Олимпиада школьников СПбГУ по математике.
Заключительный этап. 2020/2021 учебный год. 10 – 11 классы.

1. При каких натуральных n клетчатую доску $n \times n$ можно разрезать на квадраты 1×1 и 2×2 так, что квадратов разных размеров будет поровну?

2. Положительные числа a, b, c таковы, что $a^2b + b^2c + c^2a = 3$. Найдите минимальное значение выражения

$$A = a^7b + b^7c + c^7a + ab^3 + bc^3 + ca^3.$$

3. Дан неравнобедренный остроугольный треугольник ABC. В нем проведены высоты BB_1 и CC_1, пересекающиеся в точке H. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами H и C соответственно касаются прямой AB. Из точки A к ω_1 и ω_2 проведены касательные, отличные от AB. Обозначим точки их касания с этими окружностями через D и E соответственно. Найдите угол B_1DE.

4. Петя написал на доске подряд n последовательных двузначных чисел ($n \geq 2$), первое из которых не содержит цифру 4, а последнее — цифру 7. Вася подумал, что это десятичная запись натурального числа x, и разложил x на простые множители. Оказалось, что их всего два и они различаются на 4. Что написано на доске?

5. В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством 3^n, $3^{n-1} \cdot 5$, $3^{n-2} \cdot 5^2$, $3^{n-3} \cdot 5^3$, $\ldots$, $3 \cdot 5^{n-1}$, 5^n пиастров, где n — натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?

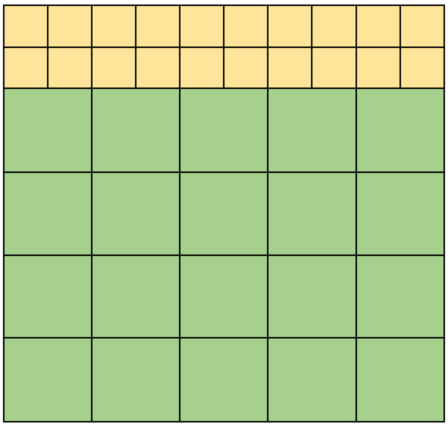
1	2	3	4	5	Сумма
20	20	0	20	20	80

Задача №1.

Ответ: все натуральные числа, делящиеся на 5 и большие 5.

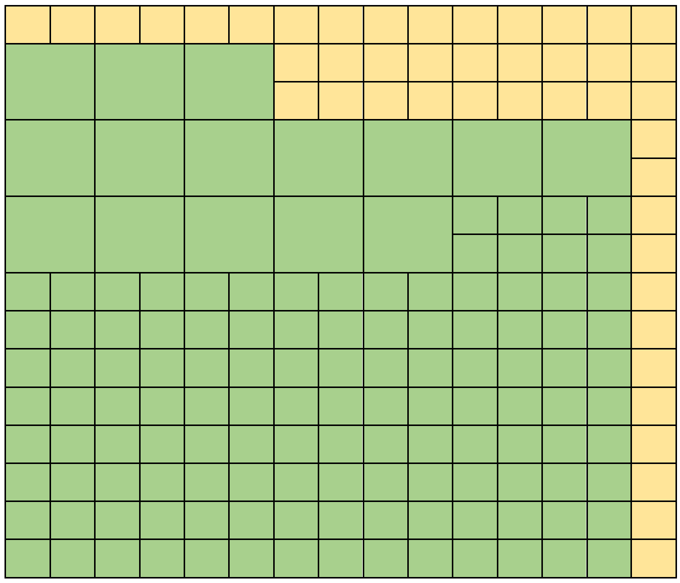
Решение:

Пусть удалось разрезать доску на a квадратов 2*2 и a квадратов 1*1. Тогда общее количество клеток $n^2 = 4a + a = 5a$. Тогда n делится на 5. Очевидно, при $n = 5$ из доски можно вырезать не более 4 квадратов 2*2, но тогда оставшееся место занимают 9 квадратов 1*1 и равенство не выполняется. При n равном 10 и 15 равенство возможно.

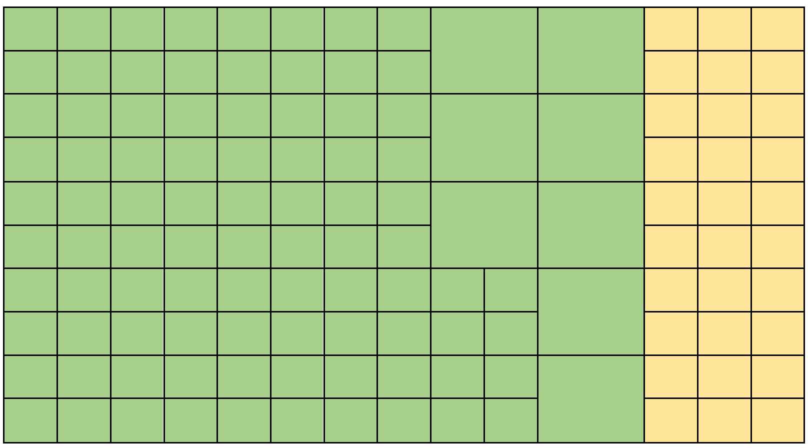


*по 20 квадратов в 10*10*

*и по 45 квадратов в 15*15*



Также равенство достигается при разрезании прямоугольника 10*15 (по 30 квадратов).



