САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

1	2	3	4	5	6	сумма
4		4	4	0	1.5	13.5

6.5

3489

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (8–9 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Санкт-Петербург

Дата 24.02.2019

* *

8–9 класс. Первый вариант

1. Маша на свой день рождения принесла в школу конфеты, оставила несколько конфет себе, а остальные раздала шестерым своим подружкам. Оказалось, что у всех девочек разное число конфет и количество конфет у любых четырех девочек больше, чем у трех оставшихся. Какое наименьшее количество конфет Маша могла оставить себе?

2. При каких a квадратные трехчлены $x^2 + ax - 2$ и $2x^2 - 3x + 2a$ имеют общий корень?

3. На столе лежит 2019 камней. Петя и Вася играют в игру по следующим правилам. Ходят по очереди, начинает Петя. За один ход можно взять со стола 1 или 2 камня, но один и тот же игрок два раза подряд не может брать 2 камня. Проигрывает не имеющий хода. Кто из игроков сможет обеспечить себе победу вне зависимости от игры противника?

4. Для любых положительных чисел a, b и c докажите неравенство

$$\frac{a}{2a^2+b^2+c^2} + \frac{b}{a^2+2b^2+c^2} + \frac{c}{a^2+b^2+2c^2} \leqslant \frac{9}{4(a+b+c)}.$$

5. Внутри треугольника ABC выбрана такая точка D, что $\angle ABD = \angle ACD$ и $\angle ADB = 90^\circ$. Точки M и N середины сторон AB и BC соответственно. Найдите угол $\angle DNM$.

6. Найдите все пары простых чисел p и q, для которых $p^2 + pq + q^2$ является точным квадратом.

Чистовик (лист №1)

Задача №1

Пусть $a_1; a_2; a_3; a_4; b_1; b_2; b_3$ - кол-во конфет, которое было у Маши и ее подруг.

Т.к. $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3$ не равны между собой по услов., мы можем разместить эти значения в порядке возрастания

Пусть не умоляя общности $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < b_1 < b_2 < b_3$.
Таким образом найдем 4 наименьших числа.
Вначале найдем, каким должно быть число конфет у Маши, чтобы условие выполнялось.

Составим неравенство: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 > b_1 + b_2 + b_3$.
Максимальное значение $a_3 = a_4 - 1$, а вот $a_2 = a_4 - 2$. $(a_2 < a_3 < a_4)$
Минимальное значение для $b_1 = a_4 + 1$, т.к. $b_1 > a_4$
$b_2 = b_1 + 1 = a_4 + 2$, т.к. числа целые,
$b_3 = b_2 + 1 = a_4 + 3$ а нам нужно большие и минимальные

Мы рассматриваем такой случай, называя его "экстримальным", т.к. при этих значениях a_1 будет минимальным.

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 > b_1 + b_2 + b_3$$
$$a_1 + \cancel{a_4} - 2 + \cancel{a_4} - 1 + \cancel{a_4} > \cancel{a_4} + 1 + \cancel{a_4} + 2 + \cancel{a_4} + 3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a_1 > 9$$

То есть самое минимальное кол-во конфет у девочек это 10 штук. Так как мы только что доказали, что при меньших a_1 сумма наименьших четырех будет меньше суммы оставшихся трех.
Заметим, что нужно доказать для любых четырех чисел. Очевидно, что если в этой четверки будет хотя бы один член, невходящий в 4 минимальных, то сумма "четверки" возрастет, а сумма "тройки" уменьшится.
=> Условие мы не нарушаем. То есть доказали для любой "четверки"
Нам не важно, какое кол-во конфет у подружек Маши, поэтому мин. возможное кол-во конфет будет у Маши.

Ответ: 10 конфет

④ Осталось показать пример, в котором у Маши 10 конфет

10 ; 12 ; 13 ; 14 ; 15 ; 16 ; 17

Как мы уже знаем достаточно проверить миним. "четверку"

$10+12+13+14 > 15+16+17 \Leftrightarrow 49 > 48 \Leftrightarrow 1>0$

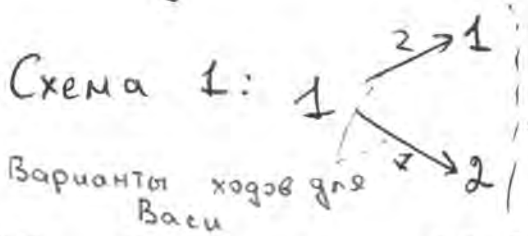
истина

В = Вася
П = Петя

Задача №3

Петя, выполняя определенную стратегию, может обеспечить себе победу.

