Олимпиада школьников СПбГУ по математике.
Заключительный этап. 2020/2021 учебный год. 10 – 11 классы.

1. Натуральные числа от 1 до 2021 записаны в ряд в некотором порядке. Оказалось, что у любого числа его левый и его правый сосед имеют разную четность. Какое число может быть на первом месте?

2. При $a, b, c > 0$ найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{(a + b + c)^3 - 26abc}.$$

3. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B, а окружность с центром в точке O охватывает окружности ω_1 и ω_2, касаясь их в точках C и D соответственно. Оказалось, что точки A, C и D лежат на одной прямой. Найдите угол ABO.

4. Петя написал на доске подряд n двузначных восьмеричных чисел $(n \geq 2)$, образующих арифметическую прогрессию с разностью -8. Вася подумал, что это восьмеричная запись натурального числа x, и разложил x на простые множители. Оказалось, что их всего два, и они различаются на 6. Что написано на доске?

5. В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством $3n - 1$, $6n + 1$, $6n + 4$ и $6n + 7$ пиастров, где n — натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?

1	2	3	4	5	Сумма
20	20	20	0	0	60

#3

Проведем касательные к окружностям в C и D. Пусть они пересекаются в E. Обозначим угол ECD за a. Тогда тк EC=ED как отрезки касательных, то EDC=ECD=a. По теореме о угле между хордой и касательной в окр. W1 Угол ECD равен половине дуги AC =>AC=a/2.

Тогда угол CBA равен также a ,тк вписанный и опирается на эту дугу => CBA = 2AC=a. Также в w2 ABD=AD/2=EDA=a

Продлим CW1 и DW2 до пересечения. Как угол между радиусом и касательной ECW1=EDW2 = 90;

Тк EC и ED также являются касательными для O, то центр окружности O также лежит на этих двух прямых, то есть в точке их пересечения. Проведем EO. По теореме об угле между хордой и касательной в O дуга CD = 2ECD = 2a. Как центральный и опирающийся на эту дугу угол COD = CD = 2a;

Треугольники ECO = EDO тк EO общая, EC = ED как отрезки касательных, углы ECO = EDO = 90 как угол между радиусом и касательной. Значит угол COE=EOD=COD/2 = a

В четырехугольнике COBD углы COD=CBD=2a, а значит COBD списан в окр. Пусть угол CBO = b.Тк COBD списанный, то DCO+OBD=180

ECO-ECD+CBD+COB=180

90-a+2a+b=180=>b=90-a

AOB = ABC+CBO = a+90-a=90;

Ответ ABO = 90

#1

Будем обозначать четные числа буквой ч, а нечетные н.

Начнем рассматривать первые 2 числа.

1) НЧ

Тогда 3 число Ч, так как слева от второй н, а по условию числа справа и слева от второй цифры разной четности. Получим НЧЧ. Аналогичными рассуждениями для третьего числа получаем четвертое Н, пятое число Н, шестое Ч и так далее

Получаем Н(ЧЧНН) (ЧЧНН)… (ЧЧНН)

2) ЧЧ

Теми же рассуждениями получаем (ЧЧНН)(ЧЧНН)… (ЧЧНН)(ЧЧНН)

3)ЧН

Ч(ННЧЧ)(ННЧЧ)…(ННЧЧ)

4НН

(ННЧЧ)(ННЧЧ)…Н

Во всех трех случаях выделяется цикл из 4 чисел, в котором поровну Ч и Н.

Тогда в первом случае если начать расставлять так числа, мы получим последовательность вида Н(ЧЧНН) (ЧЧНН)… (ЧЧНН), в которой 505 блоков

ЧЧНН, а следовательно 505*2 = 1010 четных числа и 505*2+1(+первое Н) = 1011 нечетных. Подходит под условие, так как среди последовательных натуральных чисел от 1 до 2021 1011 нечетных и 1010 четных.

Во втором случае получим последовательность вида (ЧЧНН)(ЧЧНН)… (ЧЧНН)(ЧЧНН) Ч . В ней 1011 четных и 1010 нечетных. Не подходит.

В третьем случае последовательность вида Ч(ННЧЧ)(ННЧЧ)…(ННЧЧ).

В ней 1011 четных и 1010 нечетных. Не подходит.

В четвертом случае получим последовательность вида (ННЧЧ)(ННЧЧ)…Н.

В ней 1010 четных и 1011 нечетных. Подходит.

В итоге подошло всего 2 возможных варианта расстановки чисел, в обоих из которых первое число нечетное.

Ответ: любое нечетное из промежутка от 1 до 2021

#2

A = (a^3+b^3+c^3)/((a+b+c)^3-26abc) = (a^3+b^3+c^3)/(3(a+b)(a+c)(b+c)-26abc+a^3+b^3+c^3) < (1) = (a^3+b^3+c^3)/(3*2sqrt(ab) *2sqrt(ac) *2sqrt(bc) + a^3+b^3+c^3– 26abc) =   (a^3+b^3+c^3)/(a^3+b^3+c^3-2abc) <(2)= (a^3+b^3+c^3)/(a^3+b^3+c^3-2/3(a^3+b^3+c^3)) = (a^3+b^3+c^3)/(1/3(a^3+b^3+c^3)) = 3

Достигается при a = b = c =1

(1) Использовал, что a+b>=2sqrt(ab) на скобки с (a+b)(a+c)(b+c) (на каждую отдельно)
(2) a^3+b^3+c^3>=3abc = > abc<=(1/3)(a^3+b^3+c^3)