Санкт-Петербургский государственный университет
Олимпиада школьников по математике 2020–2021
Заключительный этап
8–9 классы

1. Докажите, что для любых вещественных чисел a и b уравнение

$$(a^2 - b^2)x^2 + 2(a^3 - b^3)x + (a^4 - b^4) = 0$$

имеет решение.

2. На острове живут лжецы и рыцари. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Каждый житель острова про каждого из остальных знает рыцарь он или лжец. Как-то раз встретились 19 островитян. Трое из них сказали: «Ровно трое из нас лжецы», затем шестеро из остальных сказали: «Ровно шестеро из нас лжецы», наконец, девять из оставшихся сказали: «Ровно девять из нас лжецы». Сколько лжецов было среди встретившихся? Приведите все возможные варианты и докажите, что других нет.

3. Вещественные числа a, b, c и d удовлетворяют условию $a^6+b^6+c^6+d^6 = 64$. Найдите наибольшее значение выражения $a^7 + b^7 + c^7 + d^7$.

4. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка K. К описанной окружности треугольника AKC проведена касательная ℓ_1, параллельная прямой AB и ближайшая к ней. Она коснулась окружности в точке L. Прямая AL пересекла описанную окружность треугольника ABK в точке M ($M \neq A$). К этой окружности в точке M проведена касательная ℓ_2. Докажите, что прямые BK, ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются в одной точке.

5. Дана клетчатая доска 2020×2021. Петя и Вася играют в следующую игру. Они по очереди ставят фишки в свободные клетки доски. Выигрывает тот игрок, после хода которого в каждом квадрате 4×4 будет стоять фишка. Начинает Петя. Кто из игроков может обеспечить себе победу вне зависимости от действий соперника?

6. Найдите все пары такие простых чисел p и q, что $p^2 + 5pq + 4q^2$ является квадратом натурального числа.

1	2	3	4	5	6	Сумма
20	20	5	0	0	20	65

Задача 1.

$(a^2 - b^2)x^2 + 2(a^3 - b^3)x + (a^4 - b^4) = 0$

$(a-b)(a+b)x^2 + 2(a-b)(a^2 + ab + b^2)x + (a-b)(a+b)(a^2 + b^2) = 0$

Заметим, что если a=b, то a-b=0, тогда выражение тождественно равно 0. Тогда любой x является корнем. Если a не равно b, сократим на a-b:

$(a+b)x^2 + 2(a^2 +ab + b^2)x + (a^3 + b^3 + ab^2 + ba^2) = 0$

Уравнение 2 степени имеет решения при любых значениях параметров, если при любых значениях параметров дискриминант не меньше 0

$D = 4(a^2 + ab + b^2)^2 – 4(a+b)(a^3 + b^3 + ab^2 + ba^2)$

Можно сократить на 4, поскольку на сравнение с 0 это не повлияет. Также сразу раскроем скобки в выражении

$(a^4 + b^4 + 2(ab^3) + 2(ba^3) + 3(a^2)(b^2)) – (a^4 + b^4 + 2(ab^3) + 2(ba^3) + 2(a^2)(b^2)) =$ $(a^2)(b^2) = (ab)^2$ – квадрат вещественного числа, значит всегда не меньше 0

Таким образом, дискриминант уравнения всегда не меньше 0, а значит уравнение при любых вещественных a и b имеет решения. Чтд.

Задача 2.

Заметим, что если в числе первых трех людей высказался рыцарь, то лжецов должно быть ровно 3. При этом люди, которые сказали, что лжецов 6 и 9, получается, солгали,а значит они лжецы и их не меньше, чем 6+9=15, а должно быть ровно 3. Значит рыцарь солгал – плохо. Аналогично, если рыцарь высказался в числе 6 людей, которые сказали что лжецов 6, то он солгал, тк все кто сказал что лжецов 3 или 9 – солгали, а их было 3+9=12. Значит рыцарь солгал – плохо. Если рыцарь высказался среди 9ти, сказавших что лжецов ровно 9, то солгали те, кто сказал, что лжецов 3 или 6. Таких людей было 3+6=9 - они как раз лжецы. Тогда 19ый человек, который вообще ничего не сказал – рыцарь. В этом случае лжецов 9. Если среди высказавшихся в принципе не было рыцарей, то есть 2 случая: если тот, кто молчал рыцарь, то лжецов 18 (каждый высказавшийся сказал неправду). Если тот, кто молчал лжец, то лжецов 19 (каждый высказавшийся сказал неправду). Таким образом лжецов мб 9, 18, 19.

Ответ: 9, 18 или 19 лжецов могло быть

Задача 6.

Известно, что $n^2 = p^2+5pq+4q^2$

Тогда $n^2 = (p+2q)^2+pq$

$pq = n^2 - (p+2q)^2 = (n-p-2q)(n+p+2q)$

тк p, q – простые числа, то множители могут быть равны только 1, p, q, pq

Тогда есть 4 случая

1) $n-p-2q = pq$, $n+p+2q = 1$ – не подходит тк $n>=1$, $p>=2$ значит $n+p+2q>=2$
2) $n-p-2q = p$, $n+p+2q = q$ – не подходит тк $n+p+2q$ больше q
3) $n-p-2q = q$, $n+p+2q = p$ - не подходит тк $n+p+2q$ больше p
4) $n-p-2q =1$, $n+p+2q = pq$

Тк первые 3 случая не подошли, значит остается четвертый.

$n = p+2q+1 = pq-p-2q$

отсюда $pq = 2p+4q+1$

тогда тк pq делится на q, $4q$ делится на q, то $2p+1$ делится на q.то есть $2p+1=aq$.

Тогда $pq = 4q+2p+1 = 4q+aq = q(a+4)$

$pq = (a+4)q$

тк $q>0$, то можем на q сократить

$p = a+4$

при этом $2p+1 = aq$

значит $2(a+4)+1=aq$

$2a+9=aq$

Тк $2a$ делится на a, aq делится на a, значит 9 делится на a. тогда есть 3 случая

1) $a = 1$
2) $a = 3$
3) $a = 9$

для каждого из этих случаев можем выразить p по формуле $p=a+4$ и q из формулы $2a+9=aq$

тогда

1) $a = 1$, $p = 5$, $q = 11$
2) $a = 3$, $p = 7$, $q = 5$
3) $a = 9$, $p = 13$, $q = 3$

посчитаем для каждого случая выражение $p^2+5pq+4q^2$

1) $25+275+484 = 784 = 28^2$ – этот случай подходит
2) $49+175+100 = 324 = 18^2$ – этот случай подходит
3) $169+195+36 = 400 = 20^2$ – этот случай подходит

Таким образом подходят пары чисел

$p = 5$, $q = 11$

$p = 7, q = 5$

$p = 13, q = 3$

Задача 3.

При $a = b = c = 0, d = 2$

A^7+b^7+c^7+d^7=128