

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Олимпиада школьников по математике 2020–2021
Заключительный этап
8–9 классы

1. Докажите, что для любых вещественных чисел a и b уравнение

$$(a^2 - b^2)x^2 + 2(a^3 - b^3)x + (a^4 - b^4) = 0$$

имеет решение.

2. На острове живут лжецы и рыцари. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Каждый житель острова про каждого из остальных знает, рыцарь он или лжец. Как-то раз встретились 19 островитян. Трое из них сказали: «Ровно трое из нас лжецы», затем шестеро из остальных сказали: «Ровно шестеро из нас лжецы», наконец, девять из оставшихся сказали: «Ровно девять из нас лжецы». Сколько лжецов было среди встретившихся? Приведите все возможные варианты и докажите, что других нет.

3. Вещественные числа a , b , c и d удовлетворяют условию $a^6 + b^6 + c^6 + d^6 = 64$. Найдите наибольшее значение выражения $a^7 + b^7 + c^7 + d^7$.

4. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка K . К описанной окружности треугольника AKC проведена касательная ℓ_1 , параллельная прямой AB и ближайшая к ней. Она коснулась окружности в точке L . Прямая AL пересекла описанную окружность треугольника ABK в точке M ($M \neq A$). К этой окружности в точке M проведена касательная ℓ_2 . Докажите, что прямые BK , ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются в одной точке.

5. Дана клетчатая доска 2020×2021 . Петя и Вася играют в следующую игру. Они по очереди ставят фишки в свободные клетки доски. Выигрывает тот игрок, после хода которого в каждом квадрате 4×4 будет стоять фишка. Начинает Петя. Кто из игроков может обеспечить себе победу вне зависимости от действий соперника?

6. Найдите все пары таких простых чисел p и q , что $p^2 + 5pq + 4q^2$ является квадратом натурального числа.

1	2	3	4	5	6	Сумма
15	20	0	0	0	20	55

Задача 1

Доказать, что для любых вещественных чисел a и b уравнение:

$$(a^2 - b^2)x^2 + 2(a^3 - b^3)x + (a^4 - b^4) = 0$$

имеет решение.

То есть нам необходимо доказать, что D данного уравнения больше или равен 0.

Подчитаем $D/4$

$$\begin{aligned} D/4 &= (a^3 - b^3)^2 - (a^2 - b^2)(a^4 - b^4) = a^6 + b^6 - 2a^3b^3 - a^6 + a^2b^4 + b^2a^4b^6 = \\ &= a^2b^4 + b^2a^4 - 2a^3b^3 - 2a^3b^3 = a^2b^2(b^2 + a^2 - 2ab) = a^2b^2(a - b)^2 \end{aligned}$$

Тогда $D/4$ больше или равен 0. Значит для любых вещественных чисел a и b это уравнение имеет решение.

Задача 2

Заметим, что всего высказалось 18 человек. Один ничего не сказал. Также только одна группа может быть права (или никто). А люди из одной группы являются принадлежат одной и той же касте (либо рыцарям либо лжецам).

1 случай: Если все солгали, то тогда все эти 18 людей лжецы. Тогда оставшийся либо лжец либо рыцарь. А значит либо все (19) лжецы либо все кто говорили (18).

2 случай: Если правду сказала первая группа, то тогда оставшиеся 15 человек (как минимум) лжецы. А значит они тоже сказала не правду.

3 случай: Если правду сказала вторая группа, то тогда оставшиеся 12 человек (как минимум) лжецы. А значит они тоже сказала не правду.

4 случай: Если правду сказала третья группа, то тогда они имели ввиду только 1 и 2 группу. А значит оставшийся человек рыцарь. То есть всего 9 лжецов.

Ответ: 19 или 18 или 9 лжецов

Задача 4

Выйграет 2, его задача разделить (мысленно) поле на две равные части. А именно на два прямоугольника 2021×1010 . Тогда его задача после каждого хода первого ставить фишку на то же место, только в другом прямоугольнике. Например: если 1 поставил фишку на последнюю клетку первой строки (1, 2021). Где первая координата это строка, а вторая столбец. То второй ставит фишку на (1+1010, 2021) или (1011, 2021). Если же он поставил во втором прямоугольнике, то мы ставим в первом. Тогда второй выиграет, так как ситуация у двух прямоугольников разная после хода первого, а после хода второго она становится одинаковой, а они эдентичны (пока никто из них не выиграл).

Ответ: 2 выиграет

Задача 6

Нам нужно найти все пары таких простых чисел p и q , что $p^2 + 5pq + 4q^2$ является квадратом натурального числа.

Допустим, что $p^2 + 5pq + 4q^2 = x^2$

Тогда $p^2 + 5pq + 4q^2 = (p+2q)^2 + pq = x^2$. Тогда $pq = x^2 - (p+2q)^2 = (x-p-2q)(x+p+2q)$.

Так как p и q – простые, то существует 3 случая:

- 1) $p = x + p + 2q$. Тогда $x + 2q = 0$. А такого быть не может, так как все числа натуральные.
- 2) $q = x + p + 2q$. Тогда $x + p + q = 0$. А такого быть не может, так как все числа натуральные.
- 3) $1 = x - p - 2q$. Тогда $x = p + 2q + 1$. И $pq = x + p + 2q = p + 2q + 1 + p + 2q = 2p + 4q + 1$

Значит нам нужно найти такие пары, что $pq = 2p + 4q + 1$.

$$pq - 2p - 4q - 1 = 0$$

$$(p-4)(q-2) = 9.$$

Заметим что обе скобки больше или равны 0 (иначе они обе меньше 0, а тогда произведение меньше 9). А также эти скобки целые. Тогда рассмотрим случаи:

1. $p-4=9$ & $q-2=1$. Значит $p=13$ & $q=3$
2. $p-4=3$ & $q-2=3$. Значит $p=7$ & $q=5$
3. $p-4=1$ & $q-2=9$. Значит $p=5$ & $q=9$

Ответ: вот все пары p и q : $(13, 3)$; $(7, 5)$; $(5, 9)$