КL016

957

65

РГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

1	2	3	4	5	6	сумма
4	4	4	1	0	0	13

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Душанбе

Дата 11.03.2019

* *

10–11 класс. Первый вариант

1. Имеется 8 черных ладей и n белых. При каком наибольшем n их можно расставить на шахматной доске так, чтобы одноцветные ладьи не били друг друга? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Даны положительные числа x, y, z. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{xyz\,(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4+(yz)^4+(xz)^4}}.$$

3. Дан треугольник ABC с меньшей стороной AB. На сторонах AB и AC выбраны соответственно точки X и Y так, что $BX = CY$. Под каким углом прямая, проходящая через центры описанных окружностей треугольников ABC и AXY, пересекает прямую BC, если $\angle ABC = \beta$ и $\angle BCA = \gamma$?

4. Десятичная запись квадрата натурального числа x представляет собой два одинаковых соседних блока из n цифр. Может ли n равняться 20182019?

5. На однокруговой турнир по настольному теннису подало заявку 16 человек. Когда было сыграно n матчей, оказалось, что среди любых трех теннисистов найдутся двое, уже сыгравших между собой. При каком наименьшем n такое возможно?

6. Три конуса с общей вершиной, касающихся друг друга внешним образом, имеют высоту 2 и радиус основания $\sqrt{3}$. Два шара касаются внешним образом друг друга и всех конусов. Найдите отношения радиусов шаров (большего к меньшему).

$= 90 - \beta + \beta + \gamma - \frac{\beta + \gamma}{2} = 90 - \frac{\beta - \gamma}{2}$

Ответ: $\angle BWO_1 = 90 - \frac{\beta - \gamma}{2}$

№ 4

~~Докажем~~ Запишем ~~that~~ два блока из n-цифр, $T = \overline{a_1 a_2 \ldots a_n}$

Докажем, что число $X = \left(\frac{10^n + 1}{11} \cdot 10\right)^2 \to$ подходит каждому условию (где $n = 2018 2019$)

$X^2 = \overline{a_1 a_2 \ldots a_n a_1 a_2 \ldots a_n} = \overline{a_1 a_2 \ldots a_n} \cdot 10^n + \overline{a_1 a_2 \ldots a_n} =$

$= \overline{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n}(10^n + 1) =$ пусть $\overline{a_1 a_2 \ldots a_n} = \frac{10^n + 1}{11^2} \cdot 10^2$,

где $n = 20182019$, докажем что $T = \frac{10^n + 1}{11^2} \cdot 10^2$

$10^{11} + 1 = 121 \cdot 826446281 \Rightarrow 10^{11} + 1 \vdots 121 \Rightarrow 10^{2018 \cdot 2019} + 1 =$

$= (10^{11})^{1834729} + 1 \vdots 10^{11} + 1 \vdots 121 \Rightarrow 10^n + 1 \vdots 121 \Rightarrow$

$T = \frac{10^n + 1}{11^2} \cdot 10^2 \in N$. Док. что T — n-значное число,

то дост. док. что $10^{n-1} \le T < 10^n$.

$10^{n-1} \le \frac{10^n + 1}{11^2} \cdot 10^2 < 10^n \Rightarrow 10^{n-3} \le \frac{10^n + 1}{11^2} < 10^{n-2}$

$10^{n-3} \cdot 11^2 \le 10^n + 1 \le 10^{n-2} \cdot 11^2$

$10^{n-3} \cdot (10^2 + 21) \le 10^n + 1 \le 10^{n-2}(10^2 + 21)$

~~$1) 10^{n-3}(10^2+21) \le 10^n+1 < (10^2+21) 10^{n-2}$~~

1) $10^{n-3} \cdot (10^2 + 21) = 10^{n-3} + 10^{n-2} \cdot 2 + 10^{n-3} < 10^{n-2} \cdot 3 < 10^n < 10^n + 1$

2) $(10^2 + 21) \cdot 10^{n-2} = 10^n + 21 \cdot 10^{n-2} > 10^n + 1$

значит T — удовлетворяет всем условиям

$\Sigma = \left(\frac{10^n + 1}{11} \cdot 10\right)^2 = \overline{a_1 \ldots a_n a_1 \ldots a_n}$ — ч.т.д.

№1

Мы можем расположить на одной линии 2 черные ладьи, тогда между ними можно поставить только 1 белую ладью максимум.

Если на одной линии a черных, тогда на той же линии может располагаться максимум $(a+1)$ белая.

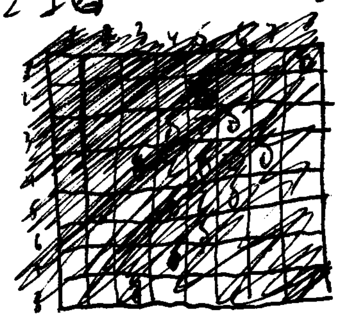
Т.к мы знаем, что ладья бьёт по вертикали и горизонтали.

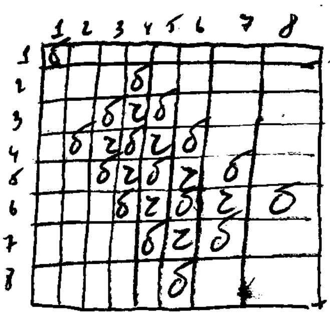
Пусть на i-ой строке a_i белых, то тогда a_i+1 черных.

