**Олимпиада школьников СПбГУ по математике.**

**Заключительный этап. 2020/2021 учебный год. 10 – 11 классы.**

**1.** Натуральные числа от 1 до 2021 записаны в ряд в некотором порядке. Оказалось, что у любого числа его левый и его правый сосед имеют разную четность. Какое число может быть на первом месте?

**2.** При $a, b, c > 0$ найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{(a+b+c)^3 - 26abc}.$$

**3.** Окружности $\omega_1$ и $\omega_2$ пересекаются в точках $A$ и $B$, а окружность с центром в точке $O$ охватывает окружности $\omega_1$ и $\omega_2$, касаясь их в точках $C$ и $D$ соответственно. Оказалось, что точки $A$, $C$ и $D$ лежат на одной прямой. Найдите угол $ABO$.

**4.** Петя написал на доске подряд $n$ двузначных восьмеричных чисел $(n \geq 2)$, образующих арифметическую прогрессию с разностью $-8$. Вася подумал, что это восьмеричная запись натурального числа $x$, и разложил $x$ на простые множители. Оказалось, что их всего два, и они различаются на 6. Что написано на доске?

**5.** В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством $3n - 1$, $6n + 1$, $6n + 4$ и $6n + 7$ пиастров, где $n$ — натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Сумма |
|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 15 | 20 | 0 | 10 | 65 |

1) Пусть 1 число, это число а, тогда 3 число другой четности от а, 5 – такой же четности и так далее, 2021 число такой же четности. Мы можем так говорить, потому что числа, номера которых отличаются на 2, разной четности, так как эти числа – соседи какого-то числа. Тогда сейчас чисел четности а 506 (1 5 9 …), а чисел другой четности 505(3 7 11 …). Теперь рассмотрим четные места, пусть второе число – число б, тогда 4 число другой четности от б, 6 – такой же, как и у б, и так далее, тогда аналогично получаем, что чисел четности б -505 штук, а чисел четности не б – 505 штук, то есть их поровну. Тогда чисел четности а на 1 больше, чем чисел четности не а, нам дано, что все числа от 1 до 2021, тогда в этом промежутке нечетных чисел на 1 больше, чем четных, тогда число а-нечетное, а значит, на 1 месте должно быть любое нечетное число.
3) Проведем касательные к окружностям в точках C и D, тогда пусть они пересекутся в точке P,  тогда угол ODP = угол OCP =90 градусов, так как большая окруность с центром в O касается маленьких, а значит центры большой и маленькой окружности лежат на перпендикуляре к касательной к точке касания. Тогда OCPD – вписанный четырехугольник, так как сумма противоположных углов равна 180 (90+90). AB-радикальная ось для 2 маленьких окружностей, точка P лежит на радикальной оси этих окружностей, так степень точки P для каждой из окружностей равны: PC^2=PD^2, так как PC=PD, так как PC и PD – касательные к большой окружности с центром O из точки P, поэтому точка P лежит на прямой AB. Пусть угол PCO = x, тогда угол CBA=x, так угол между касательной и хордой равен вписанному углу опирающемуся на эту хорду. Угол PDC=x, потому что треугольник CPD – равнобедренный и углы при основании равны. Угол PBD=угол PDC, так как угол между касательной и хордой равен вписанному углу опирающемуся на эту хорду. Тогда угол CBD =угол CBP + угол PBD= 2x. OCPD – вписанный четырехугольник, тогда угол COP =угол PDC=x(опираются на PC) и угол POD=угол PCD(опираются на PD), тогда угол COD =2x, тогда угол COD = угол PBD. А значит, CBOD – вписанный четырехугольник, так равны углы,

опирающиеся а одну и ту же дугу. OCPD лежат на одной окружности, и CBOD лежат на одной окружности, окружность задается по 3 точкам, поэтому CPDOB лежат на одной окружности, тогда угол PBO = угол PCO ( опираются на дугу PO), они равны 90 градусов, так как угол PCO=90 градусов. Тогда угол ABO=угол PBO =90 градусов.

5) Давайте рассмотрим остатки наших достоинств по модулю 3н-1, тогда 3н-1 сравнимо с 0, 6н+1 сравнимо с 3, 6н+4 сравнимо с 6, 6н+7 сравнимо с 9 по модулю 3н-1. Теперь давайте для каждого остатка по модулю 3н-1, посмотрим какое максимальное число с этим остатком мы не сможем получить. Число 3н-1 не влияет на изменение остатка по модулю 3н-1. Нам дают остаток по модулю 3н-1, мы пытаемся получить этот остаток прибавляя к 0 сколько-то 0, 3, 6, 9. Нам важно минимальное количество взятых чисел, поэтому прибавлять 0 нам не надо. Если нам дали остаток по модулю 3н+1, который кратен 3, то нам понадобится не так много чисел, потому что мы можем просто прибавлять 9, пока максимально не приблизимся к нужному остатку, а последним действием прибавим 3 6 или 9, так как наш остаток делится на 3, и наши слагаемые делятся на 3, например, остаток 24 будет получен так (9+9+6). Если нам дали остаток, который сравним с 1 по модулю 3, то нам придется брать наши остатки 3 6 9 много, так как нам надо будет перейти хотя бы 1 раз остаток 3н-1, чтобы теперь наш остаток был сравним с 1 по модулю 3, а до перехода он был сравним с 0 по модулю 3, если же нам дали остаток сравнимый с 2 по модулю 3, то нам нужно будет хотя бы 2 раза перескакивать 3н-1, чтобы получить остаток сравнимый с 2 по модулю 3, ну тогда очевидно, что для получения остатков, сравнимых с 2 по модулю 3, нужно будет как можно больше чисел., так как нужно как минимум 2 раза перейти 3н-1. Теперь скажем, что для получения любого остатка минимальным количеством чисел, нужно брать много 9 до того момента, когда наш остаток будет сравним по модулю 3 с остатком, который нам дали и максимально близок к нему, и в конце просто прибавить 3 6 или 9 в

