

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Олимпиада школьников по математике 2020–2021
Заключительный этап
8–9 классы

1. Докажите, что для любых вещественных чисел a и b уравнение

$$(a^6 - b^6)x^2 + 2(a^5 - b^5)x + (a^4 - b^4) = 0$$

имеет решение.

2. На острове живут лжецы и рыцари. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Каждый житель острова про каждого из остальных знает, рыцарь он или лжец. Как-то раз встретились 28 островитян. Двое из них сказали: «Ровно двое из нас лжецы», затем четверо из остальных сказали: «Ровно четверо из нас лжецы», потом восемь из оставшихся сказали: «Ровно восемь из нас лжецы», наконец, все оставшиеся 14 сказали: «Ровно 14 из нас лжецы». Сколько лжецов было среди встретившихся? Приведите все возможные варианты и докажите, что других нет.

3. Сумма неотрицательных чисел a , b и c равна 3. Найдите наибольшее значение выражения $ab + bc + 2ca$.

4. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках K и L . Прямая ℓ пересекает окружность ω_1 в точках A и C , а окружность ω_2 — в точках B и D , причем точки идут на прямой ℓ в алфавитном порядке. Обозначим через P и Q соответственно проекции точек B и C на прямую KL . Докажите, что прямые AP и DQ параллельны.

5. Дана клетчатая доска 2021×2021 . Петя и Вася играют в следующую игру. Они по очереди ставят фишки в свободные клетки доски. Выигрывает тот игрок, после хода которого в каждом прямоугольнике 3×5 и 5×3 будет стоять фишка. Начинает Петя. Кто из игроков может обеспечить себе победу вне зависимости от действий соперника?

6. Найдите все такие натуральные числа n , что число $2^n + n^2 + 25$ является кубом простого числа.

1	2	3	4	5	6	Сумма
15	20	15	0	20	5	75

1.

$$(a^6 - b^6)x^2 + 2(a^5 - b^5)x + (a^4 - b^4) = 0$$

Это квадратное уравнение.

Если у него дискриминант больше или равен 0, то решение точно есть.

$$D = (2(a^5 - b^5))^2 - 4(a^4 - b^4)(a^6 - b^6)$$

$$D = (4(a^5 - b^5)^2) - 4(a^4 - b^4)(a^6 - b^6)$$

$$D = (4(a^{10} - 2a^5b^5 + b^{10})) - 4(a^4 - b^4)(a^6 - b^6)$$

$$D = (4(a^{10} - 2a^5b^5 + b^{10} - (a^4 - b^4)(a^6 - b^6)))$$

$$D = (4(a^{10} - 2a^5b^5 + b^{10} - a^{10} + a^4b^6 + a^6b^4 - b^{10}))$$

$$D = (4(-2a^5b^5 + a^4b^6 + a^6b^4))$$

$$D = (4(a^4b^6 + a^6b^4 - 2a^5b^5))$$

$$D = (4(a^4b^4(b^2 + a^2 - 2ab)))$$

$$D = (4(a^4b^4(b + a)^2))$$

$$D = 4a^4b^4(b + a)^2$$

4 – положительное число

a^2b^2 - неотрицательное число

$(b + a)^2$ - неотрицательное число

Значит дискриминант неотрицательное число, значит решение точно есть.

2.

Есть утверждения:

Двое лжецы

Четверо лжецы

Восемь лжецов

Четырнадцать лжецов

Всего есть 5 вариантов развития действий:

Какое - то одно из этих 4 высказываний верно или ничего не верно.

Допустим, последнее.

Тогда 28 лжецов.

Такое могло быть, так как все сказали неправду.

Допустим, первое высказывание верно.

Тогда всего 2 лжеца. Однако 26 человек сказали неправду. Такого быть не может.

Допустим, второе высказывание верно.

Тогда всего 4 лжеца. Однако 24 человека сказали неправду. Такого быть не может.

Допустим, второе высказывание верно.

Тогда всего 8 лжецов. Однако 20 человек сказали неправду. Такого быть не может.

Допустим, второе высказывание верно.

Тогда всего 14 лжецов. 14 человек сказали неправду. Совпадает, такое быть могло.

Ответ: могло быть 28 лжецов или 14 лжецов.

3.

Пусть $a + c =$ какому-то значению $2x$

Чтобы выражение было максимальным нужно, чтобы $a = c = x$, так как:

2ac максимально если $a = c$

Докажем это:

$$2x * x > 2y(2x - y) \quad (y \text{ меньше } x)$$

$$x * x > y(2x - y)$$

$$x^2 > 2xy - y^2$$

$$0 > 2xy - y^2 - x^2$$

$$x^2 - 2xy + y^2 > 0$$

$$(x - y)^2 > 0$$

y меньше x , значит неравенство верно.

$ab + bc = b(a + c)$ значит $ab + bc$ не зависит от того как будет распределено $2x$ на a и c .

Значит $ab + bc + 2ca$ максимально, когда $a = c = x$.

$$a + b + c = 3, \text{ значит } b = 3 - a - c$$

$$\begin{aligned} ab + bc + 2ca &= b(a + c) + 2ac = (3 - a - c)(a + c) + 2ac = 3a + 3c - a^2 - ac - ac - c^2 \\ &+ 2ac = 3(a + c) - a^2 - c^2 = 3(a + c) + 2a^2 - 2a^2 - a^2 - c^2 = 3(a + c) - 2a^2 + (a + c)(a - c) \\ &= (a + c)(3 + a - c) - 2a^2 \end{aligned}$$

$$a = c \Rightarrow (a + c)(3 + a - c) - 2a^2 = (2a)(3) - 2a^2 = 2a(3 - a)$$

$$a + b + c = 3, a = c, \text{ значит } a \leq 1.5$$

При $a = 1.5$ $2a(3 - a) = 4.5$, заметим, что при уменьшении a , $2a(3 - a)$ тоже уменьшается, так как $2a$ уменьшается в 2 раза быстрее, чем $3 - a$ увеличивается.

5.

Выиграет 1. Сначала ему нужно поставить свою фишку на самую центральную клетку, то есть на $1011*1011$.

А дальше ставить симметрично центральной вертикали 1011 . Если 1 игрок поставил на саму эту вертикаль, то ставим симметрично относительно горизонтали 1011 . Тогда если 2 игрок ставит фишку и новый прямоугольник заполнен, то и всегда 1 игрок следующим ходом заполнит прямоугольник,

способом которой я показывал выше. Значит на каждое действие 2 у 1 есть свое действие. Пока будет ходить 2, 1 тоже будет ходить.

Ответ: 1 всегда будет выигрывать.

6.

Только при $n = 6$. $2^6 + 36 + 25 = 61 + 64 = 125$

$$5^3 = 125$$

$$2^n + n^2 + 25$$

2^n сравним с 2, 4, 8 или 6 по модулю 10

n^2 сравним с 1, 4, 9, 6, 5 или 6 по модулю 10

куб простого числа сравним с 1 или 9 по модулю 10 (не считая чисел 2, 5)

чтобы получить на конце 1 или 9 можно сложить 2 и 4 или 6 и 8 потом прибавив 25, однако этими случаями куб не может быть получен.