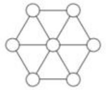
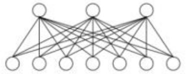
ВОПРОС 1: ЭССЕ 25 из 25 баллов

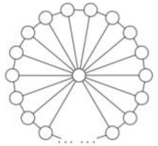
1. На картинке нарисовано n кружочков, некоторые кружочки соединены отрезками. Требуется расставить в кружочках числа от 1 до n (без повторений) так, чтобы выполнялось свойство: если кружочки соединены отрезками, то стоящие в них числа должны быть взаимно просты (то есть не иметь общих натуральных делителей, отличных от 1). Можно ли это сделать в каждом из следующих случаев? Если можно — опишите расстановку чисел, если нет — объясните, почему нельзя.



а) $n = 7$



б) $n = 10$



в) $n = 2022$: по кругу стоят 2021 кружочков, и еще один в центре

Данный ответ: а) Да, можно:

7 2

6 1 3

5 4

б) Нет, нельзя:

Заметим, что все числа, делящиеся на 2 должны стоять в нижней строке(иначе если хотя бы одно из них будет наверху, то оно не будет взаимно просто с остальными, делящимися на 2 и стоящие снизу),

это числа 2,4,6,8,10.

Далее, несложно заметить, что число 5 тоже стоит внизу, т.к. иначе оно бы не было взаимно простое с 10. Остались числа 1, 3, 7, 9. Также 3 и 9 должны быть оба в нижней строке (если в верхней, то 6 будет делиться на 3). Но внизу осталось только одно свободное место. Значит какое то из них будет сверху, и не будет взаимно простое с числом 6. Значит таким образом расставить эти числа нельзя.

в) Нет, нельзя.

Заметим, что в центре стоит обязательно нечетное число (т.к. иначе бы оно не было взаимно простое с остальными четными числами). Всего 2022 числа, из них 1011 - нечетные и 1011 - четные. Но одно нечетное число уже стоит в центре. Значит по кругу стоят 1011 четных и 1010 нечетных. Значит какие то 2 четных числа обязательно стоят рядом, а следовательно они не взаимно простые.

Ответ: а)да, б)нет, в)нет.

ВОПРОС 2: ЭССЕ 0 из 30 баллов

2. Назовем *каскадом, порожденным числом* r, набор из 12 натуральных чисел: r, $2r$, $\ldots$, $12r$.

а) Может ли какая-то пара чисел (a, b) содержаться в шести различных каскадах? Если да — приведите пример таких чисел, если нет — объясните, почему не может.

б) Верно ли, что множество натуральных чисел можно раскрасить в 12 цветов так, что в каждом каскаде все элементы будут разного цвета?

Данный ответ: [Ничего не дано]

ВОПРОС 3: ЭССЕ 20 из 20 баллов

3. В треугольнике ABC точка D — середина стороны AB, E — середина стороны AC, F — середина биссектрисы AL, причем $DF = 1$, $EF = 2$. На плоскости изображены точки D, E, F так, что прямая DF горизонтальна, а остальные элементы чертежа стерты. Можно ли восстановить положение хотя бы одной из вершин треугольника, если известно, что вершина A находилась сверху от прямой DF?

Данный ответ: Заметим, что в тр. ACL отрезок EF - средняя линия этого тр. а значит он параллелен CL и CL = 2*EF = 2*2 = 4. Аналогично в тр. ALB отрезок FD - средняя линия, следовательно он параллелен LB и LB = 2*FD = 2*1 = 2. Т.к. CB - сторона треугольника, и EF//CL, DF//LB следует, что точки D, E, F лежат на одной прямой. Пусть нам на плоскости даны точки D и F и есть отрезок DF, равный 1. Тогда мы можем отложить по прямой DF направо отрезок, в 2 раза больше DF, и получим точку E. Т.к. F лежит на биссектрисе, то она равноудалена от боковых сторон. Построим окружность произвольного радиуса с центром в F. Теперь проведем касательные к ней из D и из E. Пусть они пересекаются в точке A1. Продлим A1D до A1B1, причем A1D = DB1. Аналогично продлим A1E до A1C1, причем A1E = EC1. Мы получили тр. A1B1C1, который подходит по построению. Однако мы можем построить новый тр. из окружности меньшего, например, радиуса, и он тоже будет нужным. Т.о. однозначно определить ни одну вершину нельзя.

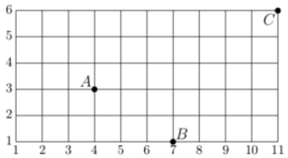
Ответ:нет.

ВОПРОС 4: ЭССЕ 25 из 25 баллов

4. Город имеет форму клетчатого прямоугольника 5×10 клеток: линии — улицы, клетки — жилые кварталы. Расстояние между перекрестками измеряется как длина самого короткого пути по улицам города, проходящего от одного перекрестка до другого. Например, для перекрестков A, B и C на картинке $AB = 5$, $AC = 10$, $BC = 9$. Можно ли отметить в этом городе k перекрестков так, чтобы все расстояния между этими перекрестками оказались различными числами? Если да — укажите эти перекрестки (например, перекресток C находится на пересечении 11-й вертикальной и 6-й горизонтальной улицы), если нет — объясните, почему нельзя.

Решите задачу для

а) $k = 5$; б) $k = 6$; в) $k = 7$.



Данный ответ: а) Да, можно:

точка А: пересечение 1 горизонтали и 1 вертикали.

точка В: пересечение 3 горизонтали и 7 вертикали.

точка C: пересечение 3 горизонтали и 11 вертикали.

точка D: пересечение 5 горизонтали и 11 вертикали.

точка E: пересечение 6 горизонтали и 11 вертикали.

б) Да, можно:

точка A: пересечение 1 горизонтали и 1 вертикали.

точка B: пересечение 3 горизонтали и 7 вертикали.

точка C: пересечение 3 горизонтали и 11 вертикали.

точка D: пересечение 5 горизонтали и 11 вертикали.

точка E: пересечение 6 горизонтали и 11 вертикали.

точка F: пересечение 6 горизонтали и 1 вертикали.

в) Нет, нельзя.

Заметим, что максимальное расстояние между двумя перекрестками равно 15 (например, между перекрестками в левом нижнем углу и правым верхним углу).

Если k=7, то всего всех расстояний будет 6+5+4+3+2+1 = 21, т.е. среди них встретятся все числа от 1 до 21. Но, как я уже показал, больше 15 расстояние не может быть. Следовательно k не может быть равно 7.

Ответ: а)да, б)да, в)нет.