Санкт-Петербургский государственный университет
Олимпиада школьников по математике 2020–2021
Заключительный этап
8–9 классы

1. Найдите все такие значения a, для которых квадратные трехчлены x^2+2x+a и $x^2+ax+2=0$ имеют по два корня, причем сумма квадратов корней первого трехчлена равна сумме квадратов корней второго трехчлена.

2. Каждый из островитян либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт (и те, и другие на острове есть). Каждый житель острова про каждого знает рыцарь он или лжец. Часть жителей острова заявила, что на острове проживает четное число рыцарей, а все оставшиеся жители заявили, что на острове проживает нечетное число лжецов. Может ли на острове быть ровно 2021 житель?

3. Для произвольных вещественных чисел a и b $(b \neq 0)$ найдите наименьшее значение выражения $a^2+b^2+\dfrac{a}{b}+\dfrac{1}{b^2}$.

4. Точки B_1 и C_1 — середины сторон AC и AB треугольника ABC. На сторонах AB и AC как на диаметрах построены окружности ω_1 и ω_2. Обозначим за D точку пересечения прямой B_1C_1 с окружностью ω_1, лежащую по другую сторону от C относительно прямой AB. Обозначим за E точку пересечения прямой B_1C_1 с окружностью ω_2, лежащую по другую сторону от B относительно прямой AC. Прямые BD и CE пересекаются в точке K. Докажите, что прямая BC проходит через точку пересечения высот треугольника KDE.

5. На центральной клетке доски 11×11 стоит фишка. Петя и Вася играют в следующую игру. Каждым своим ходом Петя передвигает фишку на одну клетку по вертикали или горизонтали. Каждый своим ходом Вася возводит стенку с одной из сторон любой из клеток. Двигать фишку через стенку Петя не может. Игроки ходят по очереди, начинает Петя. Петя выигрывает, если сможет фишкой уйти с доски. Может ли он обеспечить себе победу вне зависимости от действий соперника?

6. Докажите, что существует бесконечно много таких натуральных чисел n, что количество различных нечетных простых делителей числа $n(n+3)$ кратно трем.

1	2	3	4	5	6	Сумма
10	20	15	20	15	20	100

Задача 1.

Пусть уравнение $x^2+2x+a=0$ имеет корни x_1 и x_2, а уравнение x^2+ax+2 имеет корни x_3 и x_4

Тогда $x_1^2+x_2^2=x_3^2+x_4^2 \Rightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(x_3+x_4)^2-2x_3x_4 \Rightarrow 4-2a=a^2-4$ (по теореме Виета)

Тогда $a^2+2a-8=0 \Rightarrow (a+4)(a-2)=0 \Rightarrow a_1=-4, a_2=2$. Возьмем a=2: $x^2+2x+2=(x+1)^2+1$

Тогда уравнение $x^2+2x+2=0$ не имеет корней, а должно иметь 2 корня по условию => a=2 не подходит. Проверим a=-4.

$x^2+2x-4=0$

D=4-4*1*(-4)=20>0 => это уравнение будет иметь 2 корня

$x^2-4x+2=0$

D=16-4*2*1=8>0 => это уравнение будет иметь 2 корня

Тогда подходит только a=-4

Ответ: a=-4.

Задача 3.

$a^2 + b^2 + a/b + 1/b^2 = (a^2+a/b+1/(4b^2)) + (b^2-\sqrt{3}+3/(4b^2)) + \sqrt{3} = (a+1/(2b))^2 + (b-\sqrt{3}/(2b))^2 + \sqrt{3} \geq \sqrt{3}$

Приведем пример a и b, при которых достигается это значение. Чтобы оно достигалось оба полученных квадрата должны быть равны 0. Тогда $b=\sqrt{3}/(2b) \Rightarrow 2b^2=\sqrt{3} \Rightarrow b=\sqrt{\sqrt{3}/2}$, а $a=-1/(2b)$

Ответ: $\sqrt{3}$.

