$\cdot\, 10^{n-3}(10^2+21) = 10^{n-1}+10^{n-2}\cdot 2+10^{n-3} < 10^{n-1}\cdot 3 < 10^n \le$
$\le 10^n+1$ - верно.

$\cdot\, (10^2+21)\cdot 10^{n-2} = 10^n \cdot 21\cdot 10^{n-2} > 10^n+1$ - верно

$\Rightarrow X^2 = \left(\frac{10^n+1}{11}\cdot 10\right)^2 = \overline{a_1 \ldots a_n}$

Значит существует такое число $x = \left(\frac{10^n+1}{11}\cdot 10\right)$
где $n = 20182019$

$\boxed{\text{Ответ: Да}}$

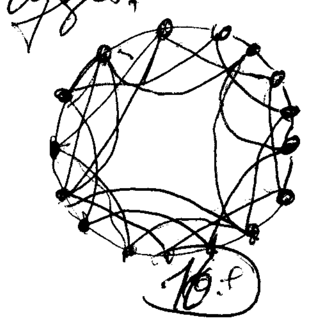
N5.

Максимальное значение $n = \frac{16(16-1)}{2} = 120$ (когда граф полный) т.е. все игроки сыграли друг с другом

Но надо найти наименьший n. Можно представить игроков - вершинами графа, а ребро между ними будет означать сыгранную партию.

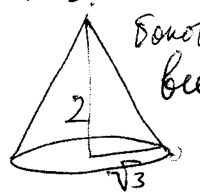
количество „троек" игроков из 16 $= C_{16}^3 = \frac{16!}{13!\cdot 3!} = \frac{14\cdot 15\cdot 16}{1\cdot 2\cdot 3} =$
$= 14\cdot 5\cdot 8 = 560$, ~~в т~~ по условию в каждой такой тройке должно быть ≥1 ребро. Пусть ~~Ответ n~~. количество ребер n, тогда

$n \geq \frac{C_{16}^3\cdot 1}{14} = \frac{560}{14} = 40$. - но ~~это~~ не будет удовлетворять условию. $40+16=56$.

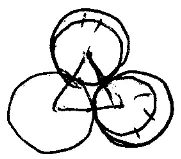


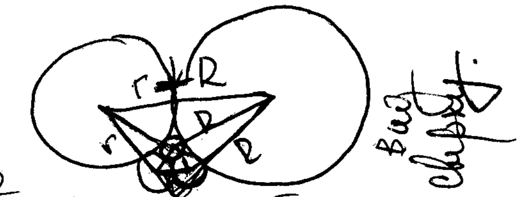
$\boxed{\text{Ответ: 56.}}$

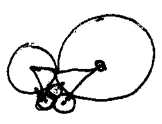
N6.

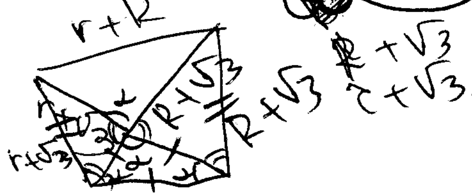


боковая сторона ~~?~~ конуса $= \sqrt{4+3} = \sqrt{7}$.
вид сверху (конусов)









KL014

4088

55

ГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

1	2	3	4	5	6	сумма
4	3	2	1	1	0	11

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Душанбе

Дата 11.03.2019

* *

10–11 класс. Первый вариант

1. Имеется 8 черных ладей и n белых. При каком наибольшем n их можно расставить на шахматной доске так, чтобы одноцветные ладьи не били друг друга? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Даны положительные числа x, y, z. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{xyz\,(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4+(yz)^4+(xz)^4}}.$$

3. Дан треугольник ABC с меньшей стороной AB. На сторонах AB и AC выбраны соответственно точки X и Y так, что $BX = CY$. Под каким углом прямая, проходящая через центры описанных окружностей треугольников ABC и AXY, пересекает прямую BC, если $\angle ABC = \beta$ и $\angle BCA = \gamma$?

