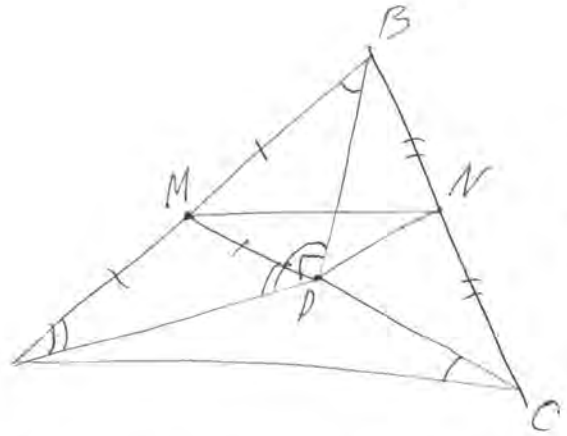
№3

Выиграет Петя. Взяв первым один камень, ему нужно будет просто сохранять нечетное количество камней в куче чтобы последним взять нечетный, 2019й камень. Если противник берет 2, то это делает и Петя, а дальше они оба вынуждены брать по-одному. А если противник взял один, то и Петя тоже.

№5



MN – ср. линия $\triangle ABC \Rightarrow \frac{1}{2}AC$

MD – медиана в прямоуг. $\triangle ABD \Rightarrow$

$\Rightarrow MD = \frac{1}{2}AB$

$MD = MB \Rightarrow \triangle DMB$ – равнобедр. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle MDB = \angle MBD$ $\quad MA = MD \Rightarrow \triangle MAD$ – равнобед. $\Rightarrow \angle MAD = \angle MDA$

$\triangle MBN \sim \triangle ABC \Rightarrow \angle BMN = \angle BAC$; $\angle BNC = \angle BCA$; $k = \frac{1}{2}$

№4 Оно неверно, подставьте $a = b = c = 1$

Для начала докажем неравенство $\frac{a}{a^2+b^2+c^2} + \frac{b}{a^2+b^2+c^2} + \frac{c}{a^2+b^2+c^2} \le \frac{9}{4(a+b+c)}$

$\frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2} \le \frac{9}{4(a+b+c)}$ $\quad 4a^2+4b^2+4c^2+8ab+8ac+8bc \le 9a^2+9b^2+9c^2$

$(a-b-c)^2+94ab+94ac-36bc \ge 0$

$5a^2+5b^2+5c^2-8ab-8ac-8bc \ge 0$ $\quad \cancel{5(a-b-c)^2}+2ab+2ac+2bc \ge 0$ (равно 0 при $a=b=c=0$)

$\frac{a}{2a^2+b^2+c^2} + \frac{b}{a^2+2b^2+c^2} + \frac{c}{a^2+b^2+2c^2} \le \frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2}$ (знаменат. больше) ~~равные при a=b=c~~ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{a}{2a^2+b^2+c} + \frac{b}{a^2+2b^2+c^2} + \frac{c}{a^2+b^2+2c^2} \le \frac{9}{4(a+b+c)}$ ч.т.д.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

1

5964 $\quad$ 53

1	2	3	4	5	6	сумма
4	0,5	3	0	0	3	10,5

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (8–9 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Санкт-Петербург

Дата 24.02.2019

* *

8–9 класс. Первый вариант

1. Маша на свой день рождения принесла в школу конфеты, оставила несколько конфет себе, а остальные раздала шестерым своим подружкам. Оказалось, что у всех девочек разное число конфет и количество конфет у любых четырех девочек больше, чем у трех оставшихся. Какое наименьшее количество конфет Маша могла оставить себе?

2. При каких a квадратные трехчлены $x^2 + ax - 2$ и $2x^2 - 3x + 2a$ имеют общий корень?

3. На столе лежит 2019 камней. Петя и Вася играют в игру по следующим правилам. Ходят по очереди, начинает Петя. За один ход можно взять со стола 1 или 2 камня, но один и тот же игрок два раза подряд не может брать 2 камня. Проигрывает не имеющий хода. Кто из игроков сможет обеспечить себе победу вне зависимости от игры противника?

4. Для любых положительных чисел a, b и c докажите неравенство

$$\frac{a}{2a^2+b^2+c^2} + \frac{b}{a^2+2b^2+c^2} + \frac{c}{a^2+b^2+2c^2} \leqslant \frac{9}{4(a+b+c)}.$$

5. Внутри треугольника ABC выбрана такая точка D, что $\angle ABD = \angle ACD$ и $\angle ADB = 90°$. Точки M и N середины сторон AB и BC соответственно. Найдите угол $\angle DNM$.

6. Найдите все пары простых чисел p и q, для которых $p^2 + pq + q^2$ является точным квадратом.

№1

Всего – x конфет a – Маше $x_1, x_2 \ldots x_6$ – подругам

выберем наим. знач. для $x_1, x_2 \ldots x_6$

$x_1 = \frac{x-20-a}{6}$ $x_2 = \frac{x-20-a}{6} + 1$ ... $x_6 = \frac{x-20-a}{6} + 5$ – различ. на 1

~~приравняем~~ составим нерав., ~~куда~~ где сравним 4 самых маленьких и 3 самых больших доли

$a + x_1 + x_2 + x_3 > x_4 + x_5 + x_6$

$a + 3 \cdot \frac{x-20-a}{6} + 3 > 3 \cdot \frac{x-20-a}{6} + 12$

$a > 9 \Rightarrow \min a = 10$

Ответ: $a = 10$.

№2

$x^2 + ax - 2 = 2x^2 - 3x + 2a$

$x^2 - (3+a)x + 2a + 2 = 0$

$D = 9 + 6a + a^2 - 8a - 8 = 1 - 2a + a^2 = (1-a)^2 \geq 0$

$x = \frac{3+a \pm 1-a}{2} = 2; 1+a \Rightarrow x$ не ограничен, т.к. у a ограничений нет, а также одного значения от a не зависит

?

Ответ: $a \in (-\infty; \infty)$.

№6

x – некое ~~целое~~ целое ~~катур.~~ число

$p^2 + pq + q^2 = x^2$

$(p+q)^2 - pq = x^2$

$pq = (p+q)^2 - x^2 \Rightarrow (p+q)^2 \equiv x^2 \pmod{pq}$ ~~$\Rightarrow p+q \equiv x \pmod p$~~

$pq = (p+q-x)(p+q+x)$

т.к. p и q – простые числа, то одна из скобок делится либо на p, либо на q, либо на pq, либо равна 1. ~~Но так как $(p+q)^2 - x^2 \vdots pq$, то и $p+q-x \vdots pq$, т.к. у них всё еще одинак. остатки.~~ ~~Следовательно~~ Но $pq > p+q-x$ (в целых числах), значит эта скобка делится не на pq, ~~не~~ а на 1, т.к. $(p+q)^2 - x^2 \vdots pq$ и $p+q-x \vdots pq$ из этого из-за одинак. остатков.

Тогда $p+q-x = 1$ $p+q+x = pq$

$p+q = x+1$ $x = pq - p - q$

$x = p+q-1$

$2p + 2q = 1 + pq$

$p = \frac{1-2q}{2-q}$ $q \neq 2$ – при подстановке туда простого числа, выделяется парное елид, если такое есть среди простых это только 3 и 5

~~$\frac{1-2q-q+2q^2-2+q}{2-q} = x$~~ ~~$\frac{2q^2-2q-1}{2-q}$~~ $= x$

$(3+5)^2 - 3 \cdot 5 = 64 - 15 = 49 \stackrel{*}{=} 7^2$

Почему?

Ответ: 3 и 5.