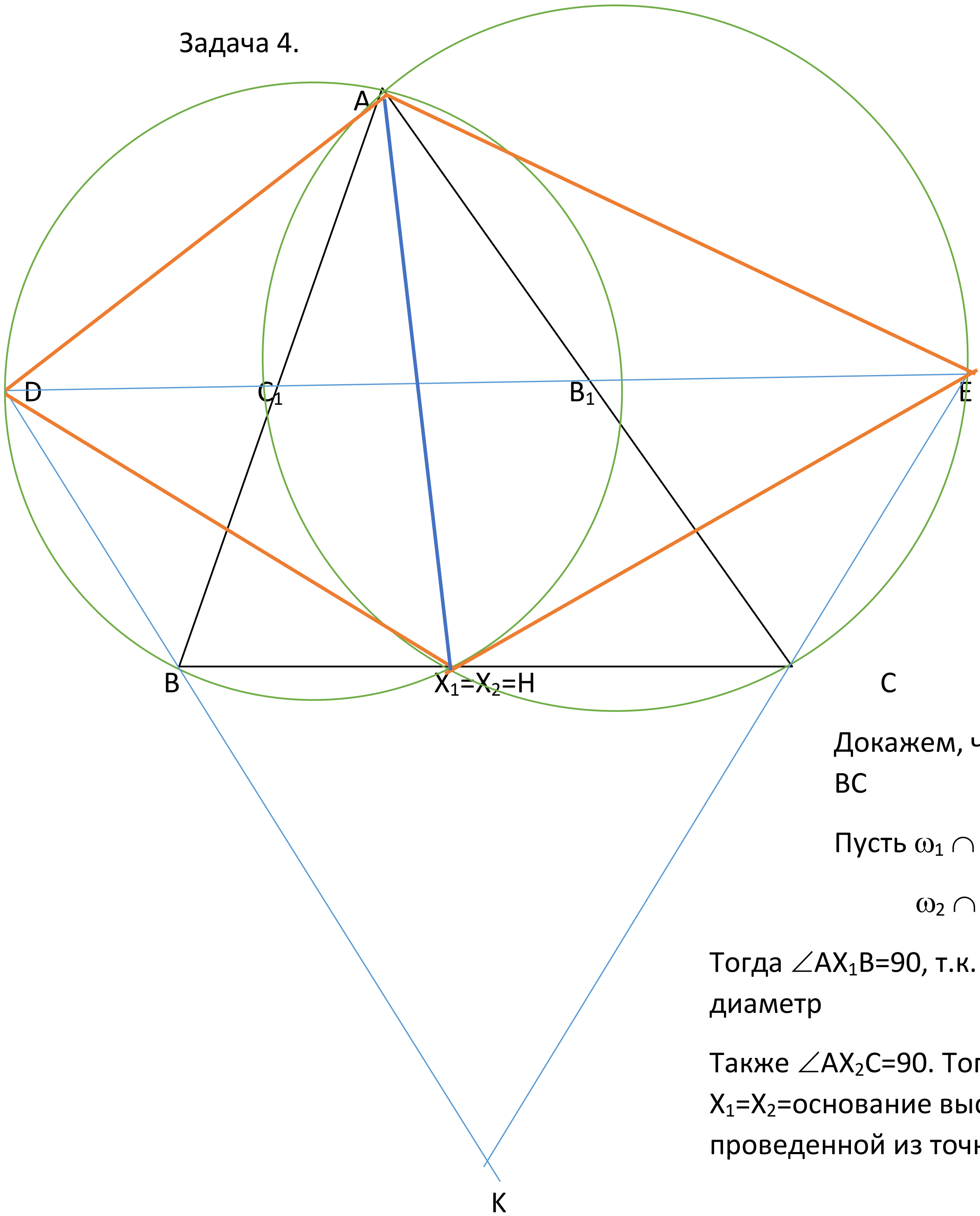
Задача 2.

