85

А0-52

`СКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

7506

1	2	3	4	5	6	сумма
4	4	4	1	4	0	17

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Владимир

Дата 16.03.2019.

* *

10–11 класс. Второй вариант

1. Имеется 9 черных ладей и n белых. При каком наибольшем n их можно расставить на шахматной доске так, чтобы одноцветные ладьи не били друг друга? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Даны положительные числа x, y, z. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{xyz\,(x+y+z)}{x^4+y^4+z^4}.$$

3. Окружность ω единичного радиуса проходит через вершины B и C треугольника ABC и вторично пересекает его стороны AB и AC в точках K и L соответственно. На лучах BL и CK отмечены соответственно такие точки P и Q, что $BP = AC$ и $CQ = AB$. Найдите расстояние между центрами описанных окружностей треугольников APQ и KBC.

4. Шестнадцатиричная запись квадрата натурального числа x представляет собой два одинаковых соседних блока из n цифр. Может ли n равняться 2023?

5. В однокруговом турнире по настольному теннису участвует $2k$ спортсменов. В каждом туре все участники проводят по одному матчу. Какое наименьшее число туров надо сыграть, чтобы при любом расписании игр обязательно нашлось трое теннисистов, сыгравших друг с другом?

6. Имеется три одинаковых конуса с общей вершиной, касающихся друг друга внешним образом, а также два шара, касающихся внешним образом друг друга и всех конусов. Радиусы шаров относятся как $1 : 3$. Найдите угол при вершине конусов. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении).

Санкт-Петербургский государственный университет

№ 1.

Ответ: 17

Оценка: пусть a_i – количество черных ладей в строке под номером i. Заметим, что тогда количество белых ладей в i-той строке не превышает a_i+1. Просуммировав $a_1, a_2, a_3 \dots a_8$ получим по условию, что их сумма равна $9 \Rightarrow$ белых ладей не более $9+8=17$.

Пример:

			б				
		б	ч		б		
	б	ч	б				
б	ч	б	ч	б	ч	б	
	б	ч	б	ч	б	ч	б
		б	ч	б			
						б	
			б				

б – белая ладья

ч – черная ладья.

№2.

$$A = \frac{xyz(x+y+z)}{x^4+y^4 z^4}$$

1) По неравенству Коши имеем, что:

$$\frac{x^4+y^4}{2} \geq x^2y^2 \quad \forall x, y > 0 \Rightarrow$$

$$x^4+y^4+z^4 \geq x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2.$$

2) $\frac{x^2y^2+x^2z^2}{2} \geq x^2yz$ по неравенству Коши $\Rightarrow$

$x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2 \geq x^2yz+y^2xz+z^2xy$

3) Заметим, что, заменив знаменатель A на $x^2yz+y^2xz+z^2xy$, мы лишь увеличим значение A

$$\Rightarrow A \leq \frac{xyz(x+y+z)}{x^2yz+y^2xz+z^2xy} = 1,$$ т.е. A не превышает единицы.

4) Подставив $x=y=z$, получим:

$$A = \frac{x^3(3x)}{x^4+x^4+x^4} = \frac{3x^4}{3x^4} = 1.$$

Из п.3 и п.4 следует, что максимальное значение A равно 1.

Ответ: 1, причем значение достигается при $x=y=z$.

№5.

Ответ: $k+1$.

1) Покажем, что $k+1$ туров провести достаточно, чтобы получить искомую тройку. Возьмем граф, где игроки - вершины, а игры - ребра, и рассмотрим пару вершин, соединенную ребром. Всего вершин без них $2k-2$, причем ~~для~~ среди них для каждой вершины из выбранной пары найдутся k вершин, соединенных с ней. Тогда по принципу Дирихле найдутся хотя бы две вершины, соединенные с каждой из выбранной пары. Тогда выбранная пара + одна из найденных вершин образуют искомый треугольник.

Чистовик 3/7

Санкт-Петербургский государственный университет

Задача №5 (продолжение)

2) Покажем, что меньше, чем $k+1$ тур провести недостаточно. Тогда расположим теннисистов по кругу и пронумеруем их по часовой стрелке от 1 до $2k$. i-ый тур будем проводить так:

Каждый игрок с нечетным индексом играет со своим $(2i-1)$-ым соседом по часовой стрелке, т.е. в 1 тур игрок под номером 1 играет с своим первым соседом, т.е. игроком с номером 2, во 2 тур - с номером 4, в 3 тур - с номером 6 и т.д. Очевидно, что при таком алгоритме все теннисисты бьются на пары, т.к. 2 игрока с разными нечетными индексами не могут себе выбрать одного и того же соперника, но при этом каждому нечетному игроку достанется соперник. Рассмотрим произвольную тройку игроков после k туров. Заметим, что хотя бы два из них имеют номер одной четности, а согласно нашим правилам первые k туров между собой играли игроки в том случае, что их номера разной четности $\Rightarrow$ в любой рассмотренной тройке хотя бы одного ребра нет. $\Rightarrow$ За k туров нельзя выполнить условие.

