Санкт-Петербургский государственный университет
Олимпиада школьников по математике 2020–2021
Заключительный этап
8–9 классы

1. Докажите, что для любых вещественных чисел a и b уравнение

$$(a^6 - b^6)x^2 + 2(a^5 - b^5)x + (a^4 - b^4) = 0$$

имеет решение.

2. На острове живут лжецы и рыцари. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Каждый житель острова про каждого из остальных знает рыцарь он или лжец. Как-то раз встретились 28 островитян. Двое из них сказали: «Ровно двое из нас лжецы», затем четверо из остальных сказали: «Ровно четверо из нас лжецы», потом восемь из оставшихся сказали: «Ровно восемь из нас лжецы», наконец, все оставшиеся 14 сказали: «Ровно 14 из нас лжецы». Сколько лжецов было среди встретившихся? Приведите все возможные варианты и докажите, что других нет.

3. Сумма неотрицательных чисел a, b и c равна 3. Найдите наибольшее значение выражения $ab + bc + 2ca$.

4. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках K и L. Прямая ℓ пересекает окружность ω_1 в точках A и C, а окружность ω_2 — в точках B и D, причем точки идут на прямой ℓ в алфавитном порядке. Обозначим через P и Q соответственно проекции точек B и C на прямую KL. Докажите, что прямые AP и DQ параллельны.

5. Дана клетчатая доска 2021×2021. Петя и Вася играют в следующую игру. Они по очереди ставят фишки в свободные клетки доски. Выигрывает тот игрок, после хода которого в каждом прямоугольнике 3×5 и 5×3 будет стоять фишка. Начинает Петя. Кто из игроков может обеспечить себе победу вне зависимости от действий соперника?

6. Найдите все такие натуральные числа n, что число $2^n + n^2 + 25$ является кубом простого числа.

1	2	3	4	5	6	Сумма
20	20	5	0	5	5	55

№1

Нам дано уравнение $(a^6 – b^6) * x^2 + 2(a^5 – b^5)x + (a^4 – b^4) = 0$

Если $a = -b$ то $a^6 – b^6 = 0$; $a^5 – b^5 = -2b^5$; $a^4 – b^4 = 0$

Получим $-2b^5 * x = 0$. Значит есть корень $x = 0$.

Если $a = b$, то $a^6 – b^6 = 0$; $a^5 – b^5 = 0$; $a^4 – b^4 = 0$

$0x^2 + 0x + 0 = 0$, значит, x – любое число и у нас есть бесконечное количество корней.

Если $|a|$ не равен $|b|$ (a не равно b и –b), тогда посчитаем дискриминант.

$D = 4 * (a^5 – b^5)^2 – 4 * (a^6 – b^6) * (a^4 – b^4) = 4(a^{10} – 2a^5b^5 + b^{10}) – 4(a^{10} – a^6b^4 – a^4b^6 + b^{10})$

После приведения подобных слагаемых получим:

$D = 4a^6b^4 - 8a^5b^5 + 4a^4b^6 = 4a^4b^4(a^2 – 2ab + b^2) = 4a^4b^4(a – b)^2$

Так как 4, a^4, b^4, $(a – b)^2$ – неотрицательное числа, то и их произведение неотрицательно => D неотрицателен, а это значит, что у уравнения будет минимум 1 корень.

№2

Островитяне разбиваются на 4 условных группы по 2, 4, 8 и 14 человек соответственно.

Заметим, что каждая из этих групп в порядке увеличения количества островитян в группе говорит: «Ровно n из нас – лжецы», где n – количество человек в этой группе. Также заметим, что в каждой группе либо все лжецы, либо все рыцари. Если в одной группе будут и рыцари, и лжецы, то они кто-то будет противоречить, ведь и рыцарь, и лжец не могут сказать одну и ту же фразу.

Рассмотрим вариант, когда все группы состоят из лжецов. Тогда у все 28 островитян – лжецы. Так как каждая из групп солжёт, сказав, что «среди них n лжецов (n последовательно принимает значения 2, 4, 8, 14)», то в сумме получится **28** лжецов, и этот вариант действительно подойдёт.

Теперь рассмотрим вариант, когда одна из групп является группой рыцарей. Заметим, что если в группе рыцарей было сказано, что среди островитян ровно n лжецов, то в остальных группах (оставшихся группах лжецов) должно быть, как раз n островитян. То есть количество островитян в этой группе (так как оно равно n) равно сумме количеств островитян в остальных группах.2n = 28 Тогда n = 14, значит единственным вариантом для одной группы рыцарей будет группа из 14 островитян, и лжецов будет **14**. Нетрудно убедиться, что эта ситуация не противоречит условию.

Рассмотрим вариант, когда две группы являются группами рыцарей. Аналогично, пусть сумма количеств островитян из этих двух «рыцарских» групп равно n, но тогда, по их утверждениям, лжецов тоже n. Значит 2n = 28, n = 14, но n – количество островитян в двух группах. Но мы никак не можем выбрать 2 числа из чисел {2, 4, 8, 14}, чтобы их сумма была равна 14, а это значит, что вариантов с двумя группами рыцарей нет.

Рассмотрим вариант, когда у нас 3 группы рыцарей. Пусть сумма количеств островитян из этих трёх групп равно n, тогда, по их утверждениям, лжецов тоже n. 2n = 28, n = 14. Значит сумма каких-то трёх чисел из {2, 4, 8, 14} равна 14 и оставшееся число также равно 14. Такой вариант возможен, получится, что группы по 2, 4 и 8 островитян являются рыцарями, а группа из 14 – лжецами. Общее число лжецов – **14**.

