Олимпиада школьников СПбГУ по математике.
Заключительный этап. 2020/2021 учебный год. 10 – 11 классы.

1. Натуральные числа от 1 до 2023 записаны в ряд в некотором порядке. Оказалось, что любые три числа, расположенные через одно, дают разные остатки от деления на 3. Какое число может быть на первом месте?

2. При $a, b, c > 0$ найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{a^4 + b^4 + c^4}{(a+b+c)^4 - 80\,(abc)^{4/3}}.$$

3. Окружность ω_1 с центром O пересекается в точках K и L с окружностью ω_2, проходящей через точку O. Через точку O проведена прямая, вторично пересекающая окружность ω_2 в точке A. Отрезок OA пересекает окружность ω_1 в точке B. Найдите отношение расстояний от точки B до прямых AL и KL.

4. Петя написал на доске подряд n двузначных восьмеричных чисел ($n \geq 2$), образующих арифметическую прогрессию с разностью 8, причем первое число не содержит цифру 2. Вася подумал, что это восьмеричная запись натурального числа x, и разложил x на простые множители. Оказалось, что их всего два, и они различаются на 2. Что написано на доске?

5. В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством $3n-2$, $6n-1$, $6n+2$ и $6n+5$ пиастров, где n — натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?

1	2	3	4	5	Сумма
15	20	20	0	0	55

№3.

Ответ: 1.

Решение:

Пусть угол KLB равен бета. Так как OK = OL, то дуги OK и OL равны, сл угол KLO равен углу OAL. Так как B принадлежит окружности 1, то OB = OL, сл угол OBL равен углу OLB. Также угол OBL, как внешний для треугольника ABL, равен сумме углов BAL и BLA. Тогда угол BLA = угол OBL - угол BAL = угол KLO + угол KLB - угол BAL = угол KBL. Тогда прямоугольные треугольники, образованные опусканием перпендикуляра из точки B на прямые KL и AL равны по гипотенузе и прилежащему углу, тогда и перпендикуляры будут равны как соответственные части равных треугольников. Следовательно, их отношение равно 1.

№2.

Ответ: 3.

Решение:

(a + b + c)^4 = a^4 + b^4 + c^4 + 4(a^3b + a^3c + b^3a + b^3c + c^3a + c^3b) + 6((ab)^2 + (bc)^2 + (ac)^2) + 12abc(a + b + c) >= a^4 + b^4 + c^4 + 78(abc)^(4/3) по неравенству о средних. Тогда наше выражение не более (a^4 + b^4 + c^4)/(a^4 + b^4 + c^4 – 2(abc)^(4/3)) = 1 + (2(abc)^(4/3))/(a^4 + b^4 + c^4 -2(abc)^(4/3)). Также заметим, что a^4 + b^4 + c^4 >= 3(abc)^(4/3), сл наше выражение не более 1 + (2(abc)^(4/3))/(3(abc)^(4/3) – 2(abc)^(4/3)) = 3. Равенство достигается при a=b=c=1.

№1

Ответ: любое число, находящееся в границах от 1 до 2023 включительно и имеющее остаток 1 по модулю 3.

Решение:

Заметим, что если у нас дан набор чисел a1, a2, … a2023, то внутри любых троек чисел ak, ak+2 и ak+4 ak+2, ak+4 и ak + 6 содержатся различные остатки по модулю 3. Следовательно ak сравнимо с ak+6 по модулю 3(k, k+2, k+4, k+6 – индексы). Следовательно, у нас все наши числа в последовательности разбиваются на 6 последовательностей: {a1, a7, … a2023}; {a2, a8, … a2018}; {a3, a9, … a2019}; {a4, a10, … a2020}; {a5, a11, … a2021}; {a6, a12, … a2022}. Заметим, что среди чисел от 1 до 2023 чисел, имеющих остаток 1 по модулю 3 675, а по другим остаткам их 674. Также все наборы, кроме первого, состоят из 337 чисел, а первый набор из 338. Следовательно, числа, которые входят в 1 набор, имеют остаток 1 по модулю 3. Следовательно, на первом месте может стоять любое число, которое находится в границах от 1 до 2023 включительно и имеющее остаток 1 по модулю 3.