Олимпиада школьников СПбГУ по математике.
Заключительный этап. 2020/2021 учебный год. 10 – 11 классы.

1. При каких натуральных n клетчатую доску $n \times n$ можно разрезать на квадраты 1×1 и 2×2 так, что квадратов разных размеров будет поровну?

2. Положительные числа a, b, c таковы, что $a^2b + b^2c + c^2a = 3$. Найдите минимальное значение выражения

$$A = a^7b + b^7c + c^7a + ab^3 + bc^3 + ca^3.$$

3. Дан неравнобедренный остроугольный треугольник ABC. В нем проведены высоты BB_1 и CC_1, пересекающиеся в точке H. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами H и C соответственно касаются прямой AB. Из точки A к ω_1 и ω_2 проведены касательные, отличные от AB. Обозначим точки их касания с этими окружностями через D и E соответственно. Найдите угол B_1DE.

4. Петя написал на доске подряд n последовательных двузначных чисел ($n \geq 2$), первое из которых не содержит цифру 4, а последнее — цифру 7. Вася подумал, что это десятичная запись натурального числа x, и разложил x на простые множители. Оказалось, что их всего два и они различаются на 4. Что написано на доске?

5. В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством 3^n, $3^{n-1} \cdot 5$, $3^{n-2} \cdot 5^2$, $3^{n-3} \cdot 5^3$, $\ldots$, $3 \cdot 5^{n-1}$, 5^n пиастров, где n — натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?

1	2	3	4	5	Сумма
20	20	20	20	1	81

№1.

Пусть кол-во квадратов какого-то размера – p. Тогда клеток в исходном квадрате – $n^2 = 1\times1\times p + 2\times2\times p = 5\times p$. Отсюда n делится на 5.

Докажем, что для всех n>5 такое разбиение возможно. При чётных n мы можем разбить доску на $n^2/4$ квадратов 2×2. Поскольку $n^2/4>n^2/5$, мы сможем выбрать какие-то p квадратов 2×2, а все остальные разбить на квадраты 1×1. При нечётных n мы из исходного выделяем квадрат (n-1)×(n-1), и разбиваем его на $\frac{n^2-2n+1}{4}$ квадрата.

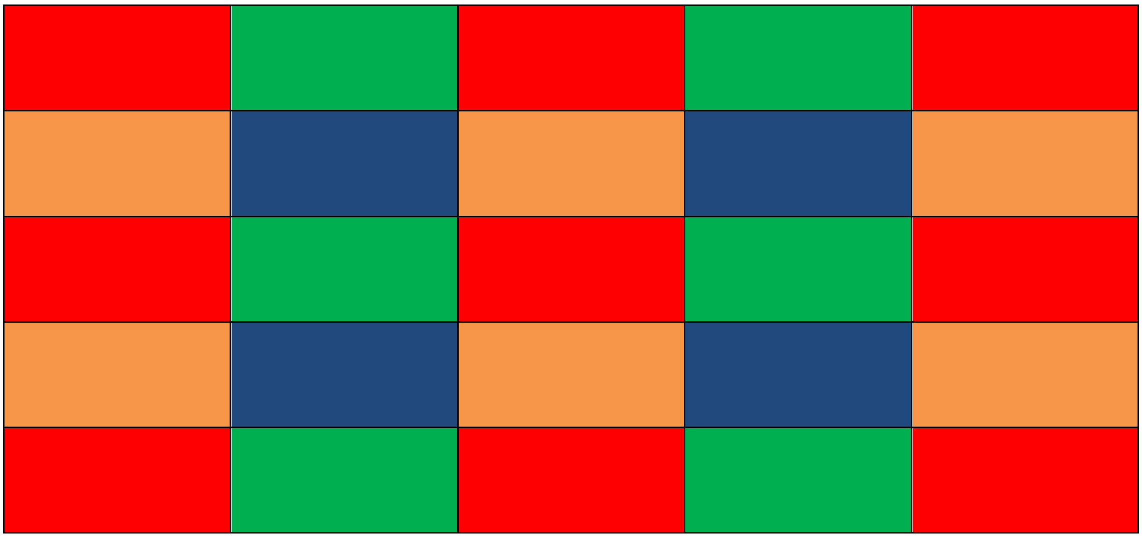
Решим неравенство $\frac{n^2-2n+1}{4}\geq\frac{n^2}{5}$

$5(n^2-2n+1) - 4n^2 \geq 0$

$n^2-10n+5 \geq 0$

При всех нечётных n≥15 выполняется.