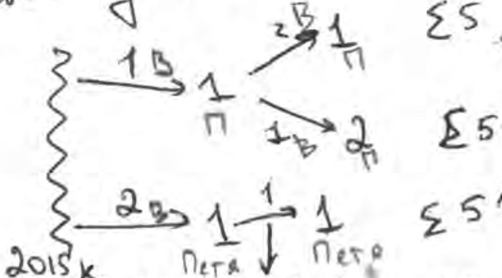
1 ход Пети: берет одну

Схема 1: 

на данный момент после нашего хода осталось 2015 камней.

Стратегия: "Дополнение до 5"

Варианты у Васи

Схема 2: 

То есть после нашего хода остается кол-во камней ⋮ 5

ед. вариант, т.к. до этого ходил "2"

Заметим, что наш ход в "пятерки" начинается с "1" => правило про двойное повторение "2" нам не помешает.

Таким образом вначале реализуем схему 1. Потом продолжаем Схему 2. Она начинается с 2015 к и "отбрасывает" по 5. Следовательно рано или поздно Петя возьмет последний камень. Заметим, что в обоих схемах ∀ все возможные ходы соперника Васи

<u>Ответ</u>: Петя

чистовик (лист №2)

$\boxed{\text{Задача №4}}$

Мы учитываем условие, что $a=0$ и $b=0$ и $c=0$ одновременно не бывает

(!) $$\frac{a}{2a^2+b^2+c^2}+\frac{b}{2b^2+a^2+c^2}+\frac{c}{2c^2+a^2+b^2}\le\frac{9}{4(a+b+c)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{3}{4(a+b+c)}-\frac{a}{2a^2+b^2+c^2}\right)_1+\left(\frac{3}{4(a+b+c)}-\frac{b}{2b^2+a^2+c^2}\right)_2+\left(\frac{3}{4(a+b+c)}-\frac{c}{2c^2+a^2+b^2}\right)_3\ge0$$

Рассмотрим первую скобку

$$\frac{3}{4(a+b+c)}-\frac{a}{2a^2+b^2+c^2}=\frac{6a^2+3b^2+3c^2-4a^2-4ab-4ac}{(4a+4b+4c)(2a^2+b^2+c^2)}=$$

$\exists\, x=4(a+b+c)(2a^2+b^2+c^2)$

$$\frac{(4b^2+a^2-4ab)+(4c^2+a^2-4ac)-b^2-c^2}{x}=$$

$$=\frac{(2b-a)^2-b^2+(2c-a)^2-c^2}{x}=\frac{(a-3b)(a-b)+(a-3c)(a-c)}{x}$$

Аналогично для второй и третьей скобки, т.к. они "симметричны"

$\exists\, 4(a+b+c)(2b^2+a^2+c^2)=y$; $4(a+b+c)(2c^2+b^2+a^2)=z$

$\exists$ не умоляя общности $\boxed{c\ge b\ge a}$. Т.к. $\begin{cases}a\ge0\\ b\ge0\\ c\ge0\end{cases}$, $\boxed{z\ge y\ge x\ge0}$

$$\Leftrightarrow\frac{(a-3b)(a-b)+(a-3c)(a-c)}{x}+\frac{(b-3c)(b-c)+(b-3a)(b-a)}{y}+$$

$$+\frac{(c-3a)(c-a)+(c-3b)(c-b)}{z}\ge0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{yz(a-3b)(a-b)+yz(a-3c)(a-c)+zx(b-3c)(b-c)+zx(b-3a)\cdot(b-a)+xy(c-3a)(c-a)+xy(c-3b)(c-b)}{xyz}\ge0$$

т.к. $z\ge y\ge x\ge0$, $xyz>0$. Про знаменатель знаем

Осталось доказать, что числитель ≥0 ⊛

$$yz(a-3b)(a-b)-zx(b-3a)(a-b)=\overset{\ge0}{z}\overset{\le0}{(a-b)}\overset{\le0}{(y(a-3b)-x(b-3a))}_1$$

$$yz(a-3c)(a-c)-xy(c-3a)(a-c)=\overset{\ge0}{y}\overset{\le0}{(a-c)}(z(a-3c)\overset{\le0}{-}x(c-3a))_2$$

$$zx(b-3c)(b-c)-xy(c-3b)(b-c)=\overset{\ge0}{x}\underset{\le0}{(b-c)}\overset{\le0}{(z(b-3c)-y(c-3b))}_3$$

⊛ $(y(a-3b)-x(b-3a))=ya-3yb-xb+3xa=a(3x+y)-b(3y+x)\le0$

т.к. $\begin{cases}a\le b\\ 3x+y\le 3y+x\end{cases}$

Для второго и третьего ряда доказывается аналогично.

