Олимпиада школьников СПбГУ по математике.
Заключительный этап. 2020/2021 учебный год. 10 – 11 классы.

1. В некоторых клетках полоски 1×2021 поставлено по одной фишке. В каждую из пустых клеток записывается число, равное модулю разности количества фишек слева и справа от этой клетки. Известно, что все записанные числа различны и отличны от нуля. Какое наименьшее количество фишек может быть расставлено в клетках?

2. Положительные числа a, b, c таковы, что $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Найдите минимальное значение выражения

$$A = \frac{a^4 + b^4}{c^2 + 4ab} + \frac{b^4 + c^4}{a^2 + 4bc} + \frac{c^4 + a^4}{b^2 + 4ca}.$$

3. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием BC. На продолжении стороны AC за точку C отмечена точка K, и в треугольник ABK вписана окружность с центром в точке I. Через точки B и I проведена окружность, касающаяся прямой AB в точке B. Эта окружность вторично пересекает отрезок BK в точке L. Найдите угол между прямыми IK и CL.

4. На доске написано число 1200. Петя приписал к нему справа $10n + 2$ пятерок, где n — неотрицательное целое число. Вася подумал, что это шестеричная запись натурального числа x, и разложил x на простые множители. Оказалось, что среди них ровно два различных. При каких n это возможно?

5. В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством $6n + 1$, $6n + 3$, $6n + 5$ и $6n + 7$ пиастров, где n — натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?

1	2	3	4	5	Сумма
15	10	20	10	10	65

Задание 1.
Ответ : 1347.
Пусть у нас фишек 2к+1, то есть любая разность нечетна. Тогда не более к+1 различных разностей, не равных 0.
Тогда посмотрим на клетку k+1-l. Пусть 2k + k+1-l = 2021, тогда 3к +1= 2021 +l, то есть 2к +1>= 2/3 * 2021. Но так как 2к+1 — целое, то 2к >= 1347.
Пусть у нас фишек 2к, то есть любая разность четна. Тогда не более к различных разностей, не равных 0, значит пустых клеток не больше к.
Тогда посмотрим на клетку k-l. Пусть 2k + k-l = 2021, тогда 3к= 2021 +l, то есть 2к >= 2/3 * 2021. Но так как 2к — целое, то 2к >= 1348.
Теперь построим пример на 1347:
Сначала через одну клетку будем ставить фишечки на 2*673+1 клетке, а во все остальные 674 - поставим по фишечке. Не сложно понять, что такой пример подходит.

Задание 2.
Ответ: 6/5.
Оценим число A из условия. Для этого воспользуемся неравенством для среднего арифметического и квадратического, которое выглядит так : sqrt (x^4+y^4/2) >= x^2+y^2/2 (*).
(где «sqrt» – это корень числа, а «^2» - это степень числа, в данном случае вторая)
Тогда преобразуем неравенство (*), возведем в квадрат и домножим на 2:

x^4+y^4 >= ((x^2+y^2)^2)/2.

Применим его к каждому из числителей числа A:

A = (a^4 + b^4)/(c^2 + 4ab) + (a^4 + c^4)/(b^2 + 4ac) + (c^4 + b^4)/(a^2 + 4bc) >= ((a^2 + b^2)^2)/2(c^2 + 4ab) + ((a^2 + c^2)^2)/2(b^2 + 4ac) + ((c^2 + b^2)^2)/2(a^2 + 4cb) (**).

Теперь вспомним неравенство КБШ для трех чисел :

(a1^2/b1 + a2^2/b2 + a3^2/b3)(b1 + b2 + b3) >= (a1 + a2 + a3)^2, домножим обе его части на сумму (b1 + b2 + b3):

(a1^2/b1 + a2^2/b2 + a3^2/b3) >= ((a1 + a2 + a3)^2)(b1 + b2 + b3).

И применим его к неравенству (**):

A = (a^2 + b^2 + a^2 + c^2 + c^2 + b^2) / 2(a^2 + b^2 + c^2 + 4ab + 4bc + 4ac) = (заменим сумму a^2 + b^2 + c^2 на 3 — условие) = 36 / 2(3 + 4ab + 4bc + 4ac) >= 36 / 2 (3 +12) = 6/5.

Так как a^2 + b^2 + c^2 >= ab + bc + ac (мы можем это получить, складывая три неравества о средних: x^2+y^2/ 2 >= xy).

Задание 3.

Обозначим угол IBC = a, а угол CBL = b. Тогда угол ABI = a+b, так как BI это биссектрисса угла АВК = a+b.

