Санкт-Петербургский государственный университет
Олимпиада школьников по математике 2020–2021
Заключительный этап
8–9 классы

1. Докажите, что для любых вещественных чисел a и b уравнение

$$(a^6 - b^6)x^2 + 2(a^5 - b^5)x + (a^4 - b^4) = 0$$

имеет решение.

2. На острове живут лжецы и рыцари. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Каждый житель острова про каждого из остальных знает рыцарь он или лжец. Как-то раз встретились 28 островитян. Двое из них сказали: «Ровно двое из нас лжецы», затем четверо из остальных сказали: «Ровно четверо из нас лжецы», потом восемь из оставшихся сказали: «Ровно восемь из нас лжецы», наконец, все оставшиеся 14 сказали: «Ровно 14 из нас лжецы». Сколько лжецов было среди встретившихся? Приведите все возможные варианты и докажите, что других нет.

3. Сумма неотрицательных чисел a, b и c равна 3. Найдите наибольшее значение выражения $ab + bc + 2ca$.

4. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках K и L. Прямая ℓ пересекает окружность ω_1 в точках A и C, а окружность ω_2 — в точках B и D, причем точки идут на прямой ℓ в алфавитном порядке. Обозначим через P и Q соответственно проекции точек B и C на прямую KL. Докажите, что прямые AP и DQ параллельны.

5. Дана клетчатая доска 2021×2021. Петя и Вася играют в следующую игру. Они по очереди ставят фишки в свободные клетки доски. Выигрывает тот игрок, после хода которого в каждом прямоугольнике 3×5 и 5×3 будет стоять фишка. Начинает Петя. Кто из игроков может обеспечить себе победу вне зависимости от действий соперника?

6. Найдите все такие натуральные числа n, что число $2^n + n^2 + 25$ является кубом простого числа.

1	2	3	4	5	6	Сумма
15	20	15	0	0	5	55

ol2015186

№1

В данном уравнении x рассмотрим как переменную, a и b – как параметры. Тогда мы имеем квадратный трёхчлен. Как известно, если дискриминант квадратного трёхчлена не меньше 0, то этот трёхчлен имеет не менее 1 корня. Давайте найдём дискриминант данного трёхчлена:

$D= (2(a^5 – b^5))^2 – 4(a^6 – b^6)(a^4 – b^4)$

Раскроем скобки:

$D = 4(a^{10} + b^{10} – 2a^5b^5) – 4(a^{10} + b^{10} - a^4b^6 – a^6b^4)$

Вынесем за скобку 4

$D = 4(a^{10} + b^{10} – 2a^5b^5 – a^{10} - b^{10} + a^4b^6 + a^6b^4)$

$D = 4(– 2a^5b^5 + a^4b^6 + a^6b^4)$

Выносим за скобку a^4 b^4

$D = 4(a^4b^4(a^2 + b^2 - 2ab))$

$D = 4a^4b^4(a + b)^2$

$D= (2a^2b^2(a + b))^2$

Как видим, дискриминант является квадратом, а значит он всегда неотрицателен => при любом значении a и b мы будем иметь не менее одного решения уравнения, ч.т.д.

№2

1)суждения каждой из групп лжецов противоречат друг другу(т.е. если среди них ровно двое лжецов(1 суждение из условия), то среди них точно не 4 лжецов(2 суждение из условия)), значит, если истинно одно суждение, то все другие автоматически становятся ложными, значит несколько суждений одновременно не могут быть истинны. Разделим островитян на группы согласно их суждениям(первая группа состоит из двух островитян, считающих что среди них 2 лжеца, вторая группа из 4 островитян считает, что среди них 4 лжеца и т.д.) права не более чем одна группа, значит имеем пять случаев:

1 случай) Пусть 1 группа права => среди них 2 лжеца - истина => остальные 26 островитян не прав, т.е. они лжецы. 26 не равно 2 => 1 группа не может быть права.