№4. Предположим, что это возможно.

Т.к. x^2 представляет собой 2 блока по n цифр, то x^2 делится на $(1\underbrace{0\ldots0}_{2023\text{ нуля}}0_{16} + 1_{16})$. Заметим, что если какое-то число y имеет длину записи m, то длина записи числа y^2 равна либо $2m-1$, либо $2m$:

$1\underbrace{0\ldots0}_{m-1}{}_{16} \leq y < 1\underbrace{00\ldots0}_{m}{}_{16} \Rightarrow 1\underbrace{0\ldots000}_{2m-2}{}_{16} \leq y^2 < 1\underbrace{0\ldots0}_{2m}{}_{16}$

Из этого следует, что длина числа x равна n, то есть 2023. Заметим, что тогда 1ая цифра числа x не меньше 4, ведь если $x < 4\underbrace{00\ldots0}_{2022}{}_{16}$, то $x^2 < 1\underbrace{000\ldots0}_{4055}{}_{16}$.

Так как число $a = \underbrace{10\ldots001}_{2024\text{ цифры}}{}_{16} > x$, то a должно раскладываться на произведение kx, где $k < x$ и k - целое число, ведь a - делитель числа x^2. ~~[illegible]~~ (1) Если $k \geq 5$, то число $\frac{a}{k}$ либо имеет длину меньше 2023, либо не начинается с цифры, большей 3. Тогда $k < 5$. Видно, что $a \not\vdots 2$, т.к. $a = 16^{2023} + 1$, а также $a \not\vdots 4$. Еще $a \not\vdots 3$, т.к. $16^{2023} = 4^{4046}$, а $4^{4046} \equiv 1 \pmod 3$, т.е. $a \equiv 2 \pmod 3$. Противоречие, т.е. n не может равняться 2023.

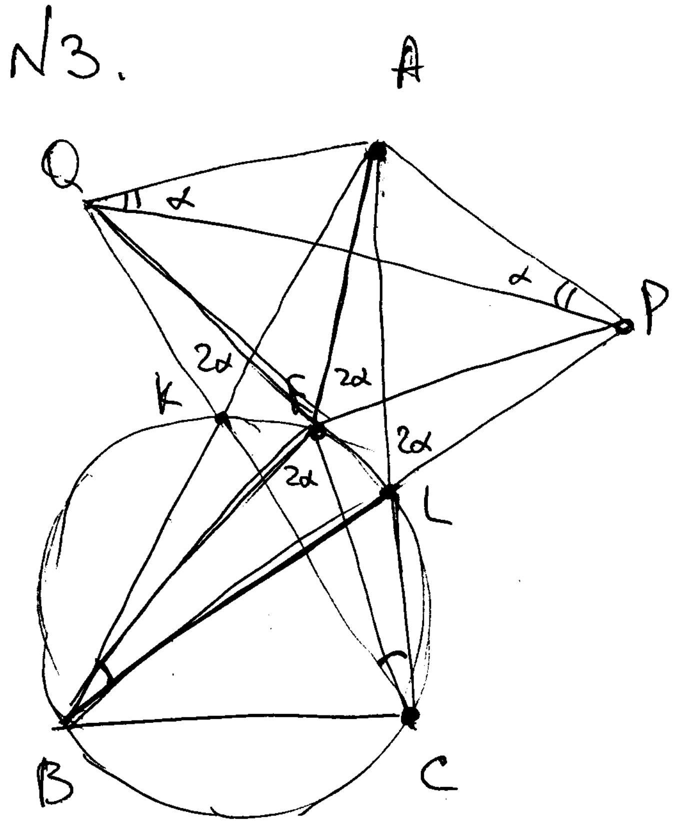
Санкт-Петербургский
государственный
университет

№4.

Доп. разъяснение (1):

Если k – двухзначное число или содержит еще больше знаков в 16ричной системе, то $\frac{a}{k}$ имеет меньшую длину, чем необходимо. Если $5_6 \leq k < 10_6$, то первая цифра $\frac{a}{k}$ легко узнается при попытке разделить число a на k в столбик, и эта цифра, очевидно, равна целой части частного 10_{16} и k.

№3.



1) $\angle KBL = \angle KCL$ как опирающиеся на одну дугу окружности.