зависимости от приближения. Тогда понятно, что остатки, сравнимые с 2 получать дольше всего, причем этот остаток должен быть как можно больше. Наибольший остаток по модулю 3н-1, который сравним с 2 по модулю 3 это 3н-4. Для его получения придется хотя бы 2 раза перескочить 3н-1, тогда в итоге с помощью 3 6 9 нужно будет получить 2х(3н-1)+3н-4=9н-6, чтобы за минимальное число остатков 3 6 9 получить 9н-6, нужно н-1 раз взять остаток 9, и 1 раз взять остаток 3, тогда получим число (н-1)х(6н+7)+6н+1=6н^2+7н-6, причем это число мы получить сможем, а вот число на 3н-1 меньше мы получить уже не сможем, то есть число 6н^2+4н-5 мы не сможем получить. Оно будет наибольшем из всех неполученных чисел, так как мы рассмотрели всевозможные остатки по модулю 3н-1, для всех остатков доказали, что минимальное число, полученное с помощью 3 6 9, максимально при остатке 3н-4. Тогда во всех остальных случаях это минимальное число будет меньше нашего, причем пусть дано число г сравнимое с к по модулю 3н-1, мы берем минимальное число м, которое сравнимо с к по модулю 3н-1, полученное остатками 3 6 9, и затем берем число м и прибавляем к нему 3н-1 до тех пор, пока не получим число г.
Ответ: 6н^2+4н-5
На всякий случай еще раз повторю оценку.
Для каждого остатка х по модулю 3н-1, я нахожу минимальное число м сравнимое с х по модулю 3н-1, которое можно получить суммой 6н+1 6н+4 6н+7, ну или в терминах остатков по модулю 3н-1: 3 6 9. Тогда все числа у, большие м и сравнимые с х по модулю 3н-1 я смогу получить: я просто буду прибавлять к м 3н-1 до тех пор, пока не получу у, я могу так делать, так как у сравнимо с м по модулю 3н-1.
Теперь нас интересует самое большое число, которое нельзя получить суммой каких-то достоинств. Точнее нас интересует такой остаток г по модулю 3н-1, что для его получения потребуется много слагаемых из списка 3 6 9. Чтобы минимизировать количество слагаемых, нужно максимизировать сами слагаемые, поэтому для получения

остатка г я буду брать много остатков 9, до тех пор, пока не получу остаток р, сравнимый с г по модулю 3, и максимально близкий к нему, а затем просто возьму остаток 3 или 6 или 9 в зависимости от разности моего приближения 9 и самого числа. Тогда понятно, что для остатков, сравнимых с 2 по модулю 3 нужно будет больше всего слагаемых, так мои слагаемые делятся на 3, при переходе через 3н-1 моя из суммы моих слагаемых вычитается 3н-1, в терминах остатков по модулю 3 вычитается остаток 2, тогда получаем остаток 1 по модулю 3, после еще одного перескока через 3н-1 мы уже получаем нужный нам остаток 2 по модулю 3. Поэтому для остатков, сравнимых с 2 по модулю 3, нужно, что сумма наших остатков 3 6 9 как минимум была 2*(3н-1). Остальные рассуждения я объяснил раньше.

2) Ответ: 3

$A=3$ достигается при а=б=с, тогда в получим $3a^3/a^3=3$

Докажем, почему $A<=3$, хочу доказать, что:

$(a^3+b^3+c^3)/((a+b+c)^3-26abc)<=3$

$(a^3+b^3+c^3)<=((a+b+c)^3-26abc)*3$

$a^3+b^3+c^3<=3*(a^3+b^3+c^3+3*(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b)-20abc)$

$a^3+b^3+c^3+60abc<=3a^3+3b^3+3c^3+9*(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b)$

$60abc<=2a^3+2b^3+2c^3+9*(a^2b+b^2c+c^2a)+9*(c^2b+b^2a+a^2c)$

мы знаем, что:

$a^3+b^3+c^3>=3abc$ (неравенство о средних между средним-геометрическим и средним-арифметическим)

$a^2b+b^2c+c^2a>=3abc$ (неравенство о средних между средним-геометрическим и средним-арифметическим)

$c^2b+b^2a+a^2c>=3abc$ (неравенство о средних между средним-геометрическим и средним-арифметическим)

тогда, используя эти 3 выражения, мы получим, что:

$2a^3+2b^3+2c^3+9*(a^2b+b^2c+c^2a)+9*(c^2b+b^2a+a^2c)>=6abc+27abc+27abc$

то есть

2a^3+2b^3+2c^3+9*(a^2b+b^2c+c^2a)+9*(c^2b+b^2a+a^2c)>=60 abc

Именно это я и хотел доказать, ЧТД.

Значит A<=3