Олимпиада школьников СПбГУ по математике.
Заключительный этап. 2020/2021 учебный год. 10 – 11 классы.

1. В некоторых клетках полоски 1×2100 поставлено по одной фишке. В каждую из пустых клеток записывается число, равное модулю разности количества фишек слева и справа от этой клетки. Известно, что все записанные числа различны и отличны от нуля. Какое наименьшее количество фишек может быть расставлено в клетках?

2. Положительные числа a, b, c таковы, что $a + b + c = 3$. Найдите минимальное значение выражения

$$A = \frac{a^3 + b^3}{8ab + 9 - c^2} + \frac{b^3 + c^3}{8bc + 9 - a^2} + \frac{c^3 + a^3}{8ca + 9 - b^2}.$$

3. Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Пусть K и L — точки пересечения описанной окружности треугольника AOB с прямыми AD и BC соответственно. Найдите отношение $OK : OL$, если известно, что $\angle BCA = \angle BDC$.

4. На доске написано число 12320. Петя приписал к нему справа $10n + 1$ троек, где n — неотрицательное целое число. Вася подумал, что это четверичная запись натурального числа x, и разложил x на простые множители. Оказалось, что среди них ровно два различных. При каких n это возможно?

5. В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством $6n + 1$, $6n + 4$, $6n + 7$ и $6n + 10$ пиастров, где n — натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?

1	2	3	4	5	Сумма
20	20	20	20	10	90

Задача номер 3

Угол BDC = Угол BAC, так как ABCD вписанный, то угол BAC = угол BCA => AB = BC.

Угол BAD = Угол BAC + Угол CAD = Угол ACB + Угол DBC = Угол AOB

Заметим, что положение точки K определяется так: Если (угол AOB + угол BAD < 180), то K лежит на AD (отрезок), иначе на продолжении за точкой A. Угол AOB = Угол BAD => зависит от больше ли угол AOB, чем 90 градусов или нет.

Положение токи L определяется суммой углов: OAB и 180 – OBC. Если угол OAB + 180 – угол OBC больше 180 градусов, то L лежит на BC (отрезок). Иначе на продолжении отрезка за точкой B. То есть положение зависит от того, какой из углов больше (угол OAB или угол OBC).

Рассмотрим эти случаи:

1)K принадлежит AD, L принадлежит BC. Угол OLC = Угол OAD => Угол OLC = Угол LCO => OL = OC =>

Треугольники KOD, ODC: OD – общая, Угол KDO = Угол ODC, Угол KOD = Угол DOC.

Тогда треугольник KOD = треугольник COD => KO = OC => OL = OK.

2) K на продолжении, L на продолжении. Угол OLB = Угол OAB = Угол OCL => OC = OL

Треугольник KOD и треугольник DOC: OD – общая, Угол KDO = Угол ODC, Угол KOD = Угол KDO = 180 – угол AKO = 180 – угол ABO = 180 – угол ACD = Угол ODC + Угол DOC. Тогда угол KOD = угол DOC =>

=>треугольник KOD = треугольник ODC. Тогда OK = OC => OK = OL.

3) K на AD, L на продолжении. Умеем доказывать, что при L на продолжении OL = OC (так как не зависит от положения точки K в доказательстве).

4) K на продолжении, L на BC: идентично третьему случаю.

Таким образом, OK : OL = 1

Ответ : 1

Задача номер 1

Обозначим количество непустых клеток за n. Длину полоски за 3N = 2100. Заметим, что все записанные натуральные и одной четности, так как четность разности = четность суммы (то есть n). Максимальное из чисел не менее: 2 * (2100 – n) – 1. (Всего чисел 2100 – n). Максимальное число не более n. Имеем неравенство n >= 2 * (2100 – n) – 1. Равносильно : 3n + 1 >=2 * 3N. n >= 2N.

Пример n = 2N: Пустые клетки будут под номерами нечетными (1, 3, 5…, 2N – 1); Тогда в первой клетке число n = 2N; В каждой следующей на 2 меньше. В конце – 2. Т.о. все числа будут различные, что необходимо. Значит, n = 2N (наименьшее из возможных), подходит.

Ответ: 1400

Задача номер 4

После приписывания: $12320\underbrace{3...3}_{10n + 1}$ РАБОТАЕМ В 4 СИСТЕМЕ СЧИСЛЕНИЯ (**-степень)

Это число равно: $12321\underbrace{0\ldots0}_{10n+1} - 1 = 4^{10n+1} \cdot 441 - 1 = 2^{20n+2} \cdot 21^2 - 1$.

