Санкт-Петербургский государственный университет
Олимпиада школьников по математике 2020–2021
Заключительный этап
8–9 классы

1. Докажите, что для любых вещественных чисел a и b уравнение

$$(a^2 - b^2)x^2 + 2(a^3 - b^3)x + (a^4 - b^4) = 0$$

имеет решение.

2. На острове живут лжецы и рыцари. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Каждый житель острова про каждого из остальных знает рыцарь он или лжец. Как-то раз встретились 19 островитян. Трое из них сказали: «Ровно трое из нас лжецы», затем шестеро из остальных сказали: «Ровно шестеро из нас лжецы», наконец, девять из оставшихся сказали: «Ровно девять из нас лжецы». Сколько лжецов было среди встретившихся? Приведите все возможные варианты и докажите, что других нет.

3. Вещественные числа a, b, c и d удовлетворяют условию $a^6+b^6+c^6+d^6 = 64$. Найдите наибольшее значение выражения $a^7 + b^7 + c^7 + d^7$.

4. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка K. К описанной окружности треугольника AKC проведена касательная ℓ_1, параллельная прямой AB и ближайшая к ней. Она коснулась окружности в точке L. Прямая AL пересекла описанную окружность треугольника ABK в точке M ($M \neq A$). К этой окружности в точке M проведена касательная ℓ_2. Докажите, что прямые BK, ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются в одной точке.

5. Дана клетчатая доска 2020×2021. Петя и Вася играют в следующую игру. Они по очереди ставят фишки в свободные клетки доски. Выигрывает тот игрок, после хода которого в каждом квадрате 4×4 будет стоять фишка. Начинает Петя. Кто из игроков может обеспечить себе победу вне зависимости от действий соперника?

6. Найдите все пары такие простых чисел p и q, что $p^2 + 5pq + 4q^2$ является квадратом натурального числа.

1	2	3	4	5	6	Сумма
15	20	20	0	0	10	65

Задача 1

$(a^2 - b^2)\,x^2$ + 2$(a^3 - b^3)$x + $(a^4 - b^4)$ = 0 заметем, что это квадратное уравнение, а это значит, что квадратное уравнение имеет корн, кода дискриминант больше или равен нуля.

D = $(2(a^3 - b^3))^2$ – 4$(a^2$ - $b^2)$($a^4 - b^4$) давайте сразу поделим это выражение на 4 и раскроем скобочки

Получим : a^6 - 2a^3b^3 + b^6 - a^6 + a^2b^4 + a^4b^2 - b^6 сокращаем и получаем

- 2a^3b^3 + a^2b^4 + a^4b^2 теперь давайте все скомпонуем в скобочки

(b – a)(a^2b^3 - a^3b^2) или (b – a) a^2b^2(b – a)

Что является квадратом $(ba(b - a))^2$ а мы знаем, что квадрат вещественных чисел всегда положительный

Что и требовалось доказать!

Задача 2

Обозначения: 1 группа – это те 3 островитян, которые говорили первыми

2 группа - это те 6 островитян, которые говорили вторыми

3 группа - это те 9 островитян, которые говорили третьими

Одиночка – тот островитянин, который вообще не говорил

1 очевидное наблюдения: в одной группе либо все лжецы, либо все рыцари

Ведь одно и тоже утверждение не может быть и ложью, и правдой

Давайте предположим, что 1 группа рыцарей. Значит, что лжецов всего 3. А это значит, что 2 и 3 группа - это лжецы. Но тогда лжецов как минимум 15, а это противоречие.

Значит 1 группа лжецов. Если вдруг 2 группа рыцари, то лжецов должно быть 6. Но тогда 3 группа лжецов, значит лжецов как минимум 12. И опять противоречие

Значит 1,2 группа лжецов:

1. Если 3 группа рыцари, то все сходится, если одиночка рыцарь. Значит ответ: 9 (в этом случае)
2. Если 3 группа лжецы, то здесь может быть 2 варианта:
    - Если одиночка лжец, то ответ – 19
    - Если одиночка рыцарь, то ответ – 18

Ответ: 9, 19, 18

Задача 3

a^6 + b^6 + c^6 + d^6 = 64

Ответ: 128

Пример: a = 2

b, c, d = 0

a^7 + b^7 + c^7 + d^7 = 2^7 + 0^7 + 0^7 + 0^7 = 128

Д – во:

Заметим, что одно из чисел может быть равен 2, если только все остальные равны 0.