Заметим, что углы ABI и ILB равны, так как AB — касательная к окружности ILB, где IL является хордой, а значит это треугольник равнобедренный и IB= IL.(1)

Тогда треугольники ABI и ACI равны по двум сторонам (AI – общая, AB=AC из условия равнобедренности треугольника ABC) и углу между ними, так как AI – это биссектрисса угла BAC, так как I – центр вписанной оружности треугольника АВК.

Тогда BI = IC (2) и углы ACI равен углу ABI и равны a+b.

Заметим, что угол BCA — внешний для треугольника BCK = угол BCI + угол ICA = a (так как он равен углу IBC из треугольника BCI, где IB=IC) + (a+b) = 2a + b. То есть угол BKC = углу BCA — угол CBK = 2a. Но IK – это биссектрисса угла BKA, так как I – центр вписанной оружности треугольника ABK, то есть углы BKI равен углу IKA и равны они по a.

Теперь рассмотрим треугольники ILK и ICK, в них IK — общая, IL=IC (по 1 и 2). углы LKI равен углу CKI,угол ILK= углу ICK= 180-(a+b), так как углы ICA= ILB= a+b.

Тогда в трегольнике ILC: IK — биссекриса и этот треугольник равнобедренный, а значит, это и высота, тогда IK перпендикулярно CL.

Ответ: 90.

Задание 4.

Ответ: 0.

Пример: 120055(в шестиричной) = 6^5 + 6^4*2 + 5*6^1 + 5*6^0 = 6^4*8 + 6^2 -1 = 6^2*7^2 – 1 = 101*103.

Оценка:

От противного. Пусть n>=1, тогда переведем число из шестиричной системы в десятичную:

120055...5(всего знаков 10n + 6) = 6^(10n+5)+ 2*6^(10n+4) + 5*(6^(10n+1)+ 6^(10n)+...+6^0)=

6^(10n+5)+ 2*6^(10n+4) + 5*(6^(10n+2) – 1) / (6 – 1) = 6^(10n+2) (216 + 72 + 1) – 1 = 17^2*6^(10n+2) – 1 = (17*6^(5n+1) - 1)(17*6^(5n+1) + 1). Заметим, что 6^5=7776 по модулю 101 сравнима с 1, тогда и 6^10 сравнимо с 1 по модулю 101, тогда и 6^10n сравнима с 1 по модулю 101. Тогда (17*6^(5n+1) – 1) делится на 101 в какой-то степени, потому что (17*6^(5n+1) – 1) и (17*6^(5n+1) +1) – взаимно просты (нечетные и отличаются на 2).

Но посмотрим теперь на модуль 4. 17^2*6^(10n+2) – 1 дает остаток -1 по модулю 4, а значит, и это (17*6^(5n+1) - 1)(17*6^(5n+1) + 1) тоже. Но тогда 17*6^(5n+1) + 1 как раз дает остаток 1 по модулю 4, а 17*6^(5n+1) – 1 – остаток -1. Но тогда получается, что 101^m= 17*6^(5n+1) + 1, тогда перенесем 1 в правую часть и получим: 101^m – 1 =17*6^(5n+1). Тогда правая част делится на 100 по формуле разноси степеней, а левая — нет (?!).

Значит, любое n большее 1 нам не подходит.

Задание 5.

Ответ: (6n + 1)(2n + 1) – 2 = 12n^2 + 8n – 1.

Докажем пример:

Так как все монеты нечетного достоинства, и сумма тоже, то нам нужно использовать нечетное количество монет.

Если у нас (2n+1) монет, достоинством (6n+1), то это 12n^2 + 8n + 1, что больше 12n^2 + 8n – 1.

Если у нас (2n-1) монет достоинством (6n+7), то это $12n^2 + 8n – 7$, что меньше $12n^2 + 8n – 1$.

ТО есть мы не можем получить такое количество монет.

Теперь докажем, что все остальные можно получить. Рассмотрим два аналогичных случая, когда хотим нечетную и четную сумму, в каждой их которых мы хотим научится делать +2, то есть из нечетного получать нечетное, а из четного — четное.

Нам надо научиться так делать , начиная с $12n^2+8n$ (на 1 больше, чем в примере) = (6n+1)2n.

1) Если есть монеты достоинством ниже 6n+7, то заменим одну из имеющихся на следующую соотвественно.

2) есть таковых нет, то заменяя 2n монет достоинсвом 6n+7 (это $12n^2+14n$) на (2n+2) монеты достоинством 6n+1 (это $12n^2+14n$).

Будем так делать до бесконечности, то есть любое число, большее нашего примера мы сможем получить.