Олимпиада школьников СПбГУ по математике.
Заключительный этап. 2020/2021 учебный год. 10 – 11 классы.

1. При каких натуральных n клетчатую доску $n \times n$ можно разрезать на квадраты 1×1 и 2×2 так, что квадратов разных размеров будет поровну?

2. Положительные числа a, b, c таковы, что $a^2b + b^2c + c^2a = 3$. Найдите минимальное значение выражения

$$A = a^7b + b^7c + c^7a + ab^3 + bc^3 + ca^3.$$

3. Дан неравнобедренный остроугольный треугольник ABC. В нем проведены высоты BB_1 и CC_1, пересекающиеся в точке H. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами H и C соответственно касаются прямой AB. Из точки A к ω_1 и ω_2 проведены касательные, отличные от AB. Обозначим точки их касания с этими окружностями через D и E соответственно. Найдите угол B_1DE.

4. Петя написал на доске подряд n последовательных двузначных чисел ($n \geq 2$), первое из которых не содержит цифру 4, а последнее — цифру 7. Вася подумал, что это десятичная запись натурального числа x, и разложил x на простые множители. Оказалось, что их всего два и они различаются на 4. Что написано на доске?

5. В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством 3^n, $3^{n-1} \cdot 5$, $3^{n-2} \cdot 5^2$, $3^{n-3} \cdot 5^3$, $\ldots$, $3 \cdot 5^{n-1}$, 5^n пиастров, где n — натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?

1	2	3	4	5	Сумма
20	20	15	0	0	55

Задание 1.

Пусть у нас k квадратов 2 на 2 и k квадратов 1 на 1. Тогда в таблице 5k клеток. Но, так как ее сторона равна n, в ней n^2 клеток, то есть 5k=n^2, откуда n делится на 5, т.к. 5 – простое. N=5t (t – натуральное). Докажем, что все n, делящиеся на 5, подходят, кроме n=5. Если n четное, то разобьем всю доску на прямоугольники 5 на 2, каждый из которых состоит из двух квадратов 2 на 2 и двух квадратов 1 на 1, тогда квадратов разных размеров одинаковое количество. Если n нечетное, то выделим квадрат n-1 на n-1, в нем (n-1)^2 клеток и т.к. n-1 четное n-1^2 делится на 4, значит, в таком квадрате можно разместить максимум (n-1)^2/4 квадратов 2 на 2 (замощаем большой квадрат маленькими квадратами полностью, мы можем это сделать, т.к. n-1 - четное). Нам нужно, чтобы в этот квадрат уместилось k=n^2/5 квадратов 2 на 2. Если мы можем уместить больше, то просто удаляем ненужные квадраты 2 на 2 и на их месте ставим квадраты 1 на 1, не занятых клеток останется ровно k, т.к. мы уже. Остается доказать, что (n-1)^2/4 >=n^2/5 или n^2-10n+5>=0 при n>=10. Корни это уравнения 5-2(5)^(1/2) и 5+2*(5)^(1/2), но 5+2*(5)^(1/2)<10, значит, при n>=10 условие выполняется. Разберем случай n=5.

Задание 3

Докажем, что угол ADB1 = 0 (градусов), т.е. что A,D,B1 лежат на одной прямой. Пусть угол ABC=b, BAC=a, ACB=c. Т.к. Прямая AA1 содержит центр окружности w1, касательные симметричны относительно этой прямой, т.е. AC1 = AD (Точка D получается из точки C1 отражением C1 относительно прямой AA1). Аналогично точка E получается из точки C1 отражением относительно прямой AC. Но тогда AC1=AD и AC1=AE, т.е. AD=AE. Далее все углы считаются в градусах. Угол C1AH равен углу HAD = 90-b, тогда угол DAB1 = a-2(90-b)=2b+a-180. Угол C1AB1 = углу B1AE=a, тогда угол DAE = 2b+a-180+a=2b+2a-180. Т.к. AD=AE, углы ADE и AED равны. Тогда угол ADE=(180-(2a+2b-180))/2=180-a-b=c (по сумме углов треугольника. Остается доказать, что угол ADB1 равен c, тогда точки B1 и E лежат на одном луче из точки D. Угол ADC1 = 180-90-(90-b)=b, угол C1AB1 = a. Т.е. нам остается доказать, что четырехугольник C1DB1A – вписанный, тогда угол ADB1+b+a=180 откуда угол ADB1 равен c по сумме углов треугольника ABC. Достаточно доказать, что углы C1DA и C1B1A равны. Но угол C1DA = b и угол C1B1A=b, т.к. четырехугольник AC1HB вписанный угол C1B1A = угол AHC1 но угол AHC1 очевидно равен b.

Задание 1.

