Олимпиада школьников СПбГУ по математике.
Заключительный этап. 2020/2021 учебный год. 10 – 11 классы.

1. При каких натуральных n клетчатую доску $n \times n$ можно разрезать на квадраты 1×1 и 2×2 так, что квадратов разных размеров будет поровну?

2. Положительные числа a, b, c таковы, что $a^2b + b^2c + c^2a = 3$. Найдите минимальное значение выражения

$$A = a^7b + b^7c + c^7a + ab^3 + bc^3 + ca^3.$$

3. Дан неравнобедренный остроугольный треугольник ABC. В нем проведены высоты BB_1 и CC_1, пересекающиеся в точке H. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами H и C соответственно касаются прямой AB. Из точки A к ω_1 и ω_2 проведены касательные, отличные от AB. Обозначим точки их касания с этими окружностями через D и E соответственно. Найдите угол B_1DE.

4. Петя написал на доске подряд n последовательных двузначных чисел ($n \geq 2$), первое из которых не содержит цифру 4, а последнее — цифру 7. Вася подумал, что это десятичная запись натурального числа x, и разложил x на простые множители. Оказалось, что их всего два и они различаются на 4. Что написано на доске?

5. В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством 3^n, $3^{n-1} \cdot 5$, $3^{n-2} \cdot 5^2$, $3^{n-3} \cdot 5^3$, $\ldots$, $3 \cdot 5^{n-1}$, 5^n пиастров, где n — натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?

1	2	3	4	5	Сумма
20	20	10	20	0	70

Задача 1.

Ответ: при всех n>5 кратных 5.

Решение: Раз количество квадратов 2x2 и 1x1 одинаково, то площадь квадрата должна делиться на (2*2+1*1)=5. Тогда n%5==0. Заметим, что если длина стороны квадрата n, то в нём ровно (n^2)/5 квадратов 2x2 (так как раз квадратов 2x2 и 1x1 поровну, клеток n^2, площадь 1x1 = 1, площадь 2x2 = 4). С другой стороны, в данный квадрат может поместиться не больше [n/2]^2 квадратов 2x2, доказательство – отметим на всех пересечениях столбцов и строк с чётными номерами по клетке. Тогда каждый квадрат 2x2 занимает ровно 1 клетку, а таких клеток и есть [n/2]^2. Значит, [n/2]^2>=(n^2)/5. [n/2]>=(n-1)/2. Найдём, при каких n ((n-1)/2)^2>=(n^2)/5. (n^2-2n+1)*5>=4n^2, => n^2-10n+5>=0. D=10^2-20=80, n>=(10+sqrt(D))/2<19/2<10. Значит, при любых n%5==0 и n>10 мы сможем расположить внутри квадрата nxn нужное число квадратов 2x2, а тогда в оставшихся клетках можно расположить нужное число квадратов 1x1. Заметим также, что при n=5 в квадрате nxn можно расположить не больше 4 квадратов 2x2, а нужно 5^5/5=5. Значит, ответ – n>5 и n%5==0. Как строить пример для n>5 – поочередно заполняем пары строк квадратами 2x2 до отказа, затем переходим на следующую пару строк. Из нашего доказательства видно, что так мы сможем вместить нужное нам число квадратов (т.к. это число не превосходит [n/2]^2 – ровно то максимальное количество квадратов 2x2, которое мы сможем расположить, действуя указанным алгоритмом).

Задача 2.

Ответ: A=6.

Введём переменные: x1=a^(7/4)*b^(1/4), x2=b^(7/4)*c^(1/4), x3=c^(7/4)*a^(1/4), y1=a^(1/4)*b^(3/4), y2=b^(1/4)*c^(3/4), y3=c^(1/4)*a^(3/4). Тогда a^2*b=x1y1, b^2*c=x2y2, c^2*a=x3y3. Тогда x1y1+x2y2+x3y3=3, а A равно x1^4+y1^4+x2^4+y2^4+x3^4+y3^4.

(x1y1+x2y2+x3y3)^2 = 9 = (x1y1)^2+(x2y2)^2+(x3y3)^2+2(x1y1x2y2+x2y2x3y3+x3y3x1y1). Пусть n=x1y1, m=x2y2, p=x3y3, тогда 9=n^2+m^2+p^2+2(nm+mp+pn). Заметим, что раз x^2+y^2>=2xy для любых положительных x и y, => n^2+m^2+p^2>=nm+mp+pn, => 3(n^2+m^2+p^2)>=9, => n^2+m^2+p^2>=3. (заменили в нашем выражении 2(nm+mp+pn) на 2(n^2+m^2+p^2), тем самым его не уменьшив).
Вычтем из A выражение 2(n^2+m^2+p^2), получим

(x1^2-y1^2)^2+(x2^2-y2^2)^2+(x3^2-y3^2)^2, что >=0.
Перенесём обратно:

x1^4+x2^4+x3^4+y1^4+y2^4+y3^4>=2(n^2+m^2+p^2)>=6.

