Олимпиада школьников СПбГУ по математике.
Заключительный этап. 2020/2021 учебный год. 10 – 11 классы.

1. Можно ли в таблице 25×41 расставить различные целые числа так, чтобы числа, стоящие в клетках, имеющих общую сторону, отличались не более чем на 16?

2. При $a, b, c > 0$ найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{a^3(b+c) + b^3(c+a) + c^3(a+b)}{(a+b+c)^4 - 79\,(abc)^{4/3}}.$$

3. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 соответственно пересекаются в точке B. Продолжение отрезка O_2B за точку B пересекает окружность ω_1 в точке K, а продолжение отрезка O_1B за точку B пересекает окружность ω_2 в точке L. Прямая, проходящая через точку B параллельно KL, вторично пересекает окружности ω_1 и ω_2 в точках A и C соответственно. Лучи AK и CL пересекаются в точке N. Найдите угол между прямыми O_1N и O_2B.

4. В файле записано подряд 2023 двузначных пятеричных чисел, причем числа на нечетных позициях равны и на 1 больше чисел на четных позициях. Компьютер считал данные из файла как одно пятеричное число и разложил его на простые множители. Оказалось, что таких множителей ровно два и они различаются на 2. Могло ли такое быть?

5. В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством 3^n, $3^{n-1} \cdot 4$, $3^{n-2} \cdot 4^2$, $3^{n-3} \cdot 4^3$, $\ldots$, $3 \cdot 4^{n-1}$, 4^n пиастров, где n — натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?

1	2	3	4	5	Сумма
20	5	20	0	20	65

Задача 3

Углы KBO1 и LBO2 равны как вертикальные, обозначим их за x

O1B=O1K – радиусы, треугольник KBO1 – равнобедренный поэтому угол BKO1=x, угол BO1K=180-x-x=180-2x

Аналогично углы BLO2=x, BO2L=180-2x

Угол BAK = BO1K/2 так как это вписанный и центральные углы опирающиеся на одну дугу BK, поэтому угол BAK=90-x. Аналогично угол BCL=90-x

Углы NKL и NAB соответственные так как KL и AC параллельны по условию, поэтому угол NKL=90-x

Аналогично угол KLN=90-x, то есть углы NKL=KLN=90-x поэтому треугольник NKL равнобедренный и угол KNL=180-2*(90-x)=2x

Пусть M – точка симметричная точке K относительно N

Тогда угол KML=KNL/2 так как KNL=NML+NLM как внешний в треугольнике NML, и углы NLM=NML так как NM=NK=NL (сумма двух равных углов равна 2x поэтому они оба x)

Угол KBL=180-x как смежный к углу KBO1

KML+KBL=x+(180-x)=180 значит KMLB – вписанный четырехугольник то есть лежит на описанной окружности треугольника KML, центром которой является N, так как NK=NM=NL. Точка B лежит на этой окружности значит NB=NK поэтому точка N лежит на серединном перпендикуляре к BK

O1K=O1B поэтому O1 тоже лежит на серединном перпендикуляре к BK, поэтому NO1 – серединный перпендикуляр к BK то есть NO1 и BO2 перпендикулярны и угол между ними равен 90 градусов

Ответ: 90

Задача 1

Предположим, можно

Можем уменьшить все числа так чтобы минимальное стало равно 1, требования к различности чисел и разности соседних не более 16 при этом не изменятся

Пусть максимальное равно A

Все числа разные и не меньше 1, поэтому A >= 1025

Пусть чтобы добраться по соседним клеткам от 1 до A сначала только по горизонтальным в одном направлении, потом только по вертикальным в одном направлении надо сделать K шагов

K <= 24+40=64 так как таблица 25 на 41

С каждым шагов следующее число возрастает не более чем на 16, поэтому A <= 1 + 16*K <= 1 + 16*64=1025, при этом A>=1025 поэтому A=1025 и K=64 – наибольший из возможных путей, поэтому 1 и 1025 стоят в противоположных углах, а все остальные числа больше 1 и меньше 1025. Причем числа на этом пути от 1 до 1025 это 1+16, 1+16*2, 1+16*3, … 1+16*63

Теперь посмотрим на путь от 1 до 1025 сначала по вертикальным вниз 40 шагов, потом по горизонтальным вправо 24 шага. Соседняя вниз от 1 клетка не больше 16, так как число 17 уже стоит в клетке справа от 1. Поэтому идя по этому пути 1025=A<=1+15+64*63=1024 - противоречие

