Олимпиада школьников СПбГУ по математике.
Заключительный этап. 2020/2021 учебный год. 10 – 11 классы.

1. При каких натуральных n клетчатую доску $n \times n$ можно разрезать на квадраты 1×1 и 2×2 так, что квадратов разных размеров будет поровну?

2. Положительные числа a, b, c таковы, что $a^2b + b^2c + c^2a = 3$. Найдите минимальное значение выражения
$$A = a^7b + b^7c + c^7a + ab^3 + bc^3 + ca^3.$$

3. Дан неравнобедренный остроугольный треугольник ABC. В нем проведены высоты BB_1 и CC_1, пересекающиеся в точке H. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами H и C соответственно касаются прямой AB. Из точки A к ω_1 и ω_2 проведены касательные, отличные от AB. Обозначим точки их касания с этими окружностями через D и E соответственно. Найдите угол B_1DE.

4. Петя написал на доске подряд n последовательных двузначных чисел ($n \geq 2$), первое из которых не содержит цифру 4, а последнее — цифру 7. Вася подумал, что это десятичная запись натурального числа x, и разложил x на простые множители. Оказалось, что их всего два и они различаются на 4. Что написано на доске?

5. В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством 3^n, $3^{n-1} \cdot 5$, $3^{n-2} \cdot 5^2$, $3^{n-3} \cdot 5^3$, $\ldots$, $3 \cdot 5^{n-1}$, 5^n пиастров, где n — натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?

1	2	3	4	5	Сумма
20	20	18	0	0	58

Задача №1

Ответ: При n, больших и кратных пяти. (10, 15 и т.д.)

Доказательство.

Оценка.

Пусть у нас t – количество квадратов 1 на 1 . Оно равно количеству квадратов 2 на 2.

Всего клеток – n^2, тогда:

4*t+t=n^2

5*t=n^2 →

n кратно 5.

Рассмотрим квадрат 5*5.

1	2	1	2	1
3	4	3	4	3
1	2	1	2	1
3	4	3	4	3
1	2	1	2	1

И раскрасим его в 4 цвета.

Заметим, что любой квадрат 2 на 2 покрывает все 4 цвета. Количество клеток с цветом 4 – 4.

А предполагаемое количество квадратов 2 на 2 – t=25/5=5. 5 больше 4, что невозможно →

Для n=5 это невозможно.

Если квадрат со стороной n>5 и n кратно 5.

Пусть n=5*(2k+1);

Тогда количество цвета четыре при такой же раскраске таково:

(5(2k+1)-1)/2=5*k+2 – в четных строках и столбцах.

Тогда всего их – $(5k+2)^2$

Количество же квадратов 2 на 2 равно:

5*$(2k+1)^2$

$(5k+2)^2$ >=5*$(2k+1)^2$

k^2 >= 1/5

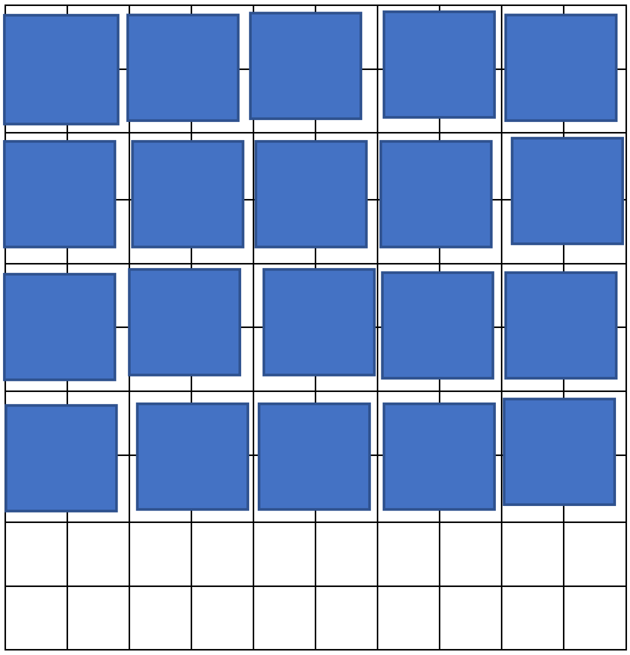
k>0. – противоречия для n>5 – нет.

