№4 Пусть a — блок из $n=20182019$ цифр.
Тогда

$$x^2 = a(10^n+1)$$

10^n+1 — это число из $n+1$ цифры

~~a — число из n цифр~~

~~$10^{n-1} \le a \le 10^n - 1$~~

$\Downarrow$

~~$10^{2n-1}+10^{n-1} \le x^2 \le 10^{2n}-2\cdot 1$~~

$$\left(10^n - 10^{\frac{n-1}{2}}\right)^2 = 10^{2n} - 2\cdot 10^{n+\frac{n-1}{2}} + 10^{n-1}$$

т.к. $n=20182019 \not\vdots\, 2$, то это число $\in \mathbb{N}$

$$10^{2n} - 2\cdot 10^{n+\frac{n-1}{2}} \vee 10^{2n-1}$$

$$9\cdot 10^{n-1} \vee 2\cdot 10^{\frac{n-1}{2}}$$

$$9\cdot 10^{\frac{n-1}{2}} \vee 2$$

Очевидно, что "$\vee$" — это $>$

$$10^n+1 = (10+1)(10^{n-1}-10^{n-2}+10^{n-3}-10^{n-4} \ldots +10-1) =$$

т.к. $n \not\vdots\, 2$

$$= 11 \cdot \underbrace{999\ldots9}_{n-1=20182018}$$

Пусть $a = \underbrace{99\ldots9}_{n-1=20182018} \cdot \frac{11}{9} = 11 \cdot \underbrace{111\ldots1}_{20182018}$

Понятно, что в этом числе 2019 знаков

$$x^2 = 11\cdot\underbrace{11\ldots1}_{20182018}\cdot 11\cdot 9\cdot\underbrace{11\ldots1}_{20182018} = 11^2\cdot 3^2\cdot \underbrace{11\ldots1}_{20182018}{}^2$$

Ответ: да, ~~число~~, см. пример выше.

+/+ 1 шаг

Выход: 13^{58} — 14^{00}

РГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

1	2	3	4	5	6	сумма
+	4		+	[illegible]		[illegible]

9029

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Санкт-Петербург

Дата 24 февраля 2019 г.

* *

10–11 класс. Первый вариант

1. Имеется 8 черных ладей и n белых. При каком наибольшем n их можно расставить на шахматной доске так, чтобы одноцветные ладьи не били друг друга? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Даны положительные числа x, y, z. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{xyz\,(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4+(yz)^4+(xz)^4}}.$$

3. Дан треугольник ABC с меньшей стороной AB. На сторонах AB и AC выбраны соответственно точки X и Y так, что $BX = CY$. Под каким углом прямая, проходящая через центры описанных окружностей треугольников ABC и AXY, пересекает прямую BC, если $\angle ABC = \beta$ и $\angle BCA = \gamma$?

4. Десятичная запись квадрата натурального числа x представляет собой два одинаковых соседних блока из n цифр. Может ли n равняться 20182019?

5. На однокруговой турнир по настольному теннису подало заявку 16 человек. Когда было сыграно n матчей, оказалось, что среди любых трех теннисистов найдутся двое, уже сыгравших между собой. При каком наименьшем n такое возможно?

6. Три конуса с общей вершиной, касающихся друг друга внешним образом, имеют высоту 2 и радиус основания $\sqrt{3}$. Два шара касаются внешним образом друг друга и всех конусов. Найдите отношения радиусов шаров (большего к меньшему).

№1 Заметим что ~~при расста~~ две ладьи одного цвета могут стоять в одной строке / столбце только если они разделены хотя бы одной ладьей другого цвета.

Посчитаем количество белых ладей по строчкам.

Назовём ладьи одного цвета, стоящие в одной строке так, что между ними нет ладей их цвета, соседними.

Между соседними белыми ладьями обязательно должна стоять чёрная, чтобы они не били друг друга.

Заметим, что одна черная ладья разделяет таким образом не более одной соседней пары (ближайшие к ней по обе стороны ладьи).

Значит, соседних пар не более 8 (кол-во чёрных ладей). Но пусть белых ладей больше $8 \cdot 2 = 16$

Заметим, что если у нас есть ладья без соседа (а если белых ладей >16, то такая есть, т.к. парных не более 16), то в какой-то строке хотя бы 3 белых ладьи: ○ ◎ ○ ◎ ○.

