Олимпиада школьников СПбГУ по математике.
Заключительный этап. 2020/2021 учебный год. 10 – 11 классы.

1. В некоторых клетках полоски 1×2021 поставлено по одной фишке. В каждую из пустых клеток записывается число, равное модулю разности количества фишек слева и справа от этой клетки. Известно, что все записанные числа различны и отличны от нуля. Какое наименьшее количество фишек может быть расставлено в клетках?

2. Положительные числа a, b, c таковы, что $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Найдите минимальное значение выражения
$$A = \frac{a^4 + b^4}{c^2 + 4ab} + \frac{b^4 + c^4}{a^2 + 4bc} + \frac{c^4 + a^4}{b^2 + 4ca}.$$

3. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием BC. На продолжении стороны AC за точку C отмечена точка K, и в треугольник ABK вписана окружность с центром в точке I. Через точки B и I проведена окружность, касающаяся прямой AB в точке B. Эта окружность вторично пересекает отрезок BK в точке L. Найдите угол между прямыми IK и CL.

4. На доске написано число 1200. Петя приписал к нему справа $10n + 2$ пятерок, где n — неотрицательное целое число. Вася подумал, что это шестеричная запись натурального числа x, и разложил x на простые множители. Оказалось, что среди них ровно два различных. При каких n это возможно?

5. В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством $6n + 1$, $6n + 3$, $6n + 5$ и $6n + 7$ пиастров, где n — натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?

1	2	3	4	5	Сумма
20	10	20	10	10	70

Задача 1.

Заметим, что нет фишек, которые стоят рядом друг с другом (Иначе модуль разности у таких двух фишек одинаковый). Посмотрим, какие модули разностей могут получаться. Если кол-во фишек нечетное, то с одной стороны пустой клетки стоит четное число фишек, а с другой нечетное, а значит модуль разности у всех пустых клеток нечетный. Если кол-во фишек четное, то разность также четная. Значит максимальное кол-во чисел (различных) в пустых клетках рано кол-ву фишек делить на 2. Пусть фишек А тогда пустых клеток минимум А/2. Значит если клеток 2021, то минимум фишек 2/3*2021=1347. Построим пример в первых 1348 клетках идут чередующиеся клетки (начиная с пустой клетки), а с 1349-й до 2021 идут фишки. Всего фишек 674+673= 1347.

На первой пустой клетке стоит число abs (0-1347), на второй abs (1-1376) и т.д. На последней пустой abs (673-674). Значит это верный пример.

Ответ: 1347

Задача 2.

Надо найти число, которое не меньше, чем данное выражение.

Применим нер-во между средним арифметическим и средним квадратическим для чисел а**2, б**2

Корень((а**4+б**4)/2) больше или равно, чем (а**2+б**2)/2, так как а**4+б**4 не меньше, чем (а**2+б**2)**2/2.

Применим это неравенство для числителей во всех дробях, каждая дробь не увеличится.

(а**2+б**2)**2/(2*(с**2+4*аб))+ (с**2+б**2)**2/(2*(а**2+4*сб))+ (а**2+с**2)**2/(2*(б**2+4*ас))

Применим неравенство КБШ для дробей.

(а**2+б**2)**2/(2*(с**2+4*аб))+ (с**2+б**2)**2/(2*(а**2+4*сб))+ (а**2+с**2)**2/(2*(б**2+4*ас))

Не меньше, чем (2*а**2+2*б**2+2*с**2)**2, что равно 6**2/(2*(3+4*а*б+4*б*с+4*а*с))=18/(3+4*а*б+4*б*с+4*а*с)), заметим, что по условию 3=а**2+б**2+с**2 не меньше, чем попарная сумма чисел а, б и с, значит 4*(попарная сумма чисел а, б и с) не больше 12.

Значит 18/(3+4*а*б+4*б*с+4*а*с)) не меньше, чем 18/15=6/5

Пример:

а=б=с=1, то тогда (а**2+б**2)**2/(с**2+4*а*б)=0.4, а данное выражение 6/5.

Ответ:6/5

Задача 3.

По условию треугольник АВС р/б значит АВ=АС. Пусть угол IBC – альфа, а угол СВК – бета. Тогда заметим, что углы ABI и IBK это альфа + бета. Тогда ИЛБ равен ИБА = альфа + бета. ИБ=ИЛ, АИ-биссектриса. АБ=АС значит треугольник БАИ равен треугольнику САИ (по углу и двух сторонам (АИ-общая)). Тогда ИС=ИБ=ИЛ , углы ИСБ и ИВС равны, и равны альфа.

