Олимпиада школьников СПбГУ по математике.
Заключительный этап. 2020/2021 учебный год. 10 – 11 классы.

1. При каких натуральных n клетчатую доску $n \times n$ можно разрезать на квадраты 1×1 и 2×2 так, что квадратов разных размеров будет поровну?

2. Положительные числа a, b, c таковы, что $a^2b + b^2c + c^2a = 3$. Найдите минимальное значение выражения

$$A = a^7b + b^7c + c^7a + ab^3 + bc^3 + ca^3.$$

3. Дан неравнобедренный остроугольный треугольник ABC. В нем проведены высоты BB_1 и CC_1, пересекающиеся в точке H. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами H и C соответственно касаются прямой AB. Из точки A к ω_1 и ω_2 проведены касательные, отличные от AB. Обозначим точки их касания с этими окружностями через D и E соответственно. Найдите угол B_1DE.

4. Петя написал на доске подряд n последовательных двузначных чисел ($n \geq 2$), первое из которых не содержит цифру 4, а последнее — цифру 7. Вася подумал, что это десятичная запись натурального числа x, и разложил x на простые множители. Оказалось, что их всего два и они различаются на 4. Что написано на доске?

5. В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством 3^n, $3^{n-1} \cdot 5$, $3^{n-2} \cdot 5^2$, $3^{n-3} \cdot 5^3$, $\ldots$, $3 \cdot 5^{n-1}$, 5^n пиастров, где n — натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?

1	2	3	4	5	Сумма
20	20	0	20	0	60

№1

Пусть у нас по k квадратиков каждого вида, тогда если мы смогли разбить наш квадрат как сказано в условии, то наши квадратики заняли 2*2*k+1*1*k=5k клеток, что равняется n*n – общему кол-ву клеток в квадрате. Если $5k=n^2$ => n делится на 5 => n = 5t(=> $k= 5t^2$). Если n четное, то есть n делится на 10, значит можно записать как n = 10p => $n^2 = 100p^2$ значит нам нужно $20p^2$ квадратиков 2*2 (оставшееся место заполним квадратиками 1*1, мы всегда сможем это сделать) в столбец 2*10p помещается ровно 5p квадратиков 2*2 пусть таких столбцов у нас будет 4p тогда у нас будет ровно $4p*5p = 20p^2$ квадратиков 2*2 а займут они прямоугольник 8p*10p, в оставшийся прямоугольник 10p*2p замостим квадратиками 1*1 и получим нужное нам разбиение. Если n нечетное, то докажем, что квадрат 5*5 замостить нельзя, а остальные квадраты (15*15, 25*25, 35*35 и тд) можно: Т.к. у нас n нечетное и делится на 5, то его можно представить в виде 10s+5. Раскрасим наш квадрат полосками чередуя черный и белый начиная с черного, тогда у нас будет 5s+2 белых полосок и 5s+3 черных полосок. Любой квадрат 2*2 будет задевать ровно одну белую полоску (ровно две клетки) => одну белую полоску будет задевать максимум 5s+2 квадратиков значит всего квадратиков максимум будет $(5s+2)*(5s+2)= 25s^2+20s+4$ (количество белых полосок умножить на макс количество квадратиков на полоске), с другой стороны нам нужно $n^2/5 = 20s^2+20s+5$ и нужно рассмотреть когда $25s^2+20s+4 < 20s^2+20s+5$ тк s у нас целое то это возможно когда s = 0 тоесть n = 5 значит мы не сможем в квадарте 5*5 разместить нужное нам кол-во квадратиков 2*2, при s >= 1 мы получаем, что сможем разместить нужное нам колво квадратиков. Покажем, как это сделать: в первых 5s + 2 столбцах 2*(10s+5) размещаем максимум квадратов 2*2 из формулы следует, что при s>= 1 мы разместили количество квадратиков больше, чем нужно, уберем квадратики 2*2 до нужного нам кол-ва остальное заполним квадратиками 1*1 и получим нужное нам разбиение.

Ответ: при n делящихся на 5 кроме n = 5.

