1835 СКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

1	2	3	4	5	6	сумма
	1	0			–	

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Ростов-на-Дону

Дата 02.03.2019

* *

10–11 класс. Первый вариант

1. Имеется 8 черных ладей и n белых. При каком наибольшем n их можно расставить на шахматной доске так, чтобы одноцветные ладьи не били друг друга? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Даны положительные числа x, y, z. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{xyz\,(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4 + (yz)^4 + (xz)^4}}.$$

3. Дан треугольник ABC с меньшей стороной AB. На сторонах AB и AC выбраны соответственно точки X и Y так, что $BX = CY$. Под каким углом прямая, проходящая через центры описанных окружностей треугольников ABC и AXY, пересекает прямую BC, если $\angle ABC = \beta$ и $\angle BCA = \gamma$?

4. Десятичная запись квадрата натурального числа x представляет собой два одинаковых соседних блока из n цифр. Может ли n равняться 20182019?

5. На однокруговой турнир по настольному теннису подало заявку 16 человек. Когда было сыграно n матчей, оказалось, что среди любых трех теннисистов найдутся двое, уже сыгравших между собой. При каком наименьшем n такое возможно?

6. Три конуса с общей вершиной, касающихся друг друга внешним образом, имеют высоту 2 и радиус основания $\sqrt{3}$. Два шара касаются внешним образом друг друга и всех конусов. Найдите отношения радиусов шаров (большего к меньшему).

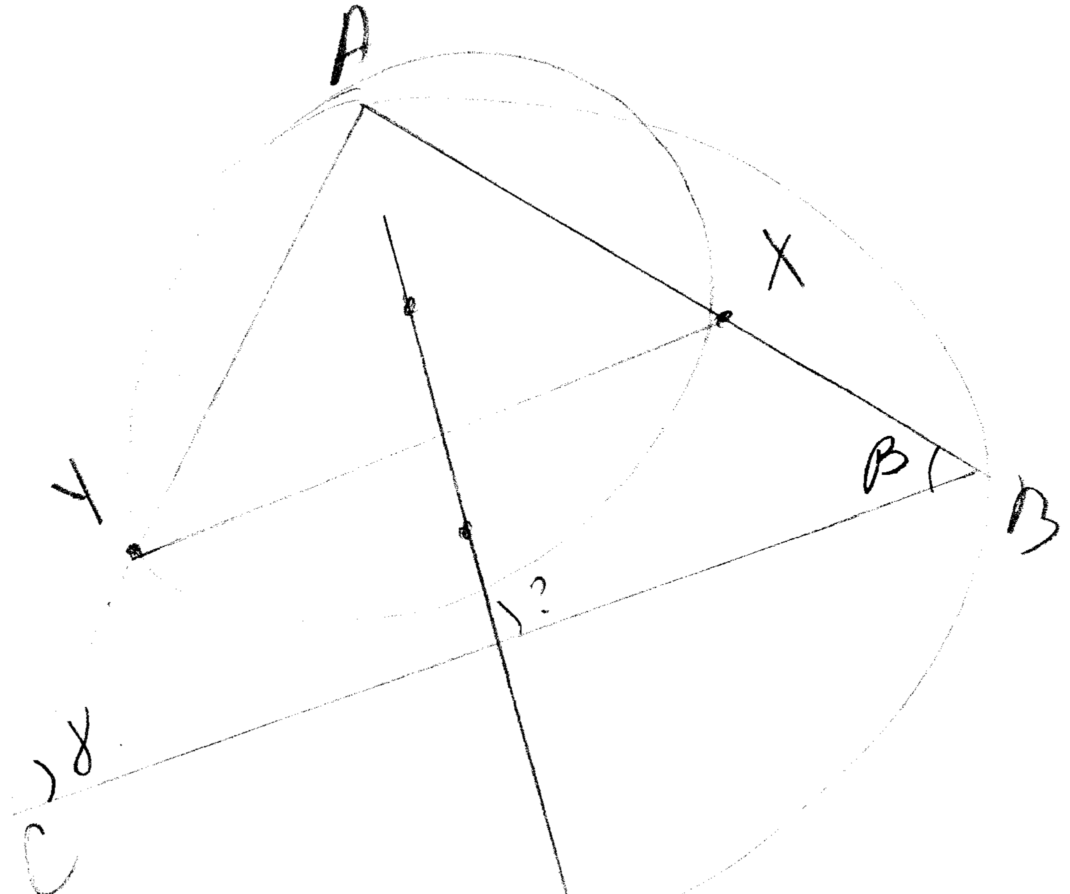
Чистовик

4. прод.

Т.к. каждый множитель является квадратом, $\overline{n} = t \cdot 100 \cdot 121 + 20182019$ цифр, то такое число существует.

Ответ: Да.

3.



Ответ: $90 - \beta + \gamma$.

