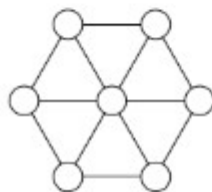
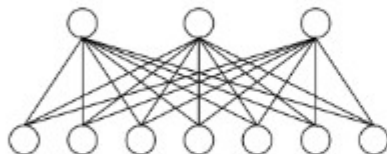
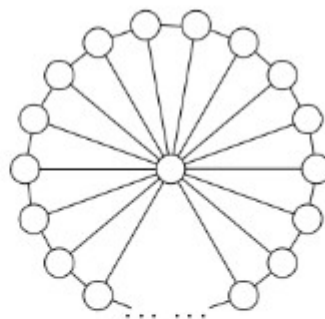


1. На картинке нарисовано n кружочков, некоторые кружочки соединены отрезками. Требуется расставить в кружочках числа от 1 до n (без повторений) так, чтобы выполнялось свойство: если кружочки соединены отрезками, то стоящие в них числа должны быть взаимно просты (то есть не иметь общих натуральных делителей, отличных от 1). Можно ли это сделать в каждом из следующих случаев? Если можно — опишите расстановку чисел, если нет — объясните, почему нельзя.

а) $n = 7$ б) $n = 10$ в) $n = 2022$: по кругу стоят 2021 кружочков, и еще один в центре



Данный
ответ:

а) В 1 ярус слева направо 2,3. Во 2 ярус слева направо 7,1,4. В 3 ярус 6,5.

б) Чтобы это работало, нужно чтобы нашлось 3 числа которые взаимно просты с оставшимися 7 числами. Четные в 1 ярусе стоять не могут, так как всего четных 5 тогда 2 четных в любом случае будут во 2 ярусе значит четные будут и в 1 ярусе и во 2 ярусе, а так нельзя, ведь четные не взаимно просты между собой, тогда все четные снизу. Кратных 3 всего 3, тогда можно их всех расположить на 1 ярусе но 6 четно тогда нельзя, кратных 5 всего 2, тогда их можно расположить на 1 ярусе но 10 четно.

Остаются 1 и 7. Их меньше чем три, поэтому нельзя.

в) Если поставим в центр четное число, то числа не будут взаимно просты так как в кругу еще остались четные числа. Если же поставим нечетное число то в кругу четных станет больше, а четным нельзя стоять в кругу рядом так как все четные делятся на 2, а раз четных больше то 2 четных обязательно стоят рядом, нельзя

ВОПРОС 3: ЭССЕ

0

из 20 баллов

3. В треугольнике ABC точка D — середина стороны AB , E — середина стороны AC , F — середина биссектрисы AL , причем $DF = 1$, $EF = 2$. На плоскости изображены точки D, E, F так, что прямая DF горизонтальна, а остальные элементы чертежа стерты. Можно ли восстановить положение хотя бы одной из вершин треугольника, если известно, что вершина A находилась сверху от прямой DF ?

Данный ответ: Заметим что

2. Назовем *каскадом*, порожденным числом r , набор из 12 натуральных чисел: $r, 2r, \dots, 12r$.

а) Может ли какая-то пара чисел (a, b) содержаться в шести различных каскадах? Если да — приведите пример таких чисел, если нет — объясните, почему не может.

б) Верно ли, что множество натуральных чисел можно раскрасить в 12 цветов так, что в каждом каскаде все элементы будут разного цвета?

Данный
ответ:

а) Допустим $a=r$ $a=2r$ $a=3r$ $a=4r$ $a=5r$ $a=6r$

$b=2r$ $b=4r$ $b=6r$ $b=8r$ $b=10r$ $b=12r$ для неопределенного r

Тогда a должна делиться на 1,2,3,4,5,6

b должна делиться на 2,4,6,8,10,12

Перемножая на что должны делиться a и b получаем 720 и 46080 соответственно но a по предположение в 2 раза меньше b тогда можем дом
ножить a на 32 и получить 23040.

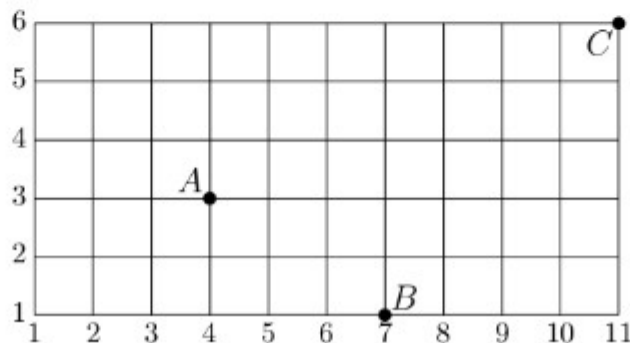
Тогда все работает.



4. Город имеет форму клетчатого прямоугольника 5×10 клеток: линии — улицы, клетки — жилые кварталы. Расстояние между перекрестками измеряется как длина самого короткого пути по улицам города, проходящего от одного перекрестка до другого. Например, для перекрестков A , B и C на картинке $AB = 5$, $AC = 10$, $BC = 9$. Можно ли отметить в этом городе k перекрестков так, чтобы все расстояния между этими перекрестками оказались различными числами? Если да — укажите эти перекрестки (например, перекресток C находится на пересечении 11-й вертикальной и 6-й горизонтальной улицы), если нет — объясните, почему нельзя.

Решите задачу для

- а) $k = 5$; б) $k = 6$; в) $k = 7$.





Данный
ответ:

При указании позиции я буду использовать обозначение типа "11,1" где 1 число вертикаль, а 2 горизонталь.

Заметим что наибольшее возможное расстояние между разными перекрестками 15, а наименьшее 1, тогда у нас как максимум 15 возможных значений расстояния между перекрестками. А в пункте в) $k=7$ и между каждыми из них есть какое то значение расстояния и оно должно быть разное но всего значений разных 15 а для $k=7$ нужно 21 (для $k=6$ нужно 15). Значит в) нельзя.

Приведем пример для б) тогда для а примером будет убывание любой точки из примера б), так как если мы приведем пример для б) то все значения расстояния между перекрестками будут разными.

Пример: 1,1 1,2 3,1 11,2 3,6 11,6