Олимпиада школьников СПбГУ по математике.
Заключительный этап. 2020/2021 учебный год. 10 – 11 классы.

1. Можно ли в таблице 35×35 расставить различные целые числа так, чтобы значения в клетках, имеющих общую сторону, отличались не более чем на 18?

2. При $a, b, c > 0$ найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b)}{a^3 + b^3 + c^3 - 2abc}.$$

3. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 соответственно пересекаются в точке A. Отрезок O_2A вторично пересекает окружность ω_1 в точке K, а отрезок O_1A вторично пересекает окружность ω_2 в точке L. Прямая, проходящая через точку A параллельно KL, вторично пересекает окружности ω_1 и ω_2 в точках C и D соответственно. Отрезки CK и DL пересекаются в точке N. Найдите угол между прямыми O_1A и O_2N.

4. В файле записано подряд 2021 двузначных пятеричных чисел, причем числа на нечетных позициях равны и на 1 больше чисел на четных позициях. Компьютер считал данные из файла как одно пятеричное число и разложил его на простые множители. Оказалось, что таких множителей ровно два и они различаются на 2. Могло ли такое быть?

5. В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством 5^n, $5^{n-1} \cdot 7$, $5^{n-2} \cdot 7^2$, $5^{n-3} \cdot 7^3$, $\ldots$, $5 \cdot 7^{n-1}$, 7^n пиастров, где n — натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?

1	2	3	4	5	Сумма
10	20	20	5	0	55

Задача 1

Ответ: нет, нельзя

Предположим, что можно. Путь минимальное число равно a, а максимальное b. Тогда Рассмотрим прямоугольник, в котором a и b стоят в противоположных углах. Рассмотрим уголок образованный вертикальной и горизонтальной крайними полосками этого прямоугольника. Мы можем пройти по границе прямоугольника начиная в минимальной клетке и заканчивая максимальной. Так как при каждом переходе разность нового числа и предыдущего не превосходит 18, то На I-ом шаге мы находимся в клетке с числом не превосходящим a+i*18. Так как прямоугольник полностью содержится в квадрате 35 на 35, то длина рассматриваемого пути = высота прямоуг. + ширина прямоуг. – 1 <=35*2-1=69, то b<=a+18*(69-1)=a+1224. Так как в таблице все числа различны, а всего их 35*35 и все они >=a <=b, то количество чисел <=b-a+1<=a+1224-a+1=1225. Но 35*35>1225 – противоречие

Задача 2

Ответ : 6 – достигается при a=b=c (=1 например)

(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3 + 3*(a^2*(b+c)+b^2*(c+a)+c^2*(a+b)) +6*abc

Поэтому наша дробь имеет вид (((a+b+c)^3-6abc-a^3-b^3-c^3)/3(a^3+b^3+c^3-2abc) = (((a+b+c)^3-8abc)/(a^3+b^3+c^3-2abc) -1)/3

По нер-ву (a+b+c)^3<=9*(a^3+b^3+c^3) => (((a+b+c)^3-8abc)/(a^3+b^3+c^3-2abc) -1)/3

<=((9(a^3+b^3+c^3)-8*abc)/(a^3+b^3+c^3-2abc)-1)/3 <= ((10*abc/(a^3+b^3+c^3-2abc))+8)/3

По неравенству Коши (между сред. Арифм.и сред . геом.) :

(a^3+b^3+c^3)/3>=abc => (a^3+b^3+c^3-2abc)>=abc

- ⇨ ((10*abc/(a^3+b^3+c^3-2abc))+8)/3 <=(10*abc/abc +8)/3 = 6

Задача 3

Ответ : 90

Доказательство :

1) CD || LK => CDLK – трапеция (а N – пер-е ее диагоналей)
2) Треуг. O1AK и AO2L подобны так как рабнобедренны и имеют равный угол при A. Поэтому углы KO1A = AO2L. По теор. О впис. Угле ACK = ½*KO1A (опир. На дугу AK) и аналог. ADL = 180-1/2AO2L => CKL = ACK (по параллельности рямых) = 180 – ADL = DLK => трапеция CKLD – равнобедренная
3) Рассмотрим LNKO2. Так как трапеция равнобокая то CND – равнобедр. И угол LNK = 180 – 2* ACK = 180 – AO1K = 180-LO2A => 4-к LNKO2 – впис. => NO2K = DLK = AO1K/2.
4) Так как треуг. O1AK – равнобкдр. То угол O1AK = 90-AO1K/2
5) По сумме углов между прямыми AO1 и CN искомый угол = 180 – NO2A-O1AO2 = 90

Задача 4

Пусть 5-ричные числа на четных местах имеют вид xy (то есть равны 5x+y). Тогда есть два случая :

1) y = 4. На нечетных местах стоят тогда числа вида (x+1)0 (Условие на x 3>=x>=1)