Если же у нас 4 группы рыцарей, то среди островитян будет 28 рыцарей и 0 лжецов, а значит все рыцари (из каждой группы) солгут, так как они скажут фразу отличную от фразы «Среди нас 0 лжецов». Этот вариант не подходит.

Других вариантов нет. Всего лжецов могло быть 28 или 14.

Ответ: 14, 28.

№3

Нам даны 3 неотрицательных числа a, b, c, такие, что $a + b + c = 3$.
Надо найти максимальное значение выражения $ab + bc + 2ac$
Вынесем b за скобку. $b(a + c) + 2ac$
Зафиксируем значение b и будем «раздвигать» значения a и c. Пусть изначально $a = c$, а потом мы увеличим a на x, а c уменьшим на x ($0 < x < a$), ведь если $x = a$, то произведение новых a и c будет равно 0, что гарантированно уменьшит значение нашего выражения. При таком преобразовании сумма новых a и c не изменится. $(a + x + c – x) = a + c$, а произведение изменится.
$2(a + x)(c – x) = 2ac – 2ax + 2cx – 2x^2$. Это выражение можно разбить на два:
$2ac$ и $-2ax + 2cx – 2x^2$. Второе из них характеризует изменение произведения a и c. Рассмотрим его.
Вынесем 2x за скобку, получим $2x * (c – a – x)$, $2x > 0$, но $c – a – x = -x < 0$, значит изменение будет отрицательным, а это значит, что оптимальный вариант $a = c$.

Немного изменим условие с учётом доказанного выше утверждения.
$2a + b = 3$

Нужно найти максимальное значение выражения $2ab + 2a^2$.
Вынесем a за скобку, получим $a * (2b + 2a)$.
Заменим в этом выражении $2a + b$ на 3, получим $a * (3 + b) = 3a + ab$.

Пусть изначально $a = b$. Будем «раздвигать их на x». $0 < x < a$.

$3 * (a + x) + (a + x)(b – x) = 3a + ab + 3x + bx – ax – x^2$.
Разобьём это выражение на 2 части.
Первая $3a + ab$ (равна старой), а вторая $3x + bx – ax – x^2$ (изменение)
Рассмотрим выражение $3x + bx – ax – x^2$. Вынесем x за скобку. $x * (3 + b – a – x) = x * (3 – x) = 3x – x^2$
Так как $x < a <= 3$, то выражение $3x – x^2 <= 0$, а значит, оптимальный вариант $a = b$.
Так мы доказали, что $a = b = c = 3 / 3 = 1$

Посчитаем значение выражения $ab + bc + 2ac = 1 * 1 + 1 * 1 + 2 * 1 * 1 = 1 + 1 + 2 =$ **4**
Ответ: 4.

№5
Так как размеры доски 2021x2021, то она симметрична относительно центральной клетки.

Тогда, если первый сходит своим первым ходом в центральную клетку, а затем будет ходить симметрично (относительно центральной клетки) второму, то он победит.

Действительно, так как доска симметрична, то суммарное количество прямоугольников 3x5 и 5x3 (могут пересекаться) чётно. Для прямоугольников 5x3 по горизонтали они вмещаются 2017 раз, по вертикали – 2019. Прямоугольники 3x5 по горизонтали вмещаются 2019 раз, по вертикали – 2017.
N = 2017 * 2019 + 2019 * 2017 = 2 * 2017 * 2019.

Первым ходом в центр первый создаст 30 (5 * 3 + 3 * 5) прямоугольников с фишкой внутри. Без фишки останутся N = 2 * (2019 * 2017 – 15) прямоугольников, но это всё также чётное число. Пусть второй игрок очередным ходом добавил фишку в n прямоугольников, то первый, в силу симметрии, своим ходом также добавит свою фишку в n прямоугольников. Значит после очередного хода N уменьшится на 2n, то есть останется чётным. Значит 0 прямоугольников также останется после хода первого, а это значит, что первый сходит последним и выиграет. Так как Петя начал, то Петя и победит.

Ответ: Петя

№6

Выражение $2^n + n^2 + 25$ должно быть равно кубу простого числа.
Рассмотрим остатки кубов от деления на 4. Если у числа, возводимого в куб остаток 0 или 2, то у куба числа остаток 0. Если же у числа остаток от деления на 4 равен 1 или 3, то остаток куба числа от деления на 4 будет равен 1. Значит у кубов при делении на 4 не бывает остатка 2.
Рассмотрим n. Пусть n – нечётное число, большее 1. При n = 1 получим 2 +1 + 25 = 28, что не является кубом.
Если n > 1, то 2^n при делении на 4 даст остаток 0. 25 при делении на 4 даст остаток 1. Пусть n = 2k + 1. Тогда $(2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$, но $4k^2$ и 4k при делении на 4 дадут остаток 0, а 1 даст остаток 1. Посчитаем итоговый остаток: 0 + 1 + 1 = 2. Значит при нечётном n такого быть не может. Значит, n – чётное число. При чётном n 2^n и n^2 дадут остаток 0 при делении на 4, а 25 даст остаток 1. Общий остаток = 1.
Рассмотрим теперь числа, которые будем возводить в куб. Это простые числа => они нечётные (2 не подходит, так как $2^3 < 25$). Так как мы рассматриваем нечётные числа, то при делении на 4 они могут дать остаток 1 или 3 при делении на 4. Но числа, дающие остаток 3 при делении на 4 не подойдёт, так как такие числа в кубе также дадут остаток 3 при делении на 4, но остаток $2^n + n^2 + 25$ при делении на 4 равен 1, 3 не равно 1, получаем противоречие. Значит возводиться в куб могут только числа 5, 13, 17, 29, 37, 41 и т.д. Единственный подходящий вариант – 5. $5^3 = 125$.
Тогда **n = 6**. $2^6 + 6^2 + 25 = 125$.

Ответ: n = 6