Олимпиада школьников СПбГУ по математике.
Заключительный этап. 2020/2021 учебный год. 10 – 11 классы.

1. При каких натуральных n клетчатую доску $n \times n$ можно разрезать на прямоугольники 1×1 и 2×3 так, что прямоугольников разных размеров будет поровну?

2. Положительные числа a, b, c таковы, что $a^2b + b^2c + c^2a = 3$. Найдите минимальное значение выражения

$$A = \frac{\sqrt{a^6 + b^4c^6}}{b} + \frac{\sqrt{b^6 + c^4a^6}}{c} + \frac{\sqrt{c^6 + a^4b^6}}{a}.$$

3. Вокруг остроугольного треугольника ABC описана окружность. Точка K — середина меньшей дуги AC этой окружности, а точка L — середина меньшей дуги AK этой окружности. Отрезки BK и AC пересекаются в точке P. Найдите угол между прямыми BC и LP, если известно, что $BK = BC$.

4. Петя написал на доске подряд в убывающем порядке n последовательных двузначных чисел, последнее из которых не содержит цифру 7. Вася подумал, что это десятичная запись натурального числа x, и разложил x на простые множители. Оказалось, что их всего два и они различаются на 4. Что написано на доске?

5. В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством 2^n, $2^{n-1} \cdot 3$, $2^{n-2} \cdot 3^2$, $2^{n-3} \cdot 3^3$, $\ldots$, $2 \cdot 3^{n-1}$, 3^n пиастров, где n — натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?

1	2	3	4	5	Сумма
20	0	20	20	0	60

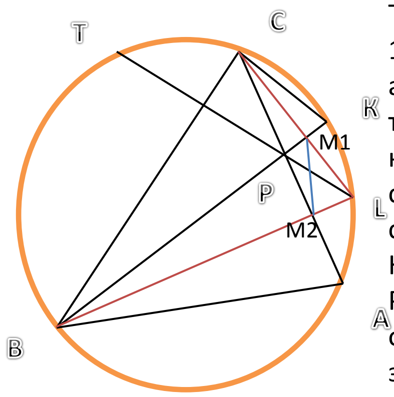
1. Ответ: при n кратных 7

Заметим, что если прямоугольников 2*3 и 1*1 одинаковое количество, что сумма всех клеток будет 2*3*k + 1*1*k = 7*k, где k – количество прямоугольников одного из типов (т.е. всего прямоугольников 2*k). Так как 7*k кратно 7, то n также должно быть кратно 7.

Пример: так как любой квадрат n*n, где n кратно 7, можно разбить на квадраты 7*7, то приведём разбиение квадрата 7*7, которыми потом покроем квадрат n*n.

1	1	2	2	3	3	3
1	1	2	2	3	3	3
1	1	2	2	4	4	4
7	7	6	6	4	4	4
7	7	6	6	5	5	5
7	7	6	6	5	5	5
1	2	3	4	5	6	7

3. Ответ: 90



Пусть угол СКВ равен k, тогда так как ВК =ВС, то угол СВК равен 180 – 2*k. Так как К – середина дуги АС, то ВК – биссектриса угла СВА. Те КВА равен 180 – 2*k. Так как АВК и АСК опираются на одну дугу, то они равны, аналогично СКВ и САВ. Угол СРК равен 180 – 180 + 2*k – k = k => треугольники СРК и ВАР – равнобедренные (АРВ = КРС и РАВ = СКР). И так как L – середина КА, то CL и BL – биссектрисы углов КСА и КВА соответственно. Значит CL и BL также высоты и медианы. Так как M1M2 - средняя линия РКА, то она параллельна АК, значит угол M1M2C равен КАС, который равен СВК, так как опирается с ним на одну дугу. Рассмотрим четырехугольник PM1M2L – вокруг него можно описать окружность, так как CL и BL перпендикулярны ВК и АС соответственно, значит сумма противоположных углов равна 180. Угол PM2M1 равен PLM1, так как они опираются на дугу PM1. Значит, TLC равен СВК = 180 – 2*k. Тогда угол между ВС и LT равен (дуга BL + дуга TC)/2. Дуга BL равна ½ * КА + ВА. КА*1/2 = (180-2*k)*2/2 = 180-2*k. ВА = (180 – 360 +4*k –k)*2 = (3*k – 180)*2 = > угол между ВС и LT равен (180-2*k + (180-2*k)*3 + (3*k – 180)*2)/2= 180/2 = 90

4. Ответ:21
   Пусть множители раны p и p + 4(оба числа простые), тогда рассмотрим их остатки по модулю 10. Заметим, что p не моет быть сравнима с чётными числами, так как p не равно двум и не моет быть сравнима с 5, так как если p = 5, то p+4 = 9 => множителей больше двух.

