Олимпиада школьников СПбГУ по математике.
Заключительный этап. 2020/2021 учебный год. 10 – 11 классы.

1. При каких натуральных n клетчатую доску $n \times n$ можно разрезать на квадраты 1×1 и 2×2 так, что квадратов разных размеров будет поровну?

2. Положительные числа a, b, c таковы, что $a^2b + b^2c + c^2a = 3$. Найдите минимальное значение выражения

$$A = a^7b + b^7c + c^7a + ab^3 + bc^3 + ca^3.$$

3. Дан неравнобедренный остроугольный треугольник ABC. В нем проведены высоты BB_1 и CC_1, пересекающиеся в точке H. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами H и C соответственно касаются прямой AB. Из точки A к ω_1 и ω_2 проведены касательные, отличные от AB. Обозначим точки их касания с этими окружностями через D и E соответственно. Найдите угол B_1DE.

4. Петя написал на доске подряд n последовательных двузначных чисел ($n \geq 2$), первое из которых не содержит цифру 4, а последнее — цифру 7. Вася подумал, что это десятичная запись натурального числа x, и разложил x на простые множители. Оказалось, что их всего два и они различаются на 4. Что написано на доске?

5. В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством 3^n, $3^{n-1} \cdot 5$, $3^{n-2} \cdot 5^2$, $3^{n-3} \cdot 5^3$, $\ldots$, $3 \cdot 5^{n-1}$, 5^n пиастров, где n — натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?

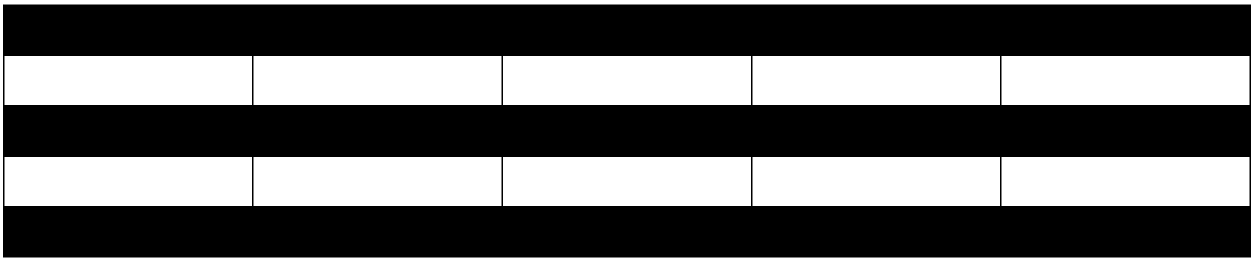
1	2	3	4	5	Сумма
20	20	20	20	20	100

Вариант - 3

Задание 1.

Оценка: пусть квадратов каждого размера было x, тогда сумма площадей квадратов 1x1 – x, 2x2 – 4x, площадь исходного квадрата – 5x, с другой стороны, площадь исходного квадрата равна n^2, откуда $5x = n^2$, n кратно 5.

Покажем, что квадрат 5x5 нельзя разрезать на равное количество квадратов данных площадей. Закрасим его как показано на схеме:



Заметим, что каждый квадрат 2x2 обязан включать в себя 2 белые клетки только из одной строки, следовательно, мы можем взять не более двух квадратов, включающих в себя клетки верхней белой строки и не более двух, включающих белые клетки нижней, но тогда мы получим не более 4 квадратов 2x2, но их должно быть 25/5 = 5 – противоречие.

Пример: пусть n = 5*2k, где k – натуральное число. Разделим доску на прямоугольники 10k x 8k и 10k x 2k, первый разобьём на квадратики 2x2, второй – на квадраты 1x1, тогда их число будет одинаково(20k).

Если n = 5*(2k+1), где k – натуральное число, то разобьём доску на квадрат (10k+4)*(10k+4) и “ободок”, включающий в себя 20k + 9 квадратиков 1x1, тогда, разбив крупный подквадрат на квадратики 2x2, мы получим $(5k+2)^2 = 25k^2 + 20k + 4$ таких квадратиков, то есть не меньше, чем квадратиков 1x1($25k^2 > 9$), заметим, что разность числа квадратов 2x2 и 1x1 кратна 5. Будем делить по квадрату 2x2 на 4 квадрата 1x1, уменьшая эту разность на 5, чем рано или поздно достигнем момента, когда она будет равна 0, и число квадратиков 2 типов будет одинаковым.