Пусть рыцарь сказал, что на острове проживает четное число рыцарей, тогда это правда. Тогда лжецы не могли сказать эту же фразу, тогда они сказали, что на острове проживает нечетное число лжецов, и это ложь. Тогда на острове проживает четное число и лжецов, и рыцарей, тогда на острове четное число людей => их не 2021.

Пусть рыцарь сказал, что на острове проживает нечетное число лжецов, тогда это правда. Тогда лжецы не могли сказать эту же фразу, тогда они сказали, что на острове проживает четное число рыцарей, и это ложь. Тогда на острове проживает нечетное число и лжецов, и рыцарей, тогда на острове четное число людей => их не 2021.

Ответ: не может.

Задача 4.



Докажем, что $\omega_1 \cap BC=\omega_2 \cap BC$

Пусть $\omega_1 \cap BC=$т. X_1

$\omega_2 \cap BC=$т. X_2

Тогда $\angle AX_1B=90$, т.к. опирается на диаметр

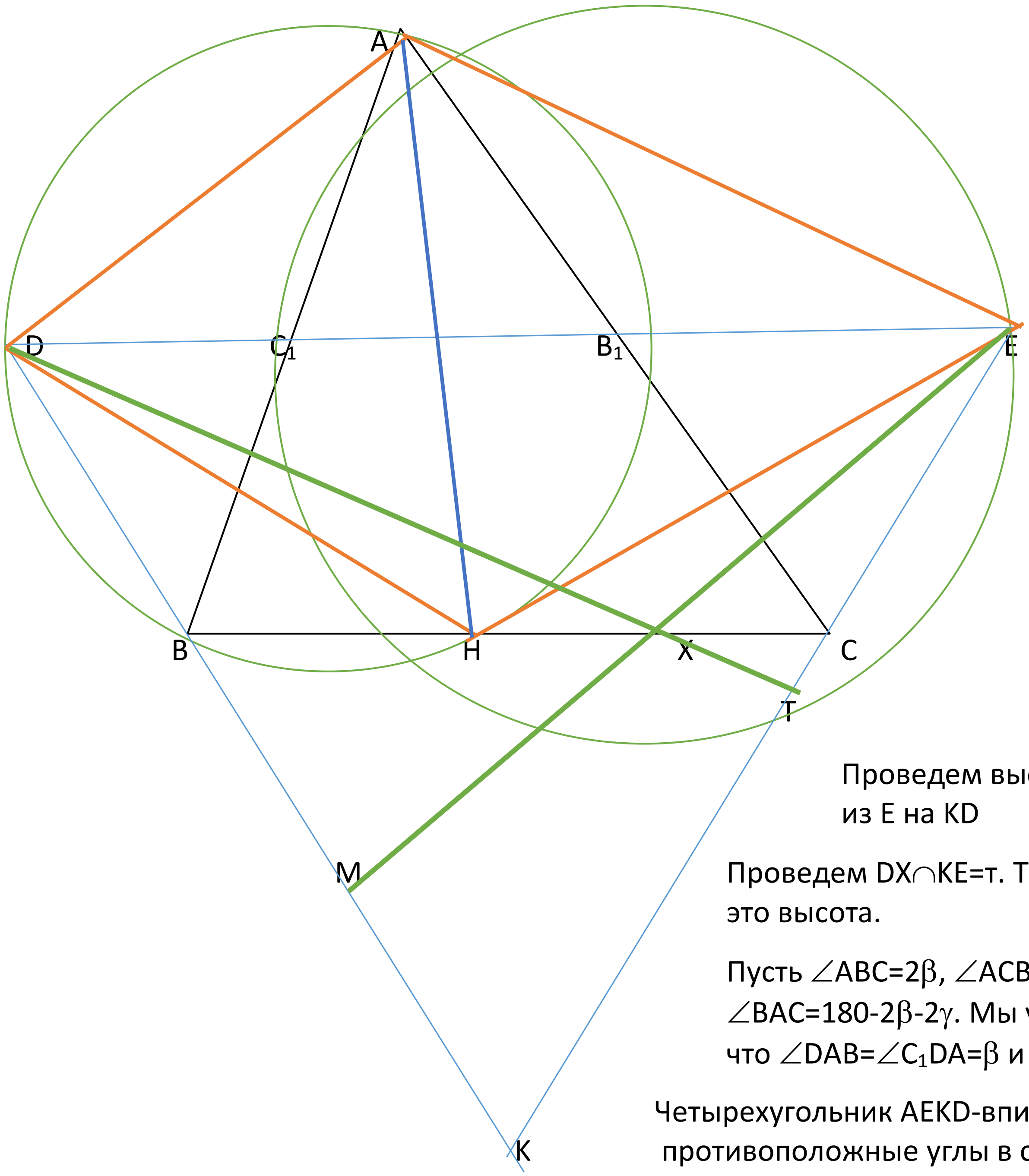
Также $\angle AX_2C=90$. Тогда $X_1=X_2=$основание высоты, проведенной из точки A