1) p ≡ 1(мод10)
   значит, p+4 ≡ 5(мод10), те или p =1(что не верно), или p+4 делится на 5, что не возмоно, так как p+4 – простое.
2) p ≡ 3(мод10)

значит, p+4 $\equiv 7$(мод10), те p*(p+4) $\equiv 7*3 \equiv 1$ (мод10). Те написанное число заканчивается на 1.

3) p $\equiv 7$(мод10)
значит, p+4 $\equiv 1$(мод10), те p*(p+4) $\equiv 7*1 \equiv 7$ (мод10). Те написанное число заканчивается на 7, что противоречит условию.
4) p $\equiv 9$(мод10)
значит, p+4 $\equiv 3$(мод10), те p*(p+4) $\equiv 3*9 \equiv 7$ (мод10). Те написанное число заканчивается на 7, что противоречит условию.

Те p $\equiv 3$(мод10), а , p+4 $\equiv 7$(мод10)

Рассмотрим десятки в произведении p(p+4). Пусть p = x1*10^k +….+ 10* xk + 3, а p + 4= x1*10^k +….+ 10* xk + 7. Тогда в произведении p(p+4) десятки будут равны 10* xk*7+10* xk*3 + (7*3)//10 = 100* xk + 2 => десятки равны 2.

Тогда последнее число, которое было записано на доске это 21.

Рассмотрим остаток по модулю 3 у числа p.

1) p$\equiv 0$(мод3), значит p = 3, а p+4 =7, те изначальное число было 21.
2) p$\equiv 1$(мод3), значит p+4$\equiv 2$(мод3), те p*(p+4) $\equiv 2$(мод3)
3) p$\equiv 2$(мод3), значит p+4$\equiv 0$(мод3), те p+4 делится на 3, но так как p+4 простое – противоречие

Значит, если p не равно 3, то изначальное число сравнимо с 2 по модулю три. Так как сумма цифр числа сравнима с самим числом по модулю три, то докажем, что сумма цифр числа, написанного на доске никогда не могла равняться 2.

Так как

1) если число(a,b - цифры) ab $\equiv a+b \ \equiv 0$ (мод3), то a$(b+1) \equiv a+b+1 \equiv 1$(мод3)
Или если b = 9, то $a0 \equiv a+1 \equiv 1(\text{мод}3)$, так как b$\equiv 0(\text{мод}3)$ => $a+b \ \equiv a \equiv 0$ (мод3)
2) если число(a,b - цифры) ab $\equiv a+b \ \equiv 1$ (мод3), то a$(b+1) \equiv a+b+1 \equiv 2$(мод3)
Или если b = 9, то $a0 \equiv a+1 \equiv 2(\text{мод}3)$, так как b$\equiv 0(\text{мод}3)$ => $a+b \ \equiv a \equiv 1$ (мод3)
3) если число(a,b - цифры) ab $\equiv a+b \ \equiv 2$ (мод3), то a$(b+1) \equiv a+b+1 \equiv 0$(мод3)
Или если b = 9, то $a0 \equiv a+1 \equiv 0(\text{мод}3)$, так как b$\equiv 0(\text{мод}3)$ => $a+b \ \equiv a \equiv 2$ (мод3)

Те так как 21 $\equiv 0$ (мод3), то приписывая числа дальше, мы будем добавлять их остаток от деления на 3 к общему. Значит, приписывая слева по двухзначному числу мы будем получать

1) 21 $\equiv 0$ (мод3)
2) 2221 $\equiv 1+0 \ \equiv 1$ (мод3)
3) 232221 $\equiv 2+1 \ \equiv 0$ (мод3)
4) 24232221 $\equiv 0+0 \ \equiv 0$ (мод3)
5) 2524232221 $\equiv 1+0 \ \equiv 1$ (мод3)

Продолжая аналогично, с каждым приписаным числом мы будем добавлять сначала 1, потом 2, потом 0 к остатку при делении на 3, и потом снова 1,2,0… Те с помощью этих операций мы не смоем получить число, которое сравнимо с 2 по модулю 3, чтд
Значит, ответ 21.