$\left(z(a-3c)-x(c-3a)\right)_2 = za - 3zc - xc + 3xa = a(z+3x) - c(3z+x) \leq 0$

$\left(z(b-3c)-y(c-3b)\right)_3 = zb - 3zc - yc + 3yb = b(z+3y) - c(3z+y) \leq 0$

$$\Leftarrow \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{z(a-b)\left(y(a-3b)-x(b-3a)\right)}{xyz} \geq 0 \\ \dfrac{\left(z(a-3c)-x(c-3a)\right)y(a-c)}{xyz} \geq 0 \\ \dfrac{x(b-c)\left(z(b-3c)-y(c-3b)\right)}{xyz} \geq 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow$$

$$\frac{a}{2a^2+b^2+c^2} + \frac{b}{a^2+2b^2+c^2} + \frac{c}{a^2+b^2+2c^2} \leq \frac{9}{4(a+b+c)}$$

ч.т.д.

Задача №6

$p, q \in \mathbb{P}$

$p^2+q^2+pq=a^2, \ a \in \mathbb{Z}$

? $(p;q)$ - ?

1) $\exists\ p=q$ $\quad 3p^2=a^2 \Rightarrow a \vdots 3 \Rightarrow a^2 \vdots 9 \Rightarrow p^2 \vdots 3 \Rightarrow p \vdots 3 \underset{\text{т.к. } p \in \mathbb{P}}{\Rightarrow} p=3$

$27=a^2 \Leftrightarrow a=\pm\sqrt{27} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow p \neq q$

ч.т.д.

2) $p^2+q^2+pq=a^2 \Leftrightarrow p(p+q)=(a-q)(a+q)$

$\Downarrow$

2 варианта

$a+q \vdots p$ | $a-q \vdots p$

$\exists\ a+q=p \Leftrightarrow a=p-q$

$\Rightarrow p^2+q^2+pq=p^2+q^2-2pq$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} p=0 \\ q=0 \end{array}\right. \Rightarrow a+q \neq p$

$\Rightarrow \exists k: \ k=\dfrac{a+q}{p}, \ k \in \mathbb{Z}$

$p+q=(a+q)k$

$\exists\ a-q=p \Leftrightarrow a=q+p$

$\Rightarrow p^2+q^2+pq=p^2+q^2+2pq$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} p=0 \\ q=0 \end{array}\right. \Rightarrow a-q \neq p$

$\Rightarrow \exists k_1: \ k_1=\dfrac{a-q}{p}, \ k_1 \in \mathbb{Z}$

$p+q=\dfrac{a-q}{k_1}$

3) При рассмотрении остатков при делении на 5 получаем, что

a	a^2
0	0
1	1
2	4
3	4
4	1

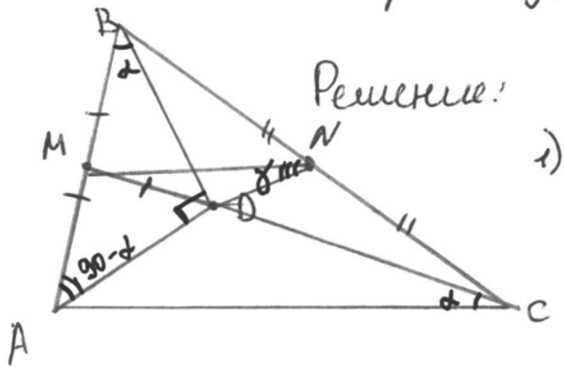
$p \equiv 0 \pmod 5$ и $q \overset{5}{\equiv} 1$ или $q \overset{5}{\equiv} 2$ или $q \overset{5}{\equiv} 3$ или $q \overset{5}{\equiv} 4$ или $q \overset{5}{\equiv} 5$ $+ \left\{\begin{array}{l} p \overset{5}{\equiv} 1 \\ q \equiv 4 \end{array}\right. + \left\{\begin{array}{l} p \overset{5}{\equiv} 2 \\ q \equiv 3 \end{array}\right.$

4) Такие $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} p=3 \\ q=5 \end{cases} \\ \begin{cases} p=5 \\ q=3 \end{cases} \end{array}\right.$ Проверим методом подстановки

$$9+15+25=49=7^2$$

Значит $\{(3;5);(5;3)\}$ — корни ур-ния

Задача №5



Дано:
$\triangle ABC$
$D: \angle ACD = \angle ABD$
$\angle ADB = 90^\circ$
$M: M \in [AB]$
$|MA| = |MB|$
$N: N \in [BC]$
$|NB| = |NC|$

$\angle DNM$ - ? γ - ?

Решение:

1) MN - ср. линия
$\Rightarrow MN \parallel AC$, $MN = \frac{1}{2}AC$

2) MD - медиана в прямоуг $\triangle$

$\Rightarrow |MD| = |MB| = |MA|$

Ответ: 15°