Санкт-Петербургский государственный университет
Олимпиада школьников по математике 2020–2021
Заключительный этап
8–9 классы

1. Докажите, что для любых вещественных чисел a и b уравнение

$$(a^2 - b^2)x^2 + 2(a^3 - b^3)x + (a^4 - b^4) = 0$$

имеет решение.

2. На острове живут лжецы и рыцари. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Каждый житель острова про каждого из остальных знает рыцарь он или лжец. Как-то раз встретились 19 островитян. Трое из них сказали: «Ровно трое из нас лжецы», затем шестеро из остальных сказали: «Ровно шестеро из нас лжецы», наконец, девять из оставшихся сказали: «Ровно девять из нас лжецы». Сколько лжецов было среди встретившихся? Приведите все возможные варианты и докажите, что других нет.

3. Вещественные числа a, b, c и d удовлетворяют условию $a^6+b^6+c^6+d^6 = 64$. Найдите наибольшее значение выражения $a^7 + b^7 + c^7 + d^7$.

4. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка K. К описанной окружности треугольника AKC проведена касательная ℓ_1, параллельная прямой AB и ближайшая к ней. Она коснулась окружности в точке L. Прямая AL пересекла описанную окружность треугольника ABK в точке M ($M \neq A$). К этой окружности в точке M проведена касательная ℓ_2. Докажите, что прямые BK, ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются в одной точке.

5. Дана клетчатая доска 2020×2021. Петя и Вася играют в следующую игру. Они по очереди ставят фишки в свободные клетки доски. Выигрывает тот игрок, после хода которого в каждом квадрате 4×4 будет стоять фишка. Начинает Петя. Кто из игроков может обеспечить себе победу вне зависимости от действий соперника?

6. Найдите все пары такие простых чисел p и q, что $p^2 + 5pq + 4q^2$ является квадратом натурального числа.

1	2	3	4	5	6	Сумма
20	20	20	0	0	0	60

№1

$$(a^2-b^2)x^2+2(a^3-b^3)x+(a^4-b^4)=0$$

$$(a-b)(a+b)x^2+2(a-b)(a^2+ab+b^2)x+(a-b)(a+b)(a^2+b^2)=0$$

$$(a-b)\big((a+b)x^2+2(a^2+ab+b^2)x+a^3+ab^2+a^2b+b^3\big)=0$$

$$\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}(a-b)=0\\ x-\text{любое число}\end{array}\right.\\ (a+b)x^2+2(a^2+ab+b^2)x+a^3+ab^2+a^2b+b^3=0\end{array}\right.$$

$$D=4a^4+4a^2b^2+4b^4+8a^3b+8ab^3+8a^2b^2-4a^4-4b^4-8a^2b^2-8a^3b-8ab^3=4a^2b^2\geq$$
$$\geq 0 \Rightarrow \text{уравнение имеет решение}$$

№2

Пусть было 3 лжеца, тогда 6 человек, которые сказали, что 6 из них лжецы были лжецами, противоречие. Пусть лжецов было 6, тогда 9 человек, которые сказали что среди них 9 лжецов были лжецами, противоречие. Пусть лжецов было 9, тогда те кто сказали, лжецов трое или шестеро, таких 9 человек, - лжецы, значит оставшийся островитянин – рыцарь. Пусть лжецов не 3, не 6 и не 9, тогда все 18 человек, которые что-то сказали – лжецы, и последний может быть либо рыцарем, либо лжецом => в этом случае лжецов либо 18, либо 19.

Ответ:9, 18, 19.

№3

Будем рассматривать только неотрицательные a,b,c,d, т.к если отрицательное число заменить на противоположное ему, то 6ая степень не изменится, а 7ая степень увеличится.

Пусть a > 2 тогда a^6 > 64 , тогда $a^6+b^6+c^6+d^6>64$.Противоречие. => a<=2

Аналогично можно доказать что $b\leq 2, c\leq 2, d\leq 2.$

$$\left.\begin{array}{r}a\leq 2\Rightarrow a^7\leq 2a^6\\ b\leq 2\Rightarrow b^7\leq 2b^6\\ a\geq 0, b\geq 0, c\geq 0, d\geq 0\\ c\leq 2\Rightarrow c^7\leq 2c^6\\ d\leq 2\Rightarrow d^7\leq 2d^6\end{array}\right\}\Rightarrow a^7+b^7+c^7+d^7\leq 2a^6+2b^6+2c^6+2d^6=128$$

При a = 2, b = c = d = 0. $a^6+b^6+c^6+d^6=64+0+0+0=64, a^7+b^7+c^7+d^7=128$

Ответ: 128.

№6

$$p^2+5pq+q^2=a^2$$

$$(p+2q)^2+pq=a^2$$

$$pq=(a-p-2q)(a+p+2q)$$

p, q – простые => p = a – p – 2q, q = a+p+2q или p = a+p+2q, q = a – p – 2q, или a – p – 2q = 1, a + p + + 2q = pq, или a – p – 2q = pq, a + p + 2q = 1.

Рассмотрим 1ый случай

$$\begin{cases} p = a - p - 2q \\ q = a + p + 2q \end{cases}$$

$q - p = 2p + 4q => 3q = -3p => q = -p$ т.к. p,q – натуральные числа, это невозможно

Аналогично во втором случае получаем что q = -p => таких простых чисел не существует.

$$\begin{cases} a - p - 2q = 1 \\ a + p + 2q = pq \end{cases}$$

$$pq - 1 = 2p + 4q$$

$$p = \frac{4q + 1}{q - 2}$$

$$2a = pq + 1 => pq - \text{нечетное} => p - \text{неч}, q - \text{неч}$$

$$2a = \frac{4q + 2q - 1}{q - 1}$$

$q - 1 - \text{четное}, 4q + 2q - 1 - \text{нечетное}$
$$=> \frac{4q + 2q - 1}{q - 1} - \text{нецелое} => a - \text{нецелое, что противоречит условию задачи}$$

$$\begin{cases} a - p - 2q = pq \\ a + p + 2q = 1 \end{cases}$$

$$1 - pq = 2p + 4q$$

Т.к. p >= 2, q >= 2 => pq >= 4 => 1-pq < 0, 2p + 4q > 0 => таких простых чисел не существует.

Ответ: решений нет.