Санкт-Петербургский государственный университет
Олимпиада школьников по математике 2020–2021
Заключительный этап
8–9 классы

1. Докажите, что для любых вещественных чисел a и b уравнение

$$(a^6 - b^6)x^2 + 2(a^5 - b^5)x + (a^4 - b^4) = 0$$

имеет решение.

2. На острове живут лжецы и рыцари. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Каждый житель острова про каждого из остальных знает рыцарь он или лжец. Как-то раз встретились 28 островитян. Двое из них сказали: «Ровно двое из нас лжецы», затем четверо из остальных сказали: «Ровно четверо из нас лжецы», потом восемь из оставшихся сказали: «Ровно восемь из нас лжецы», наконец, все оставшиеся 14 сказали: «Ровно 14 из нас лжецы». Сколько лжецов было среди встретившихся? Приведите все возможные варианты и докажите, что других нет.

3. Сумма неотрицательных чисел a, b и c равна 3. Найдите наибольшее значение выражения $ab + bc + 2ca$.

4. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках K и L. Прямая ℓ пересекает окружность ω_1 в точках A и C, а окружность ω_2 — в точках B и D, причем точки идут на прямой ℓ в алфавитном порядке. Обозначим через P и Q соответственно проекции точек B и C на прямую KL. Докажите, что прямые AP и DQ параллельны.

5. Дана клетчатая доска 2021×2021. Петя и Вася играют в следующую игру. Они по очереди ставят фишки в свободные клетки доски. Выигрывает тот игрок, после хода которого в каждом прямоугольнике 3×5 и 5×3 будет стоять фишка. Начинает Петя. Кто из игроков может обеспечить себе победу вне зависимости от действий соперника?

6. Найдите все такие натуральные числа n, что число $2^n + n^2 + 25$ является кубом простого числа.

1	2	3	4	5	6	Сумма
15	5	10	20	20	5	75

№1

Рассмотрим данное уравнение как квадратное с коэффициентами A = $a^6 - b^6$, B = $2(a^5 - b^5)$, C = $a^4 - b^4$, x – переменная. Если a = b, то 0 = 0 => $x \in R$. Иначе найдём дискриминант квадратного уравнения:

$$D = \left(2(a^5 - b^5)\right)^2 - 4(a^6 - b^6)(a^4 - b^4)$$

$$D = 4(a^{10} - 2a^5b^5 + b^{10}) - 4(a^{10} - a^6b^4 - a^4b^6 + b^{10})$$

$$D = 4a^6b^4 + 4a^4b^6 - 8a^5b^5$$

$$D = 4a^4b^4(a-b)^2 \geq 0$$

$$> 0 \geq 0 \geq 0$$

А так как дискриминант больше либо равен 0, то есть два действительных корня: $x_{1,2} = \frac{-2(a^5-b^5)\pm\sqrt{D}}{2(a^6-b^6)}$.

№2

Так как на острове живут рыцари И лжецы, то на нём есть хотя бы 1 рыцарь, значит он сказал одну из произнесённых фраз, а значит хотя бы одна из них верна, так как рыцари говорят только правду, а значит лжецов или 2, или 4, или 8, или 14. Пусть на острове x рыцарей. Тогда если рыцари есть хотя бы в двух группах одновременно, значит произнесено хотя бы две фразы с разным количеством лжецов, и обе верны. Но так как лжецов конкретное, единственное число, то такого быть не может, значит все рыцари в одной группе. Тогда так как количество человек в группе совпадает с количеством лжецов, произнесённых в фразах из этой группы встретившихся. Пусть все рыцари в группе, которая сказала, что лжецов – y. Тогда лжецов 28 – x, так как их y, то 28 = x + y, причём $x \leq y$, то рассмотрим 4 случая:

1) y = 14, тогда x = 14, то есть рыцарей – 14, лжецов – 14. Условие выполняется, значит лжецов может быть 14. Пример лжецы в группах по 2, 4, 8 человек, рыцари – в группе из 14 человек.
2) y = 8, тогда x = 20, тогда не выполняется ограничение на y, такого быть не может.
3) y = 4, тогда x = 24, тогда не выполняется ограничение на y, такого быть не может.
4) y = 2, тогда x = 26, тогда не выполняется ограничение на y, такого быть не может.

Ответ: 14 лжецов.