№2

Ответ: min(A) = 6 при a=b=c=1.

Решение: Пусть $a^2b = n$, $b^2c = p$, $c^2a = q$, => n + p + q = 3 и $A = a^7b + b^7c + c^7a + b^3a + c^3b + a^3c$

$a^3c + c^7a >= 2*sqrt(c^7a * a^3c) = 2*c^4a^2 = 2*q^2$ (по нер-ву Коши). Аналогично группируем остальные слагаемые у A и получаем, что $A >= 2*(q^2 + p^2 + n^2)$. (p, q, n > 0 тк a, b, c > 0)

По нер-ву о средних между среднем квадратическим и средним арифметическим получаем

$Sqrt((q^2 + p^2 + n^2)/3) >= (p + q + n)/3 = 3/3 = 1$ => и $q^2 + p^2 + n^2 >= 3$ => $A >= 2*2*(q^2 + p^2 + n^2) >= 2*3 = 6$ => A >= 6 достигается при a=b=c=1 => min(A) = 6.

№4

Ответ: 2021

Проверка: 2021 = 43*47 и 47-43=4.

Решение:

1) Наша последовательность двузначных чисел не может оканчиваться на четное число или на число, которое делится на 5, ведь иначе мы получим что в Васином разложении будет присутствовать простой множитель 2 или 5 а это невозможно (в разложении два простых числа отлич на 4, в первом случае будет 2*6 а во втором 5*1 или 5*9 во всех этих случаях второй множитель не простой).

2) Значит число, которое разложил Вася может оканчиваться на цифры 1, 3, 7, 9. Но по условию задачи сказано, что последнее число не содержит цифры 7. Значит остаются 1, 3, 9:

Рассмотри как мы можем получить каждую цифру и будут ли эти множители отличаться на 4 (стоит отметить что в данном контексте цифры 7 и 1 отличаются на 4: 7+4 = 11 но мы смотрим на последнюю цифру и получаем 1)

1 = 1*1 не подходит, 3*7 подходит, 9*9 не подходит.

3 = 1*3 не подходит 7*9 не подходит.

9 = 3*3 не подходит, 9*1 не подходит, 7*7 не подходит.

Выходит, что наши два числа могут оканчиваться только на 3 и 7. Причем эти два числа отличаются на 4 без перехода через разряд 3+4=7. Значит если обозначить за n Васино число без последней цифры, то мы получим числа n3 и n7

3) n3*n7 по разности квадратов получаем что это (n5)^2 – 4. Число n5 оканчивается на 5, а значит оно делится на 5 значит его квадрат делится на 25 значит (n5)^2 – 4 сравнимо с 21 по мод 25 значит Васино число может оканчиваться на 21, 46, 71, 96 (число сравнимо по мод 25 со своими последними двумя цифрами), но мы доказали что наше число оканчивается на 1 значит остаются 21 и 71, но по условию задачи последнее двузначное число не содержит 7 значит Васино число оканчивается цифрами 21. Также нам известно, что шли подряд идущие двузначные числа, Васино число оканчивается 21, значит число 21 было последним в последовательности которую выписал Петя.

4) В этом пункте мы проверим все возможные последовательности подряд идущих двузначных чисел, которые оканчиваются 21 на пригодность к условию задачи. (запись: не подходит 3 или не подходит 7 означает что число делится на 3 или 7 а значит тк простые множители по условию отличаются на 4, то если Васино число делится на 3 или 7 то он должен указать в простых множителях их а значит максимальные числа могут быть 3*(3+4) = 21 или 7*(7+4) = 77 что явно меньше тех чисел которые мы будем проверять).

2021 – подходит

192021 – не подходит 3

18192021 – не подходит 3

1718192021 – не подходит 7

161718192021 – не подходит 3

15161718192021 – не подходит 3

1415161718192021 – не подходит тк по условию сказано, что первое число не содержит 4 а у нас14

131415161718192021 – не подходит 3

12131415161718192021 – не подходит 3

1112131415161718192021 – не подходит 7

101112131415161718192021 - не подходит 3

Выходит, что подходит единственная последовательность 2021.