Санкт-Петербургский государственный университет
Олимпиада школьников по математике 2020–2021

Заключительный этап

8–9 классы

1. Найдите все такие значения a, для которых квадратные трехчлены x^2+2x+a и $x^2 + ax + 2 = 0$ имеют по два корня, причем сумма квадратов корней первого трехчлена равна сумме квадратов корней второго трехчлена.

2. Каждый из островитян либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт (и те, и другие на острове есть). Каждый житель острова про каждого знает рыцарь он или лжец. Часть жителей острова заявила, что на острове проживает четное число рыцарей, а все оставшиеся жители заявили, что на острове проживает нечетное число лжецов. Может ли на острове быть ровно 2021 житель?

3. Для произвольных вещественных чисел a и b $(b \neq 0)$ найдите наименьшее значение выражения $a^2 + b^2 + \dfrac{a}{b} + \dfrac{1}{b^2}$.

4. Точки B_1 и C_1 — середины сторон AC и AB треугольника ABC. На сторонах AB и AC как на диаметрах построены окружности ω_1 и ω_2. Обозначим за D точку пересечения прямой B_1C_1 с окружностью ω_1, лежащую по другую сторону от C относительно прямой AB. Обозначим за E точку пересечения прямой B_1C_1 с окружностью ω_2, лежащую по другую сторону от B относительно прямой AC. Прямые BD и CE пересекаются в точке K. Докажите, что прямая BC проходит через точку пересечения высот треугольника KDE.

5. На центральной клетке доски 11×11 стоит фишка. Петя и Вася играют в следующую игру. Каждым своим ходом Петя передвигает фишку на одну клетку по вертикали или горизонтали. Каждый своим ходом Вася возводит стенку с одной из сторон любой из клеток. Двигать фишку через стенку Петя не может. Игроки ходят по очереди, начинает Петя. Петя выигрывает, если сможет фишкой уйти с доски. Может ли он обеспечить себе победу вне зависимости от действий соперника?

6. Докажите, что существует бесконечно много таких натуральных чисел n, что количество различных нечетных простых делителей числа $n(n+3)$ кратно трем.

1	2	3	4	5	6	Сумма
20	20	20	20	10	0	90

Задача №1

$x^2 + 2x + a = 0$ (1)

$x^2 + ax + 2 = 0$ (2)

Пусть корни первого уравнения - это p, q, а корни второго – m, n. Тогда по теореме Виета для обоих уравнений получаем:

$p + q = -2$ $m + n = -a$

$pq = a$ $mn = 2$

Найдем сумму квадратов корней первого уравнения:

$(p + q)^2 = p^2 + 2pq + q^2 = (-2)^2 = 4$, $2pq = 2a$, значит $p^2 + q^2 = 4 - 2a$

Аналогично найдем сумму квадратов корней второго уравнения:

$(m + n)^2 = m^2 + 2mn + n^2 = (-a)^2 = a^2$, $2mn = 4$, значит $m^2 + q^2 = a^2 - 4$

По условию суммы квадратов корней этих уравнений равны. Значит:

$4 - 2a = a^2 - 4$

$a^2 + 2a - 8 = 0$

$D = 2^2 - 4 * (-8) * 1 = 4 + 32 = 36$

$a_1 = \frac{-2+\sqrt{36}}{2} = \frac{-2+6}{2} = 2$

$a_2 = \frac{-2-\sqrt{36}}{2} = \frac{-2-6}{2} = -4$

Получается. Что все возможные значения a, удовлетворяющие условиям это 2 и -4.

Ответ: 2 и -4.

Задача №2

Тип людей – рыцарь или лжец.

Давайте поймем, что люди, сказавшие одно и то же утверждение являются людьми одного типа. Пусть есть два человека A и B, сказавшие одно и то же утверждение. Если это утверждение правда, то и A, и B сказали правду, а значит они оба рыцари, т. е. одного типа. Если утверждение ложь, то они оба лжецы, одного типа. А утверждение либо правда, либо ложь.

Так как есть люди обоих типов, то одно утверждение сказали рыцари, а другое лжецы. Тогда возможно два случая:

1) 1-е утверждение сказали рыцари, а 2-е лжецы. Тогда 1-е утверждение – правда, значит рыцарей четное количество, а 2-е – неправда, а значит лжецов тоже четное количество. Тогда всего людей на острове четное + четное= четное.
2) 1-е утверждение сказали лжецы, а 2-е рыцари. Тогда 1-е утверждение – неправда, значит рыцарей нечетное количество, а 2-е – правда, а значит лжецов тоже нечетное количество. Тогда всего людей на острове нечетное + нечетное= четное.

В обоих случаях получили, что на острове проживает четное количество людей, а значит на острове проживает четное количество людей. 2021 – нечетное, а значит на острове не могло проживать 2021 жителей.

Ответ: не могло.

Задача 4.

