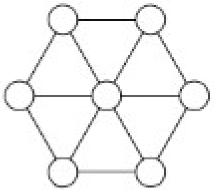
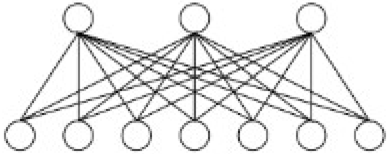
ВОПРОС 1: ЭССЕ

25 из 25 баллов

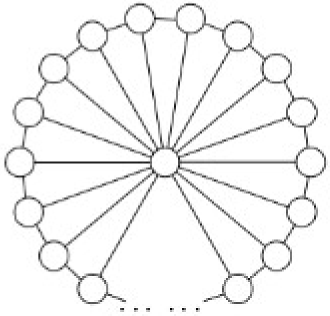
1. На картинке нарисовано n кружочков, некоторые кружочки соединены отрезками. Требуется расставить в кружочках числа от 1 до n (без повторений) так, чтобы выполнялось свойство: если кружочки соединены отрезками, то стоящие в них числа должны быть взаимно просты (то есть не иметь общих натуральных делителей, отличных от 1). Можно ли это сделать в каждом из следующих случаев? Если можно — опишите расстановку чисел, если нет — объясните, почему нельзя.



а) $n = 7$



б) $n = 10$



в) $n = 2022$: по кругу стоят 2021 кружочков, и еще один в центре

Данный ответ:

а) Так сделать можно. Ставим в центре 1, а по кругу - числа 2, 3, 4, 5, 6, 7 по порядку. Числа, отличающиеся друг от друга на 1, не будут иметь общих делителей. А у 2 и 7 тоже нет общих делителей.

б) Посмотрим, у каких чисел нет друг с другом общих делителей. Для того, чтобы число стояло вверху, нужно, чтобы у него не было общих делителей как минимум с семью числами.

1 - 2,3,4,5,6,7,8,9,10

2 - 1,3,5,7,9

3 - 1,2,4,5,7,8,10

4 - 1,3,5,7,9

5 - 1,2,3,4,6,7,8,9

6 - 1,5,7

7 - 1,2,3,4,5,6,8,9,10

8 - 1,3,5,7,9

9 - 1,2,4,5,7,8,10

10 - 1,3,7,9

У 6 нет общих делителей только с тремя числами: 1,5,7. Только эти числа могут стоять сверху, но 10 делится на 5. Противоречие.

в) От 1 до 2022 есть 1011 чётных и 1011 нечётных чисел. Если число, стоящее в центре, будет нечётным, то тогда среди чисел, стоящих по кругу, найдётся пара чётных чисел, стоящих рядом, и у них будет общий делитель 2. Но если число, стоящее в центре, будет чётным, у него будет общий делитель 2 с чётными числами, стоящими по кругу. Противоречие.

ВОПРОС 2: ЭССЕ

15 из 30 баллов

2. Назовем *каскадом, порожденным числом* r, набор из 12 натуральных чисел: r, $2r$, $\ldots$, $12r$.

а) Может ли какая-то пара чисел (a, b) содержаться в шести различных каскадах? Если да — приведите пример таких чисел, если нет — объясните, почему не может.

б) Верно ли, что множество натуральных чисел можно раскрасить в 12 цветов так, что в каждом каскаде все элементы будут разного цвета?

Данный ответ: а) Да, может. Например, 60 и 120:

60, 120, 180, 240, 300, 360, 420, 480, 540, 600, 660, 720.

30, 60, 90, 120, 150, 180, 210, 240, 270, 300, 330, 360.

20, 40, 60, 80, 100, 120, 140, 160, 180, 200, 220, 240.

15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120, 135, 150, 165, 180.

12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120, 132, 144.

10, 20, 30, 40, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, 120.

б) Нет, не верно

ВОПРОС 3: ЭССЕ

0 из 20 баллов

3. В треугольнике ABC точка D — середина стороны AB, E — середина стороны AC, F — середина биссектрисы AL, причем $DF = 1$, $EF = 2$. На плоскости изображены точки D, E, F так, что прямая DF горизонтальна, а остальные элементы чертежа стерты. Можно ли восстановить положение хотя бы одной из вершин треугольника, если известно, что вершина A находилась сверху от прямой DF?

Данный ответ: Да, можно. Находим угол между D и E, который делит F. Этот угол - и есть A.

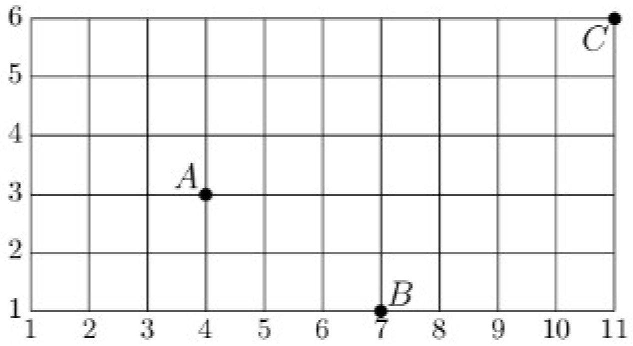
ВОПРОС 4: ЭССЕ

25 из 25 баллов

4. Город имеет форму клетчатого прямоугольника 5×10 клеток: линии — улицы, клетки — жилые кварталы. Расстояние между перекрестками измеряется как длина самого короткого пути по улицам города, проходящего от одного перекрестка до другого. Например, для перекрестков A, B и C на картинке $AB = 5$, $AC = 10$, $BC = 9$. Можно ли отметить в этом городе k перекрестков так, чтобы все расстояния между этими перекрестками оказались различными числами? Если да — укажите эти перекрестки (например, перекресток C находится на пересечении 11-й вертикальной и 6-й горизонтальной улицы), если нет — объясните, почему нельзя.

Решите задачу для

а) $k = 5$; б) $k = 6$; в) $k = 7$.



Данный ответ: А) Такое возможно. A - 1 верт. 1 гор. B - 2 верт. 2 гор. C - 3 верт. 4 гор. D - 5 верт. 6 гор. E - 6 верт. 11 гор.

Б) Такое возможно. A - 1 верт. 1 гор. B - 2 верт. 1 гор. C - 4 верт. 7 гор. D - 1 верт. 11 гор. E - 4 верт. 11 гор. F - 6 верт. 11 гор.

В) Такое невозможно, потому что: 7*6:2=21 - должны быть 21 различных чисел, а их всего может быть от 1 до 15. Противоречие.

Данный ответ: В решении я буду использовать обозначение Название_Перекрестка(номер_вертикальной_улицы, номер_горизонтальной_улицы) ; Пример C(11,6)

а) можно: расставим точки: a(1,1);b(1,3);c(2,1);d(4,4);e(10,3). Тогда: ab=2 ; ac=1 ; ad=6 ; ae=11 ; bc=3 ; bd=4 ; be=9 ; cd=5 ; ce=10 ; de=7

в) нельзя, т.к. максимальное расстояние между двумя перекрестками 15, а нам надо получить (7*(7-1))/2=21 различное расстояние, что нево зможно.

б) невозможно