Олимпиада школьников СПбГУ по математике.
Заключительный этап. 2020/2021 учебный год. 10 – 11 классы.

1. При каких натуральных n клетчатую доску $n \times n$ можно разрезать на квадраты 1×1 и 2×2 так, что квадратов разных размеров будет поровну?

2. Положительные числа a, b, c таковы, что $a^2b + b^2c + c^2a = 3$. Найдите минимальное значение выражения

$$A = a^7b + b^7c + c^7a + ab^3 + bc^3 + ca^3.$$

3. Дан неравнобедренный остроугольный треугольник ABC. В нем проведены высоты BB_1 и CC_1, пересекающиеся в точке H. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами H и C соответственно касаются прямой AB. Из точки A к ω_1 и ω_2 проведены касательные, отличные от AB. Обозначим точки их касания с этими окружностями через D и E соответственно. Найдите угол B_1DE.

4. Петя написал на доске подряд n последовательных двузначных чисел ($n \geq 2$), первое из которых не содержит цифру 4, а последнее — цифру 7. Вася подумал, что это десятичная запись натурального числа x, и разложил x на простые множители. Оказалось, что их всего два и они различаются на 4. Что написано на доске?

5. В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством 3^n, $3^{n-1} \cdot 5$, $3^{n-2} \cdot 5^2$, $3^{n-3} \cdot 5^3$, $\ldots$, $3 \cdot 5^{n-1}$, 5^n пиастров, где n — натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?

1	2	3	4	5	Сумма
20	3	20	20	0	63

Задание 2.

А = $a^7b + b^7c + c^7a + ab^3 + bc^3 + ca^3$

По условию, $a^2b + b^2c + c^2a$=3.

Применим неравенство Коши для среднего арифметического и квадратичного.

$$\frac{(a^2b + b^2c + c^2a)}{3} \geq \sqrt{\frac{(a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2)}{3}}$$

Откуда $(a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2) \geq 3$

Теперь оценим А.

А = $a^7b + b^7c + c^7a + ab^3 + bc^3 + ca^3 = (a^7b + ab^3) + (b^7c + bc^3) + (c^7a + ca^3)$

$$\frac{(a^7b + ab^3)}{2} \geq \sqrt{a^8b^4} = a^4b^2$$

Аналогично и для других двух пар

Значит, $A \geq 2(a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2) \geq 6$

Пример для А=6: x=y=z=1

Ответ: 6.

Задача 4.

Пусть N – один из искомых простых делителей. Тогда второй равен N+4.

Рассмотрим все возможные комбинации простых чисел, отличающихся на 4.

Заметим, что N>30, так как искомое число на доске – минимум четырёхзначное.

Тогда простые числа, если они не из первого десятка, согласно признакам делимости могут оканчиваться только на 1,3,7 или 9.

Среди этих 4-х значений у нас есть 3 пары, отличающиеся на 4:

1) **3 и *7*
2) **7 и *1*
3) **9 и *3*

   *Заметим, что последние две пары при перемножении оканчиваются на 7, а по условию последняя пара цифр не содержит 7. Значит, искомые множители представляются как *7 и *3.*

Пусть N=10a+3. Тогда второй множитель N+4=10a+7.

Заметим, что a может давать лишь остаток 1 при делении на 3, иначе какой-то из множителей будет кратен 3, что противоречит условию простоты.

Тогда представим a=3b+1

$N=30b+13$, $N+4=30b+17$.

Тогда их произведение $N*(N+4)=(30b+13)*(30b+17)=900b^2+1200b+221$.

Так как b – натуральное число, то последние 2 цифры – это 21.

Тогда последнее из чисел Пети и равняется 21.

Теперь заметим, что Петя не мог выписать на доску $3k$ чисел, так как иначе этот ряд делился бы на 3 (т.к. сумма цифр делится на 3), а первое число по условию не 14. Значит, осталось перебрать лишь несколько вариантов:

1) *2021*
2) *18192021*
3) *1718192021*
4) *151617181920201*
5) *131415161718192021*
6) *1112131415161718192021*
7) *101112131415161718192021*

2021 подходит, $2021=43*47$.

Остальные числа представим как $192021+10^6*a$. Тогда

$900b^2+1200b+221=192021+10^6*a$

$900b^2+1200b=191800+10^6*a$

Левая часть делится на 3, значит $a \bmod 3=2$.

Тогда нам подходят только $a=1718$ и $a=1112131415161718$.