Ответ: при n, кратных 5 и больше 5.

Задача 2

Обратим внимание, что по неравенству о средних:$\frac{ba^7+ab^3}{2} \geq a^4b^2$

Имеем, применив данное неравенство для 3 групп слагаемых($ba^7 + ab^3$; $cb^7 + bc^3$; $ac^7 + ca^3$):

A ≥ 2*(a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2)

Однако, a^4b^2 + 1 ≥ $2a^2b$ по неравенству о среднем геометрическом и среднем арифметическом, следовательно:

A ≥ 2*($2a^2b$ + $2b^2c +$ $2c^2a$ - 3) = 2*(2*3-3) = 6

Данный минимум достигается при a = b = c = 1

Ответ: 6

Задание 3

Пусть A1 – основание высоты, опущенной из A в ΔABC, тогда в силу вписанности четырёхугольника AC1A1C углы C1AH и HCB равны(три высоты остроугольного треугольника пересекаются в одной точке). C1 – точка касания окружностей w1 и w2 с AB, ибо радиус окружности перпендикулярен касательной к ней. Далее, так как точки касательных, опущенных из некоторой точки к окружности симметричны относительно прямой, соединяющей эту точку и центр данной окружности, то D – образ симметрии C1 относительно AH, углы C1AH = HAD, AC1H = HDA = 90 градусам. Далее, углы HAD и HAB1 не могут быть равны потому, что в таком случае будут равны углы B и C, что противоречит неравнобедренности треугольника ABC – точки H и B1 различны. Однако угол HB1A тоже прямой, откуда точки H, A, B1 и D лежат на одной окружности, следовательно, угол HB1D = HAD.

Пусть T – точка на продолжении луча BB1, E – образ точки C1 относительно AC. Так как четырёхугольник BC1B1C вписан, то острый угол BCC1 = BB1C1 = 90 – C1B1A = 90 – AB1E(из симметрии C1 и E) = EB1T так как B1T – перпендикуляр к AC, но тогда между острыми углами выполняется следующее равенство:

EB1T = BCC1 = C1AH = HB1D, причём так как точки H, B1 и T лежат на одной прямой, а точки D и E лежат по разные стороны от перпендикулярных прямых B1T и AC(прямые C1B1 и B1E лежат по одну сторону от прямой B1T из симметрии относительно AC точек C1 и E, однако точка D не может лежать на луче C1B1, иначе она совпала бы с B1, следовательно, она лежит на прямой, симметричной C1B1 относительно HT), то точки D, B1 и E лежат на одной прямой, причём точка B1 – между D и E , откуда угол B1DE равен 0

Ответ: 0

Задача 5. Обозначим данный максимум за x_n для натурального n. Покажем с помощью математической индукции по n, что $x_n = 5^{n+1} - 6 * 3^n$.

База: n = 1, действительно 7 пиастров нельзя выдать монетами номиналом 5 и 3, поскольку, если бы это было возможно, то в выдачу 7 не входила бы 5, поскольку иначе нам пришлось бы выдать ещё 2 пиастра монетами номиналом 5 и 3, что невозможно. Если бы 7 пиастров можно было бы выдать монетами только номинала 3, то семь делилось бы на 3 – противоречие.

Однако, 8 = 5 + 3, 9 = 3 + 3 + 3, 10 = 5 + 5, если же нам надо выдать число пиастров большее 10, то будем выдавать по 3 пиастра до тех пор, пока нам не останется выдать по 8, 9 или 10 пиастров(так как остатки этих 3 чисел при делении на 3 различны, то мы гарантированно дойдём до одного из данных номиналов), что возможно сделать как показано выше.

Подставив в формулу значение n = 1, нетрудно убедиться, что x_1 = 7.