Заметим, что любое натуральное число, большее 1 представим в виде суммы нескольких двоек и троек по теореме Чикен Макнагетс для чисел 2 и 3 (в частности, доказательство данного случая очевидно по индукции). Тогда при $n \gg 10$ можно представить $\frac{n}{5} = 2a + 3b$ для некоторых натуральных a и b. То есть $n = 10a + 15b$, а значит можно разбить стороны квадрата на несколько отрезков длин 10 и 15. Проведя через концы отрезков прямые, параллельные сторонам квадрата, нетрудно заметить, то ими квадрат разбивается на прямоугольники 10*10, 15*15 и 10*15. По показанному ранее, при их разрезании может достигаться равенство, что и завершает док-во.

Задача №2.

Ответ: 6.

Решение:

Заметим, что по неравенству о средних;

$$a^7b + ab^3 + 1 + 1 \geq 4a^2b$$

Записав и сложив аналогичные неравенства получим

$$a^7b + ab^3 + 2 + b^7c + cb^3 + 2 + c^7a + ca^3 + 2 \geq 4(a^2b + b^2c + c^2a)$$

Тогда из условия

$$a^7b + ab^3 + 2 + b^7c + cb^3 + 2 + c^7a + ca^3 + 2 \gg 12$$

То есть $a^7b + ab^3 + b^7c + cb^3 + c^7a + ca^3 \gg 6$. Равенство достигается при $a = b = c = 1$.

Задача №3

Ответ: Точки D, B_1 и E лежат на одной прямой, т.е. 0 или π.

Решение:

Проведем высоту AA_1. Покажем, что D лежит на A_1B_1. Точки D и B_1 лежат на окружности с диаметром AH. Тогда заметим, что угол

$A_1B_1D = A_1AD = DAAH = DB_1H$ в силу симметрии и вписанности четырехуголника

То есть D лежит на A_1B_1. Так как C является ортоцентром BAH, то абсолютно аналогично AA_1E= AA_1B_1. Значит, точки A_1, B_1, D, E лежат на одной прямой.

Задача №4.

Ответ: 2021.

Решение:

Несложно заметить, что каждое из данных простых не меньше 13, т.е. x не имеет делителей 3, 5 и 7. Тогда последняя цифра x – нечетная и не равна 5 или 7. $x = p(p + 4)$, тогда несложно заметить, что если p дает остатки 2 или 4 по модулю пяти, то последняя цифра должна равнятся лиюо 2, либо 7, что невозможно, если дает остатки 1 или 4 по модулю 5, то x делится на 5. Противоречие, то есть p дат остаток 3 по модулю 5 и тогда x дает остаток 1, а значит последняя цифра – 1.Также очевидно, что x+4 – точный квадрат, а значит делится на 5 и на 25. В этом случае предпоследняя цифра может быть или 2, или 7, то есть равна 2. Таким образом, последнее двузначное число – 21. Перебирая все возможные варианты, оканчивающиеся на 2021, можно заметить, что все они, кроме 2021, не удовлетворяют условию (например, имеют маленький простой делитель – 3, 7 и т.д.).

Задача №5

Ответ: $5^{n+1} - 2 * 3^{n+1}$

Решение:

Обозначим последовательность $S_n = 5^{n+1} - 2 * 3^{n+1}$. Будем доказывать индукцией по n:

Воөпервых, заметим, что $S_n = 5^{n+1} - 2 * 3^{n+1} \ll 5^{n+1}$. База очевидна в следствии теоремы Чикен Макнагетс(в частности, этот случай тривиален).

Предположим верность ответа для k. Тогда для k+1:

Любое число, большее S_{k+1} представимо, т.к. при вычитании 5^{k+1} один, два или ноль раз, можно добиться того, что оставшееся число дедилось на 3, ну а этот остаток можно собрать из остального набора чисел по предположению индукции. Само число удовлятворяет, т.к. иначе при вычитании из него 5^{k+1} дважы (иначе остаток слишком большой или не делится на 3) получим разложение для S_k. Противоречие. Мы использовали очевидное $S_{n+1} = 3S_n + 2 * 5^{т+1}$.