При n=5 мы не можем разбить квадрат, поскольку нам необходимо минимум 5 квадратов 2×2, которые мы не сможем уместить в квадрате 5×5. Это легко доказать, раскрасив квадрат 5×5 в 4 цвета следующим образом:



Любой квадрат 2×2 содержит клетки 4 цветов, при этом клеток синего цвета - 4, т.е. поставить 5 квадратов 2×2 мы не можем.

Ответ: n=5(m+1), m – натуральное число.

№2.

По нер-ву между ср.геом. и ср.арифм.

$a^7b + ab^3 \geq 2\sqrt{a^8b^4} = 2a^4b^2 = 2(a^2b)^2$

Тогда $A \geq 2((a^2b)^2+(b^2c)^2+(c^2a)^2)$

По нер-ву между ср.квадр. и ср арифм.

$((a^2b)^2+(b^2c)^2+(c^2a)^2) \geq (a^2b+b^2c+c^2a)^2/3$

Отсюда $A \geq 2/3\times(a^2b+b^2c+c^2a)^2=6$

При $a=b=c=1$ $A=6$.

Ответ: 6

№3

Положим $HC_1<HB_1$. Поскольку AD – касательная к ω_1, угол HDA = 90°. Значит, точки A, C_1,H, D, B_1 лежат на одной окружности с диаметром AH (далее Ω). Отсюда <(знак угла)B_1DA = <B_1HA

<HAC=90°-<C, => <B_1HA=90°-<HAC=<C

<HAC_1=<HAD=90°-<B

<A=180°-B-<C

<DAB_1=<A-<C_1AD=180°-<B-<C-(180°-2<B)=<B-<C.

Поскольку касательные к ω_2 симметричны относительно AC, <EAC=<A

<DAE=<EAC+<DAC=180°-<B-<C+<B-<C=180°-2<C

Из равнобедренности DAE <EDA=<C=<B_1DA. Отсюда следует, что точки B_1, D и E лежат на одной прямой!

В случае $HC_1>HB_1$ точки B_1 и E, в отличие от первого случая, лежат по разные стороны от AD. Но проводя аналогичные рассуждения, получаем, что <ADB_1=90°+<B_1DH=90°+<B_1AH=180°=<C, а <ADE=(180°-<DAE)/2 = 90°-<A-<HAB=<C, и точки B_1, D и E лежат на одной прямой. Угол B_1DE Равен либо 0°, либо 180°.

№4.

Поскольку простые числа отличаются на 4, существует такое Y, что первое простое число – Y-2, второе – Y+2. Тогда их произведение равно Y^2-4=x. Поскольку выписано не менее 2 двузначных чисел, простые числа много больше 2, т.е Y^2 – нечётное. Возможные последние цифры – 1, 9, 5. Если Y^2 заканчивается на 1, x заканчивается на 7, противоречие. Если Y^2 заканчивается на 9, x заканчивается на 5, тогда одно из простых чисел равно 5, а другое – либо 9, любо 1, противоречие. Тогда последняя цифра Y^2 – 5, последняя цифра x равна 1. Отсюда последние цифры простых чисел – 3 и 7.

Найдём предпоследнюю цифру x. Поскольку последняя цифра Y^2 равна 5, предпоследняя – либо 2, либо 7. Значит последние 2 цифры x – либо 21, либо 71. 71 не может быть, значит последняя цифра x – 21.

Числа 192021,

18192021,

161718192021,

15161718192021,

131415161718192021,

12131415161718192021,

101112131415161718192021 не подходят, т.к. делятся на 3, а $3\times7<<x$

Число 1415161718192021 не подходит по условию.

Число 1718192021 делится на 7, а $7\times3<7\times11<<x$

Число 1112131415161718192021 не подходит, т.к. делится на 11 (по признаку делимости), а $11\times7<<x$

$2021 = 43\times47$, подходит.

Ответ: 2021

№5.

Докажем методом математической индукции, что пользуясь только монетами 3 и 5 мы можем набрать любую сумму, начиная с 8.

База: 8=3+5.

Переход: пусть мы набрали сумму p, у нас k монет достоинством 3 и m монет достоинством 5. Если m≠0, то заменив монету 5 на две монеты 3, то сумма станет равна p-5+6 = p+1.

Если m=0, то заменив 3 монеты 3 на 2 монеты 5, мы получим сумму p-9+10 = p+1. Доказано.

Значит, мы можем получить любую сумму, большую 7. 7 мы не сможем получить, потому что монеты $3^n5^r>7$ при натуральных показателях, а комбинируя монеты 3 и 5. мы можем максимум получить суммы 3, 5, 6=3+3, 8=3+5 и далее.

Ответ: 7 пиастров.