Проведем DH. Пусть $\angle DHB=\angle HDE=\beta$. Тогда $\angle DAB=\angle DHB=\beta$. Тогда $\angle DAB=\angle ADC_1=\beta$. Тогда $\angle ABH=\angle ADH=2\beta$. Также $\angle BDH=90-2\beta$. Тогда мы получили, что $\angle ABC=2\beta$, а $\angle KDE=90-2\beta+\beta=90-\beta$

Аналогично, если $\angle ACB=2\gamma$, то $\angle DEH=\angle DEA=\gamma$, $\angle KED=90-\gamma$

Проведем AH. $AH\perp BC \Rightarrow AH\perp B_1C_1 \Rightarrow AD=DH$ и $AE=EH$

Построим заново, используя уже доказанные факты



Проведем высоту $EM\cap BC$=т.X из E на KD

Проведем $DX\cap KE$=т. T и докажем, что это высота.

Пусть $\angle ABC=2\beta$, $\angle ACB=2\gamma$. Тогда $\angle BAC=180-2\beta-2\gamma$. Мы уже доказывали, что $\angle DAB=\angle C_1DA=\beta$ и $\angle CAE=\angle B_1EA=\gamma$

Четырехугольник AEKD-вписанный, так как противоположные углы в сумме дают 180.

Тогда $\angle DKE=\beta+\gamma$. Из треугольника DME $\angle DEM=\beta$, т.к. $\angle KDE=90+\beta$ (уже доказывали). Тогда т.к. $\angle ADE=\angle DEX$, то $AD||EX$. $\angle HDE=\beta$ и $\angle XED=\beta$, и $DE||BC$, тогда HDEX-равнобокая трапеция. Тогда $AD=DH=EX$. Тогда $AD||EX$ и $AD=EX \Rightarrow$ AEXD-пар-м. Тогда $\angle MXT=\angle DXE=\angle DAE=180-\beta-\gamma$. Найдем $\angle XTK$ по сумме углов четырехугольника MXTK. $\angle XTK=360-90-(\beta+\gamma)-(180-\beta-\gamma)=90 \Rightarrow$ DT-высота. Тогда высоты треугольника KDE пересекаются на BC.

Ч. Т. Д.

Задача 6.

Пусть таких n не бесконечно много. Тогда на каком-то этапе они закончатся, и кол-во нечетных простых делителей чисел n(n+3) не будет делиться на 3.

1) Тогда возьмем числа n(n+3) и (n+1)(n+4), идущие где-то после чисел, у которых кол-во нечетных простых делителей чисел делится на 3. Пусть их кол-ва простых нечетных делителей дают разные остатки на 3, т.е. 2 и 1.

   Тогда их произведение будет иметь столько же нечетных простых делителей, сколько мы получим, сложив кол-во нечетных простых делителей у первого и второго, т.к. они оба могут делиться только на какую-то степень 2.

