Олимпиада школьников СПбГУ по математике.
Заключительный этап. 2020/2021 учебный год. 10 – 11 классы.

1. При каких натуральных n клетчатую доску $n \times n$ можно разрезать на квадраты 1×1 и 2×2 так, что квадратов разных размеров будет поровну?

2. Положительные числа a, b, c таковы, что $a^2b + b^2c + c^2a = 3$. Найдите минимальное значение выражения

$$A = a^7b + b^7c + c^7a + ab^3 + bc^3 + ca^3.$$

3. Дан неравнобедренный остроугольный треугольник ABC. В нем проведены высоты BB_1 и CC_1, пересекающиеся в точке H. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами H и C соответственно касаются прямой AB. Из точки A к ω_1 и ω_2 проведены касательные, отличные от AB. Обозначим точки их касания с этими окружностями через D и E соответственно. Найдите угол B_1DE.

4. Петя написал на доске подряд n последовательных двузначных чисел ($n \geq 2$), первое из которых не содержит цифру 4, а последнее — цифру 7. Вася подумал, что это десятичная запись натурального числа x, и разложил x на простые множители. Оказалось, что их всего два и они различаются на 4. Что написано на доске?

5. В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством 3^n, $3^{n-1} \cdot 5$, $3^{n-2} \cdot 5^2$, $3^{n-3} \cdot 5^3$, $\ldots$, $3 \cdot 5^{n-1}$, 5^n пиастров, где n — натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?

1	2	3	4	5	Сумма
5	20	20	20	1	66

Введём обозначения на всём решении:

x^y – x в степени y

<ABC – угол ABC

x != y – x не равен y

№2

Воспользуемся неравенством Коши между средним геом. и средним арифм.:

Заметим, что….

$a^7b + ab^3 \geq 2a^4b^2$ *(среднее геометрическое)*

$b^7c + bc^3 \geq 2b^4c^2$*(среднее геометрическое)*

$c^7a + ca^3 \geq 2c^4a^2$*(среднее геометрическое)*

Далее тоже по неравенству Коши между средним квадр. и средним арифм.:

$$\sqrt{\frac{a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2}{3}} \geq \frac{a^2b + b^2c + c^2a}{3}$$

Из чего следует:

$2(\frac{a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2}{1}) \geq \frac{2(a^2b+b^2c+c^2a)^2}{3}$*=6*

Заметим, что равенство достигается при a = b = c = 1

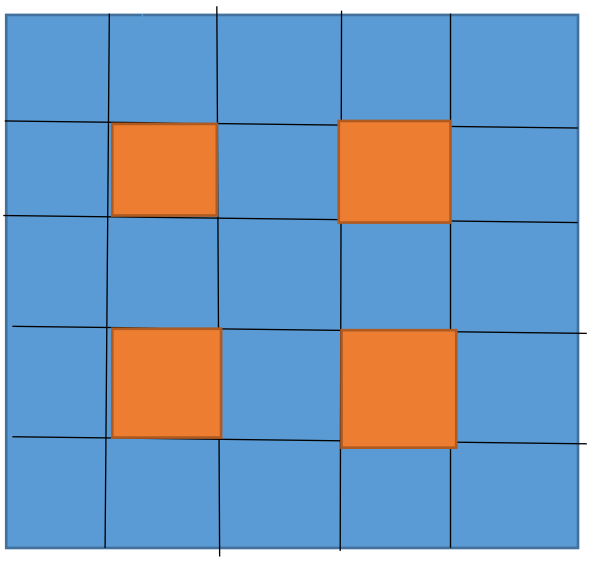
Ответ: 6

№1

Пусть a – количество квадратов 1 x 1 и 2 x 2. Тогда:

4a + a = n^2 *|=> n кратно 5.*

Если закрасить таким образом, то видно, что 2 x 2 не более 4-ех, но тогда 1 x 1 не менее 25 – 16 = 9



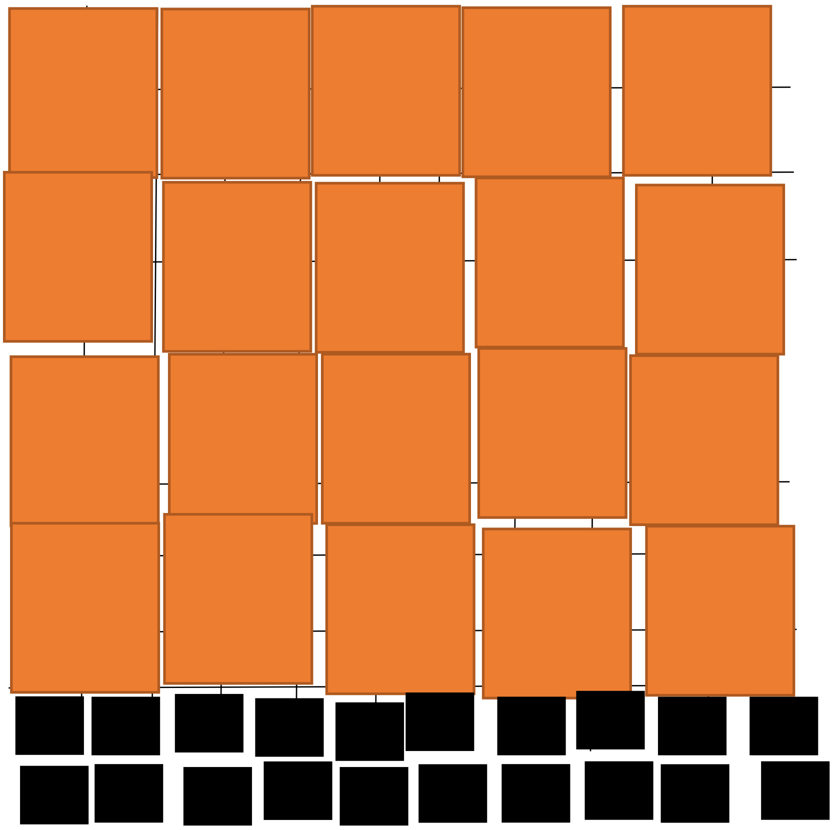
Применяем аналогичную раскраску и получаем что для n = 5(2k+1) получим не более (5k+3)^2 квадратов 2 x 2 тогда 1 x 1 будет не менее 25(2k+1)^2-(5k+3)^2 = 75k^2+70k+16 что больше чем (5k+3)^2 и получается квадратов 1 x 1 будет больше а это нам не подходит

