1	2	3	4	5	Сумма
20	20	20	10	20	90

2

Ответ:6

Пример: a=b=c=1

Оценка: Назовем сумму, которую надо оценить снизу S. по неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим $a^7b+ab^3 >= 2a^4b^2$. Складывая это неравенство с двумя аналогичными, получаем $S>=2*(a^4b^2+ b^4c^2+ c^4a^2)$. Назовем $x= a^2b$, $y= b^2c$, $z= c^2a$. Тогда надо доказать $S>=2*(x^2+y^2+z^2)$. По условию x+y+z=3. Значит $(x+y+z)^2=9$. А так как $x^2+y^2+z^2>=xy+yz+zx$ (это равносильно (x-y)^2 +(y-z)^2+(z-x)^2>=0), то $3(x^2+y^2+z^2)>= (x^2+y^2+z^2)+2(xy+yz+zx)= (x+y+z)^2=9$. Значит $x^2+y^2+z^2>=3$. ТО естьь S>=2*3=6

3

Пусть угол BAC=x. Заметим, что так как $HAD=HB_1A=HC_1A=90$, то H,C_1,A,B_1,D лежат на одно й окружности с диаметром AH. Значит $C_1DB_1=180$ –x. Так как AC_1 и AE касательные из к окружности с центром в C, то AC_1 и AE симметричны относительно AC и угол EAC=BAC=x. AD=AC1 и AE=AC1, как отрезки касательных, значит A центр описанной окружности треугольника EDC1. Тогда Угол $EC_1D=EAD/2$ (EAD-центральный) и $C_1ED=C_1AD/2$. Значит $EC_1D+ C_1ED =(EAD+ C_1AD)/2=C_1AE/2=2x/2=x$. Значит угол $C_1DE=180$-x. Так как $C_1DB_1= C_1DE=180$-x, то угол $B_1DE=0$

Ответ:0

1

Ответ: при n>5 кратных 5.

Пусть у нас x квадратов каждого размера. Тогда их суммарная площадь x(1+4)=5x. Значит n^2 делится на 5, значит n делится на 5. Обозначим n=5k. Тогда 25*k^2=5x. x=5k^2.

Заметим что при k=1, то есть n=5, у нас в квадрате 5 на 5 должно уместиться 5 квадратов 2 на 2, но это невозможно, например, потому, что в каждом квадрате 2 на 2 должно содержаться одна из 4 клеток, соседних с центрально по углу (но не по стороне).

При k>1:

Если k четно, то вся доска разбивает на $25k^2/4$ квадратиков 2 на 2, а $25k^2/4>5k^2$ значит мы можем взять из этих квадратиков ровно $5k^2$, а все остальное разбить на $5k^2$ 1 на 1.

Если k нечетно, то квадрат (5k-1) на (5k-1) разбивается на $(5k-1)^2/4$ квадратиков 2 на 2, $(5k-1)^2/4 >5k^2$ при к>=3 (это равносильно $5(k-1)^2>4$). Значит мы можем взять из этих квадратиков ровно $5k^2$, а все остальное разбить на $5k^2$ 1 на 1.

4

Заметим, что среди этих двух простых нет 2,3,5,7,11 иначе их произведение максимум 11*(11+4)=165, а по условию число хотя бы 4–значное. Значит оба этих простых взаимно просты с 10 , то есть оканчиваются на 1,3,7 или 9. Перебираем варианты пар последних цифр (0,4) (1,5) (2,6) (3,7) (4,8) (5,9) (6,0) (7,1) (8,2) (9,3). Получаем что подходят (3,7) (7,1) и (9,3), но в двух последних их произведение будет оканчивать на 7, что нам не подходит. Значит это пара(3,7) и число заканчивается на 1. Значит конец числа выглядит x0x1, где x какая-то ненулевая цифра. Обозначим наши простые p и p+4. А само число n. Тогда $n+4=(p+2)^2$

n+4 оканчивается на x0x5, то есть делится на 5, а так как это квадрат, то делится на 25, значит число образованно двумя последними цифрами делится на 25, значит x это 2 или 7, но по условию не 7, значит 2. То есть n оканчивается на 2021. А так как первое двузначное число не содержит 4, то варианты начала 10,11,12,13,15,16,17,18,19 и 20.

Заметим, что у чисел 101112131415161718192021, 12131415161718192021, 131415161718192021 15161718192021, 161718192021, 18192021, 192021 сумма цифр делится на 3, значит они сами делятся на 3, а мы в начале показали, что это не так

Для числа 1112131415161718192021 заметим, что знакочередующаяся сумма равна 13-46=-33, то есть число делится на 11,а это не так

Рассмотрим число 1718192021. Предположим, оно подходит . Тогда 1718192025- квадрат, но 1718192026=7*245741718 , то есть 1718192025 сравнимо с -1 по модулю 7, но -1 не является квадратичным вычетом по модулю 7, противоречие.

Заметим, что 2021 = 43*47 подходит

Ответ:2021

5

Ответ: $s_n=5^{n+1}-2*3^{n+1}$

Будем доказывать по индукции по n, что наибольшее s именно такое

База n=1. S=7. Легко проверить, что 7 нельзя представить в виде суммы нескольких 5 и 3. В то же время 8=5+3, 9=3+3+3, 10=5+5, далее, если умеем представить x, то умеем и x+3 , добавив тройку.

Переход от n-1 к n

Заметим, что $s_n=3s_{n-1}+2*5^n$. Научимся представлять любое число $x>s_n$. Заметим что одно из чисел x,x-5^n, x-2*5^n делится на 3 (так как 0,5^n,2*5^n попарно не сравнимы по мод3). Возьмем это число, назовем y. Так как $x>s_n$, то $y/3>s_{n-1}$, значит мы умеем представлять y/3 при формулировке задачи для n-1 (в виде суммы слагаемых вида 3^k5^{n-1-k}, домножим все слагаемые в этом представлении на 3 и получим представления числа y в виде суммы слагаемых вида 3^k5^{n-k}. Прибавим $2*5^n$, если $y=x-2*5^n$, прибавим 5^n, если $y=x-5^n$. Получили представления числа x в виде суммы слагаемых вида 3^k5^{n-k}

Докажем, что s_n непредставимо в виде суммы слагаемых вида 3^k5^{n-k}. Предположим это не так и $5^{n+1}-2*3^{n+1}=a_1*3^n+…+a_{n+1}*5^n$, где a_i неотрицательны. Тогда $5^{n+1}- a_{n+1}*5^n$ делится на 3, значит $(5-a_{n+1})$ делится на 3. При этом левая часть уравнения меньше 5^{n+1}, а каждое слагаемое в правой неотрицательно, значит $a_{n+1}<5$. Значит $a_{n+1}=2$. Тогда перепишем уравнение в виде $3*5^n-2*3^{n+1}=a_1*3^n+…+a_n*3*5^{n-1}$ и разделим на 3. Получим $5^n-2*3^n=a_1*3^{n-1}+…+a_n*5^{n-1}$. То есть s_{n-1} было представимо при формулировке задачи для n-1, противоречие. Значит s_n непредставимо. чтд