Пусть у нас k квадратов 2 на 2 и k квадратов 1 на 1. Тогда в таблице 5k клеток. Но, так как ее сторона равна n, в ней n^2 клеток, то есть 5k=n^2, откуда n делится на 5, т.к. 5 – простое. N=5t (t – натуральное). Докажем, что все n, делящиеся на 5, подходят, кроме n=5. Если n четное, то разобьем всю доску на прямоугольники 5 на 2, каждый из которых состоит из двух квадратов 2 на 2 и двух квадратов 1 на 1, тогда квадратов разных размеров одинаковое количество. Если n нечетное, то выделим квадрат n-1 на n-1, в нем (n-1)^2 клеток и т.к. n-1 четное n-1^2 делится на 4, значит, в таком квадрате можно разместить максимум (n-1)^2/4 квадратов 2 на 2 (замощаем большой квадрат маленькими квадратами полностью, мы можем это сделать, т.к. n-1 - четное). Нам нужно, чтобы в этот квадрат уместилось k=n^2/5 квадратов 2 на 2. Если мы можем уместить больше, то просто удаляем ненужные квадраты 2 на 2 и на их месте ставим квадраты 1 на 1, не занятых клеток останется ровно k, т.к. мы уже замостили 4k клеток квадратами 2 на 2. Остается доказать, что (n-1)^2/4 >=n^2/5 или n^2-10n+5>=0 при n>=10. Корни это уравнения 5-2(5)^(1/2) и 5+2*(5)^(1/2), но 5+2*(5)^(1/2)<10, значит, при n>=10 условие выполняется. Разберем случай n=5. Введем раскраску, пусть первый, третий и пятый столбцы покрашены в черный цвет, 2 и 4 – в белый. Любой квадрат 2 на 2 проходит хотя бы через один из белых столбцов. Пусть квадратов хотя бы 5, тогда хотя бы через один из столбцов проходит хотя бы 3 квадрата. Но каждый квадрат перекрывает либо 2, либо 0 белых клеток (в данном случае перекрывает ровно 2) и т.к. квадраты не пересекаются, в каком-то белом столбце должно быть хотя бы 3*2=6 клеток, противоречие. Т.е. у нас не более 4 квадратов 2 на 2, тогда они покрывают не более 4*4=16 клеток, но тогда у нас хотя бы 19 квадратов 1 на 1, что больше 4, противоречие.

Задание 3

Задание 2.

Сгруппируем слагаемые, из которых состоит A, следующим образом a^7b+ab^3 и так далее. Но (a^7b+ab^3)/2 >= (a^8b^4)^(1/2) по нер-ву о средних (его можно применять, т.к. числа положительные). Складывая такие оценки и домножая каждую на 2, получим, что A>=2(a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2). Замена: a^2b=a1, b^2c=b1, c^2a=c1. Тогда условие задачи выглядит как a1+b1+c1=3, а число A>=2(a1^2+b1^2+c1^2)=2(a1+b1+c1)^2-4(a1b1+a1c1+b1c1)=18-4(a1b1+a1c1+b1c1). Возьмем первое и последнее число: 2(a1^2+b1^2+c1^2)= 18-4(a1b1+a1c1+b1c1), поделим на 2 обе части (a1^2+b1^2+c1^2)=9-2(a1b1+a1c1+b1c1), X=2(a1b1+a1c1+b1c1)+(a1^2+b1^2+c1^2)=9. По известному неравенство a1^2+b1^2+c1^2>=a1b1+b1c1+a1c1. Но тогда 9=X<=3(a1^2+b1^2+c1^2), откуда (a1^2+b1^2+c1^2)>=3, откуда A>=6. Равенство достигается, если взять a=b=c=1.

Ответ: 6

Задание 4.

Пусть числа записывают слева направо, будем считать, что первое число – самое левое, последнее – самое правое (число в десятичной записи читаем слева направо). Тогда число x имеет вид (a1)*10^2n-2+(a1+1)*10^(2n-4)+...+(a1+n-2)*10+(a1+n-1), где a1 – двузначное число. a1=10a+b. x=a(10^2n-1+10^2n-3+...+10^3+10)+b(10^2n-2+10^2n-4+...+1)+1*10^2n-4+2*10^2n-6+...(n-2)*10^2+n-1, a - число от 1 до 9, и b – число от 0 до 9. a и b не равны 4,а число b+n-1 не дает остаток 7 при делении на 10 . Ясно, что x – нечетное, т.к. иначе были бы простые делители 2 и 6, но 6 – не простое. По формуле для суммы геом. Прогрессии x=10*(10^2n-2 – 1)/99 * a + 1*(10^2n-2 – 1)/99 * b +10^2n-4 * 1 +...10^2(n-2)+(n-1)