Олимпиада школьников СПбГУ по математике.
Заключительный этап. 2020/2021 учебный год. 10 – 11 классы.

1. При каких натуральных n клетчатую доску $n \times n$ можно разрезать на квадраты 1×1 и 2×2 так, что квадратов разных размеров будет поровну?

2. Положительные числа a, b, c таковы, что $a^2b + b^2c + c^2a = 3$. Найдите минимальное значение выражения

$$A = a^7b + b^7c + c^7a + ab^3 + bc^3 + ca^3.$$

3. Дан неравнобедренный остроугольный треугольник ABC. В нем проведены высоты BB_1 и CC_1, пересекающиеся в точке H. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами H и C соответственно касаются прямой AB. Из точки A к ω_1 и ω_2 проведены касательные, отличные от AB. Обозначим точки их касания с этими окружностями через D и E соответственно. Найдите угол B_1DE.

4. Петя написал на доске подряд n последовательных двузначных чисел ($n \geq 2$), первое из которых не содержит цифру 4, а последнее — цифру 7. Вася подумал, что это десятичная запись натурального числа x, и разложил x на простые множители. Оказалось, что их всего два и они различаются на 4. Что написано на доске?

5. В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством 3^n, $3^{n-1} \cdot 5$, $3^{n-2} \cdot 5^2$, $3^{n-3} \cdot 5^3$, $\ldots$, $3 \cdot 5^{n-1}$, 5^n пиастров, где n — натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?

1	2	3	4	5	Сумма
5	15	18	20	0	58

Задача 1
Т к квадратов 2x2 и 1x1 поровну, то общая площадь nxn должна делиться на 5, поэтому n должно делиться на 5. Пусть количество 2x2 a, количество 1x1 b. Тогда имеет место следующая система:
4a+b=n*n;
a=b;
Из нее следует что a=n*n/5.
Заметим что это возможно при всех n начиная с 10.
Ответ: n=5*k, k={2,3,4…}.

Задача 2
a*a*b+b*b*c+c*c*a=3;
(a*a*b+b*b*c+c*c*a)^2=3^2;
a^4*b^2+b^4*c^2+c^4*a^2>=a^3*b^1*c^2+a^2*b^3*c^1+a^1*b^2*c^3 (по транснеравенству)
(a^4*b^2+b^4*c^2+c^4*a^2)*3>=9;
a^4*b^2+b^4*c^2+c^4*a^2>=3;

a^7*b+b^7*c+c^7*a+a*b^3+b*c^3+c*a^3=(c^7*a+c*a^3)+(b^7*c+b*c^3)+(a^7*b+a*b^3)>=2*(a^4*b^2+b^4*c^2+c^4*a^2) (по Коши)>=6
Ответ: 6.

Задача 3
1) Угол C1AH=HAD, т к AH проходит через центр первой окружности и AC1, AD касательные.
2) AH перпендикулярно BC т к H ортоцентр
3) AC1=AD как отрезки касательных проведеннные из одной точки
4) В треугольнике AC1D AH биссектриса, а значит и медиана и высота поэтому C1D перпендикулярно AH, а значит прямые C1D и BC параллельны
5) Угол AC1D=C1HA т к C1D высота прямоугольного треугольника, значит четырехугольник AC1HD вписанный, также угол AC1H=AB1H=90 град поэтому AC1HB1 тоже вписанный поэтому пятиугольник AC1HB1D тоже вписанный, из этого возьмем что угол C1AB1=C1DB1, ABD1=AC1D, DAB1=180град-2*ADC1-C1DB, C1AD=180-2*AC1D
6) Угол C1AC=CAE т к C центр окружности, C1A AE отрезки касательных проведенных из одной точки, также из равенства отрезков касательных можно взять AC1=AD=AE ==> треугольник ADE равнобедренный, угол ADE=(180-EAD)/2=(180-C1AD+B1AD)/2=(180-C1AD+180град-2*ADC1-C1DB)/2=180-ADC1-C1DB1;
7) Угол B1DE=ADE+ADC1+C1DB1=(180-EAD)/2+ ADC1+C1DB1=180
Ответ: 180.

Задача 4
Рассмотрим последнюю цифру наименьшего простого числа на которое раскладывается x. Эти цифры могут быть 1, 2, 3, 7, 9 если заканчивается на 0, 6, 8 то делится на 2, если на 5 то делится на 5 и при этом 5+4=9 не простое. Теперь посмотрим на что заканчивается произведение простых чисел из условия:
1 x 5 =5
2 x 6 =12
3 x 7 =21
7 x 11=77
9 x 13=117
Отбросим варианты где у нас произведение закончилось на 7. Уберем вариант с 2 т к нет простых заканчивающихся 6, уберем вариант с 1 т к если простое заканчивается на 5 то это просто 5 и этот вариант нам не подходит т к 1 не простое. Остается только вариант с 3 и 7.

Пусть наше простое число p=10*a+3, тогда посмотрим что даст произведение первого и втрого простых чисел:
(10*a+3)(10*a+7)=100*a*a+100*a+21
Значит последнее число которое записано в x это 21. Выпишем все возможные варианты числа x:
10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 (*)
11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21
12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 (*)
13 14 15 16 17 18 19 20 21 (*)
14 15 16 17 18 19 20 21
15 16 17 18 19 20 21 (*)
16 17 18 19 20 21 (*)
17 18 19 20 21
18 19 20 21 (*)
19 20 21 (*)
20 21
21
Уберем вариант где ряд начинается с 14, т к первое число не содержит 4. Уберем последний вариант т к у нас выписано более одного числа. Уберем варианты отмеченные (*) т к они делятся на 3 и явно не являются произведением 3*7. Осталось:
11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21
17 18 19 20 21
20 21
Заметим что 2021=43*47, поэтому оно подходит. Теперь составим квадратные уравнения относительно наименьшего простого:
a(a+4)=1718192021;
Считаем дискриминант: 4*4+4*1718192021=4*11*156199275 и 156199275 не делится на 11, а значение a будет иррационально. Теперь рассмотрим последний возможный вариант:
a(a+4)=1112131415161718192021;
Посчитаем дискриминант: 16+4*1112131415161718192021=4*1112131415161718192025, заметим что корень нацело не извлекается поэтому этот вариант неподходит.
Ответ: 2021.