Ответ: нельзя

Задача 4

Предположим, могло

Будем писать пятеричные числа в скобках, а десятиричные без скобок

Пусть x – числа на нечетных позициях, а x-1 – на четных

N – число, считанное ккомпьютером

Тогда N = x*5^(2022*2)+(x-1)*5^(2021*2)+…+(x-1)*5^(1*2)+x=(1+5^2+…+5^4044)*x-25*(1+5^2+…+5^4040)

Предположим что N=p*(p+1), где p – простое

N >=x*5^4044>=5&=^4044 значит (p+1)^2=N+1>5^4044, p+1>5^2022, p>=5^2022 значит p нечетное так как больше 2. Значит p+1 четное, (p+1)^2 делится на 4 и N=(p+1)^2-1 сравнимо с 3 по модулю 4

Значит N сравнимо с x+(x-1)+x+…+x=2023x-1011 по модулю 4, то есть сравнимо с 3x-3 по модулю 4 (так как 2023 сравнимо с 3, а 1011 сравнимо с 3). Поэтому 3x сравнимо с 6, 9x с 3*6=18, x сравнимо с 9x, то есть с 18, то есть с 2 по модулю 4.

x принадлежит множеству {6, 7, … 24} как двузначное пятиричнгое число (x не равен 5 так как x-1 тоже двузначное пятиричное число). x сравнимо с 2 по модулю 4, поэтому x из {6, 10, 14, 18, 22}

25 и все его степени сравнимы с 1 по модулю 3, поэтмоу N сравнимо с x+(x-1)+…+(x-1)+x=2023x-1011 по модулю 3, 2023x-1011 сравнимо с x (так как 2023 сравнимо с 1 по модулю 3, а 1011 делится на 3), то есть N сравнимо с x

p>3 поэтому p не делится на 3 так как оно простое, p+2 >3 – и оно не делится на 3 так как простое. Поэтому p не сравнимо ни с 0, ни с 1 по модулю 3 поэтмоу сравнимо с 2, значит p+1 делится на 3, (p+1)^2 делится на 9, N=(p+1)^2-1 сравнимо с 8 по модулю 9 и с 2 по модулю 3. N сравнимо с x по модулю 3, поэтмоу x сравнимо с 2

Отсюда x=14, так как 6, 10, 18 и 22 не подходят

N сравнимо с x по модулю 25, так как x – число, образованное двумя последними цифрами N в пятиричной системе. Значит (p+1)^2=N+1 сравнимо с 15 по модулю 25 то есть делится на 5 и не делится на 25. Но p+1 делится на 5, так как его квадрат делится на 5, поэтому (p+1)^2 делится на 25 – противоречие

Ответ: не могло

Задача 2

Числа положительные, поэтому (abc)^(1/3)<=(a+b+c)/3 – среднее геометрическое и среднее арифметическое

(a^3*(b+c)+b^3*(c+a)+c^3*(a+b))/((a+b+c)^4-79*(abc)^(4/3))<=
(a^3*(b+c)+b^3*(c+a)+c^3*(a+b))/((a+b+c)^4-79*((a+b+c)/3)^4))=
(a^3*(b+c)+b^3*(c+a)+c^3*(a+b))/((a+b+c)^4*(1-79/81))=81/2 *
(a^3*(b+c)+b^3*(c+a)+c^3*(a+b))/(a+b+c)^4 =

Без ограничения общности можем считать, что a>=b>=c>0. Сократим числитель и знаменатель на c^4

=81/2 * ((a/c)^3+(b/c+1)+(b/c)^3*(a/c+1)+(a/c+b/c))/(a/c+b/c+1)^4 =

Обозначим a/c=x, b/c=y, при этом x>=y>=1

=81/2 * (x^3*(y+1)+y^3*(x+1)+(x+y))/(x+y+1)^4

Докажем что максимум достигается при x=y методом Штурма

Предположим они не равны, заменим x на x-e, y на y+e, где e>0 – очень маленькое

(x-e)^3*(y+e+1)+(y+e)^3*(x-e+1)>=x^3*(y+1)+y^3*(x+1) (знаменатель и один член числительного не меняются)

При равных x=y: это выражение = 81/2 * (2x^3*(x+1)+2x)/(2x+1)^4

Приравняем производную к нулю (4x^3+3x^2+1)(2x+1)-8*(x^4+x^3+x)=0

2x^3+3x^2-6x+1=(x-1)(2x^2+5x-1)