B1C1 параллельна BC так как B1C1 - средняя линия. Точка D лежит на окружности ω1, а AB – диаметр этой окружности, значит уголADB = 90 гр., т.е. AD перпендекулярно DK. Аналогично уголAEC =90гр., т.е. AE перпендекулярно EK. Высота из точки D в треугольнике KDE перпендекулярна EK, а AE также перепендекулярна EK, значит высота из D в треугольнике KDE параллельна AE. Высота из точки E в треугольнике KDE перпендекулярна DK, а AD также перепендекулярна DK, значит AD параллельно высоте из точки E в треугольнике KDE. Пусть точка пересечения высот – H. Так как высота из D в треугольнике KDE параллельна AE, и AD параллельно высоте из точки E в треугольнике KDE, ADHE – параллелограмм. Значит AH делится точкой пересечения диагоналей пополам. Предположим, что H не лежит на BC, тогда пусть AH пересекает BC в точке Q. Пусть точка пересечения диагоналей в этом параллелограмме - M. Тогда AM=MH. C1M параллельно BH и проходит через середину стороны AB – C1, а значит это средняя линия и M – середина стороны AQ, но M – середина AH. A, Q, H лежат на одной прямой и Q и H лежат по одну сторону от A, а Q и H не совпадают, значит такое невозможно. Противоречие, значит H лежит на BC, то есть прямая BC проходит через точку пересечения высот треугольника KDE. Что и требовалось доказать.

Задача №5

Стратегия для Васи:

Чтобы выйти из доски, Пете нужно поставить фишку на одну из 40 граничных клеток доски. За первые четыре хода Петя не сможет передвинуть фишку в эти граничные клетки, фишка будет внутри внутреннего квадрата 10x10. В первые четыре хода Вася поставит следующие стенки: слева от клетки 1, сверху клетки 2, снизу клетки 3 и справа от клетки 4. 1, 2, 3, 4 – угловые клетки. Теперь заметим, что из каждой граничной клетки можно выйти из доски только через одну ее сторону: для клеток граничных, но не боковых так всегда было, только одна их сторона имела выход из доски, а у угловых было по 2 стороны, но за первые наши четыре хода мы закрыли по одной стороне у каждой клетке, поэтому у них теперь тоже лишь одна сторона ведет к выходу из доски.

Так как Пете нужно хотя бы 5 ходов, чтобы добраться до граничной клетки, то пока мы ставили наши первые 4 стенки, выбраться наружу он не мог. Пусть каким-то ходом он попал в граничную клетку. Теперь после его хода мы будем закрывать стенкой единственный выход из доски, ведущий из это клетки.

Таким образом Петя не сможет выставить фишку из доски, так как чтобы сделать это, ему нужно добраться до граничной клетки, а к тому моменту, как он это сделает у каждой граничной клетки будет только один выход из доски, и после того, как он попал в граничную клетку, мы будем закрывать проход оттуда, и значит следующим ходом Петя не сможет вывести фишку за пределы доски.

То есть Петя не может обеспечить себе победу вне зависимости от действий соперника.

1										2
3										4

Ответ: не может.

Задача №3

Для начала докажем, что:

$$a^2+b^2+\frac{a}{b}+\frac{1}{b^2}\geq\frac{1}{4b^2}+b^2-\frac{1}{2b^2}+\frac{1}{b^2}$$

Вычтем общую часть:

$$a^2+\frac{a}{b}\geq\frac{1}{4b^2}-\frac{1}{2b^2}$$

Домножим на $4b^2$:

$$4a^2b^2+4ab\geq 1-2=-1$$

Перенесем все в левую часть:

$$4a^2b^2+4ab+1=(2ab+1)^2\geq 0$$

Это – верно, так как квадрат любого вещественного числа больше либо равен 0. Значит

$a^2+b^2+\frac{a}{b}+\frac{1}{b^2}\geq\frac{1}{4b^2}+b^2-\frac{1}{2b^2}+\frac{1}{b^2}$ тоже верно.

У полученного выражения дроби приведем к общему знаменателю и сложим:

$$\frac{1}{4b^2}+b^2-\frac{1}{2b^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{3}{4}*\frac{1}{b^2}+b^2$$

По неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим получаем:

$$\frac{3}{4}*\frac{1}{b^2}+b^2\geq 2*\sqrt{\frac{3}{4}*\frac{1}{b^2}*b^2}=2*\sqrt{\frac{3}{4}}=2*\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$$

То есть значение, меньше чем $\sqrt{3}$ выражение $a^2+b^2+\frac{a}{b}+\frac{1}{b^2}$ принимать не может по свойству транзитивности неравенств.

Покажем, что значение $\sqrt{3}$ выражение $a^2+b^2+\frac{a}{b}+\frac{1}{b^2}$ принимать может. При $b=\sqrt[4]{\frac{3}{4}}$ и $a=-\frac{1}{2b}$

Нужное значение достигается:

$$a^2+b^2+\frac{a}{b}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{4b^2}+b^2-\frac{1}{2b^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{3}{4}*\frac{1}{b^2}+b^2$$

$b^2=\frac{\sqrt{3}}{2}$ тогда: $\frac{3}{4}*\frac{1}{b^2}+b^2=\frac{3}{4}*\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

Ответ: $\sqrt{3}$.