

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Олимпиада школьников по математике 2020–2021
Заключительный этап
8–9 классы

1. Докажите, что для любых вещественных чисел a и b уравнение

$$(a^2 - b^2)x^2 + 2(a^3 - b^3)x + (a^4 - b^4) = 0$$

имеет решение.

2. На острове живут лжецы и рыцари. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Каждый житель острова про каждого из остальных знает, рыцарь он или лжец. Как-то раз встретились 19 островитян. Трое из них сказали: «Ровно трое из нас лжецы», затем шестеро из остальных сказали: «Ровно шестеро из нас лжецы», наконец, девять из оставшихся сказали: «Ровно девять из нас лжецы». Сколько лжецов было среди встретившихся? Приведите все возможные варианты и докажите, что других нет.

3. Вещественные числа a , b , c и d удовлетворяют условию $a^6 + b^6 + c^6 + d^6 = 64$. Найдите наибольшее значение выражения $a^7 + b^7 + c^7 + d^7$.

4. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка K . К описанной окружности треугольника AKC проведена касательная ℓ_1 , параллельная прямой AB и ближайшая к ней. Она коснулась окружности в точке L . Прямая AL пересекла описанную окружность треугольника ABK в точке M ($M \neq A$). К этой окружности в точке M проведена касательная ℓ_2 . Докажите, что прямые BK , ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются в одной точке.

5. Дана клетчатая доска 2020×2021 . Петя и Вася играют в следующую игру. Они по очереди ставят фишки в свободные клетки доски. Выигрывает тот игрок, после хода которого в каждом квадрате 4×4 будет стоять фишка. Начинает Петя. Кто из игроков может обеспечить себе победу вне зависимости от действий соперника?

6. Найдите все пары таких простых чисел p и q , что $p^2 + 5pq + 4q^2$ является квадратом натурального числа.

1	2	3	4	5	6	Сумма
20	20	0	15	0	0	55

№1

При $a^*a=v^*v$: $a^*a^*a=v^*v^*v$, тогда $x=0$ – корень,

При $a^*a \neq v^*v$, дискриминант $=4(a^*a-v^*v)^2-4(a^*a-v^*v)(a^*a+v^*v)=4(a-v)^2((a^*a+av+v^*v)^2-(a+v)^2(a^*a+v^*v))=4(a-v)^2(a^*av^*v)$,

Что больше или равно нулю, значит уравнение имеет решение.

№2

Первые три говорящих – первая группа, шестеро вторых- вторая, 9 третьих- третья,

Так как каждая группа называет разное количество лжецов среди всех 19 человек, то рыцари могут состоять лишь в одной из групп, так же в группе не могут состоять и лжецы и рыцари, т.к иначе, одно и тоже высказывание- и правды и ложь,

Если все 3 группы – лжецы, то ост. Человек может быть кем угодно, лжецов – или 19 или 18,

Если в первой группе – рыцари, то в ост группах- лжецы, тогда лжецов – больше 3х, но рыцари говорят, что их 3 – противоречие,

Если вторая группа- рыцари, то первая и третья – лжецы , тогда лжецов больше 6, но рыцари говорят, что их 6 – противоречие,

Если третья группа – рыцари, то лжецов ровно 9, в 1 и 2 группе 9 человек, тогда 1 ост человек – рыцарь, лжецов – 9

Ответ: 18, 19, 9

№4

Пусть vk пересекает $l2$ в точке p , угол между $l1$ и am равен x , тогда угол $мав = x$,

Как накрест лежащие при пар прям и сек, тогда угол $акл$ равен x , т.к $акл$ вписан в описанную окр треугольника $акс$ (по свойству угла между касательной и хордой) , угол $рмв$ равен углу $мав$ равен x , (по теореме об угле между касательной и хордой), четырехугольник $аквм$ вписан в описанную окружность треугольника $авк$, тогда угол $амв +$ угол $акв = 180$ градусов(по св вписанного четырехугольника)

Тогда угол $рмл + x +$ угол $лкр + x = 180$ градусов , тогда угол $рмл +$ угол $лкр = 180$ градусов, тогда $млкр$ - вписанный четырехуг (по признаку вписанного четырехугольника) , тогда

Угол $млр$ равен углу $мкр$ (как впис , оп на одну дугу), так как $l2$ - касательная ку оп окр. Треуг $авк$ и угол $рмв = x$, то угол $мкр$ равен x (по теореме об угле между касат. И хордой)

Тогда и угол $млр$ равен x , так как угол между $l1$ и $ам$ равен x и $l1$ проходит через l , то $l1$ совпадает с $лр$, тогда и vk и $l2$ и $l1$ проходят через p .