2 случай) Пусть 2 группа права => среди них 4 лжеца - истина => остальные 24 островитян не правы, т.е. они лжецы. 24 не равно 4 => 2 группа не может быть права.

3 случай) Пусть 3 группа права => среди них 8 лжецов - истина => остальные 20 островитян не правы, т.е. они лжецы. 20 не равно 8 => 3 группа не может быть права.

4 случай) Пусть 4 группа права => среди них 14 лжецов - истина => остальные 14 островитян не правы, т.е. они лжецы. 14 = 14 => 4 группа может быть права => один из ответов – 14 лжецов.

5 случай) Никто из них не прав => они все лжецы. Тут противоречий нет, поэтому это тоже возможный ответ.

Другие ответы невозможны, поскольку несколько групп одновременно не могут быть правы.

Ответ: 14 или 28 лжецов.

№3

$ab + bc + 2ca = a(b + c) + c(a + b)$

$a + b + c = 3 \Rightarrow b = 3 - a - c$

подставим

$a(3 - a) + c(3 - c)$

$3a - a^2 + 3c - c^2$

Очевидно, что 3a не меньше чем a^2 т.к. все числа неотрицательные, а их сумма = 3. Аналогично, 3c не меньше чем c^2

Значит, чтобы получить наибольшую возможную сумму необходимо выбрать наибольшие a и c, b=0, т.к. в этом выражении b вообще не присутсвует.

Вернёмся к $a(b + c) + c(a + b)$ при $b = 0$

2ac чтобы получить наибольшее возможное значение 2ac нужно взять a и c наиболее приближенными друг к другу, т.е. по 1,5. Тогда итоговое значение будет равно 4,5

Ответ: 4,5

№5

Назовём прямоугольник 3х5 или 5х3 открытым, если в нём нет фишек, и закрытым, если в нём есть хотя бы одна фишка. Игра заканчивается ходом игрока, закрывающим все незакрытые прямоугольники(за один ход закрывается несколько прямоугольников, если те имели общую клетку). Выиграет Петя. Выигрышная стратегия: выбираем 2 незакрытых прямоугольника, не имеющих общей клетки(если противник закрывает выбранный нами прямоугольник, то выбираем другой, если мы выбрать не можем, значит нашим ходом мы закроем оставшиеся прямоугольники и победим). Закрываем прямоугольники, имеющие общие клетки с выбранными нами прямоугольниками. Тогда, через некоторое время, если игра не закончится, то придёт к ситуации, когда незакрытыми остались только наши 2 выбранных прямоугольника и свободных мест для хода не в эти прямоугольники нет. В такой ситуации ход будет за Васей, так как два прямоугольника 3х5 или 5х3 имеют чётную площадь, значит оставшееся количество клеток нечётное, т.е. было сделано нечётное количество ходов. Очевидно, что нечётные ходы делает Петя, значит Васе придётся закрыть предпоследний прямоугольник, а мы закроем последний и победим.

№6

Рассмотрим случай, когда n – нечётное: 2^n – чётное 25 – нечётное– нечётное, тогда их сумма чётна. Единственное чётное простое число это число 2. Очевидно, что $2^n + n^2 + 25$ не равно 2^3

Т.к 2^n – натуральное, т.е. положительное, n^2 натурально, то есть положительное, значит

$2^n + n^2$ не может быть равно -17. Таким образом, n точно нечётное. Рассмотрим возможные остатки от 3 у некоторого числа x: это остатки 0 1 и 2. У x^2 возможные остатки 0 1 и 1. Значит, если n не кратно трём, то имеет остаток 1 по модулю 3, 2 в чётной степени и 25 тоже имеют остаток 1 по модулю 3, тогда их сумма кратна 3, а единственное простое число, кратное 3, это 3. $2^n + n^2$ не может быть равно 56 (если n = 4, то будет 32, если n = 6, то получится 100, что слишком много). Таким образом, n кратно и 2, и 3, а значит кратно 6. Тогда ответ будет при n = 6: $64 + 36 + 25 = 5^3$

Ответ: 6