Олимпиада школьников СПбГУ по математике.
Заключительный этап. 2020/2021 учебный год. 10 – 11 классы.

1. При каких натуральных n клетчатую доску $n \times n$ можно разрезать на прямоугольники 1×1 и 2×3 так, что прямоугольников разных размеров будет поровну?

2. Положительные числа a, b, c таковы, что $a^2b + b^2c + c^2a = 3$. Найдите минимальное значение выражения

$$A = \frac{\sqrt{a^6 + b^4c^6}}{b} + \frac{\sqrt{b^6 + c^4a^6}}{c} + \frac{\sqrt{c^6 + a^4b^6}}{a}.$$

3. Вокруг остроугольного треугольника ABC описана окружность. Точка K — середина меньшей дуги AC этой окружности, а точка L — середина меньшей дуги AK этой окружности. Отрезки BK и AC пересекаются в точке P. Найдите угол между прямыми BC и LP, если известно, что $BK = BC$.

4. Петя написал на доске подряд в убывающем порядке n последовательных двузначных чисел, последнее из которых не содержит цифру 7. Вася подумал, что это десятичная запись натурального числа x, и разложил x на простые множители. Оказалось, что их всего два и они различаются на 4. Что написано на доске?

5. В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством 2^n, $2^{n-1} \cdot 3$, $2^{n-2} \cdot 3^2$, $2^{n-3} \cdot 3^3$, $\ldots$, $2 \cdot 3^{n-1}$, 3^n пиастров, где n — натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?

1	2	3	4	5	Сумма
15	20	20	10	0	65

№2

$a^2*b+b^2*c+c^2*a=3$

sqrt(x)=корень квадратный из x;

Для решения этой задачи я буду использовать неравенство о среднем квадратичном которое выглядит как:$sqrt((a^2+b^2)/2)\geq(a+b)/2$, которое перепишу в виде $sqrt(a^2+b^2)\geq(a+b)/sqrt(2)$

Тогда выражение $A=sqrt(a^6+b^4*c^6)/b+sqrt(b^6+c^4*a^6)/c+sqrt(c^6+a^4*b^6)/a$ (по неравенству о среднем квадратичном) ≥ $(a^3+b^2*c^3)/(sqrt(2)*b)+(b^3+c^2*a^3)/(sqrt(2)*c)+(c^3+a^2*b^3)/(sqrt(2)*a)$, что в свою очередь равно $sqrt(2)*(a^3/(2b)+(ab^3)/2+b^3/(2c)+(bc^3)/2+c^3/(2a)+(ca^3)/2)$ тогда это по неравенству Коши ≥ чем:

$sqrt(2)*(a^3/(2*b)+(ab^3)/2+b^3/(2*c)+(bc^3)/2+c^3/(2*a)+(ca^3)/2)\geq sqrt(2)*(2*sqrt((a^4*b^4)/(4*b)) + 2*sqrt((b^4*c^4)/(4*c))+ 2*sqrt((a^4*c^3)/(4*a)))=sqrt(2)*(a^2*b+b^2*c+c^2*a)=3*sqrt(2)$

Следовательно $A\geq3*sqrt(2)$, пример: a=b=c=1 => sqrt(2)*(1+1+1)=3*sqrt(2)

Ответ: 3*sqrt(2)

№3

1) Пусть вся меньшая дуга АС = 8а, тогда дуги АК=КС=4а, AL=LK=2a;

2) Тогда вписанные углы ABL=LBK=a, угол КВС = 2а; т.к они равны половине дуги на которую опираются;

3) треугольник ВКС: ВК=ВС => треугольник ВКС равнобедренный => углы ВКС=ВСК=(180-$_{\text{угол}}$КВС)= (180-2*а)/2 = 90-а (по сумме углов в треугольнике), тогда угол ВАС= углу ВКС = 90-а, как опирающиеся на 1 дугу;

4) Пусть AL пересекает АС в точке Q, тогда в треугольнике BQA: угол ABQ=a, угол BAC=90-a => угол AQB = 90 по сумме углов в треугольнике, тогда в треугольнике ABP BQ- высота и биссектриса => треугольник ABP равнобедренный => BQ- медиана , тогда в треугольнике ALP LQ- медиана и высота => треугольник ALP - равнобедренный => углы при основании равны => угол PAL= углу LPA = (2a+4a)/2=3a(т.к угол PAL опирается на дугу LC)

5) В треугольнике ABC: угол ACB= 180-$_{угол}$ABC-$_{угол}$BAC= 180-90+a-4a=90-3a, по сумме углов в треугольнике

6)Пусть LP пересекает BC в точке F, тогда угол FPC= углу APL = 3a, как вертикальные,

угол PCF является углом ACB следовательно равен 90-3a, но тогда угол PFC=180-$_{угол}$FPC - $_{угол}$PCF= 180-90+3a-3a=90 => угол между прямыми LP и BC прямой.