Максимум функции достигается при x=1, то есть при a=b=c

При этом выражение равно 6/(81-79)=3

Ответ: 3

Задача 5

Докажем по индукции что ответ 2*(4^n+4^(n-1)*3+…+4*3^(n-1))-3^n

База: n=1

2*4-3=5

Пусть мы можем представить число 5, тогда есть 2 или больше 4 и 3 мы получим как минимум число 2*3=6, что больше 5. Тогда есть одна 3 или 4, но 3 не равно 5 и 4 не равно 5

Переход: от n-1 к n (n>=2)

Возьмем представление этого числа 2*(4^n+4^(n-1)*3+…+4*3^(n-1))-3^n=A_1 * 4^n + A_2 * 4^(n-1) * 3 + … + A_n * 4 * 3^(n-1) + A_(n+1) * 3^n

Все слагаемые кроме 3^n делятся на 4, значит A_(n+1)+1 делится на 4. Тогда если A_(n+1)+1=4*a_(n+1), поделив на 4, получим что 2*(4^n+3*4^(n-1)+…+4*3^(n-1))/4=A_1 * (4^n)/4 + A_2 * 4^(n-1) * 3 / 4 + … + A_n * 4*3^(n-1) / 4 + a_(n+1)*3^n = 2 * (4^(n-1)+4^(n-2) * 3 + … + 3^(n-1)) = A_1 * 4^(n-1) + A_2 * 4^(n-2) * 3 + … + A_n * 3^(n-1) + a_(n+1)*3^n = 2*(4*(n-1)+4^(n-2) * 3 + … + 4*3^(n-2)) = A_1 * 4^(n-1) + … + A_(n-1)*4*3^(n-2)+A_n * 3^(n-1) + a_(n+1)*3^n

В итоге получаем то же что и для n-1 только коэффициент при 3^(n-1) равен A_n+3*a_(n+1)-2. Таким образом если для n-1 представить нельзя, то нельзя и для n, а значит и изначально для 5*(n-1) нельзя то есть никакое число нельзя представить

Для тогт чтобы получить все остальные числа нужно получить все числа от 2*(4^n+…+4*3^(n-1)) до 2*(4^n + … + 4*3^(n-1))-3^n + 1, а потом каждый раз добавлять по 3^n, разбив все числа на группы по 3^n – также по индукции

Нам нужно составить 3^n чисел. Заметим что 3^(n-1) * 4 – 3^n = 3^(n-1) * (4-3)=3^(n-1) – заменим числа 3^(n-1) * 4 на 3^n и получим число на 3^(n-1) меньше, то есть если мы составим все числа от 2*(4^n+…+4*3^(n-1)) до 2*(4^n+…+4*3^(n-1))-3^(n-1)+1 и заменим там 4*3^(n-1) на 3^n то получим все числа от 2*(4^n+…+4*3^(n-1)) до 2*(4^n+….+4*3^n – 3*3^n + 1 что нам и надо. К тому же (4*3^(n-1))*3 = 3^n *4 то есть если нам будет мало чисел 4*3^(n-1), мы их можем получить таким образом

Нам нужно составить 3^n чисел

Заметим что $3^{(n-1)}*4-3^n=3^{(n-1)}*(4-3)=3^{(n-1)}$ – заменим числа $3^{(n-1)}$ на 3^n и получим число на $3^{(n-1)}$ меньше то есть если мы составим все числа от $2*(4^n+\ldots+4*3^{(n-1)}$ до $2*(4^n + \ldots + 4*3^{(n-1)}) - 3^{(n-1)}+1$ и заменим там $4*3^{(n-1)}$ на 3^n, то получим все числа которпе надою. К тому же $4*3^{(n-1)}*3=4*3^n$ то есть получим и таким образом

В итоге $2*(4^n+\ldots +4*3^{(n-1)})$ уже соствлено а это минус 1 мы получим так каждое вчисло вида $+4*3^{(n-1)})$ уже соствлено а это минус 1 мы получим так каждое вчисло вида $4^k*3^{(n-k)}$ имеет разный остаток при делении на 3^n то есть $4^k*3^{(n-k)}-4^l*3^{(l-k)}$ не делится на 3^n так как в однои из слагаемых степеней 3 больше но не равно n

Таки м образом нащо просто найти разные остаки и вычест часть этих чсиел при этом добавим=в числа 3^n

Вариантов будет $3^{(n-1)}$

Убрав эти числа и добавив какое то количества чисел вида 3^n получим простые группыиз $3^{(n-1)}$ числа в нужном диапазоне

,