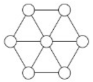
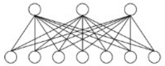
ВОПРОС 1: ЭССЕ

25 из 25 баллов

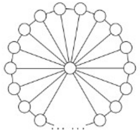
1. На картинке нарисовано n кружочков, некоторые кружочки соединены отрезками. Требуется расставить в кружочках числа от 1 до n (без повторений) так, чтобы выполнялось свойство: если кружочки соединены отрезками, то стоящие в них числа должны быть взаимно просты (то есть не иметь общих натуральных делителей, отличных от 1). Можно ли это сделать в каждом из следующих случаев? Если можно — опишите расстановку чисел, если нет — объясните, почему нельзя.



а) $n = 7$



б) $n = 10$



в) $n = 2022$: по кругу стоят 2021 кружочков, и еще один в центре

Данный ответ: **а)**Можно. Заметим, что единица для любого наптурального числа будет взаимно простым, так как сама имеет только 1 делитель - единицу. Следовательно, поставим её в центр. далее можно расставить во все остальные кружочки числа по порядку. Пр

Верхний ряд слева направо: 2, 3

Средний ряд слева направо: 7, 1, 4

Нижний ряд слева направо: 6, 5

б)Нельзя. Каждый из верхних кружочков соединён со всеми остальными, кроме других верхних. Значит в верхних кружочках должны стоять числа, которые являются взаимно простыми для всех чисел, кроме чисел в оставшихся двух верхних кружочках. Рассмотрим, какие это могут быть числа:

Чётные не подходят так как их 5, все они имеют общий делитель 2 и, следовательно, в нихнем ряду встретится хотя бы два чётных числа, даже если на верху все числа будут чётными, и они не будут взаимно простыми.

5 не подходит так как внизу будет 10 (чётные не могут быть наверху)

3 и 9 не подходят, так как внизу будет 6 (чётные не могут быть наверху)

Следовательно, остаются только 1 и 7, но осталось 2 числа, а клеточек 3, следовательно, на рисунке б) нельзя расставить числа от 1 до 10 так, чтобы числа, соединённые отрезком были взаимно простыми.

в)Нельзя. Заметим, что в центр мы не можем поставить чётное число, так как все чётные числа имеют общий делитель 2, и, если в центре будет стоять чётное число, мы не сможем поставить остальные чётные числа в круг, так как число в центре соединено со всеми остальными числами отрезками, следовательно, чётное число в центре не будет взаимно постым с остальными, так как они тоже чётные, то есть имеют общий делитель 2.

Следовательно, все чётные числа стоят по кругу. Всего чётных чисел 2022/2=1011, и все ни стоят по кругу. А нечётных в круге: 2022/2-1=1010 (так как одно из них стоит в центре).Заметим, что соседние кружочки соединены, следовательно, чётные числа не могут стоять рядом, следовательно они чередуются с нечётными. Но заметим, что чётных на одно больше, следовательно, по принципу Дирихле, хотя бы один чётный кружочек соприкаснётся с другим чётным, и эти числа не будут взаимно простыми, следовательно, на рисунке в) нельзя расставить числа от 1 до 2022, чтобы числа, соединённые отрезком были взаимно простыми.

ВОПРОС 2: ЭССЕ

15 из 30 баллов

2. Назовем *каскадом, порожденным числом* r, набор из 12 натуральных чисел: r, $2r$, $\ldots$, $12r$.

а) Может ли какая-то пара чисел (a, b) содержаться в шести различных каскадах? Если да — приведите пример таких чисел, если нет — объясните, почему не может.

б) Верно ли, что множество натуральных чисел можно раскрасить в 12 цветов так, что в каждом каскаде все элементы будут разного цвета?

Данный ответ: **а)** Ответ: 60, 120

Пример:

r1=10: 10, 20, 30, 40, 50, **60**, 70, 80, 90, 100, 110, **120**

r2=12: 12, 24, 36, 48, **60**, 72, 84, 96, 108, **120**, 132, 144

r3=15: 15, 30, 45, **60**, 75, 90, 105, **120**, 135, 150, 165, 180

r4=20: 20, 40, **60**, 80, 100, **120**, 140, 160, 180, 200, 220, 240

r5=30: 30, **60**, 90, **120**, 150, 180, 210, 240, 270, 300, 330, 360

r6=60: **60**, **120**, 180, 240, 300, 360, 420, 480, 540, 600, 660, 720

б)Существует такое число, которое делится на все от 1 до 12. Оно будет закрашено одним из 12 цветов а так же присутствовать в 12 каскадах. Значит в этих каскадах постоянно будут повторяться одни и те же цвета, кроме этого, что невозможно.

