Олимпиада школьников СПбГУ по математике.
Заключительный этап. 2020/2021 учебный год. 10 – 11 классы.

1. При каких натуральных n клетчатую доску $n \times n$ можно разрезать на квадраты 1×1 и 2×2 так, что квадратов разных размеров будет поровну?

2. Положительные числа a, b, c таковы, что $a^2b + b^2c + c^2a = 3$. Найдите минимальное значение выражения
$$A = a^7b + b^7c + c^7a + ab^3 + bc^3 + ca^3.$$

3. Дан неравнобедренный остроугольный треугольник ABC. В нем проведены высоты BB_1 и CC_1, пересекающиеся в точке H. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами H и C соответственно касаются прямой AB. Из точки A к ω_1 и ω_2 проведены касательные, отличные от AB. Обозначим точки их касания с этими окружностями через D и E соответственно. Найдите угол B_1DE.

4. Петя написал на доске подряд n последовательных двузначных чисел ($n \geq 2$), первое из которых не содержит цифру 4, а последнее — цифру 7. Вася подумал, что это десятичная запись натурального числа x, и разложил x на простые множители. Оказалось, что их всего два и они различаются на 4. Что написано на доске?

5. В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством 3^n, $3^{n-1} \cdot 5$, $3^{n-2} \cdot 5^2$, $3^{n-3} \cdot 5^3$, $\ldots$, $3 \cdot 5^{n-1}$, 5^n пиастров, где n — натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?

1	2	3	4	5	Сумма
20	20	20	0	0	60

Задача 1.

Пусть, a – количество квадратов 2x2 и соответственно квадратов 1x1 на доске. Тогда суммарная площадь, которую займут эти 2*a фигуры равна
(2a)^2 + a = 5a = n^2 – это необходимое условие для выполнения условия задачи. Рассмотрим выражение 5a = n^2, из него следует, что n^2 кратно 5 => n кратно 5 => n = 5p, где p – натуральное число.

a = 5*p^2,

Рассмотрим случай, когда p – чётное число, тогда p = 2k, k – натуральное число.

n = 10*k, Тогда на поле можно разрезать на 25*k^2 квадратов 2x2, 5*k^2 из этих квадратов разрежем на квадраты 1x1. Получим, что квадратов 2x2 20*k^2, и квадратов 1x1 20*k^2, условие выполнено.

Пусть теперь p – нечётное число, тогда p = 2k-1, k – натуральное число.

n = 10*k-5,

Всего поле можно разрезать не больше чем на ((n-1)/2)^2=(5k-3)^2 квадратов 2x2, остальные (2n-1)=(20*k-11) клетки могут быть только квадратами 1x1. Пусть мы разрезали поле на наибольшее число квадратов 2x2. Мы можем разрезать некоторое количество квадратов 2x2 на квадраты 1x1. Пусть b – количество квадратов 2x2, которые мы разрежем на квадраты 1x1. b >= 0

(5k-3)^2=a+b (квадраты все квадраты 2x2: разрезанные и неразрезанные)

20*k-11=a-4b (квадраты 1x1 полученные без разрезания квадратов 2x2)

25k^2-30k+9-20k+11=5b

25*k^2-50k+20=5b

b=5*k^2-10k+4

b=5*(k-1)^2-1 => k>=2, т.к. b>=0

a=5*(2k-1)^2

Таким образом, мы разрезаем поле на (5k-3)^2 квадратов 2x2, из которых 5*(k-1)^2 мы разрезаем на квадраты 1x1 и получаем 5*(2k-1)^2 квадратов 2x2 и столько же 1x1, при условии, что k>=2.

Ответ: мы можем разрезать поле тогда и только тогда, когда n = 5*p, где p – натуральное число и p >= 2. (То есть n это 10, 15, 20, 25 и т.д.)

Задача 2.

$A+6 = (ba^7+ab^3+1+1)+(cb^7+bc^3+1+1)+ (ac^7+ca^3+1+1) >= 4*(a^8*b^4)^{0.25}+4*(b^8*c^4)^{0.25}+4*(c^8*a^4)^{0.25} = 4*(ba^2+cb^2+ac^2)=12$

$=> A >= 6$

Ответ: min(A) = 6, достигается при a = b = c = 1.

Задача 3.

Проведём DB1, DE, B1E.

Четырёхугольник AB1DH вписанный (т.к. угол HDA = HB1A = 90 градусов)

Треугольники C1CA = ECA (по катету и гипотенузе, AC1=AE как отрезки касательных)

Угол C1CA = ECA = a (обозначим)

C1AC = 90-a

Треугольники C1AH = DAH (по катету и гипотенузе, C1A=AD как отрезки касательных)

Угол C1AH = DAH = b (обозначим)

Угол HB1D = b т.к. опирается на дугу HD окружности, описанной около AB1DH

Угол DAB1 = 90-a-2b = DHB1 (опираются на дугу DB1)

Угол DAE = 180-2a-2b, треугольник DAE равнобедренный (AE=AC1=AD)

Угол ADE = a+b

Угол HDB1 = 180-b-(90-a-2b)=90+a+b

Т.к. угол HDA=90, то угол ADB1 = a+b = ADE => угол B1DE = 0 градусов, то есть B1 лежит на DE.

Ответ: 0 градусов.