Σ ~~черных~~ белых ладей $=(x_1+x_2+\ldots+x_8)+8$.

Т.к $x_1+x_2+x_3+\ldots+x_8=8$, то тогда кол-во $n=\Sigma$ белых $=$

$=16$ – ответ





ч – черные ладьи

б – белые

– пример такого расположения

№2

$$A=\frac{xyz(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4+(yz)^4+(xz)^4}}.$$

Используем некоторые известные нам неравенства:

$a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc$ (1) $a,b,c>0$

$2a^2+2b^2+2c^2 \geq 2ab+2ac+2bc$ | $a^2+b^2+c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3}$ (2)

$$+\begin{cases} a^2+b^2\geq 2ab \\ b^2+c^2\geq 2bc \\ a^2+c^2\geq 2ac \end{cases}$$ ч.т.д

$2a^2+2b^2+2c^2 \geq 2ab+2ac+2bc$

ч.т.д

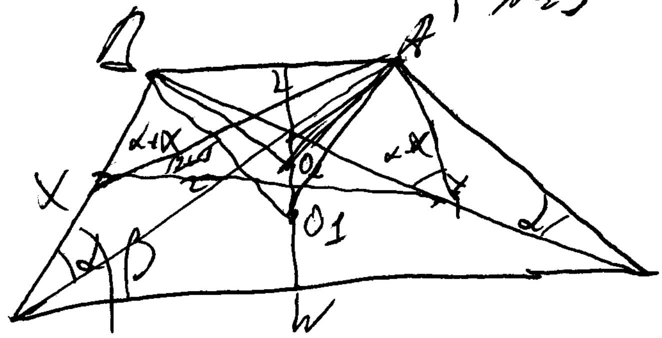
$(xy)^4+(yz)^4+(xz)^4 \geq (xy)^2\cdot(yz)^2+(xy)^2\cdot(xz)^2+(xz)^2\cdot(yz)^2=$

$=x^2y^2z^2\cdot(x^2+y^2+z^2)\geq x^2y^2z^2\cdot\frac{(x+y+z)^2}{3}$

$$A=\frac{xyz\cdot(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4+(yz)^4+(xz)^4}}\le\frac{xyz\cdot(x+y+z)}{\sqrt{x^2y^2z^2\cdot\frac{(x+y+z)^2}{3}}}=\sqrt{3}$$

то есть макс. знач. $A=\sqrt{3}$ - ответ.

№3



Пусть O_1 - точка центр. окруж. описанной $\triangle ABC$, а O_2 - точка ~~центра~~ окруж. $\triangle AXY$

$BX=CY$, $AB\cdot AC$

B XY не может быть $\parallel BC$

Пусть точка A' второе пересечение центра окруж. описанной около $\triangle ABC$ и $\triangle AXY$. Пусть $\angle XBA'=\alpha$, т.к. A, A', C, B - цикличны, то $\alpha=\angle ABA'=\angle ACA'$. Пусть $x=\angle YA'C$, $\angle AYA'=\angle YA'C+\angle A'CY=\alpha+x$, т.к. A, A', Y, X - цикличны, то $\angle AXA'=\angle AYA'=\alpha+x\Rightarrow\angle XA'B=\angle AXA'-XBA'=\alpha+x-\alpha=x$, то $\angle XA'B=x=\angle YA'C$.

$\angle YCA'=\angle XBA'$, $\triangle YCA'$ и $\triangle XBA'$ - подобны

$\frac{BX}{CY}=\frac{A'X}{A'Y}\Rightarrow 1$, $A'X=A'Y$. $AO_2=A'O_2$ и $AO_1=A'O_1$

$\triangle AO_1A'$ и $\triangle AO_2A'$, то O_1O_2 -

O_1O_2 - биссектриса, перпендикуляр AA'

$\angle XA'Y=\angle XAY=\angle\beta\ldots$

т.к A, A', Y, X - цикличны

$=180-\beta-\gamma$; т.к $A'X=A'Y$; $\angle A'XY=\frac{180-\angle XA'Y}{2}=90-\frac{180-\beta-\gamma}{2}=\frac{\beta+\gamma}{2}$

т.к A, A', Y, X - цикличны, то $\angle YAA'=\angle A'XY=\frac{\beta+\gamma}{2}$

Пусть $O_1O_2\cap BC=W$, $\angle BWO_1=360-\angle ABW-\angle BAA'-90=$
$=360-\beta-(180-\beta-\gamma)-\frac{\beta+\gamma}{2}-90°=$

Чистовик

1

№6

Т.к подало заявку 16 человек, то общее количество матчей которое было сыграно $\frac{16\cdot 15}{2} = 120$ игр. Т.к мы выбираем произвольно любых трёх теннисистов, среди которых двое уже сыграли между собой, то для удовлетворения этого условия необходимо, ~~чтобы~~ ~~было сыграно $\frac{2}{3}$ от общего количества матчей~~ ~~Докажем почему это верно и не может~~ ~~$120\cdot\frac{2}{3} = 80$ игр~~, ~~Докажем~~ ~~быть игр меньше~~ . чтобы было сыграно $\frac{2}{3}$ от общего кол-ва матчей, т.е Ответ $= 120\cdot\frac{2}{3} = 80$ игр.