№3

$$a + b + c = 3 \Rightarrow a + b = 3 - c; b + c = 3 - a$$
$$ab + bc + 2ca = a(b + c) + c(a + b)$$

Подставим во преобразованное второе выражение значения $a + b$ и $b + c$:

$ab + bc + 2ca = \ a(3 - \ a) + c(3 -)c = -a^2 + 3a + 3c - c^2$

Рассмотрим функцию y = $-a^2 + 3a + 3c - c^2$, где a – переменная, c – параметр.

y = $-a^2 + 3a + 3c - c^2$, функция квадратичная, график парабола, так как A = -1 < 0, то ветви направлены вниз, значит наибольшее значение в вершине.

$$a_0 = \frac{-3}{-2} = 1{,}5; y_0 = y(a_0) = -2{,}15 + 4{,}5 + 3c - c^2 = -c^2 + 3c + 4{,}5$$

Рассмотрим функцию f(c) $= -c^2 + 3c + 4{,}5$:

f(c) $= -c^2 + 3c + 4{,}5$, функция квадратичная, график парабола, так как A = -1 < 0, то ветви направлены вниз, значит наибольшее значение в вершине.

$$C_0 = \frac{-3}{-2}; f(C)_0 = f(l_0) = -2{,}25 + 4{,}5 + 2{,}25 = 4{,}5$$

Значит $y_0 = 4{,}5$, а так как y_0 — максимальное значение $-a^2 + 3a + 3c - c^2$, то есть максимальное значение $ab + bc + 2ca$, то $ab + bc + 2ca \leq 4{,}5$.
При a = 1,5; b = 0; c = 1,5, $a + b + c = 3$ и $ab + bc + 2ca = 4{,}5$.
Ответ: 4,5.

№5

Приведём выигрышную стратегию игры за Петю. Первым ходом Петя ставит первую фишку в центр доски (координаты (1010;1010)). Затем на любой ход Васи Петя отвечает симметричным ходом относительно центра доски. Докажем, что у Пети всегда найдётся подобный ход. Заметим, что после хода Пети всегда остаётся симметричная доска относительно центра, так как в первом ходе всё поле, кроме центра, пусто, а значит симметрично относительно его, а после какого-то хода поставленные игроками фишки симметричны, по условию стратегии Пети, то есть поле симметрично после каждого Петиного хода. Тогда так как Вася ставит в пустую клетку, то по симметрии найдётся ещё одна такая же пустая клетка (так как до Васиного хода поле симметрично относительно центра), в которую уже и сходит Петя. Докажем, что Вася не сможет победить, поставив свою фишку. Предположим, что он поставил свою фишку и победил. Однако до его хода существовали две пустые клетки: одна, в которую он сходил, и другая, в которую он не сходил. А так как на этот момент принятия Васей решения, поле симметрично, значит эти две клетки обладают одинаковыми свойствами, то есть через них проходит одинаковое количество незакрытых прямоугольников. Тогда так как Вася победил именно в этот ход, то значит он закрыл хотя бы один до этого незакрытый прямоугольник. Но тогда и у второй клетки тоже есть хотя бы 1 незакрытый прямоугольник, тогда Вася не победил, и наше предположение неверно, значит Вася не сможет победить на своём ходу. А так как число клеток конечное, и каждый раз их количество уменьшается на 2, то когда-нибудь за конечное время Петя победит.

№6

Так как $2^n + n^2 + 25 \geq 28$, так как n натуральное, то есть хотя бы 1, то $2^n + n^2 + 25$ хотя бы 2 + 1 + 25 = 28. Тогда p > 3, так как 3 в кубе меньше 28, а 4 – больше. Тогда так как p – простое, и p > 3, то p – нечётное. Тогда $2^n + n^2 + 25 \equiv 0 + n + 1 (mod\, 2) \equiv n + 1 (mod\, 2)$, а так как p – нечётное, то n – всегда чётное. Тогда наименьшее p, удовлетворяющее ограничению – 5. Тогда $2^n + n^2 + 25 = 125$, а это верно при n = 6 (64 + 36 + 25 = 125). Тогда пусть следующие p и n, при которых выполнится равенство больше предыдущих значений на y и x соответственно. Тогда новая левая часть - $2^{n+x} + (n + x)^2 + 25$, а тогда разница между прошлой левой частью и новой равна $2^n(2^x - 1) + 2xn + x^2$, и если подставить значение n, то $64(2^x - 1) + 12x + x^2$. Сравним это выражение по модулю 3:
X сравнимо с 0: $64(2^x - 1) + 12x + x^2$ сравнимо с 64 или 0 (так как в степенях двойки при сравнении по модулю 3 идёт цикл 121212…, а , что сравнимо с 1 или 0.
X сравнимо с 1: $64(2^x - 1) + 12x + x^2$ сравнимо с 1
X сравнимо с 2: $64(2^x - 1) + 12x + x^2$ сравнимо с 1
Теперь рассмотрим разность правых частей. Она равна $6P^7y + 12Py^2 + 8y^2$, а это сравнимо с $8y^2$ по модулю 3,а так как квадрат по модулю 3 даёт два остатка: 0 и 1, то:
Когда 0, тогда остатки частей должны совпадать, но тогда x – нечётный, а значит и степень будет нечётной. Противоречие.
Когда 1, тогда остаток два, а левая часть такого остатка не даёт.
То есть n = 6 – единственный ответ.
Ответ: 6.