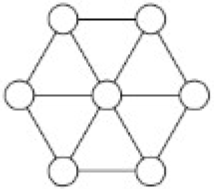
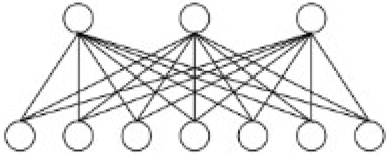
ВОПРОС 1: ЭССЕ

25 из 25 баллов

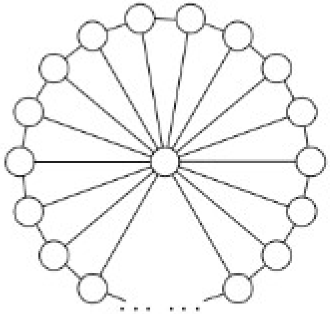
1. На картинке нарисовано n кружочков, некоторые кружочки соединены отрезками. Требуется расставить в кружочках числа от 1 до n (без повторений) так, чтобы выполнялось свойство: если кружочки соединены отрезками, то стоящие в них числа должны быть взаимно просты (то есть не иметь общих натуральных делителей, отличных от 1). Можно ли это сделать в каждом из следующих случаев? Если можно — опишите расстановку чисел, если нет — объясните, почему нельзя.



а) $n = 7$



б) $n = 10$



в) $n = 2022$: по кругу стоят 2021 кружочков, и еще один в центре

Данный ответ: а)В центре 7,а по кругу по часовой стрелке 1,2,3,4,5,6 все кроме 6 и 1 соседнии(по кругу) поэтому они взаимно простые ,а 1 и 6 тоже как, и 7 и любое другое взаимно простые.

б)Если в 3 верхних кругах есть чётное то есть и 2 . а сним и все чётные ,а мест всего 3(чётных 5) так как 2 и чётное взаимно простые(пробуем сделать по условию) 1 может быть так как взаимно просто с любым числом.3 нет так как с ним должны быть 6 и 9(они с друг другом не взаимо просты) ,а значит должно там быть > 3 чисел, но таких мест 3(как 3 верхних).Если 5 то с ним 10,а это чётное значит там все чётные,но всего чисел больше 3 противоречие(пишу с ним то.е.в другом круге и потому что они не взаимо просты,а верхнии со всеми нижними),если 7 то с ним нет, а 9 сним 3 и всё уже разбирал у 3.Можно ставить только 1 и 7,надо 3 числа ,а есть 2(чётные не разбирал так как они сводятся к 2) с ними никого не поставишь так как будет больше 3 чисел.Но значит там или <3 или >3 чисел.Но никак не 3 значит нельзя.

в)В центре 1 или простое >1011иначе есть число с которым это не взаимо просто.Все простые >2 нечетные ,а 1 тоже всего надо поставить 1011 чётных и нечётных раз ставим нечётное то чётных остаётся на 1 больше, но чётное не может стоять рядом с чётным(не взаимно простые они)

посмотрим по часовой чётное после него только нечётное(иначе оба делятся на 2) и так с каждым ,а нечётное ставим только по часовой тогда каждому чётному хотя бы одно нечётное но раз чётных больше последнее будет без нечётного(иначе какое то раньше ,но для правильности ставили каждому) но первое и последнее чётные и соседнии ,а это противоречие(по принцыпу дирехле),а тогда в центре не нечётное ,но мы разобрали что только нечётное противоречие ,а значит нельзя(сдесь).

Ответ:а)да,б)нет,в) нет.

ВОПРОС 2: ЭССЕ

15 из 30 баллов

2. Назовем *каскадом, порожденным числом* r, набор из 12 натуральных чисел: $r, 2r, \ldots, 12r$.

а) Может ли какая-то пара чисел (a, b) содержаться в шести различных каскадах? Если да — приведите пример таких чисел, если нет — объясните, почему не может.

б) Верно ли, что множество натуральных чисел можно раскрасить в 12 цветов так, что в каждом каскаде все элементы будут разного цвета?

Данный ответ:

а)

А так существует.

60,120 и т.д.

30,60,90,120 и т.д.

20,40,60,80,100,120, и т.д.

15,30,45,60,75,90,105,120 и т.д.

