Олимпиада школьников СПбГУ по математике.
Заключительный этап. 2020/2021 учебный год. 10 – 11 классы.

1. При каких натуральных n клетчатую доску $n \times n$ можно разрезать на квадраты 1×1 и 2×2 так, что квадратов разных размеров будет поровну?

2. Положительные числа a, b, c таковы, что $a^2b + b^2c + c^2a = 3$. Найдите минимальное значение выражения

$$A = a^7b + b^7c + c^7a + ab^3 + bc^3 + ca^3.$$

3. Дан неравнобедренный остроугольный треугольник ABC. В нем проведены высоты BB_1 и CC_1, пересекающиеся в точке H. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами H и C соответственно касаются прямой AB. Из точки A к ω_1 и ω_2 проведены касательные, отличные от AB. Обозначим точки их касания с этими окружностями через D и E соответственно. Найдите угол B_1DE.

4. Петя написал на доске подряд n последовательных двузначных чисел ($n \geq 2$), первое из которых не содержит цифру 4, а последнее — цифру 7. Вася подумал, что это десятичная запись натурального числа x, и разложил x на простые множители. Оказалось, что их всего два и они различаются на 4. Что написано на доске?

5. В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством 3^n, $3^{n-1} \cdot 5$, $3^{n-2} \cdot 5^2$, $3^{n-3} \cdot 5^3$, $\ldots$, $3 \cdot 5^{n-1}$, 5^n пиастров, где n — натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?

1	2	3	4	5	Сумма
20	20	20	20	0	80

№1

Ответ: При n>5 и кратных 5.

Пусть квадратиков 1x1 и 2x2 по k штук. Тогда общая их площадь 5k, но она равна n^2, значит $n^2 = 5k \Leftrightarrow$ n кратно 5. Докажем, что в квадрате 5x5 нельзя разместить равное количество квадратов 1x1 и 2x2. В квадрате 5x5 25 клеток => маленьких квадратов каждого типа должно быть по 5 штук. Но в квадрате 5x5 нельзя разместить 5 квадратов 2x2.

Теперь докажем, что во все остальные квадраты со стороной кратной 5 мы сможем разместить. 1) n кратно 2. Тогда весь квадрат можно разбить на конструкции из 2x квадратов 2x2 и 2x квадратов 1x1 (квадрат 2x2, два квадрата 1x1 приставленные к его одной стороне, и ещё один квадрат 2x2 приставленный к квадратам 1x1). Получили прямоугольник 2x5 содержащий равное количеством квадратов 1x1 и 2x2. Ориентируем все такие прямоугольники одинаково, тогда так как сторона квадрата кратна 10(5 и 2), то мы сможем разместить так как надо в условии.

2) n некратно 2. Пусть тогда n = 5(2t+1), тогда $k = 5(2t+1)^2$. Рассмотрим один из четырёх квадратов со стороной 5(2t+1) – 1 и докажем, что в нём может поместиться k квадратов 2x2. Общая площадь такого квадрата $S= (10t +4)^2$. Всего в него может поместиться S/4 квадратов 2x2. $S/4 = (5t+2)^2$. Проверим, что это больше, чем k. $25t^2 + 20t + 4 > 5(4t^2 +4t + 1) \Leftrightarrow 5t^2>1$, а это верно при t > 0, то есть n > 5. Остальные клетки замостим квадратами 1x1. ЧТД.

№2

По неравенству о средних: $\sqrt{\frac{a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2}{3}} \geq \frac{a^2b+b^2c+c^2a}{3} = 1$

$\Leftrightarrow \frac{a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2}{3} \geq 1$

Рассмотрим выражение $a^7b + ab^3$. По неравенству Коши: $a^7b + ab^3 \geq 2\sqrt{a^8b^4} = 2a^4b^2$. Аналогично для пар b,c и c,a.

Следовательно. $A \geq 2(a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2) \geq 2 * 3 = 6.$ Следовательно наименьшее значение A =6. Значение 6 достигается при a = b = c =1.