Значит все числа у нас меньше 2 (т. к. пример с 2 мы разобрали выше)

Также давайте считать, что числа положительные, т.к в уравнении a^6 + b^6 + c^6 + d^6 = 64 знак числа не важен, а в уравнение a^7 + b^7 + c^7 + d^7 отрицательное число только понизит значение.

a^7 + b^7 + c^7 + d^7 = a * a^6 + b * b^6 + c * c^6 + d * d^6

Т.к у нас числа меньше 2, то a * a^6 + b * b^6 + c * c^6 + d * $d^6 \leq$ 2 * a^6 + 2 * b^6 + 2 * c^6 + 2 * d^6

2 * a^6 + 2 * b^6 + 2 * c^6 + 2 * d^6 = 2 (a^6 + b^6 + c^6 + d^6) = 128

Таким образом мы доказали, что если не одно из чисел не равно 2, то уравнение будет меньше ли равно 128

Ч.т.д

Задача 6

Давайте допустим, что $p^2 + 5\,pq + 4q^2 = x^2$

Также мы знаем, что $p^2 + 4\,pq + 4q^2 = (p + 2q)^2$

Значит $x^2 - \ (p + 2q)^2 = pq$

(x – p – 2q) (x + p + 2q) = pq

Давайте заметим, что скобочка x + p + 2q явно больше чем p и q. Значит она может быть только равна pq. (Т.к. p и q простые, то есть 2 варианта:

- Одна из скобочек = p, а вторая = q
- Либо она из скобочек равна pq, а вторая = 1)

Нам подходит только второй вариант. А это значит, что x = p + 2q +1

Составляем уравнение 2p + 4q + 1 = pq:

1. Если q > p, то 4q < pq > 6q (т.к. 2p < 2q)
   В таких рамках есть только одно подходящие число – это 5
   Значит p = 5, подставляем:
   10 + 4q + 1 = 5q
   Значит q = 11

2. Если p > q, то 2p < pq > 6p
   Значит q может быть равен либо 3, либо 5
   - q = 3, подставляем:
     2p + 12 + 1 = 3p
     P = 13
   - q = 5 :
     2p + 20 + 1 = 5p
     P = 7
3. Если p = q
   Тогда $p^2 + 5\,pq + 4q^2 = 10\,p^2$, а это не является квадратом.

Ответ: p = 5, q = 11

P = 13, q = 3

P = 7, q = 5

Задача 5

Давайте играть за Васю. Мы будем симметрить относительно средней линии в таблице. Так чтобы справа и слева от нее было по 1010 вертикалям.

Допустим если соперник отмечает точку в 1 строчке и в 1 столбце, то мы отмечаем точку в 1 строчке, но 2020 столбце. Очевидно, что практически всегда квадратик 4*4 находится только в одной половине таблице.

Давайте в начале закроем глаза на промежуточный квадраты (которые находятся сразу в 2 половинах), и докажем, что мы выиграем. Будем доказывать от противного: Допустим, что Петя выиграл. Давайте посмотрим на его последний, победный ход. Он закрасил клетку, которая до этого хода была в квадрате, в котором ни одна клетка закрашена не была. Но значит симметричная ей клетка (относительно средний линии) тоже до этого хода была в квадрате, в котором ни одна клетка не закрашена. А после хода, т.к. он победный, оказалась закрашена, а такого быть не может. Противоречие!

Теперь давайте все же разберёмся с промежуточными квадратами. Давайте посчитаем сколько их всего: 3 * 2018 (как я считала:

Начинаем с самой верхней строчки там таких квадрата 3, теперь спускаемся на одно строчку там этих квадратов опять 3, снова спускаешься на 1 строчку и т.д. Всего спуститься можно было 2017 и еще верхняя строчка. Значит всего 3 *2018)

- Если соперник закрашивает клетку в 3 столбце от средний линии, то мы семимтрим от нее и не переживаем ведь тогда наши квадраты не пересекаются.
- Если же Петя затронул центральные квадраты – их всего 2018, то мы занимаем новый еще не затронутый центральный квадрат. И т.к. всего их четное число то мы займем последний такой квадрат, а значит выиграем