~~Будем называть в строке любое из всех, кроме каких-то двух, стоящих в строке, лишними ладьями.~~

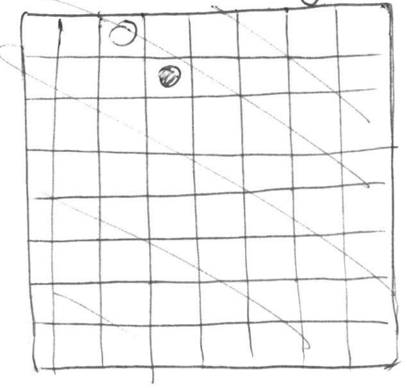
Будем называть белую ладью, стоящую между двумя чёрными, лишней. Тогда Пусть у нас x ладей без соседа. Тогда должно быть хотя бы x лишних ладей (т.к. одиночная ладья → пара чёрных в одной строке → должна быть разделена белой-лишней). Заметим, что ~~без~~ лишняя ладья может считаться в парах неск. раз (т.к. принадлежит двум соседним парам) разделяет

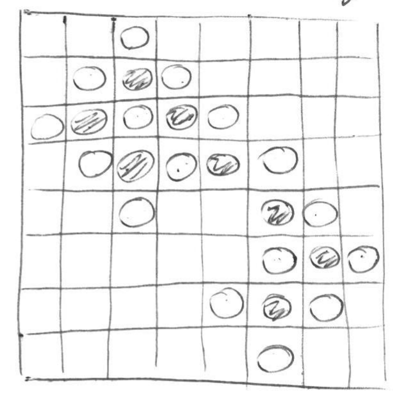
Если каждая ладья образует пару соседей, то, как мы поняли, максимум 16 соседей. Тогда каждая лишняя ладья посчитана два раза. Если „лишняя" ладья граничит с неразделяющей черной ладьей, то она не посчитана дважды, но нерад. ладье не надо сопоставлять пару → все равно −1 из общего кол-ва.

Посчитаем кол-во белых ладей на доске

$16 - x + x = 16$. Противоречие.

→ Максимум 16 белых ладей. Пример:





8 черных
16 белых
Нетрудно проверить, что пример подходит: одноцветные ладьи не бьют друг друга.

Ответ: 16. √

№2 $A = \dfrac{xyz(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4+(yz)^4+(xz)^4}}$ $\quad x, y, z > 0$

~~По нер-ву о средних~~ $\dfrac{x^8+y^8}{2} \geq (xy)^4$

$\Downarrow$

$(xy)^4+(yz)^4+(xz)^4 \leq x^8+y^8+z^8$

По неравенству о средних

~~$A \leq$~~

$a+b \geq 2\sqrt{ab}$

$\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

$a+b+c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{bc}$

$(xy)^4+(yz)^4+(xz)^4 \geq x^2y^4z^2 + x^4y^2z^2 + x^2y^2z^4$

$A \leq \dfrac{xyz(x+y+z)}{\sqrt{x^2y^2z^2(x^2+y^2+z^2)}} = \dfrac{xyz(x+y+z)}{xyz\sqrt{x^2+y^2+z^2}} =$

$= \dfrac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \sqrt{\dfrac{x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz)}{x^2+y^2+z^2}} =$

~~Значит, для $\forall (x,y,z)$ $A \leq \dfrac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2}}$~~

$= \sqrt{1+2\dfrac{xy+xz+yz}{x^2+y^2+z^2}} \leq \sqrt{1+2\dfrac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}} = \sqrt{3}$.

$\dfrac{x^2+y^2}{2} \geq xy$

$\Downarrow$

$xy+yz+xz \leq x^2+y^2+z^2$

Заметим что при $(1;1;1)$.

$A = \dfrac{1 \cdot 3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$. Т.е. $\sqrt{3}$ — максимальное значение A.

Ответ: $\sqrt{3}$. √

чистовик

N5 ~~Рассмотрим~~ ~~двудо~~ два полных подграфа ~~па~~ ~~8 вер~~

Рассмотрим граф. Вершины — игроки. Они соединены ребром, если играли.

Рассмотрим два полных подграфа на 8 вершинах каждый (один из вариантов — "таблицы").

Здесь $n = 2 \cdot \frac{8 \cdot 7}{2} = 56$ ребер (игр)

Заметим, что этот пример удовлетворяет условию. Из 3х игроков хотя бы двое обязательно окажутся в одном полном подграфе (по принципу Дирихле) и будут соединены ребром.

Пусть есть ~~такой~~ вариант проведения игр, удовлетворяющий условию, с меньшим n.

Тогда он получается из вышеописанного перекидыванием каких-то ребер и удалением хотя бы 1го ребра.

черновик

2018 2019

$10^{2n}-1-10^{2n-1}$

10^n+1

$a \cdot 11(10^{n-1}+10^{n-2}+\ldots+10+1)$

2018 2019

$a \cdot 11 \cdot 1111\ldots1$

10

$-+$

2018 2018

~~$n<100$~~

$11\ldots1 \cdot \frac{9}{11}$ ~~<111~~