Санкт-Петербургский государственный университет
Олимпиада школьников по математике 2020–2021
Заключительный этап
8–9 классы

1. Найдите все такие значения a, для которых квадратные трехчлены x^2+2x+a и $x^2+ax+2=0$ имеют по два корня, причем сумма квадратов корней первого трехчлена равна сумме квадратов корней второго трехчлена.

2. Каждый из островитян либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт (и те, и другие на острове есть). Каждый житель острова про каждого знает рыцарь он или лжец. Часть жителей острова заявила, что на острове проживает четное число рыцарей, а все оставшиеся жители заявили, что на острове проживает нечетное число лжецов. Может ли на острове быть ровно 2021 житель?

3. Для произвольных вещественных чисел a и b ($b \neq 0$) найдите наименьшее значение выражения $a^2+b^2+\dfrac{a}{b}+\dfrac{1}{b^2}$.

4. Точки B_1 и C_1 — середины сторон AC и AB треугольника ABC. На сторонах AB и AC как на диаметрах построены окружности ω_1 и ω_2. Обозначим за D точку пересечения прямой B_1C_1 с окружностью ω_1, лежащую по другую сторону от C относительно прямой AB. Обозначим за E точку пересечения прямой B_1C_1 с окружностью ω_2, лежащую по другую сторону от B относительно прямой AC. Прямые BD и CE пересекаются в точке K. Докажите, что прямая BC проходит через точку пересечения высот треугольника KDE.

5. На центральной клетке доски 11×11 стоит фишка. Петя и Вася играют в следующую игру. Каждым своим ходом Петя передвигает фишку на одну клетку по вертикали или горизонтали. Каждый своим ходом Вася возводит стенку с одной из сторон любой из клеток. Двигать фишку через стенку Петя не может. Игроки ходят по очереди, начинает Петя. Петя выигрывает, если сможет фишкой уйти с доски. Может ли он обеспечить себе победу вне зависимости от действий соперника?

6. Докажите, что существует бесконечно много таких натуральных чисел n, что количество различных нечетных простых делителей числа $n(n+3)$ кратно трем.

1	2	3	4	5	6	Сумма
10	20	0	15	20	0	65

Задача № 1:

Пусть корни первого уравнения – x1 и x2, а второго – x3 и x4. По условию:

X1^2 + x2^2 = x3^2 + x4^2

Или же:

(x1 + x2)^2 – 2*x1x2 = (x3 + x4)^2 – 2*x3x4

По теореме Виета:

X1 + x2 = -2

X1*x2 = a

X3 + x4 = -a

X3*x4 = 2

Подставляем в преобразованное выражение из условия:

4 – 2a = a^2 – 4

A^2 + 2a – 8 = 0

D = 36

A1 = (6 - 2) / 2 = 2

A2 = (-6 - 2) / 2 = -4

Значит, при a = 2 или -4 выполняется то, что нам надо.

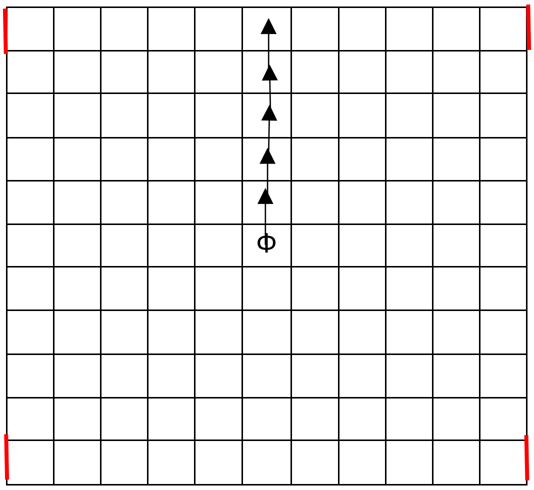
Ответ: a = 2, a = -4.

Задача №2:

Предположим, что такое возможно. Тогда, т.к. 2021 – нечетное число, то у нас возможны два варианта: нечетное количество рыцарей и четное количество лжецов, либо нечетное количество лжецов и четное количество рыцарей. Заметим тогда, что разные ответы говорят представители разных племен. Поэтому, люди, которые сказали, что на острове четное количество рыцарей – либо все лжецы, либо все рыцари. Аналогично со вторым утверждением. Но заметим, что если на острове количество людей из разных племен имеет разную четность, то либо обе эти группы говорят правду, либо лгут, т.к. если у нас четное количество рыцарей, то первая группа говорит правду, но тогда у нас нечетное количество лжецов, и вторая группа говорит правду. Если же у нас нечетное количество рыцарей, то первая группа лжет, но тогда у нас четное число лжецов, и тогда вторая группа тоже лжет. Значит, во всех случаях, эти две группы либо обе состоят из лжецов, либо обе состоят из рыцарей, а мы знаем, что у нас на острове есть хотя бы 1 представитель каждого племени. Противоречие. Значит, наше предположение неверно и у нас не могло быть 2021 человек на острове.

Ответ: не может.