12,24,36,48 и т.д. десятое=12*10=120

10,20,30,40,50,60,70,80,90,100,110,120

везде пара 60 и 120 ,(в 6)значит а)да

б)Представим нет тогда есть два числа одного цвета в одном каскаде.,а какие вообще встречаются понятно не взаимо простые , за исключением при г=1.Там всего 12 чисели те которые поделить большее на меньшее не больше 12.значит для числа важны только ближние числа и те у котор ых с этими различные делители в произведении не больше 12.значит у одного макс на 3 каких то простых делителей больше

Если на 3 то только на три 2 или 2,2,3;,1 вариант,если на 2 то или 3 или 2(для каждого на выбор) за исключением вариант 5 и 2.всего 2*2+1+1+1 =7

и плюс на один простой делитель больше это 2,3,5,7 всего 4,7+4=11 значит для числа не более 22 чисел их в другой цвет,из них не могут по два и три, только 1 и 1,и 2 и 1 у два и один это 2,2 и 2 или 3;или 2,3 и 2;а также по одному 2 с любым из трёх; и ещё 3 с 2. всего 3+3+1=7 значит для к аждого из них по семь с которыми ещё соединяются значит можно раскрасить так соседей что ни один из них не подойдут,одинаковые какойто и тот который не входит в семёрку.Но значит раскрасить можно ,а послужит началом г=1 там 1 в один ,два в другой и тюд а далее по правилу.

Ответ:а)да,б)да

ВОПРОС 3: ЭССЕ

0 из 20 баллов

3. В треугольнике ABC точка D — середина стороны AB, E — середина стороны AC, F — середина биссектрисы AL, причем $DF = 1$, $EF = 2$. На плоскости изображены точки D, E, F так, что прямая DF горизонтальна, а остальные элементы чертежа стерты. Можно ли восстановить положение хотя бы одной из вершин треугольника, если известно, что вершина A находилась сверху от прямой DF?

Данный ответ: [Ничего не дано]

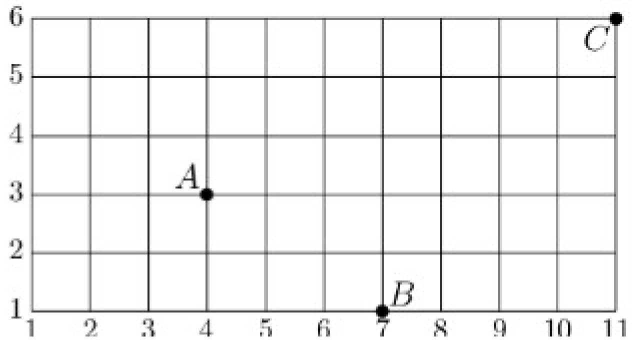
ВОПРОС 4: ЭССЕ

16 из 25 баллов

4. Город имеет форму клетчатого прямоугольника 5×10 клеток: линии — улицы, клетки — жилые кварталы. Расстояние между перекрестками измеряется как длина самого короткого пути по улицам города, проходящего от одного перекрестка до другого. Например, для перекрестков A, B и C на картинке $AB = 5$, $AC = 10$, $BC = 9$. Можно ли отметить в этом городе k перекрестков так, чтобы все расстояния между этими перекрестками оказались различными числами? Если да — укажите эти перекрестки (например, перекресток C находится на пересечении 11-й вертикальной и 6-й горизонтальной улицы), если нет — объясните, почему нельзя.

Решите задачу для

а) $k = 5$; б) $k = 6$; в) $k = 7$.



Данный ответ:

минимальное растояние это разность по одним числам + по другим(от большего отнимаем меньшее ,а что у кого не важно)так как хоть как по столбцам координаты одного минус координаты другого так и по строкам.макс это 11-1+6-1=15 от одного угла к другому.и растояние как минимум 1 значит всего может быть 15 различных чисел но при 7 всего 6+5+4+3+2+1=21 число(7 с 1,7 с 2 и т.д. до с 6 потом 6 с 1,с2 и т.д. до с 5 и т.д.(с 7 было))но если все 21 различны то должны быть хотя бы 21 из возможных различных , но их 15.15<21 значит 21 не возможно ,а это в при 7 ,при можно пусть 1(1,1), 2(1,2), 3(1,4), 4(1,8), 5(6,11),

запишем суммы так как люьая координата точки х не больше чем она у х+у

1(2), 2(3), 3(5), 4(9), 5(17),

3-2=1,5-3=2,5-2=3,9-5=4,9-3=6,9-2=7,17-9=8,17-5=12,17-3=14,17-2=15 подходит (а ,при 5.)

При 6 надо 15 и 15 есть значит есть все расстояния 15 только у крайних если это не 1,1 и 6,11 повернём на 90 градусов.Расстояния не изменились.14 можно только с помощью уголков ,а тогда сразу плюс 5 и 10 ,6 и 9 или 4 и 11.Если не в начальных.Но тогда где то 1 и не от начальных

Ответ:а)да,б)нет,в)нет