Шаг индукции: пусть максимум пиастров, который нельзя выдать, при некотором n – x_n, тогда покажем, что $x_{n+1} = 2*5^{n+1} + 3*x_n$

Обратим внимание, что номиналы всех монет, кроме 5^{n+1} кратны 3, значит, если выдать такую сумму пиастров возможно, то выдав необходимое число монет номинала 5^{n+1} нам необходимо будет выдать число пиастров, кратное 3. Следовательно, мы должны выдать 2 или 5 и более монет данного номинала, но во втором случае так как $x_n < 5^{n+1}$, мы не сможем выдать требуемую сумму, войдя в убыток. Тогда, дав две монеты суммой 5^{n+1}, мы будем должны выплатить $3*x_n$ монетами номиналом $3^{n+1}\ldots, 3*5^n$, что равносильно задаче выдачи монетами номинала $3^n\ldots, 5^n$ x_n пиастров, что невозможно по предположению индукции, следовательно, сумму $2*5^{n+1} + 3*x_n$ нельзя выдать. Однако, если сумма выдачи y больше данного числа, то так как 5^{n+1} не кратно 3, одно из чисел y, y - 5^{n+1}, y - $2*5^{n+1}$(назовём его z) будет кратно 3 и больше чем $3*x_n$, но так как z/3 можно выдать монетами номиналом $3^n\ldots, 5^n$ по предположению индукции($z > x_n$), то сумму z можно выдать монетами номиналом $3^{n+1}\ldots, 3*5^n$, следовательно сумма y выплачивается монетами заданных номиналов.

Подставляя, что $x_n = 5^{n+1} - 6*3^n$ по предположению индукции, получим $x_{n+1} = 2*5^{n+1} + 3*5^{n+1} - 6*3^{n+1} = 5^{n+2} - 6*3^{n+1}$ – ч.т.д.

Ответ: $= 5^{n+1} - 6*3^n$.

Задача 4

Пусть воспринятое Васей число – A, A = x.

Обратим внимание, что p > 20, иначе A = p(p+4) < 1000, но A >= 1010. Заметим, что последнее число Пети обязано оканчиваться на 1. Действительно, если бы оно оканчивалось на 2,4,6,8,0,5, то в Васином разложении возник бы простой множитель m где m<=5, что невозможно, ибо p и p+4 > 20, следовательно, наше число A может оканчиваться только цифрами 1,3,9, но A = p(p+4), где p и p+4 – простые числа, однако тогда $A = (p+2)^2 - 4$, следовательно A+4 оканчивалось бы на 7 или 3, если бы A оканчивалось на 3 или 9 соответственно , но на данные цифры(7,3) квадраты натуральных чисел в десятичной записи не оканчиваются, значит, A оканчивается на 1, откуда A+4 кратно 5, следовательно, и 25 как квадрат числа(5 – простое), значит, второй цифрой справа числа A+4 может быть только 2 или 7(числа, кратные 25, оканчиваются на 00, 50, 25 или 75), однако во втором случае последнее записанное Петей число содержало бы цифру 7, следовательно, вторая цифра числа справа А – 2, откуда последнее число, которое записал Петя – 21.

Далее, обратим внимание, что $p > 20$, иначе $A < 1000$, но так как 2 не кратно 3, то одно из чисел p, $p+2$, $p+4$ обязано делиться на 3, но p и $p+4$ – простые числа не меньше 10, следовательно, они не могут делиться на 3, откуда $p+2$ кратно 3, $A+4$ кратно 9, А сравнимо с 5 по модулю 9.

Выпишем всевозможные значения А, отсеивая их по критерию того, что если А даёт остаток 5 при делении на 9, то и сумма цифр А даёт тот же остаток при делении на 9

Число	Остаток суммы цифр при делении на 9
2021	5
192021	6
18192021	6
1718192021	5
161718192021	3
15161718192021	0
1415161718192021	5
131415161718192021	0
12131415161718192021	3
1112131415161718192021	5
101112131415161718192021	6

Однако в числе 1112131415161718192021 сумма цифр на нечётных позициях, начиная с конца числа – 46, на чётных – 13, их разность – 33, следовательно, данное число делится на 11, однако p и $p+4$ не могут быть 11, так как оба этих числа не меньше 20.

Число 1415161718192021 нам не подходит потому, что первое число, записанное Петей в таком случае содержит 4.

Число 1718192021 делится на 7, так как 1718192 делится на 7, ибо $1718192 = 245456*7$, 1718192000 делится на 7, и 1718192021 делится на 7, но $p > 20$, поэтому ни p, ни $p+4$ не могут равняться 7.

Осталось только число 2021 = 43*47 – произведение двух простых, отличающихся на 4, где 20 не содержит цифры 4, а 21 – цифры 7 – данное число удовлетворяет всем требуемым критериям.

Ответ: 2021