.

Для любого n = 10k возможен пример, т к можно замостить такие квадраты тем квадратом который мы получим:

*Пример для k = 1 (n = 10), при увеличении k замостить можно таким же образом, только используя большее количество квадратов (по (n*n)/5 для каждого вида):*

(оранжевые – 2x2, черные – 1x1)



Ответ – для любого n кратного 10.

№3

1)По теореме о касательной AC1 – общая касательная к окружности ω1 и ω2, тогда AC1 = AD

И C1A = AE, тогда треугольник AED - равнобедренный

2) около четырехугольника AC1HB1 можно описать окружность т к сумма противоположных равна 180; AH – диаметр.

3) тогда эта окружность совпадает с окружностью описанной около треугольника AHD и точки A, C1, H, D, B1 лежат на одной окружности.

4) Тогда <ADB1 = <AC1B1, как углы опирающиеся на одну хорду.

5) треугольник AB1C1 = треугольнику AB1E (по двум сторонам и углу между ними) (AB1 – общая

AC1 = AE и <C1AC = <CAE

6) тогда <AC1B1 = <AEB1 |=> <ADB1 = <AEB1

7) треугольник ADE – р/б ||=> <ADE = <AED но тогда <B1DE = < ADB1 - < ADE; <B1ED = <AEB1 - <AED

8) тогда треугольгник B1DE – равнобедренный и B1D = EB1

9) докажем, что B1D не равно EB1; B1E = C1B1 из равенства треугольников AB1C1 и AB1E. Но C1B1 > B1D, т к (<B1AC1) больше, чем (<DAB1), значит и хорда больше.

10) Тогда B1D и EB1 лежат на одной прямой DE и <B1DE = 0.

Ответ: 0 градусов.

№4

Пусть x = a(a + n), где a – простое число и a + n – простое число. Тогда возможны случаи:

1) Если a оканчивается на 1, то a + 1 на 5, но тогда это будет не простое число, так как a + n != 5, значит случай невозможен.
2) Если a оканчивается на 3, то a + 4 на 7 и такое возможно.
3) Если a оканчивается на 5, то это уже невозможно
4) Если a оканчивается на 7, тогда a + n оканчивается на 1, но тогда x будет оканчиваться на 7, чего быть не может по условию.
5) Если a оканчивается на 9, тогда a + 4 на 3, но тогда опять x оканчивается на 7, чего быть не может.

Значит, возможен один случай: a = 10y + 3; a + 4 = 10y + 7

(a = 2 не рассматриваем т. к. x – минимум четырехзначное)

$x = (10y + 3)(10y + 7) = 100y^2 + 100y + 21 = 100(y^2 + y) + 21$ ||=> x оканчивается на 21

Тогда возможны случаи:

1) X = 2021 = 43 * 47 – удовлетворяет условию
2) X = 192021 = 3 * 64007 – не удовлетворяет
3) X = 18192021 = 7 * 6064007– не удовлетворяет
4) X = 1718192021 = 245456003 * 7 - не удовлетворяет
5) X = 161718192021 = 3 * 53906064007 - не удовлетворяет
6) X = 15161718192021 = 3 * 5053906064004007 - не удовлетворяет
7) X = 131415161718192021 кратно трем - не удовлетворяет
8) X = 12131415161718192021 кратно трем - не удовлетворяет
9) X = 1112131415161718192021 кратно одиннадцати - не удовлетворяет
10) X = 101112131415161718192021 кратно трем - не удовлетворяет

Значит, единственное возможное решение – 2021.

Ответ – 2021.

№5

При n = 1 максимальную сумму которую нельзя получить – 7.

Если число вида 10a = 5k

$10a + 1 = 5k + 6$

$10a + 2 = 3*4 + 5k$

$10a + 3 = 5k + 3$

$10a + 4 = 5k + 9$

$10a + 5 = 5k$

$10a + 6 = 5k + 6$

$10a + 7 = 5k + 12$

$10a + 8 = 5k + 3$

$10a + 9 = 5k + 9$

Значит все числа большие 7 можно получить.