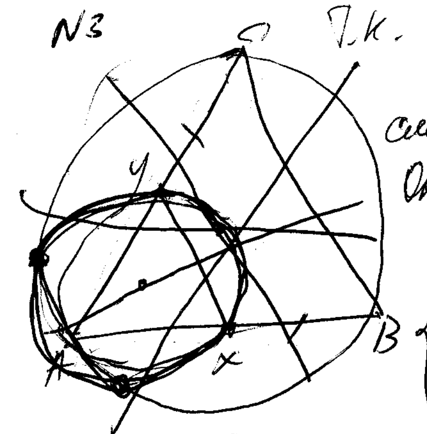
4. Десятичная запись квадрата натурального числа x представляет собой два одинаковых соседних блока из n цифр. Может ли n равняться 20182019?

5. На однокруговой турнир по настольному теннису подало заявку 16 человек. Когда было сыграно n матчей, оказалось, что среди любых трех теннисистов найдутся двое, уже сыгравших между собой. При каком наименьшем n такое возможно?

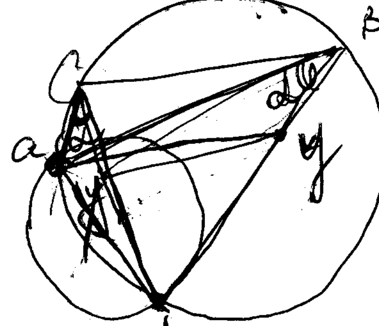
6. Три конуса с общей вершиной, касающихся друг друга внешним образом, имеют высоту 2 и радиус основания $\sqrt{3}$. Два шара касаются внешним образом друг друга и всех конусов. Найдите отношения радиусов шаров (большего к меньшему).

№3 Т.к. AB - наименьшая сторона $\triangle ABC$, то $AB < AC$ и $AB < CB$. Также дано что $YC = XB$, отсюда следует, что ~~AC ∥ AB~~ $xy \nparallel BC$

Окружности пересекаются в точках A и a



$$\begin{cases} \angle aCA = \angle ABa = \alpha. \\ \angle yac = \omega \\ \angle AYa = \omega + \alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} \cancel{\angle Aya} \\ \angle Axa = \alpha + \omega \\ \angle xaB = (\alpha+\omega) - \alpha = \omega \\ \angle xaB = \angle yac = \omega \end{cases}$$



$\angle yca = \angle xBa$. Из выше перечисленных равенств следует, что $\triangle xBa$ и $\triangle yca$ - подобны

$\frac{ax}{ay} = \frac{Bx}{cy}$. т.к $Bx = cy$, то $\frac{ax}{ay} = \frac{Bx}{cy} = 1$. $ax = ay$

Пусть O_1 - центр окружности ABC

O_2 - центр окружности Axy

$AO_2 = aO_2$, $AO_1 = aO_1$, прямая, пересек. центры окружн. является биссектрисой $\triangle AaO_2$, и $O_1O_2 \perp Aa$. $\angle xay = \angle xAy = \angle BAC$

$\angle xay = 180 - \beta - \gamma$, $\angle axy = \frac{180 - (180 - \beta - \gamma)}{2} = 90 - \frac{180 - \beta - \gamma}{2} = \frac{\beta+\gamma}{2}$

$\angle yAa = \angle axy = \frac{\beta+\gamma}{2}$. Пусть O_1O_2 пересекает Bc в точке Z. $\angle BZO_1 = 360 - \angle AB - \angle BAa - 90 = 360 - \beta - (180 - \beta - \gamma) - \frac{\beta+\gamma}{2} - 90 = 90 - \frac{\beta - \gamma}{2}$

$\boxed{\text{Ответ: } 90 - \frac{\beta-\gamma}{2}}$

№1 Если на одной строке (линии) 2 черных, то между ними может быть максимум одна белая.

Если на одной линии x черных, то на этой же строке может быть максимум $(x+1)$ белых и наоборот.

Шахматная доска имеет размеры 8×8, а ладья бьёт другую по вертикали и горизонтали.

Пусть на i-ой строке x_i белых, тогда i-ой строке будет (x_i+1) черных ладей.