Пример. Если квадрат со стороной n>5 и n кратно 5.

Начиная с левого верхнего угла, будем заполнять каждый ряд квадратами 2 на 2 до тех пор, пока их не станет столько, сколько нужно для условия равенства. (Это всегда можно сделать, оценка приведена выше)

Остальные клетки заполняем квадратами 1 на 1.

Пример для 10:



(если n нечетно, справа будет оставаться полоска шириной в одну клетку).

Задача №2.

$a^7b + a^3b \geq 2\sqrt{a^8b^4}$ – по неравенству Коши о средних.

$b^7c + b^3c \geq 2\sqrt{c^4b^8}$

$c^7a + c^3a \geq 2\sqrt{c^8a^4}$

$A \geq 2(a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2)$

9 = $(a^2b + b^2c + c^2a)$ *^2=*$a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2 + 2abc(a^2b + b^2c + c^2a)$*=* $a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2 +$
$+6abc$

$a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2$ *= 9 – 6abc;*

3 = $a^2b + b^2c + c^2a \geq 3\sqrt[3]{a^3b^3c^3}$*=3abc* – по неравенству Коши о средних.

1>=abc;

9-6abc>=3;

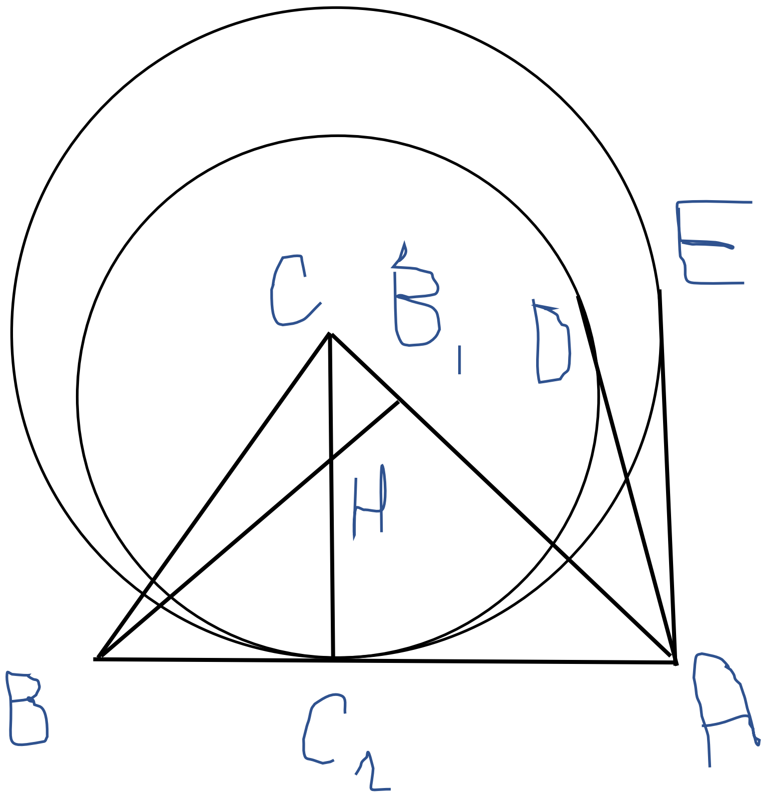
$A \geq 2(a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2) \geq 2(9 - 6abc) \geq 6$

Пример на 6:

a=1, b=1, c=1.

Ответ: *6.*

Задача №3.



Пусть угол AHB1 равен a, угол C1AC - b, угол CAH – x.

Угол ADH=90 градусов (AD – касательная),

Угол AB1H=90 градусов (из условия),

Угол AC1H=90 градусов (из условия) →

Точки C1, H, B1, D, A лежат на одной окружности. (первые два углы и опираются на одну дугу → точки A, D, H, B1 лежат на одной окружности. Вторые два угла дают в сумме 180 градусов →

Точки A, B1, H, C1 лежат на одной окружности. Но три точки задают одну окружность (если не лежат на одной прямой))

Отсюда угол B1HA = угол AC1B1 = a.