Ответ: 90 градусов.

№4

Не нарушая общности, пусть на доске написаны числа ab+n-1; ab+n-2; ab+n-3; ... ab+1; ab; где a цифра в десятка, b цифра в разряде единиц, тогда исходное число k имеет вид: k=((ab+n-1)(ab+n-2)(ab+n-3)...(ab+2)(ab+1)(ab)), число k имеет всего два простых делителя, назовем их q1 и q2, где q1=q2+-4; Тогда число k нечетное т.к. если оно кратно 2, то следующее число отличающееся на 4 это 6, а оно не простое.

Тогда последняя цифра в числе не 7 и нечетная, тогда b=1;3;5;9, если b=5, то другое число отличающееся на 4 это 1 или 9, они не являются простыми => b=1;3;9; Тогда т.к. q1 и q2 простые, то они имеют вид 10d+1; 10d+3, 10d+7, 10d+9.

Тогда рассмотрим перемножения этих чисел при делении на 10; 1*3=3;1*7=7;1*9=9;3*7=1;3*9=7;7*9=3; т.к. в числе не может быть 7, то нам подходят 1*3=3; 1*9=9; 3*7=21;9*7=3; из этих чисел разность 4 будут иметь только тройка и семёрка => q1=10*d+3; q2=10*d+7; Тогда q1*a2=(10d+3)(10d+7)= 100d^2+100d+21; => ab=21;

k div 100 = 100(d^2+d) div 100 = d^2+d (*); для удобства будем рассматривать остатки при делении d на 3, простые делители имеют вид d3 и d7 тогда при d=0 3*7=21, что подходит , при d>0 : d mod 3 =0 => d mod 3 = 0, но d3 простое => противоречие; d mod 3 = 2 => d7 mod 3 =d+7 mod 3 = 0 => противоречие, т.к. d7 простое; d mod 3 = 1 тогда d=3c+1; c принадлежит целым числам; тогда перепишем выражение (*) в виде:

k div 100 = d^2+d= d*(d+1)=(3c+1)*(3c+2) = 9c^2+9c+2 => k div 100 mod 9 = 2; т.к. мы выяснили, что ab=21, то k div 100 имеет вид ((21+n-1)(21+n-2)(21+n-3)...(23)(22))=>

k div 100 mod 9 = 22+23+...+21+n-1 mod 9 = $((n-1)(42+n))/2$ mod 9 = 2; => $(n-1)(n-3)$ mod 9 = n^2-4n+3 mod 9 = 4 => $n(n-4)$ mod 9 = 1; переберем n до 9, т.к. после 9 остатки будут повторяться:

n=1 $1*(-3)$ mod 9 = 6; n=0 0 mod 9 = 0 ; n=2; $2*(-2)=-4$ mod 9=5;n=3 $3*(-1)$ mod 9 = 6; n=4 $4*0$ mod 9 = 0; n=5 $5*1$ mod 9 =5; n=6 $6*2$ mod 9 = 3; n=7 $7*3$ mod 9 =3;n=8 $8*4$ mod 9 = 5; n=9 $9*5$ mod 9 = 0; следовательно остатка 1 так и не появилось => следовательно случай, когда d>0 и d mod 3 =1 тоже не подходит => единственный подходящий случай, когда d=0 тогда k=ab=21 тогда простые делители равны 3 и 7.

Ответ: 21;

№1

Площадь прямоугольников 1 на 1 равна 1, 2 на 3 равна 6 т.к. их равное количество и сумма площадей равна площади квадрата то пусть их по a штук, тогда $n*n=1*a+6*a$ => $n^2=7a$; => n^2 mod 7 = 0 => n mod 7 = 0 => n кратно 7; пускай n равно 7 тогда максимально может быть 6 прямоугольников 2 на 3, но останется $7*7-6*6=13$ клеток 1 на 1 => поле 7 на 7 нельзя заполнить, чтобы было равное количество прямоугольников. Пускай N кратно 2, тогда будем заполнять вертикальными прямоугольниками 2 на 3 тогда будет n квадратов 1 на 1 и $[n/2 * n/3]$, тогда будет достигаться равенство, при нечетном n аналогично но тогда будет оставаться 1 или 2 полоски 1 на 1 которые случае чего можно заполнить 2 на 3, более подробно я решил на рисунках

Ответ: n кратно 7 и n>7