Олимпиада школьников СПбГУ по математике.

Заключительный этап. 2020/2021 учебный год. 10 – 11 классы.

1. Можно ли в таблице 35×35 расставить различные целые числа так, чтобы значения в клетках, имеющих общую сторону, отличались не более чем на 18?

2. При $a, b, c > 0$ найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b)}{a^3 + b^3 + c^3 - 2abc}.$$

3. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 соответственно пересекаются в точке A. Отрезок O_2A вторично пересекает окружность ω_1 в точке K, а отрезок O_1A вторично пересекает окружность ω_2 в точке L. Прямая, проходящая через точку A параллельно KL, вторично пересекает окружности ω_1 и ω_2 в точках C и D соответственно. Отрезки CK и DL пересекаются в точке N. Найдите угол между прямыми O_1A и O_2N.

4. В файле записано подряд 2021 двузначных пятеричных чисел, причем числа на нечетных позициях равны и на 1 больше чисел на четных позициях. Компьютер считал данные из файла как одно пятеричное число и разложил его на простые множители. Оказалось, что таких множителей ровно два и они различаются на 2. Могло ли такое быть?

5. В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством 5^n, $5^{n-1} \cdot 7$, $5^{n-2} \cdot 7^2$, $5^{n-3} \cdot 7^3$, $\ldots$, $5 \cdot 7^{n-1}$, 7^n пиастров, где n — натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?

1	2	3	4	5	Сумма
20	20	20	0	0	60

Номер 2

1) Числитель:
   По неравенству Коши для среднего арифм. И среднего геометрич.:
   aab + aac + bbc + bab + cac + cbc <= $(a^3 + a^3 + b^3)$/3 + $(a^3 + a^3 + c^3)$/3 + … + $(c^3 + b^3 + c^3)$/3 = 2$(a^3 + b^3 + c^3)$
2) Знаменатель:
   $a^3 + b^3 + c^3 -$ 2abc >= $(a^3 + b^3 + c^3)$(1 – 1/3) = 1/3$(a^3 + b^3 + c^3)$

   A <= 2$(a^3 + b^3 + c^3)$/(1/3) $(a^3 + b^3 + c^3)$ = 6

A = 6 при a = b = c = 1

Ответ: 6

Номер 1

1) От любой клетки таблицы до любой другой клетки можно добраться кратчайшим путём не более чем за 68 ходов. Найдём максимум и минимум. Разница между ними не более чем 68*18 = 1224. Всего в таблице 35*35 = 1225 чисел, значит они являются последовательными числами от минимума до максимума
2) Минимум и максимум должны находиться в противоположных углах (например: минимум слева сверху, максимум справа снизу), иначе от минимума до максимума будет меньше 1225 различных чисел. От минимума до максимума несколько путей длиной в 68 ходов, на каждом из которых к числу в соседней клетке должно прибавляться 18, но тогда минимум граничит с двумя одинаковыми числами (минимум + 18), что противоречит условию.

Ответ: Нельзя

Номер 3

Докажем, что угол между O_1A и O_2N равен 90 градусов

1) Точки O_1, K, L, O_2 лежат на одной окружности:
   - Угол O_2LA = угол O_2AL (т.к. треуг O_2AL – равнобедренный)
   - Угол O_2AL = Угол O_1AK (вертикальные)
   - Угол O_1AK = угол O_1KA (треуг – равнобедренный)

   Угол O_1KA= угол O_2LA, значит точки на одной окружности
2) Пусть угол NLK = в = угол NDC (из параллельности)
   Тогда угол LO_2A = 2в (центральный)
   Угол LAO_2 = 90 – в = угол KAO_1
   Угол KO_1A = 2в
   Угол KCA = в (вписанный)
   Угол NKL = в (из параллельности)
3) Точки K, N, L, O_2 на одной окружности:
   - Пусть угол KLA = a

   Тогда угол LAD = a (параллельность) и угол FAC = a (вертикальный) # F – точка пересечения окр 1 и прямой AO_1
   - Угол FCA= 90, угол AFC = 90 – a, угол NKA = 90 – a т.к. четырёхуг FCKA– вписанный
   - Угол ALO_2= Угол O_2AL= 90 – в, угол NLO_2 = a + в + 90 – в = 90 + a

   В результате, угол NKO_2 + угол NLO_2 = 90 – a + 90 + a = 180
4) С учётом п1 и п3 точки N, K, O_1, O_2, L лежат на одной окружности
   Поэтому угол LO_2N = угол NKL = в, угол AO_2N = угол NLK = в
   Значит O_2N – биссектриса в равнобедренном треуг => высота
   Следовательно NO_2, AO_2 перпендикулярны

Ответ: 90 градусов

Номер 4

Имеем 4042-значное число А вида: хухухух….ху, где х = у – 1

А – нечётное

Возможные варианты ху:

1) $12_5 = 7$

   $A = 7(1 + 25 + \ldots. + 25^{2020})$

   Один из простых множителей это 7, значит второй 5, но число в скобках не делится на 5

2) $34_5 = 19$

   $A = 19(1 + 25 + \ldots. + 25^{2020})$

   Один из простых множителей это 19, второй 17, но число в скобках не делится на 17, т.к. остатки при делении на 17 чисел вида 25^n повторяются через 8 циклов, а количество слагаемых в скобка не делится на 8.

3) $23_5 = 13$

   $A = 13(1 + 25 + \ldots. + 25^{2020})$

   Один из простых множителей это 13, второй 11, но число в скобках не делится на 11

Ответ: Невозможно