ВОПРОС 3: ЭССЕ

0 из 20 баллов

3. В треугольнике ABC точка D — середина стороны AB, E — середина стороны AC, F — середина биссектрисы AL, причем $DF = 1$, $EF = 2$. На плоскости изображены точки D, E, F так, что прямая DF горизонтальна, а остальные элементы чертежа стерты. Можно ли восстановить положение хотя бы одной из вершин треугольника, если известно, что вершина A находилась сверху от прямой DF?

Данный ответ: Ответ: да, можно, вершины А. Она находится на 4 выше D.

Начиная восстанавливать чертёж с конца, можно понять, что AD перпендикулярна DF и равен 4.

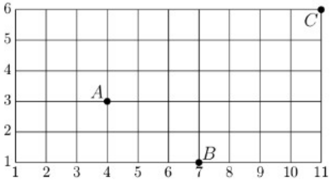
ВОПРОС 4: ЭССЕ

16 из 25 баллов

4. Город имеет форму клетчатого прямоугольника 5×10 клеток: линии — улицы, клетки — жилые кварталы. Расстояние между перекрестками измеряется как длина самого короткого пути по улицам города, проходящего от одного перекрестка до другого. Например, для перекрестков A, B и C на картинке $AB = 5$, $AC = 10$, $BC = 9$. Можно ли отметить в этом городе k перекрестков так, чтобы все расстояния между этими перекрестками оказались различными числами? Если да — укажите эти перекрестки (например, перекресток C находится на пересечении 11-й вертикальной и 6-й горизонтальной улицы), если нет — объясните, почему нельзя.

Решите задачу для

а) $k = 5$; б) $k = 6$; в) $k = 7$.



Данный ответ:

а)Можно. Пример для 5:

A: пересечение 1 вертикальной и 6 горизонтальной

B: пересечение 2 вертикальной и 6 горизонтальной

C: пересечение 2 вертикальной и 4 горизонтальной

D: пересечение 6 вертикальной и 4 горизонтальной

E: пересечение 10 вертикальной и 3 горизонтальной

б)Нельзя.Рассмотрим, как мы можем расставить точки. Если у нас шесть точек, то между ними должно быть (5*6)/2=15 расстояний, что является максимальным количеством расстояний, которые возможны(см. пункт в). Значит нам нужно расставить их все.Рассмотрим, можно ли это сделать. Чтобы получить максимальное расстояние -15, нам нужно поставить 2 точки в пересечние 1 вертикальной и 6 горизонтальной и в пересечение 11 вертикальной и 1 горизонтальной или 2 точки в пересечение 6 вертикальной и 11 горизонтальной и пересечение 1 вертикальной и 1 горизонтальной. Эти ситуации симметричны, так что рассмотрим первую из них.

(Далее точки обозначаются: (x, y), где x - значение по вертикали, y - значение по горизонтали.)

Для начала нам нужно поставить точку с расстоянием 1. Пусть это будет (1, 5), остальные возможные ситуации симметричны. Эта же точка для (11,1) будет расстоянием 14. Далее расстояние 2: Есть 2 варианта - (1, 3) или (3, 6)Заметим, что с первой точкой невозможно построить расстояние 13, следовательно ставим точку (3, 6). Но теперь мы не можем построить точку, удалённую от точки (11, 1) на 13, А так как мы действовали единственным возможным вариантом, то такая расстановка невозможна.

в)Нельзя. Заметим, что максимальное расстояние между перекрёстками - 15. Это расстояние между самыми удалёнными друг от друга точками: пересечение 6 вертикальной и 11 горизонтальной и 1 вертикальной и 1 горизонтальной или пересечение 1 вертикальной и 6 горизонтальной и 11 вертикальной и 1 горизонтальной. Следовательно, всего между перекрёстками может быть не больше 15 различных расстояний. в пункте в) 7 точек и между ними (6*7)/2=21 расстояние, что больше 15, следовательно такого быть не может.