   Тогда n(n+3)(n+1)(n+4) делится на 3, т.е. $(n^2+4n)(n^2+4n+3)$ делится на 3, тогда мы получили еще одно подходящее число-противоречие. Тогда у нас после последнего подходящего числа все остатки одинаковы.

2) Тогда возьмем числа n(n+3) и (n+1)(n+4), идущие где-то после чисел, у которых кол-во нечетных простых делителей чисел делится на 3. Тогда их кол-ва простых нечетных делителей дают одинаковые остатки на 3 (доказано выше), например, 1 и 1.

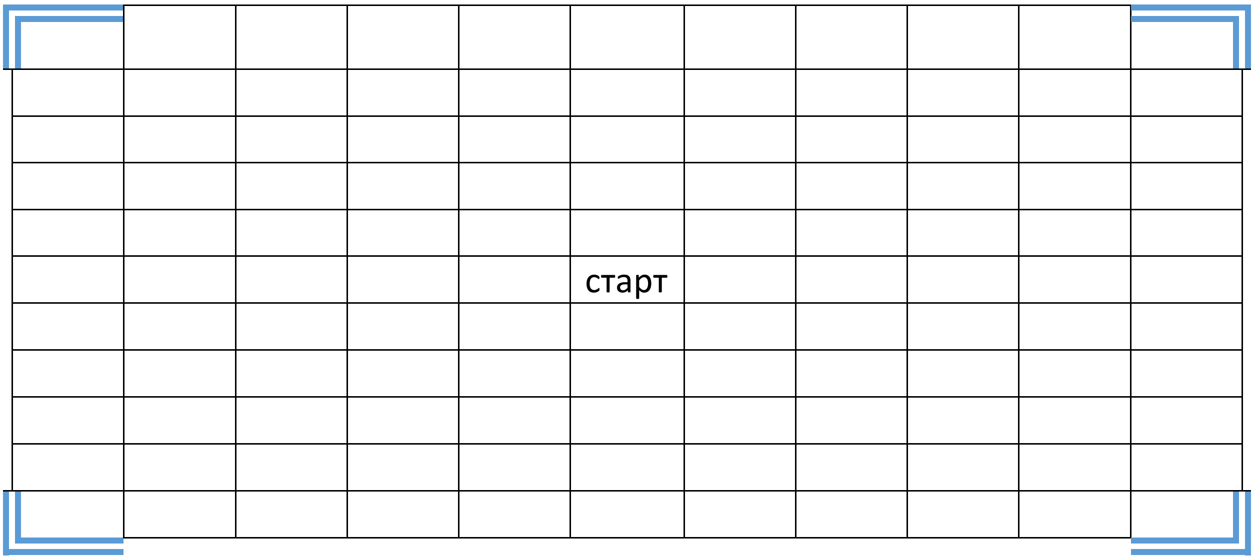
   Тогда их произведение будет иметь столько же нечетных простых делителей, сколько мы получим, сложив кол-во нечетных простых делителей у первого и второго т.к. они оба могут делиться только на какую-то степень 2.

   Тогда n(n+3)(n+1)(n+4) дает остаток 2 при делении на 3, т.е. $(n^2+4n)(n^2+4n+3)$ дает остаток 2 при делении на 3

   Тогда взяв $n_1=n^2+4n$ и $n_2=n_1+1$, действуя по алгоритму в п.1 мы получим еще одно подходящее число-противоречие.

Тогда наше предположение оказалось неверным, значит существует бесконечно много таких натуральных чисел n, что количество различных нечетных простых делителей числа n(n + 3) кратно трем.

Задача 5.



В прямоугольнике 5*11, в который попадает какая-то граница квадрата и в котором в какой-то момент будет находиться Петя, Вася точно успеет поставить закрашенные стенки так чтобы Петя за это время не вышел с доски, т.к. стенок нужно будет поставить 4, а ходов Пете нужно минимум 5.

Тогда мы сможем всегда не дать Пете выйти за границу доски, т.е. Петя не может обеспечить себе победу вне зависимости от действий соперника.