Ответ: Минимальное значение A =6, №2

По неравенству о средних: $\sqrt{\frac{a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2}{3}} \geq \frac{a^2b+b^2c+c^2a}{3} = 1$

$\Leftrightarrow \frac{a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2}{3} \geq 1$

Рассмотрим выражение $a^7b + ab^3$. По неравенству Коши: $a^7b + ab^3 \geq 2\sqrt{a^8b^4} = 2a^4b^2$. Аналогично для пар b,c и c,a.

Следовательно. А $\geq 2(a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2) \geq 2 * 3 = 6.$ Следовательно наименьшее значение А =6. Значение 6 достигается при a = b = c =1.

Ответ: Минимальное значение А =6 при a = b = c =1.

№3

Так как C, H, C_1 – лежат на одной прямой, следовательно AC_1 – общая касательная из А к ω_1 и ω_2. Значит AC_1 = AE = AD, как касательные к окружностям. Значит точки C_1, E, D – лежат на одной окружности с центром в А. Заметим, что HD перпендикулярно AD так как AD – касательная. Следовательно точки C_1, B_1, D – лежат на одной окружности с диаметром AH(ω_3), так как из этих точек данный отрезок виден под углом 90 градусов. Следовательно, угол HB_1D = углу DAH. DH = DC_1 как радиусы, следовательно треугольники HDA и HC_1A равны по трём сторонам. Следовательно угол DAH = углу HAC_1 . Угол DAC_1 – центральный к углу DEC_1 => угол DEC_1 = 0,5(угол DAC_1) = угол HB_1D. AC – линия центром ω_2 и ω_3, C_1E – прямая, соединяющая их точки пересечения => C_1E перпендикулярно AC => BB_1 параллельно C_1E. Так как => угол DEC_1= угол HB_1D => DB_1E – лежат на одной прямой. То есть угол B_1DE = 0.

Ответ: угол B_1DE = 0.

№4
Ответ: 2021

Сначала посмотрим на последнюю цифру числа x. Она нечётная, так как иначе число кратно 2 и следовательно 5, но 2*5 = 10, а x имеет хотя бы 4 цифры. Она не равна 5, так как иначе x = 5*(5+4) = 45. И не равно 7 по условию. Следовательно все простые делители этого числа нечётные. Теперь рассмотрим на что может оканчиваться произведение двух нечётных чисел с разницей 4. Сейчас смотрим на остатки при делении на 10. 1*5 = 5, 3*7 = 1, 5*9=5, 7*1=7, 9*3=7. Из этого всего нам подходит 3*7 = 1. Теперь заметим, что произведения чисел с разницей 4, меньшее из которых оканчивается на 3, а большее на 7, всегда оканчивается на 21. Докажем это. Пусть предпоследние число обоих чисел равно a. Тогда по модулю 100 получим (10a+3)*(10a+7) = 100a^2 + 10a(3+7) + 21 – это сравнимо с 21 по модулю 100, то есть оканчивается на 21. Следовательно и наше число x оканчивается на 21. Рассмотрим двузначные числа на которые может начинаться число x.

Не 10, так как иначе сумма цифр делится на 3, то есть число кратно 3, но тогда оно кратно 7, то есть равно 21

Не 11, так как оно кратно 11(1-1+1-2+1-3 … = -33) тогда x = 11*7, что плохо.

Не 12, так как сумма цифр кратна 3.

Не 13, так как сумма цифр кратна 3.

Не 14, по условию в первом двузначном числе нет 4.

Не 15, так как сумма цифр кратна 3.

Не 16, так как сумма цифр кратна 3.

Не 17, кратно 7. По модулю 7 x сравним с числом 304050600 = 7*43435800

Не 18, сумма цифр кратна 3.

Не 19, сумма цифр кратна 3.

20, число 2021 = 43*47, подходит.

Ответ: На доске было написано число 2021.