2) $\triangle ABP = \triangle QCA$ ($QC = AB$; $BP = AC$; $\angle KBL = \angle KCL$) $\Rightarrow QA = AP \Rightarrow \triangle APQ$ – равнобедренный.

3) Пусть $\angle AQP = \alpha$, $\angle QPL = \beta$. Из п.2 следует, что $\angle QAC = \angle APB = \alpha + \beta$. $\angle QAP = 180 - 2\alpha \Rightarrow$

$\angle LAP = \angle QAP - \angle QAC = 180 - 2\alpha - \alpha - \beta$

$\angle ALP = 180 - \angle APL - \angle LAP = 180 - (180 - 3\alpha - \beta) - (\alpha + \beta) =$

$= 2\alpha$.

Чистовик 6/7

4) $\angle ALP = \angle BLC$] как вертикальные. $\Rightarrow$
$\angle QKA = \angle BKC$]

$\angle BLC = \angle BKC$ как опирающиеся на одну дугу $\Rightarrow$

$\angle QKA = 2\alpha$.

5) Проведем окружность вокруг $\triangle ALP$. Пусть у этой окружности и ω найдется общая точка F, отличная от L. Тогда $\angle BFC = \angle BLC = 2\alpha$, $\angle AFP = \angle ALP = 2\alpha$. Также $\angle FBL = \angle FCL$ как опирающиеся на одну дугу. Аналогично $\angle FAL = \angle FPL$

Тогда $\triangle BFP = \triangle CFA$ ($\angle FBL = \angle FCL$; $\angle FAL = \angle FPL$, $BP = AC$ по условию) $\Rightarrow BF = CF$; $AF = FP$

6) Рассмотрим $\triangle BFA$ и $\triangle CFQ$; т.к. $BF = CF$, а $QC = AB$, $\angle KBF = \angle KCF$, то ~~а~~ они равны. $\Rightarrow$ $QF = AF$, но т.к. $AF = FP$, то $QF = FP \Rightarrow$ точка F равноудалена от вершин $\triangle APQ \Rightarrow$ F - центр описанной вокруг $\triangle APQ$ окружности, т.е. искомое расстояние равно радиусу окр. ω, т.е. 1.

Ответ: 1

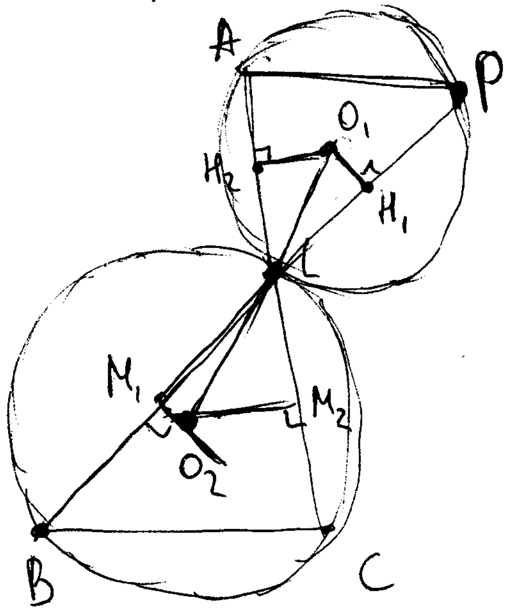
См. след. страницу.

Чистовик 7/7

Санкт-Петербургский государственный университет

№3 (Продолжение).

7) В п.5 мы предположили, что окружности пересекаются по 2 точкам. Рассмотрим случай, когда проведенная окружность касается ω: Очевидно, что линия, соединяющая центры, пройдет через L. Нарисуем рисунок:



Проведем сер.пер-ы к AL; LP; BL; LC.

(1) $\triangle O_1H_1L \sim \triangle O_2M_1L \Rightarrow \frac{O_1L}{LH_1} = \frac{O_2L}{LM_1}$

(2) $\triangle O_1H_2L \sim \triangle O_2M_2L \Rightarrow \frac{O_1L}{LH_2} = \frac{O_2L}{LM_2}$

Из (1) и (2) следует, что:

$\frac{LP}{LB} = \frac{AL}{LC} \Leftrightarrow \triangle APL \sim \triangle CBL \Rightarrow$

$\angle LBC = \angle LPA \Rightarrow AP \parallel BC$.

8) Если проведенная окр. касается ω, то проведем окр. вокруг $\triangle AQK$. Если она пересекла ω в 2 точках, то повторяем док-во п.5 - п.6. Если она тоже касается ω, то в $\triangle APQ$ $AP \parallel BC$ и $AQ \parallel BC$, а значит $AP \parallel AQ$, что возможно лишь когда прямые совпадают. Тогда вокруг APQ нельзя описать окружность и ответ не определен. Ответ: $\rho(O_1;O_2)=1$

2