

1. Найдите все такие значения a , для которых квадратные трехчлены $x^2 + 2x + a$ и $x^2 + ax + 2 = 0$ имеют по два корня, причем сумма квадратов корней первого трехчлена равна сумме квадратов корней второго трехчлена.

2. Каждый из островитян либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт (и те, и другие на острове есть). Каждый житель острова про каждого знает рыцарь он или лжец. Часть жителей острова заявила, что на острове проживает четное число рыцарей, а все оставшиеся жители заявили, что на острове проживает нечетное число лжецов. Может ли на острове быть ровно 2021 житель?

3. Для произвольных вещественных чисел a и b ($b \neq 0$) найдите наименьшее значение выражения $a^2 + b^2 + \frac{a}{b} + \frac{1}{b^2}$.

4. Точки B_1 и C_1 — середины сторон AC и AB треугольника ABC . На сторонах AB и AC как на диаметрах построены окружности ω_1 и ω_2 . Обозначим за D точку пересечения прямой B_1C_1 с окружностью ω_1 , лежащую по другую сторону от C относительно прямой AB . Обозначим за E точку пересечения прямой B_1C_1 с окружностью ω_2 , лежащую по другую сторону от B относительно прямой AC . Прямые BD и CE пересекаются в точке K . Докажите, что прямая BC проходит через точку пересечения высот треугольника KDE .

5. На центральной клетке доски 11×11 стоит фишка. Петя и Вася играют в следующую игру. Каждым своим ходом Петя передвигает фишку на одну клетку по вертикали или горизонтали. Каждый своим ходом Вася возводит стенку с одной из сторон любой из клеток. Двигать фишку через стенку Петя не может. Игроки ходят по очереди, начинает Петя. Петя выигрывает, если сможет фишкой уйти с доски. Может ли он обеспечить себе победу вне зависимости от действий соперника?

6. Докажите, что существует бесконечно много таких натуральных чисел n , что количество различных нечетных простых делителей числа $n(n + 3)$ кратно трем.

1	2	3	4	5	6	Сумма
15	20	20	0	20	0	75

№1

$$x^2+2x+a=0$$

$$D=4-4a$$

$$D>0$$

$$a<1$$

$$x^2+ax+2=0$$

$$D=a^2-8$$

$$D>0$$

$$a^2>8$$

$$a<1$$

значит

$$a<-\sqrt{8}$$

$$x_1^2+x_2^2=x_3^2+x_4^2$$

по теореме Виета

$$2^2-2a=x_1^2+x_2^2=x_3^2+x_4^2=a^2-2\cdot 2$$

$$4-2a=a^2-4$$

$$a^2+2a-8=0$$

$$a=2 \text{ или } a=-4$$

$$\text{при этом } a<-\sqrt{8}$$

$$\text{значит } a=4$$

$$\text{Ответ: } a=4$$

№2

Если первая часть жителей говорит правду, тогда все они рыцари и тогда вторая группа говорит правда, потому как 2021-нечет=нечет кол-во лжецов значит все рыцари, значит рыцарей нечетно противоречие.

Если первая группа говорит не правду, то рыцарей нечетно, тогда лжецов 2021-нечет=чет кол-во, тогда вторая группа тоже говорит не правду, тогда все лжецы, тогда рыцарей четно, противоречие.

Значит не может быть так на острове, где 2021 житель.

№3

Наименьшее значение у a^2+a/b при $a=-((1/b)/2)=-1/2b$ $1/4b^2-1/2b^2=1/4b^2$

$a^2+a/b+b^2\geq 1/4b^2+b^2=3/4b^2+b^2\geq 2\sqrt{3/4b^2\cdot b^2}=\sqrt{3}$ по теореме Коши ($3/4b^2$ и b^2 не отрицательны) при $b^2=3/4b^2$ $b=\sqrt{3/4}$ $a=1/2\sqrt{3/4}$

$$1/4\sqrt{3/4}-1/2\sqrt{3/4}+\sqrt{3/4}+1/\sqrt{3/4}=\sqrt{3}/6-\sqrt{3}/3+\sqrt{3}/2+2\sqrt{3}/3=\sqrt{3}$$

$$\text{Ответ: } \sqrt{3}$$

№5

Пусть Вася в первые свои 4 хода закроет стенами по одной стороне у каждой угловой клетки стороны-части границы доски, Петя после этих 4 ходов не успеет перейти за доску дальше если Петя стоит около края доски, то закрыть этот край стеной, иначе ставить стену в любое место, после 4 ходов Васи у любой клетки не более одной стороны, с которой можно выйти с доски, так что Вася всегда может не пустить Петю за доску.

Ответ: не может.