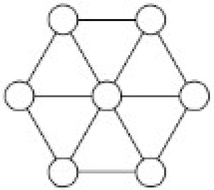
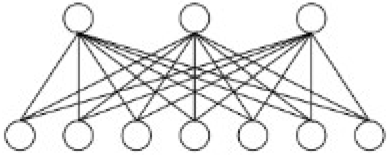
ВОПРОС 1: ЭССЕ

25 из 25 баллов

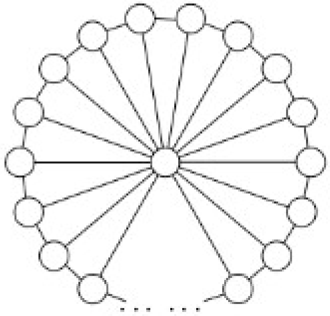
1. На картинке нарисовано n кружочков, некоторые кружочки соединены отрезками. Требуется расставить в кружочках числа от 1 до n (без повторений) так, чтобы выполнялось свойство: если кружочки соединены отрезками, то стоящие в них числа должны быть взаимно просты (то есть не иметь общих натуральных делителей, отличных от 1). Можно ли это сделать в каждом из следующих случаев? Если можно — опишите расстановку чисел, если нет — объясните, почему нельзя.



а) $n = 7$



б) $n = 10$



в) $n = 2022$: по кругу стоят 2021 кружочков, и еще один в центре

Данный ответ:

а) можно: в центр ставим в центр 1 а по кругу ставим числа в таком порядке: 2, 3, 4, 5, 6, 7

в) нельзя: в центр можно поставить только простое число больше 1011(оно будет нечетным), по кругу четные числа нельзя ставить рядом (мини мальный НОД - 2), значит между двумя четными должно стоять хотя бы одно нечетное число, но четных больше нечетных(1011 четных чисел и 1010 нечетных), значит так расставить числа нельзя

б) нельзя: в верхние три круга надо поставить числа , которые взаимно просты со всем остальными, но таких чисел только 2 (1 и 7), значит так расставить не получится

ВОПРОС 3: ЭССЕ

2 из 20 баллов

3. В треугольнике ABC точка D — середина стороны AB, E — середина стороны AC, F — середина биссектрисы AL, причем $DF = 1$, $EF = 2$. На плоскости изображены точки D, E, F так, что прямая DF горизонтальна, а остальные элементы чертежа стерты. Можно ли восстановить положение хотя бы одной из вершин треугольника, если известно, что вершина A находилась сверху от прямой DF?

Данный ответ: точки D, E, F будут лежат на одной прямой, т. к. DE - средняя линия, а F середина биссектрисы.

EF/DF=DA/EA(свойство биссектрисы), значит DA=2EA, такое может быть только в прямоугольном треугольнике с углами 30 и 60 градусов(его свойство)

Мы должны постросить углы FDA = 90 градусам и FEA =30 градусам. В точке пересечения лучей DA и EA будет вершина A.

ВОПРОС 2: ЭССЕ

15 из 30 баллов

2. Назовем *каскадом, порожденным числом* r, набор из 12 натуральных чисел: $r,\ 2r,\ \ldots,\ 12r$.

а) Может ли какая-то пара чисел (a, b) содержаться в шести различных каскадах? Если да — приведите пример таких чисел, если нет — объясните, почему не может.

б) Верно ли, что множество натуральных чисел можно раскрасить в 12 цветов так, что в каждом каскаде все элементы будут разного цвета?

Данный ответ:

а) числа a и b должны входить в 6 каскадов, следовательно это одна из 6 пар в каждом каскаде. Значит все множители должны входить в r . При мер: r1=a=2*3*4*5*6*7*8*9*10*11*12*2*3*4, b=1*2*3*4*5*6*7*8*9*10*11*12*2*3*4*2(a=r1,b=2*r1)

r2=r1/2(a=2*r2,b=4*r2)

r3=r1/3(a=3*r3,b=6*r3)

r4=r1/4(a=4*r4,b=8*r4)

r5=r1/5(a=5*r5,b=10*r5)

r6=r1/6(a=6*r6,b=12*r6)

б) числа, которые повторяются в каждом каскаде расскрасим в один цвет, те, что повторяются в некоторых каскадах в другие цвета, а оствшиес я числа в другие неиспользованные цвета. И т.к. одно число не повторяется в одном каскаде, то все числа в каскаде будут разного цвета.

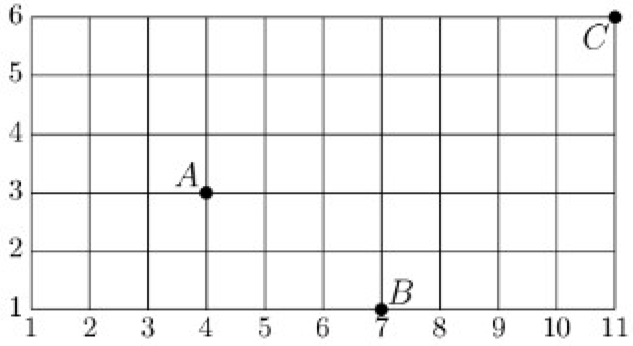
ВОПРОС 4: ЭССЕ

16 из 25 баллов

4. Город имеет форму клетчатого прямоугольника 5×10 клеток: линии — улицы, клетки — жилые кварталы. Расстояние между перекрестками измеряется как длина самого короткого пути по улицам города, проходящего от одного перекрестка до другого. Например, для перекрестков A, B и C на картинке $AB = 5$, $AC = 10$, $BC = 9$. Можно ли отметить в этом городе k перекрестков так, чтобы все расстояния между этими перекрестками оказались различными числами? Если да — укажите эти перекрестки (например, перекресток C находится на пересечении 11-й вертикальной и 6-й горизонтальной улицы), если нет — объясните, почему нельзя.

Решите задачу для

а) $k = 5$; б) $k = 6$; в) $k = 7$.



Данный ответ: В решении я буду использовать обозначение Название_Перекрестка(номер_вертикальной_улицы, номер_горизонтальной_улицы) ; Пример C(11,6)

а) можно: расставим точки: a(1,1);b(1,3);c(2,1);d(4,4);e(10,3). Тогда: ab=2 ; ac=1 ; ad=6 ; ae=11 ; bc=3 ; bd=4 ; be=9 ; cd=5 ; ce=10 ; de=7

в) нельзя, т.к. максимальное расстояние между двумя перекрестками 15, а нам надо получить (7*(7-1))/2=21 различное расстояние, что невозможно.

б) невозможно