$10^{11}+1 = 100000000001 = 121 \cdot 826446281$

$10^{11}+1 \vdots 121 \Rightarrow 10^{20182019}+1 = (10^{11})^{1834729}+1 \vdots 10^{11}+1 \vdots 121 \Leftrightarrow$

$10^n+1 \vdots 121$ $p = \frac{10^n+1}{11^2}\cdot 10^2 \in N$. Докажем, что p – n-значное число, нам хватить доказать что $10^{n-1} \leq p < 10^n$

$(!)\ 10^{n-1} \leq \frac{10^n+1}{11^2}\cdot 10^2 < 10^n \Rightarrow (!)\ 10^{n-3} \leq \frac{10^n+1}{11^2} < 10^{n-2}$

$(!)\ 10^{n-3}\cdot(10^2+21) = (10^{n-1}+1)\cdot 10^{n-2}$ ~~...~~

1. $10^{n-3}(10^2+21) = 10^{n-1}+10^{n-2}\cdot 2+10^{n-3} < 10^{n-1}\cdot 3 < 10^n+1 \Rightarrow$ доказано

2. $(10^2+21)\cdot 10^{n-2} = 10^n+21\cdot 10^{n-2} > 10^n+1 \Rightarrow$ значит p удовлетворяет ~~на~~ всем условиям

$X^2 = \left(\frac{10^n+1}{11}\cdot 10\right)^2 = \overline{a_1a_2\ldots a_n a_1a_2\ldots a_n}$ ч.т.д.

Ответ: Да. n может равняться 20182019.

при $n = 20182019 \Rightarrow$ существует такое число X.

№5. 16 – человек.
n – матчей.

KL 008

1829

1

80

...РГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

1	2	3	4	5	6	сумма
4	4	4	4	0	0	16

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ СПбГУ 2018–2019

заключительный этап

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады МАТЕМАТИКА (10–11 КЛАССЫ)

Город, в котором проводится Олимпиада Душанбе

Дата 11.03.2019

* *

10–11 класс. Первый вариант

1. Имеется 8 черных ладей и n белых. При каком наибольшем n их можно расставить на шахматной доске так, чтобы одноцветные ладьи не били друг друга? Ладья не бьет насквозь через другую фигуру.

2. Даны положительные числа x, y, z. Найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{xyz\,(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4+(yz)^4+(xz)^4}}.$$

3. Дан треугольник ABC с меньшей стороной AB. На сторонах AB и AC выбраны соответственно точки X и Y так, что $BX = CY$. Под каким углом прямая, проходящая через центры описанных окружностей треугольников ABC и AXY, пересекает прямую BC, если $\angle ABC = \beta$ и $\angle BCA = \gamma$?

4. Десятичная запись квадрата натурального числа x представляет собой два одинаковых соседних блока из n цифр. Может ли n равняться 20182019?

5. На однокруговой турнир по настольному теннису подало заявку 16 человек. Когда было сыграно n матчей, оказалось, что среди любых трех теннисистов найдутся двое, уже сыгравших между собой. При каком наименьшем n такое возможно?

6. Три конуса с общей вершиной, касающихся друг друга внешним образом, имеют высоту 2 и радиус основания $\sqrt{3}$. Два шара касаются внешним образом друг друга и всех конусов. Найдите отношения радиусов шаров (большего к меньшему).

№ 1.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	б							
2				б				
3			б	ч	б			
4		б	ч	б	ч	б		
5			б	ч	б	ч	б	
6				б	ч	б	ч	б
7					б	ч	б	
8						б		

Рассмотрим случае, когда у черных ладей. Так как белая ладья не должна бить черную ладью => то и справа и слева от каждой черной ладьи может идти одна белая ладья. Также не может быть двух подряд идущих черных ладей. если в строке y черных ладей, то $y+1$ - белых ладей.

Пусть в 1 строке => y_1 - черных ладей

Возьмем N - количество белых ладей.

$$N \le (y_1+1)+(y_2+1)+\ldots(y_8+1) = (y_1+y_2+\ldots+y_8)+8 = 16$$

значить $N=16$.

Ответ: $N=16$ белых ладьи

№ 2. $x, y, z > 0$. $A = \frac{xyz(x+y+z)}{\sqrt{(xy)^4+(xz)^4+(yz)^4}}$ $\max(A) = ?$

$$S = (xy)^4+(xz)^4+(yz)^4 = \frac{((xy)^2-(xz)^2)^2}{2} + \frac{((xy)^2-(yz)^2)^2}{2} + \frac{((xz)^2-(yz)^2)^2}{2} +$$

$$+ (x^2yz)^2+(xy^2z)^2+(xyz^2)^2 \ge (x^2yz)^2+(xy^2z)^2+(xyz^2)^2 = x^2y^2z^2(x^2+y^2+z^2)$$

(!) $x^2+y^2+z^2 \ge \frac{(x+y+z)^2}{3}$; (!) $3(x^2+y^2+z^2) \ge (x+y+z)^2 =>$

(!) $2(x^2+y^2+z^2) \ge 2xy+2xz+2yz$ (!) $\underbrace{(x-y)^2}_{\ge 0}+\underbrace{(x-z)^2}_{\ge 0}+\underbrace{(y-z)^2}_{\ge 0} \ge 0$

