

1. Найдите все такие значения a , для которых квадратные трехчлены $x^2 + 2x + a$ и $x^2 + ax + 2 = 0$ имеют по два корня, причем сумма квадратов корней первого трехчлена равна сумме квадратов корней второго трехчлена.

2. Каждый из островитян либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт (и те, и другие на острове есть). Каждый житель острова про каждого знает рыцарь он или лжец. Часть жителей острова заявила, что на острове проживает четное число рыцарей, а все оставшиеся жители заявили, что на острове проживает нечетное число лжецов. Может ли на острове быть ровно 2021 житель?

3. Для произвольных вещественных чисел a и b ($b \neq 0$) найдите наименьшее значение выражения $a^2 + b^2 + \frac{a}{b} + \frac{1}{b^2}$.

4. Точки B_1 и C_1 — середины сторон AC и AB треугольника ABC . На сторонах AB и AC как на диаметрах построены окружности ω_1 и ω_2 . Обозначим за D точку пересечения прямой B_1C_1 с окружностью ω_1 , лежащую по другую сторону от C относительно прямой AB . Обозначим за E точку пересечения прямой B_1C_1 с окружностью ω_2 , лежащую по другую сторону от B относительно прямой AC . Прямые BD и CE пересекаются в точке K . Докажите, что прямая BC проходит через точку пересечения высот треугольника KDE .

5. На центральной клетке доски 11×11 стоит фишка. Петя и Вася играют в следующую игру. Каждым своим ходом Петя передвигает фишку на одну клетку по вертикали или горизонтали. Каждый своим ходом Вася возводит стенку с одной из сторон любой из клеток. Двигать фишку через стенку Петя не может. Игроки ходят по очереди, начинает Петя. Петя выигрывает, если сможет фишкой уйти с доски. Может ли он обеспечить себе победу вне зависимости от действий соперника?

6. Докажите, что существует бесконечно много таких натуральных чисел n , что количество различных нечетных простых делителей числа $n(n + 3)$ кратно трем.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Сумма |
|----|----|---|---|----|---|-------|
| 20 | 20 | 0 | 0 | 20 | 0 | 60 |

ol2056219

Задача 1

у квадратного трехчлена есть два корня, если $D > 0$

$$x^2 + 2x + a = 0$$

$$x^2 + ax + 2 = 0$$

$$4 - 4a > 0$$

$$a^2 - 8 > 0$$

$$a < 1$$

$$|a| > 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow a < -2\sqrt{2}$$

по теореме Виета для квадратного трехчлена $x^2 + bx + c = 0$

$$x_1 + x_2 = -b$$

$$x_1 * x_2 = c$$

$$\text{поэтому } (x_1)^2 + (x_2)^2 = b^2 - 2c$$

значит, поскольку суммы квадратов корней первого и второго трехчленов равны

$$4 - 2a = a^2 - 4$$

$$a^2 + 2a - 8 = 0$$

$$a = 2 \text{ или } a = -4$$

$$\text{имеем } a < -2\sqrt{2} \text{ и } a = 2 \text{ или } a = -4 \Rightarrow a = -4$$

Ответ: -4

Задача 2

Предположим, что на острове нечетное число жителей. Тогда либо рыцарей четное число и лжецов нечетное, либо лжецов четное число и рыцарей нечетное.

В первом случае те, кто сказал «на острове проживает четное число рыцарей», и те, кто сказал «на острове проживает нечетное число лжецов», окажутся рыцарями, поскольку утверждения верны. Значит, на острове живут только рыцари, это противоречит условию задачи.

Во втором случае те, кто сказал «на острове проживает четное число рыцарей», и те, кто сказал «на острове проживает нечетное число лжецов», окажутся лжецами, поскольку утверждения неверны. Значит, на острове живут только лжецы, это противоречит условию задачи.

Таким образом, предположение неверно (возникают противоречия), значит, на острове может быть только четное число жителей. Поэтому там не может быть 2021 житель.

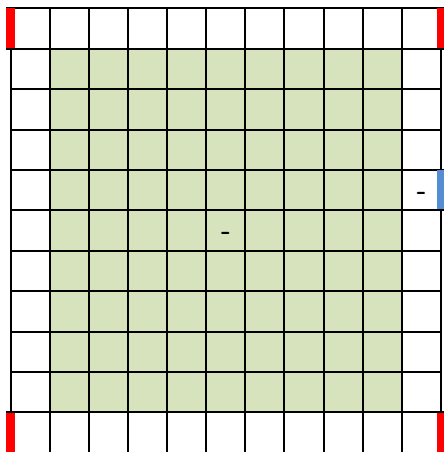
Ответ: нет

Задача 5

Покажем выигрышную стратегию для Васи.

За первые четыре хода Вася должен поставить красные перегородки (см. рисунок), тогда из каждой белой клетки можно будет выйти из таблицы одним единственным способом. Поскольку после первых четырех ходов фишка не покинет зеленое поле, на пятый Петин ход она не сможет покинуть таблицу. Далее, если Петя поставил своим ходом фишку на белую клетку (если она на зеленом поле, ставим перегородку в любое место), нужно поставить перегородку (если ее еще там нет), отгородив эту клетку от края (пример есть на рисунке), тогда из этой клетки нельзя будет выйти из таблицы (поскольку был только один путь, и его перекрыли). Таким образом, Петя будет вынужден всегда оставаться в таблице, значит, никак не сможет выиграть. Игра закончится не позднее, чем Вася поставит все возможные перегородки.

Ответ: нет



Задача 3

Ответ: 1,75

$$b^2 + 1/b^2 \geq 2$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + a/b + 1/b^2 \geq 2 + a^2 + a/b$$

рассмотрим функцию $a^2 + b^2 + a/b + 1/b^2$ относительно a
график – парабола, ветви вверх

$$D = 1/b^2 - 4b^2 - 4/b^2 < 0$$

поэтому значения всегда больше нуля

$$b^2 + 1/b^2 = 2 \text{ достигается при } b = 1$$

$$a^2 + a \text{ минимально равно } -0,25 \text{ (при } a = -0,5)$$

$$\text{поэтому } \min a^2 + b^2 + a/b + 1/b^2 = 1,75$$

Задача 4

