Олимпиада школьников СПбГУ по математике.
Заключительный этап. 2020/2021 учебный год. 10 – 11 классы.

1. В некоторых клетках полоски 1×2100 поставлено по одной фишке. В каждую из пустых клеток записывается число, равное модулю разности количества фишек слева и справа от этой клетки. Известно, что все записанные числа различны и отличны от нуля. Какое наименьшее количество фишек может быть расставлено в клетках?

2. Положительные числа a, b, c таковы, что $a + b + c = 3$. Найдите минимальное значение выражения

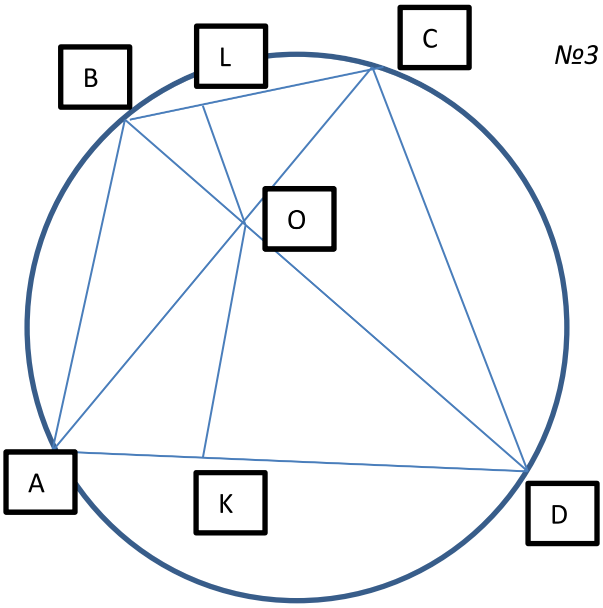
$$A = \frac{a^3 + b^3}{8ab + 9 - c^2} + \frac{b^3 + c^3}{8bc + 9 - a^2} + \frac{c^3 + a^3}{8ca + 9 - b^2}.$$

3. Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Пусть K и L — точки пересечения описанной окружности треугольника AOB с прямыми AD и BC соответственно. Найдите отношение $OK : OL$, если известно, что $\angle BCA = \angle BDC$.

4. На доске написано число 12320. Петя приписал к нему справа $10n + 1$ троек, где n — неотрицательное целое число. Вася подумал, что это четверичная запись натурального числа x, и разложил x на простые множители. Оказалось, что среди них ровно два различных. При каких n это возможно?

5. В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством $6n + 1$, $6n + 4$, $6n + 7$ и $6n + 10$ пиастров, где n — натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?

1	2	3	4	5	Сумма
0	18	20	20	0	58



№3

1) *Очевидно, что окружность, описанная около AOB пересечет именно стороны AD и BC.*
2) *Угол BCA = угол BDC по условию, угол BDC = угол BAC из вписанности ABCD => угол BCA = угол BAC*
3) *BAOL – вписанный по построению => угол BAC = угол OLC, но угол BCA = угол BAC Значит угол BCA = угол OLC => треугольник OLC равнобедренный =>LO=OC*
4) *BAOK – вписанный по построению => угол ABD = угол OKD, из вписанности ABCD угол ABD = угол OCD значит по транзитивности угол OCD = угол OKD*
5) *Угол BAC = угол BCA = угол BDC из п.1, при этом угол BDA = угол BCA из вписанности ABCD, значит угол BDA = угол ODC*
6) *Тогда в треугольниках OKD и OCD угол OCD = угол OKD и угол ODC = угол ODK значит и угол KOD = угол DOC*
7) *угол KOD = угол DOC & угол ODC = угол ODK & OD – общ => треугольники OKD и OCD равны по двум прилежащим углам и стороне => OK = OC*
8) *Из пункта 2 LO = OC, из пункта 6 OK = OC, значит OK = OL, значит OK/OL = 1*

   Ответ: 1.

№2.

$$\mathrm{A} = \frac{a^3+b^3}{8ab+9-c^2} + \frac{c^3+b^3}{8cb+9-a^2} + \frac{a^3+c^3}{8ac+9-b^2}$$

Рассмотрим каждое слагаемое. $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$

Заметим, что $a^2-ab+b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{4}$. *Действительно, домножим на 4, раскроем скобки и приведем подобные:*

$3a^2-6ab+3b^2 = 3(a+b)^2 \geq 0$ *Равносильно истине.*

По неравенству о средних для a,b >= 0 $ab \le \frac{(a+b)^2}{4}$, *Значит* $8ab \le 2(a+b)^2$

$$9-c^2 = (3-c)(3+c) = (a+b)(3+c), \text{т.к. } a+b+c=3$$

Тогда $\frac{a^3+b^3}{8ab+9-c^2} \geq \frac{(a+b)^3}{4(8ab+9-c^2)} \geq \frac{(a+b)^3}{4(2(a+b)^2+(a+b)(3+c))} \geq \frac{(a+b)^2}{4(2(a+b)+(3+c))}$

(Сократим на a+b числитель и знаменатель)

