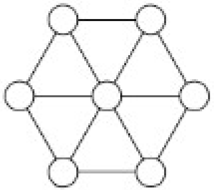
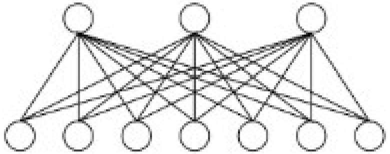
ВОПРОС 1: ЭССЕ

25 из 25 баллов

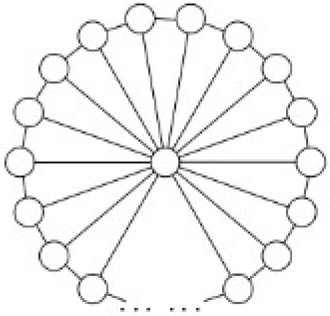
1. На картинке нарисовано n кружочков, некоторые кружочки соединены отрезками. Требуется расставить в кружочках числа от 1 до n (без повторений) так, чтобы выполнялось свойство: если кружочки соединены отрезками, то стоящие в них числа должны быть взаимно просты (то есть не иметь общих натуральных делителей, отличных от 1). Можно ли это сделать в каждом из следующих случаев? Если можно — опишите расстановку чисел, если нет — объясните, почему нельзя.



а) $n = 7$



б) $n = 10$



в) $n = 2022$: по кругу стоят 2021 кружочков, и еще один в центре

Данный ответ: в) нет, т. к. ч число (четное обозначим буквой ч, а нечетное н) должно стоять между н, (в противном случае общий делитель 2) значит на окр-сти н> или=ч но в чентре тоже должно быть н значит минимум н > на 1 чем ч, но у нас их одинаковое кол-во

а) можно. расположим числа 2-7 по окр-сти по часовой стрелке, в центре - 1.

б) нет. ч числа мы не можем поставить в верхнюю линию, т.к. их больше 3, следовательно в нижней линии они тоже будут(общий делитель 2), з начит все ч числа в нижней линии. помотрим на н числа, которые могут стоять в верхней строке: 10:5, 6:3, у 9 и 6 общий делитель 3, значит 3,5, 9, неподойдут. остается только 2 числа которые могут стоять в верхней строке, а нам нужно 3

ВОПРОС 2: ЭССЕ

13 из 30 баллов

2. Назовем *каскадом, порожденным числом* r, набор из 12 натуральных чисел: $r, 2r, \ldots, 12r$.

а) Может ли какая-то пара чисел (a, b) содержаться в шести различных каскадах? Если да — приведите пример таких чисел, если нет — объясните, почему не может.

б) Верно ли, что множество натуральных чисел можно раскрасить в 12 цветов так, что в каждом каскаде все элементы будут разного цвета?

Данный ответ: а)да. 60 120

ВОПРОС 3: ЭССЕ

0 из 20 баллов

3. В треугольнике ABC точка D — середина стороны AB, E — середина стороны AC, F — середина биссектрисы AL, причем $DF = 1$, $EF = 2$. На плоскости изображены точки D, E, F так, что прямая DF горизонтальна, а остальные элементы чертежа стерты. Можно ли восстановить положение хотя бы одной из вершин треугольника, если известно, что вершина A находилась сверху от прямой DF?

Данный ответ: да т. к.

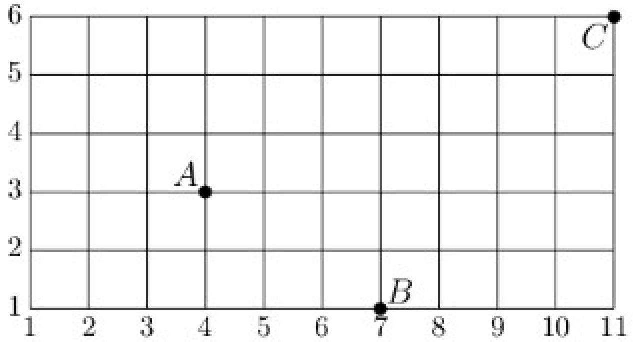
ВОПРОС 4: ЭССЕ

17 из 25 баллов

4. Город имеет форму клетчатого прямоугольника 5×10 клеток: линии — улицы, клетки — жилые кварталы. Расстояние между перекрестками измеряется как длина самого короткого пути по улицам города, проходящего от одного перекрестка до другого. Например, для перекрестков A, B и C на картинке $AB = 5$, $AC = 10$, $BC = 9$. Можно ли отметить в этом городе k перекрестков так, чтобы все расстояния между этими перекрестками оказались различными числами? Если да — укажите эти перекрестки (например, перекресток C находится на пересечении 11-й вертикальной и 6-й горизонтальной улицы), если нет — объясните, почему нельзя.

Решите задачу для

а) $k = 5$; б) $k = 6$; в) $k = 7$.



Данный ответ:

а) можно. 1 11 вертикаль, 6 горизонталь. 2 11 вертикаль, 5 горизонталь. 3 11 вертикаль, 3 горизонталь.   4 9 вертикаль, 1 горизонталь. 5 1 вертикаль, 1 горизонталь.

в) нет. посчитаем кол-во разных чисел, минимальное 1 максимальное: нужно пройти макс. кол-во сторон клеток вверх и в какую-то из сторон 10+5=15 разных чисел

если 7 точек, посчитаем кол-во разных чисел: 1-2 1-3...1-7 это 6 , 2-1 уже было 2-3...2-7 это 5, 3-4...3-7............6-7 это 1

6+5+4+3+2+1=19 но 19>15 противоречие