Чистовик

2. $x, y, z > 0$

$$A = \frac{xyz(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4+(yz)^4+(xz)^4}}$$

1) Рассмотрим знаменатель:

$$\sqrt{(xy)^4+(yz)^4+(xz)^4} \geq x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2 \geq \sqrt{3}\,\sqrt[3]{x^4y^4z^4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{(xy)^4+(yz)^4+(xz)^4}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}\,\sqrt[3]{x^4y^4z^4}}$$

2) $$\underbrace{A = \frac{xyz(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4+(yz)^4+(xz)^4}}}_{A} \leq \frac{xyz(x+y+z)}{\sqrt{3}\,\sqrt[3]{x^4y^4z^4}} = \frac{x+y+z}{\sqrt{3}\,\sqrt[3]{xyz}}$$

$A \leq B$ Равенства $A = B$ выполняется при $x = z = y$

$$A \leq \frac{x+x+x}{\sqrt{3}\cdot x} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}.$$

Ответ: $\sqrt{3}$.

~~4. Имеется 8 чёрных фигур, а значит можно, чтобы 2 чёрные фигуры стояли рядом, т.е. между ними не будет белой фигуры, а~~

① Если в ряду стоит n фигур одного цвета, то в этом ряду можно поставить n+1 фигур другого цвета, заполняя место между ними так, чтобы они не были возле друг друга

Например, вот так: | Ч | Б | Ч | Б | Ч |

Так как клеток в ряду всего 8, то чтобы максимизировать количество черных фигур, в ряду максимум может стоять 3 белых, т.к. при трёх белых можно поставить 4 чёрных, как и при 4 белых можно заполнить оставшися 4 клетки.

Белая фигура при таких условиях может стоять у края, т.к. нельзя будет поставить черные по обе стороны от нѝх.

При таких условиях $(n+1)$ в каждом ряду можно будет поставить 1 черную фигуру, значит, для первого ряда на n белых фигур будет стоять n черных фигур => всего их 8, значит всего черных: $n+8=16$.

При $n=17$ хотя бы в одном ряду на n белых фигур будет $n+2$ черных фигур, а значит можно хотя бы 2 черные фигуры поставить рядом (между ними не будет белой фигуры), а значит такой расстоновки быть не может => максимальное возможное $n=16$.

Ответ: 16.

Возможная расстоновка:

							Ч
			Ч				
		Ч	Б	Ч			
	Ч	Б	Ч	Б	Ч		
Ч	Б	Ч	Б	Ч	Б	Ч	
	Ч	Б	Ч	Б	Ч		
		Ч					
				Ч			

Чистовик

5. 1) Разделим 16 теннисистов на две равных группы, т.е. по 8 человек, в каждой из которых все матчи сыграны. Общее кол-во игр равно

$C_8^2 \cdot 2 = \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot 2 = 56.$

Среди любых 3 участников 2 будут из 1 группы => они уже сыграли между собой => условие выполнено.

2) Докажем, что это наиб. возможное n. Пусть сыграно менее 56 матчей. Всего матчей $C_{16}^2 = \frac{16 \cdot 15}{2} = 120$ => при $n < 56$, более 64 матчей не сыграно. Рассмотрим теннисиста, который сыграл меньше всего матчей (k - кол-во матчей, которые он не сыграл)

Тогда есть k теннисистов, которые играли между собой, иначе найдется 3, где не выполн. условие. Тогда в случае (кроме расс. k теннисистов), когда игроки не провели между собой матч, задействован один из 15-k теннисистов, где у каждого меньше чем k несыгранных матчей => кол-во несыгранных матчей не больше чем $k + k(15-k)$ => $16k - k^2 > 64$

и $k(16-k)$ $k^2 - 16k + 64 < 0$ $(k-8)^2 < 0$

Получим противоречие => 56 - наиб. возможное n.

Ответ: 56.

4. . n – 2018 2019 цифр

$X = \overline{nn}$

$X = \overline{n} \cdot 10^{20182019} + \overline{n}$

$X = \overline{n} \cdot (10^{20182019} + 1)$

$X = \overline{n} \underline{(100\ldots001)}$,

в этом числе 20182019 цифр, т.к. $10^{20182019}$

имеет 20182019 нулей и 1 единицу

Т.к. $100\ldots01 > \overline{n}$, то нужно, чтобы $\overline{n}$ была такой частью числа $100\ldots01$, чтобы их произведение было квадратом.

Рассмотрим число $100\ldots01$: по признаку делимости на 11

Т.к. в числе $100\ldots01$ всего 2 единицы, где первая стоит на 1-м месте, а вторая на 20182020 - четное, то разность сумм равна $1-1=0 \vdots 11 \Rightarrow 100\ldots01 \vdots 11$.

Рассмотрев это число, поделив на 11.

получим $9090\ldots9091$

В данном числе на нечетных местах стоит $\frac{n}{2}$ девяток, а на четных все кроме последнего числа - нули

Рассмотрим деление $9090\ldots9091$ на

11. это число кратно 11 ⇒ в полученном числе столько цифр, сколько и операций деления. Это значит, в получившемся числе - 20182017 цифр $\Rightarrow \frac{100\ldots001}{121} = t$

$X = t \cdot 100 \cdot t \cdot 121 = t^2 \cdot 100 \cdot 121$ t - 20182017 цифр

⇒