

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Олимпиада школьников по математике 2020–2021
Заключительный этап
8–9 классы

1. Докажите, что для любых вещественных чисел a и b уравнение

$$(a^6 - b^6)x^2 + 2(a^5 - b^5)x + (a^4 - b^4) = 0$$

имеет решение.

2. На острове живут лжецы и рыцари. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Каждый житель острова про каждого из остальных знает, рыцарь он или лжец. Как-то раз встретились 28 островитян. Двое из них сказали: «Ровно двое из нас лжецы», затем четверо из остальных сказали: «Ровно четверо из нас лжецы», потом восемь из оставшихся сказали: «Ровно восемь из нас лжецы», наконец, все оставшиеся 14 сказали: «Ровно 14 из нас лжецы». Сколько лжецов было среди встретившихся? Приведите все возможные варианты и докажите, что других нет.

3. Сумма неотрицательных чисел a , b и c равна 3. Найдите наибольшее значение выражения $ab + bc + 2ca$.

4. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках K и L . Прямая ℓ пересекает окружность ω_1 в точках A и C , а окружность ω_2 — в точках B и D , причем точки идут на прямой ℓ в алфавитном порядке. Обозначим через P и Q соответственно проекции точек B и C на прямую KL . Докажите, что прямые AP и DQ параллельны.

5. Дана клетчатая доска 2021×2021 . Петя и Вася играют в следующую игру. Они по очереди ставят фишки в свободные клетки доски. Выигрывает тот игрок, после хода которого в каждом прямоугольнике 3×5 и 5×3 будет стоять фишка. Начинает Петя. Кто из игроков может обеспечить себе победу вне зависимости от действий соперника?

6. Найдите все такие натуральные числа n , что число $2^n + n^2 + 25$ является кубом простого числа.

1	2	3	4	5	6	Сумма
15	20	10	0	5	5	55

$$1) (a^6 - b^6) x^2 + 2(a^5 - b^5)x + (a^4 - b^4) = 0$$

$$D = 4(a^5 - b^5)^2 - 4(a^6 - b^6)(a^4 - b^4) = \\ = 4a^{10} - 8(a^5)(b^5) + 4b^{10} -$$

$$4a^{10} + 4a^6b^4 + 4a^4b^6 - 4b^{10} =$$

$$= 4a^4b^4(a-b)^2 = (2(a^2)(b^2)(a-b))^2 \geq 0$$

так как $t^2 \geq 0$ всегда

\Rightarrow есть хотя бы 1 решение

4) Пусть точка O точка пересечений l и KL, тогда

Треугольники BPO и CQO подобны по 3 углам
(прямоугольные треугольники с равными
вертикальными углами)

Запишем свойство касательных:

$$AO \cdot OC = KO \cdot OL$$

$$DO \cdot OB = KO \cdot OL \mid \Rightarrow AO \cdot OC = DO \cdot OB$$

$$\Rightarrow AO/OD = BO/OC$$

Из подобия следует, что $BO/CO = OP/QO$

$\Rightarrow AO/OD = OP/QO$, а углы $QOC = POB$ как

вертикальные \Rightarrow треугольники AOP и DOQ

подобны, т.е. углы $DQO = APO \Rightarrow AP \parallel DQ$ так как
накрест лежащие углы равны.

2) (Очевидно, что если 1 человек в группе лжец, то все остальные тоже лжецы, поэтому можно рассматривать сразу по группам. Также очевидно понятно, что правду может говорить не более 1 группы)

Рассмотрим каждую группу, когда она говорит правду. Пусть 1 группа (2 человека) скажи правду,

но тогда остальные 26 солгали =>противоречие(значит 1 группа солгала).Значит у нас точно не 2 лжеца.

Теперь рассмотрим 2 группу(4 человека) они сказали правду(по предположению) , но тогда остальные 24 островитян солгали и вновь получаем противоречие к предположению.Значит лжецов точно не 4.

Рассматриваем 3 группу (8 человек) , если они сказали правду ,то лжецов должно быть 8, а лжецов получается 20, противоречие.

Наконец рассматриваем 4 группу(14 человек), если они сказали правду ,то лжецов 14, т.е. нет противоречий.Значит 14 лжецов может быть.

Рассмотрим еще случай когда все группу лгут, т.е. все лжецы и этот случай нам подходит.

$$6) 2^n + n^2 + 25 = p^3$$

Допустим $n \equiv 1 \pmod{2} \Rightarrow 2^n$ кратно 2

$$n^2 \equiv 1 \pmod{2} \quad 25 \equiv 1 \pmod{2} \Rightarrow p^3 \equiv 0 \pmod{2} \Rightarrow$$

$$p=2 \quad 2^3 < 25 \Rightarrow n \equiv 0 \pmod{2}$$

$$\text{Находим } n=6 \quad (p=5)$$

$$3) a=1 \quad b=1/2 \quad c=3/2$$

$$\text{Пусть } a+b+c=3 \quad ab+bc+2ac=y=4$$

Допустим это максимум(y)

а заменим на а-х

с заменим на с-х

$$a-x+b+c+x=3$$

$$(a-x)b+(c+x)+2(a-x)(c+x)=y-2x(c+x-a)$$

Величина увеличится ,если $a \geq c+x$

Max($2x(c+x-a)$) достигается при $x=1/2c$

Т.е. 4.25

$$ab+bc+2ac=4.25$$

6)Вася