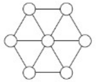
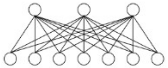
ВОПРОС 1: ЭССЕ

16 из 25 баллов

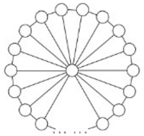
1. На картинке нарисовано n кружочков, некоторые кружочки соединены отрезками. Требуется расставить в кружочках числа от 1 до n (без повторений) так, чтобы выполнялось свойство: если кружочки соединены отрезками, то стоящие в них числа должны быть взаимно просты (то есть не иметь общих натуральных делителей, отличных от 1). Можно ли это сделать в каждом из следующих случаев? Если можно — опишите расстановку чисел, если нет — объясните, почему нельзя.



а) $n = 7$



б) $n = 10$



в) $n = 2022$: по кругу стоят 2021 кружочков, и еще один в центре

Данный ответ: а) Возможно

В центре поставим число 7. (оно взаимно просто со всеми остальными числами)

Посмотрим на два нижних кружка. В тот, который левее ставим 1. Далее проставляем все остальные числа (2-6) против часовой стрелки.

(2 - нижний правый, 3 - средний правый, 4 - верхний правый, 5 - верхний левый, 6 - средний левый.)

б) Невозможно

В трёх верхних кружках должны быть числа взаимно простые с семью остальными. Какими могут быть эти числа?

Допустим, что все они (которые в трёх верхних кружках) чётные. Но в таком случае, ещё два чётных числа остаются на н ижние кружки. Тогда верхнее чётное число и нижнее чётное

число взаимно простыми не будут (общий делитель - 2).

Поэтому в верхних кружках только нечётные числа. (Одни из этих:1, 3, 5, 7, 9). *Соответственно, в нижних кружкак собр ались все чётные числа, **в том числе 6 и 10**. (2, 4, **6**, 8, **10**).* Из - за шести внизу, наверху 3 и 9 быть не может (общий делитель - 3), а из - за десяти внизу, наверху 5 быть не может (общий делитель - 5). Наверху возможными остаются только 1 и 7,
чего недостаточно т. к. наверху должно быть 3 числа. Противоречие.

в) Невозможно

Можно перепробовать тысячу вариантов, но всегда где-то будет несостыковочка.

Я придумала самый оптимальный и простой вариант, где можно проставить все числа, и несостыковочка появится тольк о в последнем числе.

В центр ставим 1 (он взаимно прост с любым натуральным числом).

Далее по кругу расставляем числа 2 - 2022 по порядку (без разницы в какой точке начинать и в какую сторону идти).

Несостыковка в том, что когда мы уже проставили весь круг и замкнули его, то рядо оказываются числа 2 и 2022. У них есть общий делитель - 2.

Противоречие.

ВОПРОС 2: ЭССЕ

16 из 30 баллов

2. Назовем *каскадом, порожденным числом* r, набор из 12 натуральных чисел: $r, 2r, \ldots, 12r$.

а) Может ли какая-то пара чисел (a, b) содержаться в шести различных каскадах? Если да — приведите пример таких чисел, если нет — объясните, почему не может.

б) Верно ли, что множество натуральных чисел можно раскрасить в 12 цветов так, что в каждом каскаде все элементы будут разного цвета?

Данный ответ: а) Может

Это числа 60 и 120.

1) , 2) , ... - номера каскадов.

1) 60=r, 120=2r

2) 60=2r, 120=4r

3) 60=3r, 120=6r

4) 60=4r, 120=8r

5) 60=5r, 120=10r

6) 60=6r, 120=12r

б) Возможно

Числа 1 - 12 покрасить каждый в свой цвет.

(Пронумерую цвета: № 1, 2, 3, ... 11, 12)

Все кратные двойке 14 - 24 покрасить в цвета № 1, 3, 5, 7, 9 и 11.

Числа 15, 18, 21, 27, 30, 33, 36 покрасить соответственно в № 1, 2, 4, 7, 8, 10.

Продолжаем закрашивать по тому- же алгоритму.

Пропущенные числа можно покрасить в любой цвет.

ВОПРОС 3: ЭССЕ

0 из 20 баллов

3. В треугольнике ABC точка D — середина стороны AB, E — середина стороны AC, F — середина биссектрисы AL, причем $DF = 1$, $EF = 2$. На плоскости изображены точки D, E, F так, что прямая DF горизонтальна, а остальные элементы чертежа стерты. Можно ли восстановить положение хотя бы одной из вершин треугольника, если известно, что вершина A находилась сверху от прямой DF?

Данный ответ: Невозможно, слишком мало точных сведений.

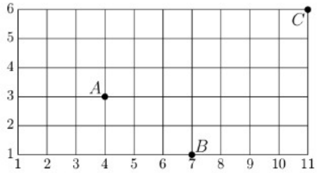
ВОПРОС 4: ЭССЕ

23 из 25 баллов

4. Город имеет форму клетчатого прямоугольника 5×10 клеток: линии — улицы, клетки — жилые кварталы. Расстояние между перекрестками измеряется как длина самого короткого пути по улицам города, проходящего от одного перекрестка до другого. Например, для перекрестков A, B и C на картинке $AB = 5$, $AC = 10$, $BC = 9$. Можно ли отметить в этом городе k перекрестков так, чтобы все расстояния между этими перекрестками оказались различными числами? Если да — укажите эти перекрестки (например, перекресток C находится на пересечении 11-й вертикальной и 6-й горизонтальной улицы), если нет — объясните, почему нельзя.

Решите задачу для

а) $k = 5$; б) $k = 6$; в) $k = 7$.



Данный ответ: а) Возможно

Координаты пяти точек: a=(1;2), b=(3;2), c=(1;5), d=(1;6) ,e=(8;6).

Тогда расстояния между ними равны:

ab=2, bc=5, cd=1, de=7.

ac=3, bd=6, ce=8,

ad=4, be=9,

ae=11,

б) Возможно

Координаты шести точек: a=(1;1), b=(3;1), c=(1;5), d=(2;6) ,e=(11;6), f=(11;5)

Тогда расстояния между ними равны:

ab=2, bc=6, cd=3, de=8, ef=1.

ac=4, bd=5, ce=11, df=9,

ad=7, be=13, cf=10,

ae=15, bf=12,

af=14,

в) Невозможно

Между самыми удалёнными друг от друга перекрёстками - 15 клеток.
Если подсчитать кол - во различных расстояний требуемых для k=7, то получится: 7*6/2=21 различное расстояние.
Но максимум различных расстояний может быть 15 (1, 2, 3, ...14, 15)! Противоречие.