Задача №5:



Поймем, что Пете нужно хотя бы 5 ходов, чтобы дойти до края доски, как показано на рисунке (это кратчайший путь). Тогда, вот что мы сделаем за его четыре хода: поставим по стене на угловые клетки, как показано красным на рисунке. (Он может и не дойти за пять ходов до края доски, но первые четыре наших хода будут всегда такие). Теперь будем действовать по ситуации: если Петя бродит внутри квадрата, то просто ставим стены на контур квадрата в случайное место, а если подошел к краю – то ставим стену на контур квадрата 11*11 в том квадрате, где он сейчас находится. Таким образом, если он находится не в угловой клетке, а просто на краю доски, то выйти он не сможет, т.к. мы всегда будем преграждать ему путь. А если он подошел в угол, то, по идее, тут у него уже два пути к отступлению, и если мы закроем один, то он может выйти через другой. Но вспомним начало решения: мы в каждом углу поставили по стене, поэтому у него все также будет один выход, который мы благополучно от него закрываем, как раньше. Поэтому, Петя не сможет уйти фишкой с доски, и мы всегда можем ему помешать. Значит, петя не сможет обеспечить себе победу.

Ответ: не сможет.

Задача №4

(Далее точка D = точка Д):

Пусть омега1 и омега2 пересекаются второй раз в точке О, отличной от А. Тогда, т.к. АС и АВ – диаметры в них, то углы АОС и АОВ – прямые, т.к. Опираются на диаметр. Значит, угол СОВ = угол АОС + угол АОВ = 90 + 90 = 180. Значит, точки С, О и В лежат на одной прямой, а именно, на прямой ВС. И при этом, угол АОС = 90, значит, АО – высота в треугольнике АВС. Пусть АО и В1С1 пересекаются в точке Н. Тогда, т.к.В1 – середина АС и С1 – середина АВ, то В1С1 – средняя линия в треугольнике АВС, значит, она делит высоту АО пополам, значит, АН = НО. Т.к. все вершины четырехугольника АОВД лежат на окружности омега2, то он вписан, значит, т.к. угол О = 90, то угол Д = 180 – 90 = 90. Аналогично, угол АЕС = 90. Тогда, т.к. у четырехугольника АЕДК сумма углов Е и Д равна 90 + 90 = 180, то он тоже вписан. Пусть М – середина ЕД. Проведем АМ. АМ – медиана в треугольнике ЕАД. Проведем АМ до пересечения с прямой ВС. Пусть они пересеклись в точке Р. Т.к. В1С1 – средняя линия в треугольнике АВС, то она делит АР пополам, значит, АМ = МР. Значит, в четырехугольнике АЕРД у нас диагонали делят друг друга пополам. Значит, АЕРД – параллелограмм. Тогда АЕ параллельна РД. И если мы проведем РД до пересечения с ЕК, то получим, что т.к. АЕ параллельна РД и при этом перпендикулярна ЕК, то РД тоже перпендикулярна ЕК. Аналогично доказываем, что ЕР перпендикулярна ДК. А значит, т.к. ДР перпендикулярна ЕК и ЕР перпендикулярна ДС, то Р – ортоцентр треугольника ЕКД, а как мы выяснили с самого начала, Р лежит на ВС. То есть, ортоцентр треугольника ЕКД лежит на ВС. ЧТД. Решение не зависит от расположения точек, и там будет тот же самый текст, так что другие случаи расположения точек нам разбирать не надо.

Задача №3:

Я утверждаю, что выражение минимально равняется 2, при a = -1 и b = 1. Тогда:

1 + 1 – 1 + 1 = 2.

Докажем, почему нельзя меньше. Сделаем это в виде такого неравенства:

a^2 + b^2 + a/b + 1/b^2 >= 2

Если мы сможем его доказать, при этом имея пример для 2, то мы докажем задачу. Домножим обе части на 4b^2 (точно положительное число):

4a^2b^2 + 4b^4 + 4ab + 4 – 8b^2 >= 0

(4b^4 – 4b^2 + 1) + (4a^2b^2 + 4ab + 1) + 2 – 4b^2 >= 0

(2b^2 – 1)^2 + (2ab + 1)^2 + 2 – 4b^2 >= 0

Если |b| =< 1/sqrt(2) , то 2 – 4b^2 >= 2 – 2 = 0, а (2b^2 – 1)^2 + (2ab + 1)^2 > 0, т.к. квадраты. И тогда итоговое выражение больше нуля и мы все доказали. Если же 1 >= |b| > 1/sqrt(2), то (2b^2 – 1)^2 + (2ab + 1)^2 + 2 – 4b^2 > (1)^2 + (1)^2 + 2 – 4 = 0, значит, в этом случае все тоже хорошо. И последний случай, когда |b| > 1, тогда я утверждаю, что (2b^2 – 1)^2 – 4b^2 >= 0, тогда, т.к. остальные слогаемые тоже больше 0, мы все доказали. Докажем, что это неравенство верно:

(2b^2 – 1)^2 – 4b^2 >= 0

(2b^2 – 1)^2 >= 4b^2 (выделим корень, пусть b >= 0, т.к. иначе просто возьмем модуль)

2b^2 – 1 >= 2b

2b^2 – 1 – 2b >= 0

А это всегда больше 0 по разложению на множители. ЧТД