Также заметим, что АБ=АС и угол БСА= 2*альфа+бета, тогда угол ИСА=альфа+бета.

Из треугольника ВКС: угол ВКС равен углу ВСА минус угол СВК = 2*альфа- бета+бета=2*альфа.

ИС-биссектриса значит углы ИКА и ИКБ равны альфа.

Из треугольника ИКС: угол ЛИК= БЛИ-ЛКИ =(альфа+бета)-альфа=бета

Из треугольника ИСК: СИК=ИСА-ИКС=(альфа+бета)- альфа = бета

Значит так как ИК- биссектриса в р/б треугольнике, то это и высота, а значит ИК перпендикулярна СЛ, значит угол между ними 90.

Ответ:90 градусов

Задача 4.

Докажем, что для числа большего 0 такого быть не может. Докажем от противного: пусть может.

Тогда у нас есть число 12005…..5, где 5 10*а+2=6**(10а+5)+2*6**(10а+4)+(6-1)*(6**(0)+…+6**(10а+1))=6**(10а+5)+2*6**(10а+4)+6**(10а+2)-1=6**(10а+2)*(216+71+1)-1=17**2*6**(10а+2)-1=(17*6**(5а+1)-1)*(17*6**(5а+1)+1)

Заметим, что 6**5 сравнимо по модулю 101 с -1, т.к. 6**5=7776 тогда 17**2*6**(10а+2)-1 сравнимо по модулю с 17**2*6**2-1 сравнимо по модулю 101 с 0.

Значит у этого числа ровно два простых делителя 101 и какое-то число П. Так как числа 17*6**(5а+1)-1 и 17*6**(5а+1)=1 взаимно просты , то одно из этих чисел это 101**Х, а другое число П**У, но при этом 101**к сравнимо с 1 по модулю 101 а значит 101**к не равно 17*6**(5а+1), что сравнимо по модулю 4 с -1 при а большем 0, значит 101**к=17*6**(5а+1)+1.

Знаем, что по лемме об уточнении показателя для 2.

Abs(a*n-b**n)= abs(a-b)2 +abs(n)2 (степени вхождения числа 2) , если a-b делится на 4.

Тогда:

Модуль(101**к-1)2=модуль(100)2+модуль(к)2=2+модуль(к)2=модуль(17*6**(5а+1))2=

5а+1, так как модуль(к)2 не меньше, чем 5а-1, а значит к не меньше, чем 2**(5а-1), но тогда

(101(**2**(5а-1)))-1 меньше или равно, чем 17*6**(5а+1), что меньше, чем 101**(5а+2), так как (((101**2)**5а-1))-1 меньше, чем 101**(5а+2), но это неверно (можно доказать по индукции), значит получили противоречие.

А при n=0: число 120055=101*103

Ответ: 0

Задача 5.

Пусть n это а.

Заметим, что номиналы монет нечетные. Значит чтобы получить четную сумму, количество монет должно быть четно и наоборот для нечетной суммы.

Докажем, что 12*a^2+8*a-1 нельзя получить. От противного: пусть можно.

Число нечетное значит кол-во монет нечетно. Рассмотрим какое кол-во монет могло быть всего. Пусть их не больше, чем 2*a-1. Тогда сумма не больше, чем (2*a-1) * (6*a+7), а это меньше исходного числа.

Пусть монет больше, чем 2*a+1. Тогда сумма больше или равна (2*a+1) * (6*a+1), что больше исходного числа.

Осталось доказать, что любую сумму, которая больше этой получить можно.

Покажем, как можно получать нечетные числа начиная с (2*a + 1) * (6*a +1) и все четные с 2*a*(6*a+1): посмотрим, как мы можем менять сумму. Первое, что мы можем делать это менять монету (кроме(6*a+7)) на монету номинала на два больше, увеличивая сумму на 2. Второе, что мы можем делать это брать монеты (6*a+7) по 2*a штук и менять их на монеты (6*a+1) по 2*a+2. Тогда сумма монет также увеличится на 2 ((6*a+1) * (2*a+2) –2*a * (6*a+7)=2).

Тогда можно взять 2*a монет номиналом (6*a+1), чтобы получить сумму ((6*a+1)*2*a) и начать менять монеты. Житель всегда может сделать обмен так как монет не меньше, чем 2*a, а если сделать первый обмен нельзя, то есть монеты номинала (6*a+7) не меньше 2*a штук, а значит можно сделать обмен с этими монетами и получить любую четную сумму. Аналогично можно получить любое нечетное число начиная с (2*a + 1) * (6*a +1).

Ответ: 12*a^2+8*a-1