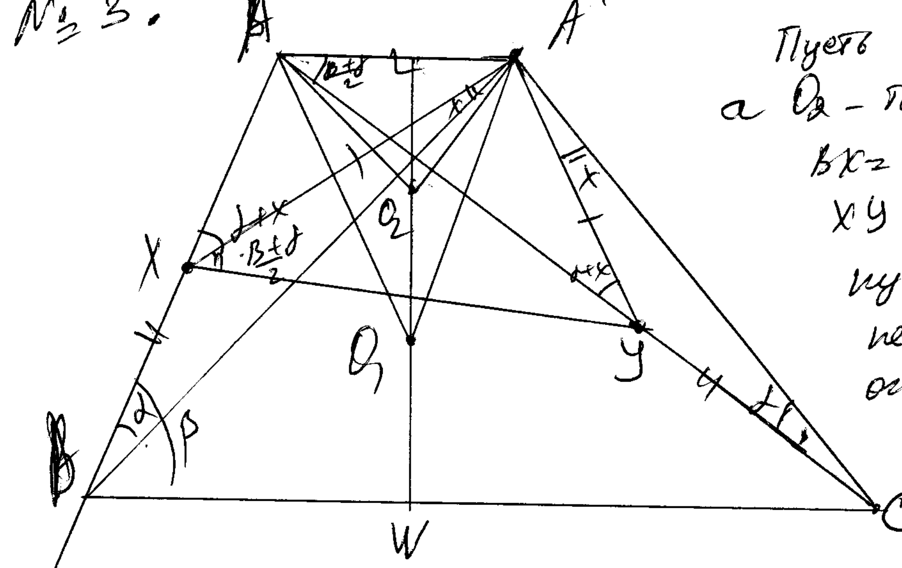
$$S \ge x^2y^2z^2(x^2+y^2+z^2) \ge \frac{x^2y^2z^2(x+y+z)^2}{3} => A = \frac{xyz(x+y+z)}{\sqrt{S}} \le \frac{xyz(x+y+z)}{\sqrt{\frac{x^2y^2z^2(x+y+z)^2}{3}}}$$

$= \sqrt{3}$; $A \le \sqrt{3}$ при $x=y=z$; $A = \sqrt{3}$

$\max(A) = \sqrt{3}$;

Ответ: $\max(A) = \sqrt{3}$; $(x=y=z)$

№ 3.



Пусть O_1 - точка центра окруж. ΔABC а O_2 - точка центра окруж. ΔAXY $BX = CY$. $AB < AC$. XY не может быть $\parallel BC$. пусть точка A' второе пересечение центр окруж. описанных около ΔABC и ΔAXY

Возьмем $\angle XBA' = \alpha$, т.к A, A', C, B - цикличны, то $\alpha = \angle ABA' = \angle ACA'$. Пусть $x = \angle YA'C$. $\angle AYA' = \angle YA'C + \angle A'CY = \alpha + x$.

т.к A, A', Y, X - цикличны, то $\angle AXA' = \angle AYA' = \alpha + x =>$

$\angle XA'B = \angle AXA' - \angle XBA' = (\alpha+x)-\alpha = x$; $\angle XA'B = x = \angle YA'C$ и

$\angle YCA' = \angle XBA'$. $\Delta YCA'$ и $\Delta XBA'$ подобны. $\frac{BX}{CY} = \frac{A'X}{A'Y} =>$

$=> \frac{A'X}{A'Y} = \frac{BX}{CY} = 1 => A'X = A'Y$ $AO_2 = A'O_2$ и $AO_1 = A'O_1 =>$

O_1O_2 - это биссектриса $\Delta AO_1A'$ и $\Delta AO_2A'$; значить

O_1O_2 перпендикулярен AA'.

т.к. A, A', Y, X - цикличное => $\angle XA'Y = \angle XAY = \angle BAC = 180 - \beta - \gamma$

т.к $A'X = A'Y => \angle A'XY = \frac{180° - \angle XA'Y}{2} = 90 - \frac{180-\beta-\gamma}{2} = \frac{\beta+\gamma}{2}$.

т.к A, A', Y, X - цикличны, то $\angle YAA' = \angle A'XY = \frac{\beta+\gamma}{2}$;

Пусть $O_1O_2 \cap BC = W => \angle BWO_1 = 360° - \angle ABW - \angle BAA' - 90° = 360 - \beta -$

$-(180-\beta-\gamma) - \frac{\beta+\gamma}{2} - 90° = 90 - \beta + \beta + \gamma - \frac{\beta+\gamma}{2} = 90° - \beta + \frac{\beta+\gamma}{2} = 90 - \frac{\beta-\gamma}{2}$

Ответ: $\angle BWO_1 = 90° - \frac{\beta-\gamma}{2}$.

№ 4. Сначала докажем, что $x^2 = \left(\frac{10^4+1}{11} \cdot 10\right)^2 ->$ подходит нашему условию. когда $n = 20182019$.

$$x^2 = \overline{a_1a_2\ldots a_na_1a_2\ldots a_n} = \overline{a_1a_2\ldots a_n} \cdot 10^n + \overline{a_1a_2\ldots a_n} =$$

$= \overline{a_1a_2\ldots a_n} \cdot (10^n+1)$. Пусть $\overline{a_1a_2\ldots a_n} = \frac{10^n+1}{11^2} \cdot 10^2$,

где $n = 20182019$. Докажем, что $P = \overline{a_1a_2\ldots a_n} = \frac{10^n+1}{11^2} \cdot 10^2 \in N$