Санкт-Петербургский государственный университет
Олимпиада школьников по математике 2020–2021
Заключительный этап
8–9 классы

1. Найдите все такие значения a, для которых квадратные трехчлены x^2+2x+a и $x^2+ax+2=0$ имеют по два корня, причем сумма квадратов корней первого трехчлена равна сумме квадратов корней второго трехчлена.

2. Каждый из островитян либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт (и те, и другие на острове есть). Каждый житель острова про каждого знает рыцарь он или лжец. Часть жителей острова заявила, что на острове проживает четное число рыцарей, а все оставшиеся жители заявили, что на острове проживает нечетное число лжецов. Может ли на острове быть ровно 2021 житель?

3. Для произвольных вещественных чисел a и b $(b \neq 0)$ найдите наименьшее значение выражения $a^2+b^2+\dfrac{a}{b}+\dfrac{1}{b^2}$.

4. Точки B_1 и C_1 — середины сторон AC и AB треугольника ABC. На сторонах AB и AC как на диаметрах построены окружности ω_1 и ω_2. Обозначим за D точку пересечения прямой B_1C_1 с окружностью ω_1, лежащую по другую сторону от C относительно прямой AB. Обозначим за E точку пересечения прямой B_1C_1 с окружностью ω_2, лежащую по другую сторону от B относительно прямой AC. Прямые BD и CE пересекаются в точке K. Докажите, что прямая BC проходит через точку пересечения высот треугольника KDE.

5. На центральной клетке доски 11×11 стоит фишка. Петя и Вася играют в следующую игру. Каждым своим ходом Петя передвигает фишку на одну клетку по вертикали или горизонтали. Каждый своим ходом Вася возводит стенку с одной из сторон любой из клеток. Двигать фишку через стенку Петя не может. Игроки ходят по очереди, начинает Петя. Петя выигрывает, если сможет фишкой уйти с доски. Может ли он обеспечить себе победу вне зависимости от действий соперника?

6. Докажите, что существует бесконечно много таких натуральных чисел n, что количество различных нечетных простых делителей числа $n(n+3)$ кратно трем.

1	2	3	4	5	6	Сумма
20	20	10	0	20	0	70

1. Пусть $x^2 + 2x + a$ имеет корни x_1 и x_2, $x^2 + ax + 2$ имеет корни x_3 и x_4
$D_1 = 4 - 4a$, $D_2 = a^2 - 8$, $a < -2\sqrt{2}$, т.к. оба D должны быть положительны.
Тогда $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-a}$, а $x_{3,4} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2-8}}{2}$.
$$x_1^2 + x_2^2 = 1 + 1 - a + 2\sqrt{1-a} + 1 + 1 - a - 2\sqrt{1-a} = 4 - 2a$$
$$x_3^2 + x_4^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2-8}{4} + 2\frac{a\sqrt{a^2-8}}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2-8}{4} - 2\frac{a\sqrt{a^2-8}}{2} = 2\left(\frac{a^2}{2} - 2\right) = a^2 - 4$$
Тогда поскольку $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + x_4^2$, $4 - 2a = a^2 - 4$
$$a^2 + 2a - 8 = 0$$
$$(a+4)(a-2) = 0$$
Следовательно, a = 2 (не подходит по одз) или a = -4
Ответ: a = -4.

2. Предположим, что на острове 2021 житель.
а) Пусть на острове чётное количество рыцарей. Тогда лжецов на острове (2021-чётное число), то есть нечётное число. В этом случае все жители острова сказали правду: рыцарей действительно чётное число, а лжецов действительно нечётное. Это невозможно, ведь на острове есть лжецы, которые должны были солгать. Получили противоречие, значит на острове не может быть чётного количества рыцарей.
б) Тогда пусть на острове нечётное количество рыцарей. Тогда лжецов на острове (2021-нечётное число), то есть чётное число. В этом случае все жители острова солгали: рыцарей на самом деле нечётное число, а лжецов в реальности чётное число. Это невозможно, ведь на острове есть рыцари, которые должны были сказать правду. Получили противоречие, значит на острове не может быть нечётного количества рыцарей.
Таким образом, при 2021 жителе на острове не может быть ни чётного, ни нечётного числа рыцарей, следовательно, на острове не может жить ровно 2021 человек.
Ответ: нет, не может.

3. Заметим, что $a^2 + b^2 + \frac{a}{b} + \frac{1}{b^2} = (b^2 + \frac{1}{b^2}) + (\frac{a}{b} + a^2)$. Тогда найдём минимум второй скобки.
$$f(a) = \frac{a}{b} + a^2$$
$$f'(a) = 2a + \frac{1}{b}$$
$f'(a) = 0$ => Точка экстремума $f(a)$. Тогда минимум достигается при
$$2a = -\frac{1}{b}$$
$$a = -\frac{1}{2b}.$$

$$a^2 + b^2 + \frac{a}{b} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{4b^2} + b^2 - \frac{1}{2b^2} + \frac{1}{b^2} = b^2 + \frac{3}{4b^2}$$
$$g(b) = b^2 + \frac{3}{4b^2}$$
$$g'(b) = 2b - 2\frac{3}{4b^3} = 2b - \frac{3}{2b^3}$$
$g'(b) = 0$ => Точка экстремума $g(b)$. Тогда искомый минимум достигается при
$$2b = \frac{3}{2b^3}$$
$$b^4 = \frac{3}{4}$$

Тогда функция равна

$$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{4\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{3}$$

Ответ: минимальное значение выражения равно $\sqrt{3}$.

5. Ответ: нет, не может. При правильной игре победу обеспечит себе Вася.
Чтобы дойти от центра до края доски Пете необходимо сделать не меньше 5 ходов. За 4 первых хода Вася закрывает по одной стенке каждой из угловых клеток. При этом Петя ещё не может оказаться на крайней клетке. Таким образом, с каждой крайней клетки доски теперь Петя может уйти с доски только одним способом.
Далее есть 2 варианта: если Петя перешёл своим ходом на крайнюю клетку доски, Вася закроет стенкой внешнюю границу этой клетки, если же Петя после своего хода не оказался на какой-то из крайних клеток доски, то Вася закрывает стенкой любую внешнюю границу доски.
Таким образом, поскольку у каждой крайней клетки осталась максимум одна незакрытая внешняя граница доски, Вася точно сможет её закрыть после того, как Петя перейдёт на эту клетку. Следовательно, Вася сможет закрыть все внешние границы доски стенками, а Петя никак не сможет выйти.