Олимпиада школьников СПбГУ по математике.
Заключительный этап. 2020/2021 учебный год. 10 – 11 классы.

1. При каких натуральных n клетчатую доску $n \times n$ можно разрезать на прямоугольники 1×1 и 2×3 так, что прямоугольников разных размеров будет поровну?

2. Положительные числа a, b, c таковы, что $a^2b + b^2c + c^2a = 3$. Найдите минимальное значение выражения

$$A = \frac{\sqrt{a^6 + b^4c^6}}{b} + \frac{\sqrt{b^6 + c^4a^6}}{c} + \frac{\sqrt{c^6 + a^4b^6}}{a}.$$

3. Вокруг остроугольного треугольника ABC описана окружность. Точка K — середина меньшей дуги AC этой окружности, а точка L — середина меньшей дуги AK этой окружности. Отрезки BK и AC пересекаются в точке P. Найдите угол между прямыми BC и LP, если известно, что $BK = BC$.

4. Петя написал на доске подряд в убывающем порядке n последовательных двузначных чисел, последнее из которых не содержит цифру 7. Вася подумал, что это десятичная запись натурального числа x, и разложил x на простые множители. Оказалось, что их всего два и они различаются на 4. Что написано на доске?

5. В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством 2^n, $2^{n-1} \cdot 3$, $2^{n-2} \cdot 3^2$, $2^{n-3} \cdot 3^3$, $\ldots$, $2 \cdot 3^{n-1}$, 3^n пиастров, где n — натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?

1	2	3	4	5	Сумма
20	20	15	5	0	60

Задача1

1) Пусть у нас x прямоугольников каждого вида, тогда площадь исходного квадрата 6x+x=7x – делится на 7. 7 — простое, поэтому если площадь(квадрат стороны) делится на 7, то и сторона делится на 7. Итак, n делится на 7.

Пример на 7

1	1	2	2	3	3	3
1	1	2	2	3	3	3
1	1	2	2	6	6	6
4	4	4	8	6	6	6
4	4	4	9	10	7	7
5	5	5	11	12	7	7
5	5	5	13	14	7	7

Итак, мы умеем разбивать 7 на 7. Возьмем квадрат 7a на 7a и разобьём его на квадраты 7 на 7(он очевидно так разбивается), и разобьём каждый маленький квадрат по отдельности. Так как в маленьких поровну, то и во всем поровну.

Ответ: при всех n, которые делятся на 7

Задача2

Сначала оценим каждый числитель по неравенству между средним квадратичным и средним арифметическим:

$A= \sqrt{}\ (a^6 + b^4c^6\ )/b+ \sqrt{}\ (b^6 + c^4a^6\ )/c+ \sqrt{}\ (c^6 + a^4b^6\ )/a+ \ \geq (a^3+b^2c)/\sqrt{2}b + (b^3+c^2a)/\sqrt{2}c + \ (c^3+a^2b)/\sqrt{2}a$
$\geq (a^3/b + b^3/c + c^3/a + bc^3+ ca^3+ ab^3)*(1/\sqrt{2})$

По неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим:

$a^3/b + ab^3 \geq 2\ a^2b$

Значит:

$A \geq (a^3/b + b^3/c + c^3/a + bc^3+ ca^3+ ab^3)*(1/\sqrt{2}) \geq 2(a^2b +b^2c+c^2a) *(1/\sqrt{2})=6/\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

Заметим, что при a=b=c=1 выражение равно $3\sqrt{2}$

Ответ: $3\sqrt{2}$

Задача3
Отметим на окружности точку A_1, такую, что дуга ВА равна дуге BA_1.
Заметим, что из симметрии дуги ВК и ВС равны, поэтому дуги $AK=KC=CA_1$.
Рассмотрим ΔAA_1K. В нём АС и КВ биссектрисы, поэтому Р — центр вписанной окружности. Так как A_1L — тоже биссектриса, то она проходит через Р. Значит, $A_1L = LP$.
Найдём угол между A_1L и ВС. Он равен полусумме дуг BA_1 и LC = полусумме ВА и LC = (180 – КС/2 + AL)/2= 90 градусов. (К и С расположены симметрично, потому что ВКС равнобедренный, поэтому середина КС диаметрально противоположна точке В).
Ответ: 90 градусов.

Задача 4
Возможно, задумывался ответ 2021= 43*47, но у меня в условии абсолютно точно написано, что числа Петя выписывает по убыванию, а не по возрастанию.
Наше число это $p(p+4)$
При $p\leq 7$ подходит только число 21. Оно равно 3*7 и это написанные назад последовательные двузначные числа(одно)

Очевидно, при $p \geq 7$ все простые оканчиваются на 1,3,7,9, поэтому отличаться на 4 могут только простые, которые оканчиваются на 3 и 7 или на 7 и 1. Если на 7 и 1, то наше число бы оканчивалось на 7, поэтому на 3 и 7.
$p = 10a + 3$. Сумма цифр числа сравнима с числом по модулю 3, поэтому чтобы числа были простыми, $a+7$ и $a+3$ не должны делиться на 3, значит a – это 1 по модулю 3. Итак, $a = 3x+1$, значит $p = 30x+13$, значит число равно $(30x+13)*(30x+17)=900x^2+510x+390x+221$

$900x^2+510x+390x+221\equiv 900x^2+800x+221\equiv 221\equiv 21 \pmod{100}$

Итак, наше число заканчивается на 21!

Значит до него было 22, поэтому на самом деле на 221, поэтому $900x^2+800x$ делится на 1000, поэтому $x(9x+8)$ делится на 10, поэтому $x = 0$ или 8 по модулю 10.