Разложим как разность квадратов: $(2^{10n+1} \cdot 21 - 1)(2^{10n+1} \cdot 21 + 1)$

В этих скобках нечетные числа, отличные на 2. Значит, они взаимно просты. Их произведение содержит 2 простых разложения, $2^{10n+1} \cdot 21 - 1 > 1$, Поэтому оба числа – степени каких-то простых чисел.

1) Пусть n делится на 2, тогда $n = 2k$, k – целое. $2^{10n+1} \cdot 21 - 1 = 2^{20k+1} \cdot 21 - 1$

$2^{20k+1} \cdot 21 - 1 \pmod{41} = 2 \cdot 21 - 1 = 0 \pmod{41}$

$(2^{20} \pmod{41} = 1024^2 \pmod{41} = 1)$

Таким образом, $2^{10n+1} \cdot 21 - 1 = 41^t$

Докажем, что это невозможно при $t > 1$:

$2^{10n+1} \cdot 21 = 41^t + 1$

$41^t + 1 \pmod 4 = 2$

Но при n неравном 0: $2^{10n+1} \cdot 21$ делится на 4. Значит, подходить лишь $n = 0$. При нем $t = 1$. Значит t не больше 1, ч.т.д.

2) Пусть n не делится на 2, значит $n = 2k + 1$, k – целое.

Возьмем эту скобку: $2^{20k+11} \cdot 21 + 1$. Знаем, что $2^{20} \pmod{41} = 1$.

$2^{20k+11} \cdot 21 + 1 \pmod{41} = 42 \cdot 2^{10} + 1 = 1025 \pmod{41} = 1$;

$2^{10n+1} \cdot 21 + 1 = 41^t + 1$

$2^{10n+1} \cdot 21 = 41^t$

$2^{10n+1} \cdot 21$ делится на 7, $41^t \pmod 7 = (-1)^t$, таким образом это невозможно

Получается, что единственное подходящее $n = 0$

Ответ: 0

Задача номер 2

$(a^3 + b^3) / (8ab + 9 - c^2) = (a + b)(a^2 - ab + b^2) / (4 \cdot 2ab + (a + b + c)^2 - c^2) >= (a + b)(a^2 - ab + b^2) / (2 \cdot (a + b)^2 + (a + b)(a + b + 2c)) = (a^2 - ab + b^2)(3a+3b + 2c) = ((a + b)^2 - 3ab) / (a + b + 6) >= (a + b)^2 / 4(a + b + b)$

Пусть $a + b = z$; $b + c = x$; $a + c = y$;

$x^2 / 4(6 + x) + y^2 / 4(6 + y) + z^2 / 4(6 + z) <= A$

$4A((6 + x) + (6 + y) + (6 + z)) >= (x + y + z) ** 2$ (Коши-Буняковского)

$A >= (x + y + z) ** 2 / 4 (x + y + z + 18) = 36 / 4 * 24 = 3/ 8$ $(x + y + z = 2a + 2b + 2c = 6)$

$A = 3/8$ при $a=b=c= 1$

Ответ: 3/8

Задача номер 5

Почему сумма не образуется?

Пусть сумма (sum)представима l монетами. Все монетки по модулю 3 дают остаток 1. Тогда l (mod 3) = sum. $l < 2n + 2$, иначе сумма монеток $> (2n + 2)(6n + 1) >$ sum. $l <= 2n + 1$

l (mod 3) = sum (mod 3) $= 2n + 2 – 3 = 2n – 1$

Тогда сумма не больше, чем $(2n – 1)(6n + 10) = (2n – 1)(6n + 1) + 9(2n – 1) < (2n – 1) (6n + 1) + 18n$ = sum

Противоречие

Почему все большие не представляются:

1) Нужно представить $m >= (2n + 2) (6n + 1)$. $m = (6n + 1) * q + r$, заменим на $q – 1$ или $q – 2$, чтобы делилось на 3: $m = q'(6n + 1) + r'$

$r' < 18n + 3$ $(r' <= 18n)$; $q' >= q – 2 >= 2n$

$r' <= 9q'$

Рассмотрим теперь разложение чисел $q'(6n + 1)$ и $q'(6n + 1) + 9q'$ в сумму q' монеток и будем последовательно увеличивать.

$(6n + 1)$ – монетки на 3. По непрерывности (дискретной) в какой-то момент получим m

2) $m = l + 1$, $m = (2n + 1)(6n + 1) -2 = 2n(6n+7)$
3) $m = l + 2$, $m = (2n + 2)(6n + 1) – 1 = (n + 1)(6n + 1) + (6n + 7)$

Ответ: $(2n + 2)(6n + 1) - 3$