Тогда по неравенству КБШ для дробей:

$$\begin{aligned}\mathrm{A} &= \frac{a^3+b^3}{8ab+9-c^2}+\frac{c^3+b^3}{8cb+9-a^2}+\frac{a^3+c^3}{8ac+9-b^2}\\ &\geq \frac{(a+b)^2}{4\big(2(a+b)+(3+c)\big)}+\frac{(c+b)^2}{4\big(2(c+b)+(3+a)\big)}+\frac{(a+c)^2}{4\big(2(a+c)+(3+b)\big)}\\ &\geq \frac{4(a+b+c)^2}{4\big(2(a+b)+(3+c)+2(c+b)+(3+a)+2(a+c)+(3+b)\big)}\\ &= \frac{(a+b+c)^2}{5(a+b+c)+9}=\frac{9}{24}=\frac{3}{8}\end{aligned}$$

Минимум достигается при a=b=c=1:

$$\mathrm{A} = \frac{1^3+1^3}{8+9-1^2}+\frac{1^3+1^3}{8+9-1^2}+\frac{1^3+1^3}{8+9-1^2}=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$$

№4

Перепишем число x в десятичном виде:

$$\begin{aligned}x &= 4^0*3+4^1*3+\cdots+4^{10n}*3+4^{10n+2}*2+4^{10n+3}*3+4^{10n+4}*2+4^{10n+5}\\ &= 4^{10n+1}-1+4^{10n+2}*2+4^{10n+3}*3+4^{10n+4}*2+4^{10n+5}\\ &= 4^{10n+1}(1+8+48+128+256)-1 = 4^{10n+1}*441-1\\ &= (2^{10n+1}*21-1)(2^{10n+1}*21-1)\end{aligned}$$

НОД$(2^{10n+1}*21-1; 2^{10n+1}*21+1)$ *=НОД(2;* $2^{10n+1}*21-1$*)=1 Поскольку Вася в разложении получил только два различных простых, а две скобки взаимно просты, значит каждая из скобок – степень простого числа.*

$$2^{10n}*42-1 = q^l$$

$$2^{10n}*42+1 = p^t$$

Заметим, что $2^{10n}*42 = 1024^n*42 = (41*25-1)^n*(41+1) = (-1)^n$*(mod 41)*

Значит одна из скобок делится на 41, поскольку (-1)^n = +-1 (mod41)

1) *n – нечётное. Тогда* $2^{10n}*42+1 = (41*25-1)^n*(41+1)+1 =$ *42*41*$^2*t$ *- 41. Тогда степень простого числа делится на 41, но не делится на 41^2, значит эта скобка в точности 41, откуда вторая скобка 39, но это не степень простого – противоречие*
2) *n – чётное. Тогда* $2^{10n}*42-1 = (41*25-1)^n*(41+1)-1 =$ *42*41*$^2*t$ *+41. Тогда степень простого числа делится на 41, но не делится на 41^2, значит эта скобка в точности 41, откуда вторая скобка 43, что нам подходит. Найдем из этого условия n*

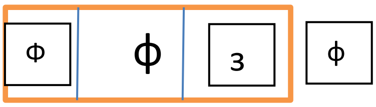
$$2^{10n}*42-1 = 41 \text{ равносильно } 2^{10n} = 1 \text{ равносильно } n=0.$$

$$\text{Ответ:} \, n=0.$$

№1.

1) Ответ: 1051.
2) Будем доказывать по индукции следующее утверждение: в полоске 1*n, n>=4 & n – четное, делящееся на 4 минимальное количество фишек, которые нужно поставить, хотя бы n/2+1.
3) База: n = 4. 0 поставить, очевидно, нельзя, 1 поставить в одну из крайних нельзя, так как для двух соседних модуль разности будет 1. Две поставить не через 1 нельзя, поскольку будет две соседних, в которых написано 2 или 0. Две поставить через 1 тоже нельзя, поскольку будет клетка в которой написан 0. 3 поставить можно – и это минимум, при этом 3=4/2+1 – истина

Пример на 4:



4) Переход: Пусть для любого четного числа кратного 4 <=k минимально расставляем k/2+1 фишек. Докажем, что на полоске 1*(k+4) мы можем расставить (k+4)/2+1= k/2+3 фишки и это будет минимум.
5)

Хотя бы по одной с каждого края поставить нужно, поскольку тогда будут две соседние клетки, для которых модуль разности равен числу клеток.

Две поставить можно: давайте сначала по индукционному предположению заставим внутреннюю полоску, не более 1 края будет без фишки – к тому краю приставим черную клетку, а в замыкающей ничего ставить не будем. А с другой стороны мы к внутренней полоске приставим белую, а на самый край поставим фишку. Тогда для внутренней полоски условие выполнено, поскольку разности не изменились ,а для двух внешних условия выполняются, поскольку у них отличные ото всех числа написаны – число клеток и число всех клеток -2, и такие значения во внутренней не принимаются.

Таким образом, для любой четной полоски длины n кратного 4 минимальное число фишек n/2+1, а значит для n=2100 ответ 1051.

№5

Если число k можно получить, то оно получается как $k = (6n+1)a_1 + (6n+4)a_2 + (6n+7)a_3 + (6n+10)a_4 = 6n\sum_{i=1}^{4} a_i + a_1 + 4a_2 + 7a_3 + 10a_4$, где
a_i принадлежит N с нулем и означает количество взятых монет данного типа

Любое k можно представить в виде 6nl+x, тогда l = $\sum_{i=1}^{4} a_i$, а x = $a_1 + 4a_2 + 7a_3 + 10a_4$.

Тогда нужно найти минимальные l, x такие, что существуют ai и выполняются данные равенства.