки K, L, M и N так, что $KL \parallel MN \parallel AC$ и $LM \parallel KN \parallel BD$. Найдите геометрическое место точек пересечения диагоналей параллелограмма.

4. Натуральное число x в восьмеричной системе 2018-значное, и его цифры повторяются через одну. Оказалось, что восьмеричная запись x^2 содержит только цифры 3 и 4, причем в равном количестве. Найдите x^2 (в восьмеричной системе).

5. В однокруговом турнире по настольному теннису участвовало n теннисистов ($n \geqslant 3$). Будем говорить, что игрок A *круче* игрока B, если A выиграл у B или найдется такой игрок C, что A выиграл у C, а C выиграл у B. При каких n по итогам турнира могло оказаться так, что каждый игрок круче всех остальных? Ничьих в теннисе не бывает.

6. На столе лежат два конуса с общей вершиной O, касаясь друг друга внешним образом. Угол между их осями симметрии равен $\operatorname{arctg}\frac{12}{5}$. Найдите максимальный угол при вершине большего из двух конусов с вершиной O, которые лежат на столе и касаются внешним образом первых двух конусов. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении.)

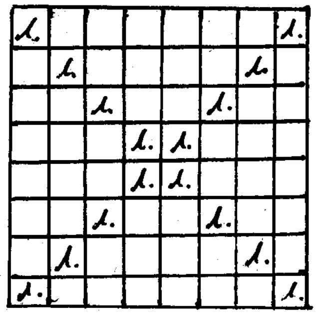
№1

Ответ: 16

Оценка: всего 64 клетки, т.к. шах. доска: 8x8; ~~одна ладья бьёт 15 клеток (если считать ту, на которой находится)~~
~~Значит, чтобы бить все клетки поля понадобится 8 ладей, т.к. $8 \cdot 15 - 8 \cdot 7 = 120 - 56 = 64$~~

Пример:

л. - ладья



построим „связь" между каждой парой ладей, бьющих друг друга.
Выберем произвольную ладью и будем идти по „связям", при этом после первого „шага" идти, если можно, то только в одну сторону. По итогу, получим либо цикл по каким-то ладьям из „связей", либо „путь" у которого у 2 крайних ладей по 1 бьющей ладье, а у остальных-2.
Теперь покажем, что каждый такой цикл или путь на x ладьях лежит не менее чем на x строках и столбцах суммарно (причём, очевидно, что в тех строках и столбцах, на которых он лежит (= на которых лежит хотя бы одна ладья оттуда). Будем последовательно идти по циклу (от любой ладьи) или по пути (от его края) и считать суммарное число строк и столбцов, на которых лежит цикл/путь. Тогда на каждом переходе к сл. ладье (кроме последнего в случае цикла). счётчик увелич. ровно на 1, при этом на первой ладье счётчик равен 2 (1 строка и 1 столбец), значит к концу счётчик покажет либо x либо x+1. Лемма доказана.
Теперь убираем все строки и столбцы, которые были задействованы в цикле/пути (в них, очевидно, лежат только ладьи из цикла/пути) и повторяем процесс.
Всего строк и столбцов можно выкинуть 16, и значит ладей не более 16.

2

№5

1 сл.) число участников нечётно:
пусть 1-ый игрок выиграл всех, кроме последнего, а последний проиграл всем, кроме 1-го, тогда получается, что 1-ый круче всех, кроме последнего, а последний круче вообще всех, т.к. последний победил того, кто обыграл всех остальных.
-//- делаем для оставшихся тоже самое (оставшиеся участники: $n-2$), пока не останется 3 участника, но для них работает всё тоже самое

	1	2	3
1		1	0
2	0		1
3	1	0	

любых

получается, что 1-ый по данной схеме круче всех, т.к. выиграл 2-го, а второй в свою очередь выиграл 3-го -//- для 2-го и 3-го

$\Rightarrow$ при $n \geq 3$ и n - нечётн. по итогам турнира может оказаться, что каждый игрок круче всех остальных.

2 сл.) число участников чётно (n - чётн.): начнём сокращать число участников -//- 1 сл., пока их не останется 4 (кол-во не влияет на рез.)

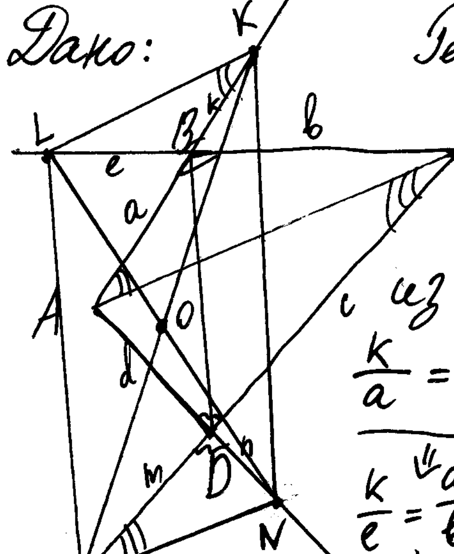
	1	2	3	4
1		1	1	0
2	0		1	1
3	0	0		1
4	1	0	0	

действуя -//- останутся 2 участника, но они одновременно не могут быть круче друг друга, значит чётное n нам не подходит

Ответ: все натуральные нечётные $n \geq 3$.

№3

Дано:



KL || MN || AC
LM || KN || BD

Найти: ГМТ пересечения диагоналей пар-мма

Решение: 1°) $\left.\begin{array}{l} KL \parallel MN \\ LM \parallel KN \end{array}\right| \overset{\text{опр.}}{\underset{\text{пар-мма}}{\Rightarrow}}$ KLNM - пар-мм $\overset{\text{св-во}}{\underset{\text{пар-мма}}{\Rightarrow}}$ $KM \cap LN = O$ (т. перес. диаг.) и $KO = OM$, $LO = ON$

2) пусть $AB = a$; $BC = b$; $CD = c$; $AD = d$; $BK = k$; $BL = l$; $DN = n$; $DM = m$, тогда из подобия $\triangle LBK$ и $\triangle CBA$ (по 2-м угл. (верт. и накрест. леж.)):

$\frac{k}{a} = \frac{l}{b}$ $\Downarrow$ $\frac{k}{l} = \frac{a}{b}$; $\triangle MDN \sim \triangle CDA$ (по 2-м угл.) $\overset{\text{св-во}}{\underset{\text{под. }\triangle}{\Rightarrow}}$ $\frac{m}{c} = \frac{n}{d} \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{c}{d}$

$\boxed{\frac{k}{m} = \frac{a}{c};\ \frac{l}{n} = \frac{b}{d}}$; $\frac{m}{l} = \frac{c}{b}$

3°) надо найти сер. KM - пер. диаг. (ГМТ)

3) из данных отношений видно, что т. K и т. M соотв. двигаются линейно по векторам $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$, начиная от точек A и D соответственно.
Отсюда их середина движется линейно по вектору $\left(\frac{\overline{AB}+\overline{CD}}{2}\right)$, начиная от сер. BD

4) ГМТ перескч. д. пар-мма есть луч (не включая его начала) с началом в середине BD и сонаправленный вектору $(\overline{AB}+\overline{CD})$

5) это есть ГМТ, т.к. все преобразования равносильны (если мы будем их так двигать будут расс. все случаи вз. расп.) (середина LN движется линейно по лучу; $\Rightarrow$ ГМТ - луч) поясн.

Ответ: луч (не включая его начала) прямой, проходящей через середины диагоналей с нач. в сер. BD и не содерж. вторую середину, сонап. $(\overline{AB}+\overline{CD})$