Санкт-Петербургский государственный университет
Олимпиада школьников по математике 2020–2021
Заключительный этап
8–9 классы

1. Найдите все такие значения a, для которых квадратные трехчлены x^2+2x+a и $x^2+ax+2=0$ имеют по два корня, причем сумма квадратов корней первого трехчлена равна сумме квадратов корней второго трехчлена.

2. Каждый из островитян либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт (и те, и другие на острове есть). Каждый житель острова про каждого знает рыцарь он или лжец. Часть жителей острова заявила, что на острове проживает четное число рыцарей, а все оставшиеся жители заявили, что на острове проживает нечетное число лжецов. Может ли на острове быть ровно 2021 житель?

3. Для произвольных вещественных чисел a и b $(b \neq 0)$ найдите наименьшее значение выражения $a^2+b^2+\dfrac{a}{b}+\dfrac{1}{b^2}$.

4. Точки B_1 и C_1 — середины сторон AC и AB треугольника ABC. На сторонах AB и AC как на диаметрах построены окружности ω_1 и ω_2. Обозначим за D точку пересечения прямой B_1C_1 с окружностью ω_1, лежащую по другую сторону от C относительно прямой AB. Обозначим за E точку пересечения прямой B_1C_1 с окружностью ω_2, лежащую по другую сторону от B относительно прямой AC. Прямые BD и CE пересекаются в точке K. Докажите, что прямая BC проходит через точку пересечения высот треугольника KDE.

5. На центральной клетке доски 11×11 стоит фишка. Петя и Вася играют в следующую игру. Каждым своим ходом Петя передвигает фишку на одну клетку по вертикали или горизонтали. Каждый своим ходом Вася возводит стенку с одной из сторон любой из клеток. Двигать фишку через стенку Петя не может. Игроки ходят по очереди, начинает Петя. Петя выигрывает, если сможет фишкой уйти с доски. Может ли он обеспечить себе победу вне зависимости от действий соперника?

6. Докажите, что существует бесконечно много таких натуральных чисел n, что количество различных нечетных простых делителей числа $n(n+3)$ кратно трем.

1	2	3	4	5	6	Сумма
20	15	20	0	0	0	55

№1. Пусть корни первого уравнения это x_1, x_2, а корни второго уравнения это x_3, x_4.

Тогда по теореме Виета

$x_1+x_2=-2$;

$x_1*x_2=a$;

$x_3+x_4=-a$;

$x_3*x_4=2$.

Значит ${x_1}^2+{x_2}^2=(x_1+x_2)^2-2*x_1x_2=(-2)^2-2a= {x_3}^2+{x_4}^2=(x_3+x_4)^2-2*x_3x_4=a^2-4$

Т.е. $a^2-4=4-2a$. Откуда $(a+4)(a-2)=0$. Значит *a=-4 или a=2.*

Проверим.

1. *a=-4.* Тогда первое уравнения это $x^2+2x-4=0$. Корни есть, т.к. D = 2*2+4*4*1>0.
   Второе уравнение это $x^2-4x+2=0$. Корни есть, т.к. D=4*4-4*2>0.
2. *a=2.* Тогда первое уравнения это $x^2+2x+2=0$. Корней нет, т.к. D=2*2-4*2*1=-4<0.

Значит a=-4 подходит, a=2 не подходит.

Ответ: -4.

№2. Пусть было Р рыцарей и Л лжецов. Тогда первая часть жителей острова сказала, что Р – чётно, а вторая, что Л – нечётно.

Пусть всего было 2021 жителей. Тогда Р+Л = 2021. Т.к. 2021 – нечётное, то или Р-чет, Л-неч, или Р-неч, Л-чет. Заметим, что тогда или оба утверждения верны, или оба неверны.

1. Пусть оба утверждения верны. Тогда в первой группе не было лжецов, и в второй группе не было лжецов. Значит лжецов не было. Противоречие.
2. Пусть оба утверждения неверны. Тогда рыцарей не было ни в первой, ни во второй группе. Противоречие.

Значит не могло быть 2021 жителей.

Ответ: нет.

№3. Рассмотрим данное выражение, как квадратный трёхчлен относительно переменной a.

Тогда минимальное значение выражения достигается при $a = -\frac{1}{2b}$. Значит минимальное значение выражения равно $\frac{1}{4b^2} - \frac{1}{2b^2} + \frac{1}{b^2} + \ b^2 = \ \frac{3}{4b^2} + b^2$

Докажем, что $\frac{3}{4b^2} + b^2 \geq \sqrt{3}$. Это равносильно $4b^4 - 4\sqrt{3}b^2 + 3 \geq 0$.

Сделаем замену b на x, и рассмотрим это выражение, как квадратный трёхчлен относительно x при x ≥ 0.

Тогда наименьшее значение выражения достигается при $x = -\frac{-4\sqrt{3}}{2*4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Это значение равно $4 * \frac{3}{4} - 4 * \sqrt{3} * \frac{\sqrt{3}}{2} + 3 = 3 - 6 + 3 = 0$.

Значит $\frac{3}{4b^2} + b^2 \geq \sqrt{3}$ верно.

Значит $a^2 + b^2 + \frac{a}{b} + \frac{1}{b^2} \geq \sqrt{3}$. Это значение достигается при $b = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}$; $a = -\frac{1}{2b}$.

Ответ: $\sqrt{3}$.