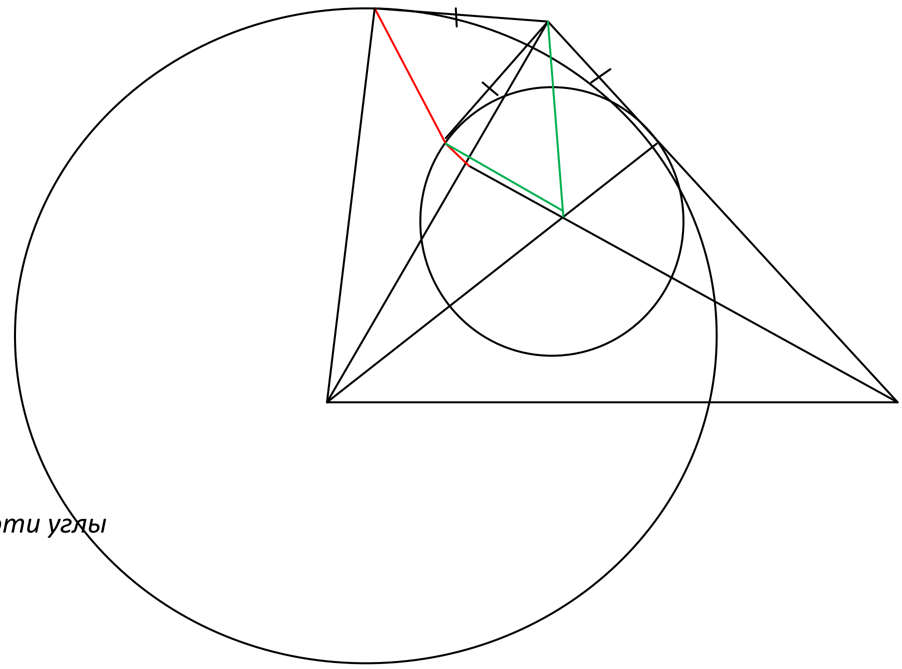
С другой стороны, если сократить на 100, то $9b^2+12b=1918+10^4*a$

$10^4*a=9b^2+12b-1918$, а правая никогда не кончается на 0 (это можно понять, рассмотрев все возможные остатки от деления b на 10).

Таким образом, нам подходит только первое значение $a=2021$.

Ответ: 2021.

Задача 3.



Решение:
пусть угол EAD=x,

угол DAC=y

угол HAC=z

угол HAC1=k

AC – бис-са угла EAC1,

AH –бис-са угла DAC1

Так как окружности вписаны в эти углы

Тогда x+y=z+k и y+z=k

Отсюда x=2z.

угол AB1H= углу ADH=90 градусов, тк HB1 лежит на высоте, а AD перпендикулярна AH как касательная к радиусу. Значит угол B1DH= углу CAH=z.

С другой стороны, AD=AE=AC1 как отрезки касательных. Значит треугольник EAD – равнобедренный.

угол EAD=x=2z. Значит угол AED равен углу ADE равен 90-z.

Итого угол B1DE равен ADE+ADH+B1DH=(90-z)+90+z=180 градусов

Ответ: 180 градусов.

Задача 1.

1) Площадь квадрата 1*1=1, квадрата 2*2=4. Пусть и тех, и других квадратов по k, сторона большего квадрата равна a.

Тогда 4k=k=a^2 (равенство площадей)

a^2=5k

Значит, a кратно 5.

2) Докажем, что a=5 не подходит.
В таком квадрате мы не можем разместить больше 4-х квадратов 2x2, т.к. иначе какая-либо из строк или какой-либо столбцов (по принципу дирихле хотя бы в одном столбце или строке окажется

пересечение 3-х квадратов) имеет длину 6 клеток, что невозможно. Значит, больше 4-х квадратов мы расставить не сможем, в то время как по условию надо расставить 5 ($x=a^2/5=5$). Пришли к противоречию.

3) Докажем, что подходит любой квадрат со стороной, кратной 5 и большей, чем 5.
Если n – чётное, то выделяем первые $4n/5$ строк и заполняем их полностью квадратами 2x2, получаем площадь $4n^2/5$ ($n*4n/5$) остальные $n/5$ строк заполняем квадратами 1x1 в количестве $n^2/5$ штук.

Если n – нечётное, то выделяем такой подквадрат с чётными сторонами $(n-1)*(n-1)$, и заполняем его полностью квадратами 2*2, остальную площадь заполняем квадратами 1x1. Заметим, что мы сможем это сделать, так как количество квадратов, которое можно поставить в тот квадрат, равно $(n-1)^2/4$, а требуется вписать $n^2/5$. При n, больших 5, $(n-1)^2/4 > n^2/5$. Значит, это выполнимо.

Ответ: n=5k, n>5 (т. е. при всех n, кратных 5, кроме n=5).