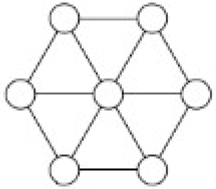
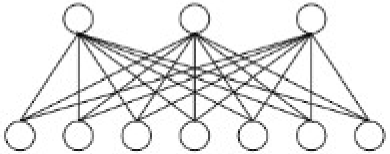
ВОПРОС 1: ЭССЕ

25 из 25 баллов

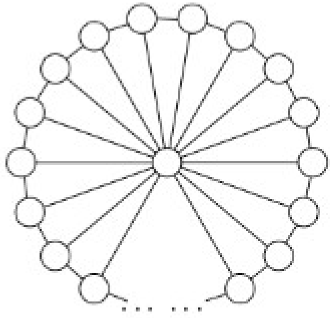
1. На картинке нарисовано n кружочков, некоторые кружочки соединены отрезками. Требуется расставить в кружочках числа от 1 до n (без повторений) так, чтобы выполнялось свойство: если кружочки соединены отрезками, то стоящие в них числа должны быть взаимно просты (то есть не иметь общих натуральных делителей, отличных от 1). Можно ли это сделать в каждом из следующих случаев? Если можно — опишите расстановку чисел, если нет — объясните, почему нельзя.



а) $n = 7$



б) $n = 10$



в) $n = 2022$: по кругу стоят 2021 кружочков, и еще один в центре

Данный ответ: а) Да, можно. В середине будет стоять число 1. А по кругу будут стоять остальные числа в таком порядке: 2, 5, 6, 7, 4, 3. И тогда все соседние чи сла будут взаимно просты друг с другом.

Данный ответ:

а) Да, можно. В середине будет стоять число 1. А по кругу будут стоять остальные числа в таком порядке: 2, 5, 6, 7, 4, 3. И тогда все соседние числа будут взаимно просты друг с другом.

б) Числа 2, 4, 6, 8, 10 должны стоять вместе в нижнем ряду, иначе какие-то из этих чисел будут соединены друг с другом. Такжечисла 3, 6, 9 должны также стоять в одном ряду иначе, они будут соединены друг с другом. Числа 5 и 10 по этой же причине должны стоять в одном ряду. И таким образом мы получаем, что числа 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9,10 должны все стоять в одном ряду. Но в нижнем ряду только 7 кружочков, а чисел в одном ряду должно быть 8. Значит, так числа расставить нельзя.

Ответ:Нет, нельзя.

в) В середине должно точно стоять нечетное число, иначе оно не будет взаимно просто с четными числами, стоящими по кругу. Также в круге каждое четное число должно стоять между двумя нечетными, иначе 2 соседних четных числа не будут взаимно просты. Всего у на сесть 1011 четных и 1011 нечетных чисел, но 1 нечетное будет стоять посередине. Поэтому не все четные удут стоять между двумя нечетными, и найдутся 2 соседних четных числа, а они не будут взаимно просты.

Ответ: Нет, нельзя

ВОПРОС 3: ЭССЕ

2 из 20 баллов

3. В треугольнике ABC точка D — середина стороны AB, E — середина стороны AC, F — середина биссектрисы AL, причем $DF = 1$, $EF = 2$. На плоскости изображены точки D, E, F так, что прямая DF горизонтальна, а остальные элементы чертежа стерты. Можно ли восстановить положение хотя бы одной из вершин треугольника, если известно, что вершина A находилась сверху от прямой DF?

Данный ответ:

Заметим, что DE-средняя линия треугольника ABC , а значит все отрезки из точки A к отрезку BC делятся на отрезке DE пополам. F-середина AL, значит F лежит на DE. Тогда FE-средняя линия треугольника ACL(CL=2), а DF-средняя линия реугольника ABL(BL=4), BC=6.

Ответ:Нет, нельзя.

ВОПРОС 2: ЭССЕ

15 из 30 баллов

2. Назовем *каскадом, порожденным числом* r, набор из 12 натуральных чисел: r, $2r$, $\ldots$, $12r$.

а) Может ли какая-то пара чисел (a, b) содержаться в шести различных каскадах? Если да — приведите пример таких чисел, если нет — объясните, почему не может.

б) Верно ли, что множество натуральных чисел можно раскрасить в 12 цветов так, что в каждом каскаде все элементы будут разного цвета?

Данный ответ: а) Ответ: Да, может:

a=360, b=180

Они встречаютя в каскадах:

г=180

г=90

б) Ответ:Нет, неверно.

г=60

г=45

г=36

г=30

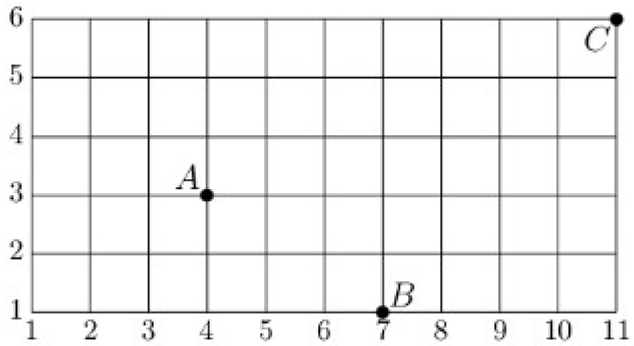
ВОПРОС 4: ЭССЕ

16 из 25 баллов

4. Город имеет форму клетчатого прямоугольника 5×10 клеток: линии — улицы, клетки — жилые кварталы. Расстояние между перекрестками измеряется как длина самого короткого пути по улицам города, проходящего от одного перекрестка до другого. Например, для перекрестков A, B и C на картинке $AB = 5$, $AC = 10$, $BC = 9$. Можно ли отметить в этом городе k перекрестков так, чтобы все расстояния между этими перекрестками оказались различными числами? Если да — укажите эти перекрестки (например, перекресток C находится на пересечении 11-й вертикальной и 6-й горизонтальной улицы), если нет — объясните, почему нельзя.

Решите задачу для

а) $k = 5$; б) $k = 6$; в) $k = 7$.



Данный ответ:

а) для k=5 это возможно.

Пример:

перекресток A на пересечении 6 горизонтальной и 1 вертикальной

перекресток B на пересечении 5 горизонтальной и 1 вертикальной

перекресток C на пересечении 3 горизонтальной и 1 вертикальной

перекресток D на пересечении 6 горизонтальной и 5 вертикальной

перекресток E на пересечении 1 горизонтальной и 11 вертикальной

б) для k=6 это тоже возможно.

Пример:

перекресток A на пересечении 6 горизонтальной и 1 вертикальной

перекресток B на пересечении 5 горизонтальной и 2 вертикальной

перекресток C на пересечении 1 горизонтальной и 2 вертикальной

перекресток D на пересечении 6 горизонтальной и 4 вертикальной

перекресток E на пересечении 5 горизонтальной и 11 вертикальной

перекресток F на пересечении 1 горизонтальной и 11 вертикальной

в) Если k=7, то количество расстояний между перекрестками равно (7*(7-1))/2=21. Максимальное расстояние между перекрестками равно 15(если они находятся в противоположных углах). Тогда всего различных вариантов расстояний между перекрестками будет 15. А всего расстояний 21. 21>15, значит такого быть не может.