Санкт-Петербургский государственный университет
Олимпиада школьников по математике 2020–2021
Заключительный этап
8–9 классы

1. Докажите, что для любых вещественных чисел a и b уравнение

$$(a^6 - b^6)x^2 + 2(a^5 - b^5)x + (a^4 - b^4) = 0$$

имеет решение.

2. На острове живут лжецы и рыцари. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Каждый житель острова про каждого из остальных знает рыцарь он или лжец. Как-то раз встретились 28 островитян. Двое из них сказали: «Ровно двое из нас лжецы», затем четверо из остальных сказали: «Ровно четверо из нас лжецы», потом восемь из оставшихся сказали: «Ровно восемь из нас лжецы», наконец, все оставшиеся 14 сказали: «Ровно 14 из нас лжецы». Сколько лжецов было среди встретившихся? Приведите все возможные варианты и докажите, что других нет.

3. Сумма неотрицательных чисел a, b и c равна 3. Найдите наибольшее значение выражения $ab + bc + 2ca$.

4. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках K и L. Прямая ℓ пересекает окружность ω_1 в точках A и C, а окружность ω_2 — в точках B и D, причем точки идут на прямой ℓ в алфавитном порядке. Обозначим через P и Q соответственно проекции точек B и C на прямую KL. Докажите, что прямые AP и DQ параллельны.

5. Дана клетчатая доска 2021×2021. Петя и Вася играют в следующую игру. Они по очереди ставят фишки в свободные клетки доски. Выигрывает тот игрок, после хода которого в каждом прямоугольнике 3×5 и 5×3 будет стоять фишка. Начинает Петя. Кто из игроков может обеспечить себе победу вне зависимости от действий соперника?

6. Найдите все такие натуральные числа n, что число $2^n + n^2 + 25$ является кубом простого числа.

1	2	3	4	5	6	Сумма
20	20	20	10	15	10	95

Задача 1

Чтобы уравнение имело решения, надо чтобы дискриминант был больше или равен 0

То есть $4*(a^5 - b^5)^2 - (a^6 - b^6)*(a^4 - b^4)*4$ больше или равно 0

Сократим на 4 и раскроем скобки $a^{10} + b^{10} - 2(ab)^5 - a^{10} - b^{10} + a^4*b^6 + a^6*b^4$. То есть $a^4*b^6 + a^6*b^4 - 2a^5*b^5$ должно быть больше или равно 0. Если a или b равны 0, то все выражение тоже 0, то есть при $a = 0$ или $b = 0$ решение всегда есть. Рассмотрим где a и b не равны 0

Сократим на a^4*b^4 и получим, $a^2 + b^2 - 2ab$, то есть $(a-b)^2$, так как это квадрат, то он всегда больше или равен 0, то есть при a и b не равных 0 решение есть и при a и b равным 0 тоже есть, значит при всех действительных a и b уравнение имеет решение.

Задача 4

Пусть точка пересечения BC и KL это O

Углы BOK и COL равны как вертикальные, углы BPO и CQO тоже равны (оба по 90), то есть треугольники BPO и CQO подобны, то есть BO/OC = PO/OQ = BP/QC

Также так как это окружности, то из первой окружности следует, что AO*OC = KO*OL, а из второй BO*OD = KO*OL, то есть BO*OD = AO*OC, AO = AB + BO, DO = DC + CO, то есть BO*(DO + CO) = (AB + BO)*OC, то есть AB*OC = BO*CD, то есть BO/OC = AB/CD = BP/CQ. Углы OCQ и OBP равны, так как треугольники BPO и CQO подобны, а значит углы ABP и DCQ тоже равны. Тогда треугольники ABP и DCQ подобны. Значит углы BAP и CDQ равны, тогда рассмотрим прямые AP и DQ и секущую AD, углы DAP и ADQ равны, то есть AP параллельна DQ.

Задача 2

Заметим, что если рыцарей 14, то они это все те, кто сказал, что лжецов ровно 14 (14 лжецов).

Если рыцарей больше 14, то тогда лжецов меньше 14, также хотя бы один из рыцарей попал в 4 группу (там, где их 14), а значит он сказал, что лжецов 14, но их меньше 14, противоречие

Если рыцарей меньше 14, то лжецов больше 14, тогда рыцаря в каждой из групп быть не может, так как иначе он скажет, что лжецов 14 или меньше (8, 4, 2), а их больше 14, то есть он соврет. Раз рыцарей ни в какой из групп нет, то их вообще нет, то есть рыцарей 0 (28 лжецов)

Других вариантов быть не может, то есть лжецов могло быть 14 или 28.

Задача 5

Приведем выигрышную стратегию для Пети

Петя первым ходом ставит в центральную клетку (1011:1011, считая от 1) фишку, затем дублирует ход Васи центральной симметрией (клетке 1:1 соответствует клетка 2021:2021). Заметим, что после хода Васи не может оказаться победная ситуация, так как центрально противоположно у Пети точь-в-точь такая же ситуация

Задача 3

Заметим, что если заменить местами a и c, то выражение не поменяется, пусть тогда a больше или равно c.

Так как $a + b + c = 3$, то $b = 3 – a – c$, то есть $ab + bc + 2ac = 2ac + (a + c) * (3 – a – c) = 3a + 3c – a^2 – ac – c^2 – ac$, добавим и вычтем a^2, получим $a^2 – a^2 – a^2 – c^2 + 3(a + c) = (a + c) * (3 + a – c) – 2*a^2$, то есть от b ничего не зависит, то есть $b = 0$, тогда $ab + bc = 0$. $2ac$ максимально, когда ac максимально, то есть $a = c = 1,5$. Тогда максимальное значение этого выражения это 4,5

Задача 6

$n^2 + 2^n + 25 = p^3$

Пример: $n = 6$, $p = 5$

Заметим, что кубом 2 ($p=2$) быть не может ($25>8$, а n натуральное)

Рассмотрим остатки при делении на 2

Так как p не 2, то оно дает остаток 1, 2^n дает остаток 0 ($n>0$), 25 дает остаток 1, n^2 может давать остаток или 1, или 0

Но если оно дает остаток 1, то слева остатки будут 1 + 0 + 1, то есть 0, а справа 1, чего быть не может, значит n^2 дает остаток 0, то есть n – четное.

Теперь рассмотрим остатки при делении на 4. У 25 остаток 1, у 2^n остаток 0, так как n – четное (Пусть $n = 2k$, тогда 2^n это 2^{2k}, то есть 4^k, что сравнимо с 0^k по модулю 4, что сравнимо с 0), так как n – четное и натуральное, то оно больше или равно 2, тогда 2^n делится на 4, то есть сравнимо с 0, тогда вся сумма сравнима с 1, то есть p^3 сравнимо с 1 по модулю 4, то есть и само p тоже сравнимо с 1 (оно не сравнимо с 2 и 0, так как не 2, то есть нечетное, и не сравнимо с 3, так как тогда p^3 дает остаток 3, а не 1).

Заметим, что при $n = 2$ выражение принимает значение 33, что не является кубом, значит $n>2$, то есть n больше или равно 4. Для $n = 4$, будет 57, что тоже не подходит, то есть n больше или равно 6. 6 подходит, тогда $p = 5$.