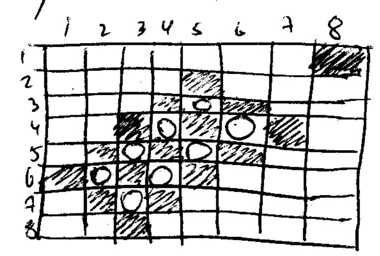
$$\begin{cases} i - x_i \text{ (бел)} \quad x_i + 1 \text{ (чер)} \\ i+1 - x_{i+1} \text{ (бел)} \quad x_{i+1} + 1 \text{ (чер)} \\ \vdots \\ 8 - x_8 \text{ белых} \quad x_8 + 1 \text{ (чер)} \end{cases}$$

кол-во черных ладей $= (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8) + 8$

Т.к. $x_1 + x_2 + \ldots + x_8 = 8$,

То кол-во ладей $8+8 = 16$ это максимально возможное значение.

Например, они могут располагаться так:



, где ■ - черная ладья. ○ - белая ладья.

$\boxed{\text{Ответ: } 16}$

№2. $A = \frac{xyz(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4 + (yz)^4 + (xz)^4}}$ Найти max A

1) (!) $a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + ac + bc$, $\forall\, a, b, c > 0$

(!) $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \ge 2ab + 2ac + 2bc \Rightarrow$ (!) $\underbrace{(a-b)^2}_{\ge 0} + \underbrace{(a-c)^2}_{\ge 0} + \underbrace{(b-c)^2}_{\ge 0} \ge 0$ ✓

$\Rightarrow$ (!) $(a+b+c)^2 \ge \frac{(a+b+c)^2}{3}$

(!) $3(a+b+c)^2 \ge (a+b+c)^2 \Rightarrow$ (!) $2(a^2+b^2+c^2) \ge 2ab + 2ac + 2bc \Rightarrow$

(!) $\underbrace{(a-b)^2}_{\ge 0} + \underbrace{(a-c)^2}_{\ge 0} + \underbrace{(b-c)^2}_{\ge 0} \ge 0$ — ✓.

$(xy)^4 + (yz)^4 + (xz)^4 \ge (xy)^2(xz)^2 + (xy)^2(yz)^2 + (xz)^2(yz)^2 = x^2y^2z^2(x^2+y^2+z^2) \ge$

$\ge x^2y^2z^2 \cdot \frac{(x+y+z)^2}{3} \Rightarrow A = \frac{xyz(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4 + (zy)^4 + (xz)^4}} \le \frac{xyz(x+y+z)}{\sqrt{x^2y^2z^2 \cdot \frac{(x+y+z)^2}{3}}} = \sqrt{3}$

⇓

$A \le \sqrt{3}$, возьмём $x = y = z$. $\Rightarrow A = \sqrt{3}$.

$\boxed{\text{Ответ: } \max(A) = \sqrt{3}}$

№4. $x^2 = \overline{a_1a_2a_3\ldots a_na_1a_2a_3\ldots a_n} = \overline{a_1a_2\ldots a_n} \cdot 10^n + \overline{a_1a_2\ldots a_n} =$

$= \overline{a_1a_2\ldots a_n}(10^n+1)$. Пусть $\overline{a_1a_2\ldots a_n} = \frac{10^n+1}{11^2} \cdot 10^2$, $n = 20182019$

(!) $\overline{a_1a_2\ldots a_n} = \frac{10^n+1}{11^2} \cdot 10^2$ - натуральное.

$10^{11} + 1 = 121 \cdot 826446281 \Rightarrow 10^{11} + 1 \,\vdots\, 121 \Rightarrow 10^n + 1 =$

$= 10^{2018 \cdot 2019} + 1 = (10^{11})^{1834729} + 1 \,\vdots\, 10^{11}+1 \,\vdots\, 121 \Rightarrow 10^n + 1 \,\vdots\, 121$, $\frac{10^n+1}{11^2} \cdot 10^2 \in N$

(!) $10^{n-1} \le \overline{a_1a_2\ldots a_n} \le 10^n$; (!) $10^{n-1} \le \frac{10^n+1}{11^2} \cdot 10^2 < 10^n \Rightarrow$

(!) $10^{n-3} \le \frac{10^n+1}{11^2} < 10^{n-2}$:

$10^{n-3} \cdot (10^2+21) \le 10^n + 1 < (10^2+21) \cdot 10^{n-2}$.