Значит, второе выражение всегда >=6. Пример, когда оно равно 6 – a=b=c=1: a^2*b+b^2*c+c^2+a=3, тогда A=1+1+…+1=6.

Задача 3.

Знак угла – “\”, направленного – “_”.
Пусть \ABC=b. Тогда \HAD=\HAC1=90-b, т. к. AC1 и AD касательные к окружности w1. \ADH=90*, т. к. AD – касательная, => раз \AB1H=\ADH=90*, то точки A, B1, D и H

лежат на одной окружности. Тогда
_(AB1,B1D)=_(AH,HD)=180-b, а в свою очередь
_(AB1,B1D)=_(B1C,B1D).
Заметим, что точка E симметрична точке C1 относительно прямой AC (т.к. AC1 и AE – касательные к окружности w2). В таком случае, _(EB1,B1C)=_(CB1,B1C1)=b.
_(EB1,B1D)=_(EB1,B1C)+_(B1C,B1D)=b+(180-b)=0(mod 180*). Значит, точки E, B1, D лежат на одной прямой, => \B1DE = 0*, 180*.
Ответ: \B1DE=0*, 180*.

Задача 4.
Ответ: 2021 (2021=43*47).

Решение: p(p+4)=x для некоторого простого p. Посмотрим на последнюю цифру p: она не 1, т. к. тогда (p+4)%5==0, но p!=1. Она не 5, т.к. если p=5, то 5*9=45<1011; она не 7, т. к. 1*7=7, => тогда последняя цифра числа x была бы равна 7, и поэтому же она не равна 9 (9*3=7(mod 10)). Значит, последняя цифра числа p – 3, при том 3*7=21<1011, => p>10. Тогда p=10t+3 для некоторого натурального t.
(10t+3)*(10t+7)=x, => 100t^2+100t+21=x. Значит, x оканчивается на 21. Тогда t(t+1) может быть равно 20, 1920, 181920, …, 1516…, 1314…, …, 1011…20. При t=4 t(t+1)=20, а при любых других t t(t+1) не равно ни одному числу из данного набора. Докажем это.
Заметим, что t при делении на 3 может давать только остаток 1, так как 10t+3 и 10t+7 – простые числа > 3, => раз 7 даёт остаток 1 при делении на 3, то t не может давать остаток 2 (по признаку делимости на 3), а так же t не может делится на 3, т. к. тогда 10t+3 делится на 3. Тогда t(t+1)=2(mod 3). В таком случае, заметим, что t(t+1) не

может быть равно 1920, 181920, 1617181920, 151617181920, 1314151617181920, 121314151617181920, 1011121314151617181920, так как все эти числа делятся на 3 по признаку делимости на 3. Остались только числа 17… и 11…
Своими ручищами я установил, что $4145^2=17181025<17181920$, при том разница $<1000<4145$, $\Rightarrow$ такого t, что $t(t+1)=17181920$, не существует (т.к. $4144*4145<17181920$, $4145*4146>17181920$). Осталось одно число – 11… Заметим, что по признаку делимости на 11 число 11…-1 делится на 11, $\Rightarrow$ наше число даёт остаток 1 при делении на 11. В таком случае, раз $1*2=2$, $2*3=6$, $3*4=1$, $4*5=9$, $5*6=8$, $6*7=9$, $7*8=1$, $8*9=6$, $9*10=2$ (по модулю 11), то $t=3, 7$ по модулю 11. Если t даёт остаток 3, то $10t+3 = -1 * 3 + 3 = 0 \pmod{11}$, $\Rightarrow$ $10t+3$ делится на 11, но $10t+3>12$. Если t даёт остаток 7, то $10t+7 = -1 * 7 + 7 = 0 \pmod{11}$, $\Rightarrow$ $10t+7$ делится на 11, но $10t+7>16$. Значит, не существует такого t, что $t(t+1)=11…$ (потому что $10t+3$ и $10t+7$ – простые).
Итого мы доказали, что не существует такого натурального t, что $t(t+1)$ равно какому-то числу из нашего набора, отличному от 20. Тогда $t(t+1)=20$, $\Rightarrow$ $t=4$, $\Rightarrow$ $(10t+3)(10t+7)=43*47=2021$, что требовалось доказать.