Санкт-Петербургский государственный университет
Олимпиада школьников по математике 2020–2021
Заключительный этап
8–9 классы

**1.** Найдите все такие значения $a$, для которых квадратные трехчлены $x^2+2x+a$ и $x^2+ax+2=0$ имеют по два корня, причем сумма квадратов корней первого трехчлена равна сумме квадратов корней второго трехчлена.

**2.** Каждый из островитян либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт (и те, и другие на острове есть). Каждый житель острова про каждого знает рыцарь он или лжец. Часть жителей острова заявила, что на острове проживает четное число рыцарей, а все оставшиеся жители заявили, что на острове проживает нечетное число лжецов. Может ли на острове быть ровно 2021 житель?

**3.** Для произвольных вещественных чисел $a$ и $b$ ($b \neq 0$) найдите наименьшее значение выражения $a^2+b^2+\dfrac{a}{b}+\dfrac{1}{b^2}$.

**4.** Точки $B_1$ и $C_1$ — середины сторон $AC$ и $AB$ треугольника $ABC$. На сторонах $AB$ и $AC$ как на диаметрах построены окружности $\omega_1$ и $\omega_2$. Обозначим за $D$ точку пересечения прямой $B_1C_1$ с окружностью $\omega_1$, лежащую по другую сторону от $C$ относительно прямой $AB$. Обозначим за $E$ точку пересечения прямой $B_1C_1$ с окружностью $\omega_2$, лежащую по другую сторону от $B$ относительно прямой $AC$. Прямые $BD$ и $CE$ пересекаются в точке $K$. Докажите, что прямая $BC$ проходит через точку пересечения высот треугольника $KDE$.

**5.** На центральной клетке доски $11 \times 11$ стоит фишка. Петя и Вася играют в следующую игру. Каждым своим ходом Петя передвигает фишку на одну клетку по вертикали или горизонтали. Каждый своим ходом Вася возводит стенку с одной из сторон любой из клеток. Двигать фишку через стенку Петя не может. Игроки ходят по очереди, начинает Петя. Петя выигрывает, если сможет фишкой уйти с доски. Может ли он обеспечить себе победу вне зависимости от действий соперника?

**6.** Докажите, что существует бесконечно много таких натуральных чисел $n$, что количество различных нечетных простых делителей числа $n(n+3)$ кратно трем.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Сумма |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 20 | 20 | 0 | 0 | 0 | 60 |

**Решение задач**

**Задача № 1**

Пусть $x_1$ и $x_2$ — корни многочлена $x^2+2x+a$, $x_3$ и $x_4$ – корни многочлена $x^2+ax+2$. Тогда по теореме Виета $x_1+x_2=-2;\ x_1x_2=a;\ x_3+x_4=-a;\ x_3x_4=2;$. Заметим, что $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=4-2a$ и $x_3^2+x_4^2=(x_3+x_4)^2-2x_3x_4=a^2-4$. По условию $x_1^2+x_2^2=x_3^2+x_4^2$, следовательно $4-2a=a^2-4$. Откуда, $a^2+2a-4=0$ и $a\in\{2;-4\}$. Уравнение $x^2+2x+a=0$ не имеет корней при $a=2$ (дискриминант равен $2^2-2\cdot 4=-4<0$ ). При $a=-4$ дискриминанты обоих многочленов положительны.
**Ответ:** $a=-4$

**Задача № 2**

Заметим, что если на острове проживает нечётное количество людей, то утверждения «на острове чётное число рыцарей» и « на острове нечётное число лжецов» одновременно являются истинными или ложными (сумма количеств рыцарей и лжецов на острове нечётно, следовательно, их количества имеют различную чётность). Таким образом, если на острове проживает 2021 человек, то все эти люди либо солгали, либо сказали правду, что противоречит условию (на острове есть хотя бы один рыцарь и хотя бы один лжец).
**Ответ: нет, такого быть не может.**

**Задача № 3**

Преобразуем данное выражение следующим образом:

$$a^2+b^2+\frac{a}{b}+\frac{1}{b^2}=a^2+\frac{a}{b}+\frac{1}{4b^2}-\frac{1}{4b^2}+b^2+\frac{1}{b^2}=\left(a+\frac{1}{2b}\right)^2+b^2+\frac{3}{4b^2}=$$
$$=\left(a+\frac{1}{2b}\right)^2+b^2-\sqrt{3}+\frac{3}{4b^2}-\sqrt{3}=\left(a+\frac{1}{2b}\right)^2+\left(b-\frac{\sqrt{3}}{2b}\right)^2+\sqrt{3}$$

Полученное выражение больше либо равно квадратному корню из 3, при это равенство достигается при $b=\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}};\ a=\frac{-1}{\sqrt[4]{12}}$.

**Ответ:** $\sqrt{3}$ **.**