AE=C1A (отрезки касательных равны)

AB1 – общая сторона

AC – биссектриса угла EAC1 →

Треугольники C1AB1 и EAB1 равны по двум сторонам и углу между ними → угол AEB1 = угол B1C1A= a.

Угол HAC = угол C1AB1 – угол HAB1 = b-x = 90 – a (из прямоугольного треугольника AHB1)

AH – биссектриса угла EAC1 → угол C1AH = угол DAH = x;

Угол DAC = угол DAH – угол CAH = x – (b-x) = 2x-b;

Угол EAC= угол CAC1=b;

Угол DAE = b-(2x-b)=2b-2x = 180 – 2a;

Треугольник DAE равнобедренный (отрезки касательных равны) →

Угол AED = (180 – (180 – 2a))/2 = a.

А так как угол AEB1 = a → отрезки DE и BE совпадают → точки B1, E, D лежат на одной прямой → угол B1DE = 180 градусам.

Ответ: 180 градусов.

Задача №5

Ответ: $\frac{5^{n+1}-3^{n+1}}{2}-1$

1. Докажем, что это количество нельзя набрать.

Число $\frac{5^{n+1}-3^{n+1}}{2}-1 = 3^{n}+\cdots+5^{n}$-1;

Будем уменьшать сумму $3^{n}+\cdots+5^{n}$

Если убрать некоторое число, то сумма изменится больше, чем на 1 → не будет равняться нашему числу;

Если заменить одно число на другое:

$$3^{k}5^{n-k}-3^{k+1}5^{n-k-1}=2*3^{k}5^{n-k-1}>1$$

Число уменьшится более, чем на 1.

Ч.т.д.

2. Докажем, что все последующие числа можно разложить на искомую сумму.

База индукции: n=1:

8=5+3

9=3+3+3

10=5+5

Все последующие числа можно получить: нужно найти остаток числа при делении на 3. Если остаток 2, то нужно несколько раз прибавить к 8 тройку, остаток 1 – к 10, остаток 0 – к 9. Так как числа 8, 9, 10 уже разложены, то и остальные числа будут также разложены.

n=2;

49=9+15=25;

50=25+25;

51=9+9+9+9+15

52=25+9+9+9

И т.д.

57=15+15+9+9+9;

Пусть при n<=k-1 это верно. Тогда докажем для n=k (k>3);

Пусть t – целое число, меньшее 3^k

$(\frac{5^k-3^k}{2}$ +t)*3= $\frac{5^{k+1}-3^{k+1}}{2}-5^k+t+2t$

$(1)\,\frac{5^{k+1}-3^{k+1}}{2}+t=3*\frac{5^k-3^k}{2}+5^k-2t$

$5^k-2t-\frac{5^k-3^k}{2}=\frac{5^k+3^k}{2}-2t\geq\frac{5^k-4*3^k}{2}>0$

Число справа в (1) разложимо по предположению индукции, а значит, удовлетворяет условию.

Задача №4.

X не кратно 2, так как иначе его второй простой делитель – 6, что невозможно;

X не кратно 5, так как иначе 9 и 1 – простые числа.

Отсюда следует, что последнее число не может равняться 0,2,4,5,6,7,8

Остаются варианты 1,3,9;

Остаток от деления на 3 числа n такой же, как и у числа x.

Пусть A – первое число. Тогда:

$$(p+4)^a p^b=A(10^{2n-2}+10^{2n-4}+\cdots+10^0)+1*10^{2n-2}+2*10^{2n-4}+\cdots+(n-1)*10^0=$$

= $1*10^{2n-2}+2*10^{2n-4}+\cdots+(n-1)*10^0+\frac{100^n-1}{99}*100$;

$(p+4)^a$ раскрываем по биному Ньютона.