Число что видит компьютер имеет вид ((x+1)0xy(x+1)0 … xy(x+1)0) = 5(x+1) + (5x+6)*25 + (5x+5)*25^2 +… Пусть множители в разложении компьютера имели вид p и p+2. Тогда заметим, что наше число как минимум делится на 5. Тогда есть всего два случая : оно равно 5*3 и оно равно 5*7 Очевидно, что числа слишком маленькие (точно не 2021*2 знака в 5-рич записи) => 1-ый случай невозможен

2) 0<=y<=3 На нечетных местах стоят числа вида x(y+1) и условие на x : 1<=x<=4

Пусть множители в разложении компьютера имели вид p и p+2. (p – простое и явно больше 2 = > неч.) А значит число что видит комп. – нечетное.

Тогда компьютер видит число s = (5x+y+1) + (5x+y)*25 + (5x+y+1)*25^2+…+(5x+y+1)*25^2020 =

= (5x+y+1)*(1+5^4+5^8+…+5^4040) + (5x+y)*25*(1+25^2+25^4+..+25^2018) = (5x+y+1)*((5^4)^1011-1)/(5^4-1) + (5x+y)*25*((5^4)^1010 - 1)/(5^4-1) = ((5x+y+1)*(5^4044-1) + (5x+y)*(5^4040-1)) /624 =

= ((5x+y)*(5^4044+5^4040-2) + (5^4040 -1))/624 = (5x+y)*(1+25+25^2+…+25^2020) + 1+25^2+25^4+..+25^2020

Пусть 1+25^2+25^4+..+25^2020 = a – нечетное

25 = 1 mod 3 => s = (5x+y)*2021+1011 mod 3 = 2(2x+y) mod 3

25 = -1 mod 13 => s = (5x+y)*(1-1+1-1+… +1) + 1011 mod 13 = (5x+y)-3

5^4 = 2 mod 7 ; 624 = 1 mod 7 ; 2^3=1 mod 7; 5^4044-1 = 2^1011-1 = 0 mod 7 ; 5^4040-1=2^1010 -1 = 2^2-1 = 3 mod 7=> s=(5x+y)*3 mod 7

Тогда комп видит (5x+y)*(a+(a-1)/25)+a

⇨ (5x+y)*(неч+чет)+неч = неч => x+y-четное

Также понятно что если число делится на 3 иил 13 или 7, то это плохо (маленькое простое) => 2x+y не делится на 3 и 5x+y-3 не делится на 13 и (5x+y)*3 не делится на 7. Поэтому перебором подходят только пары

y=0 x=2

y=0 x=4

y=2 x=4

y=3 x=1

Также понятно что если числа xyx(y+1) в 5-рич и x(y+1)0000…0 имеют общий простой делитель, то все плохо (делитель не превосходит 5^4, а значит s<5^4*(5*4+3)<<5^2020). НОД(1+26y+130x,(5x+y+1)*5^4040)=1

Задача 5:

Давайте за An обозначать мн-во всех чисел которые может выдать банк для фикс. n., а за tn – максимальное число которое не может выдать банк. Для n=1

Банк выдает числа вида a*5+b*7.

Мн-во A1 = Объединение по мн-вам вида {5a} , {5a+7}, {5a+14} , {5a+21} … =

{0,5,10,15,20…} U {7,12,17,22 …} U {14,19,24,…} U {21,26, 31…} U… = {0,5,7,10,12,14,15,17,19,20,21,22,24,25,26,27,28,29,30…}

Число x в A1 ⇔ x-5 или x-7 в A1

Можно заметить, что после 24 все числа будут в A1 , ведь число x в A1, то и 5+x в A1, а {24,25,26,27,28} в A1 => Все ост. Получаются сдвигом на 5 находятся в A1. Максимальное число, которое банк выдать не может = 23 для n=1. Заметим, что все числа делящиеся на 5 или 7 и находящиеся в An находятся и в An-1 (Делим их представление в сумму элементов 5^x7^y на 5 или 7 и получаем разложение для n-1 # все члены кроме 7^n делятся на 5=> если число делится на 5 то в разложении 7^n давали 5*k раз, что можно перекинуть так, чтобы 7^(n-1)*5 давали еще 7k раз). Также понятно, что для любого числа x из An 7x и 5x находятся в An+1 – если оно раскладывается на сумму членов, то домножая каждый член на 5 или 7 получаем разложение для n+1. Также понятно, что если t не раскладывется в сумму k*5^i7^(n-i) То он тем более не раскладывается в сумму k*5^i*7^(n-i+1) #переход от одного к разлож. К другому легко осуществляется вынесением в коэффициент 5-ки или 7-ки, так что от противного приходим к противоречию с существованием разложения для n.

Также если x в Am а y в Al, то xy в A(m+l) (разложение xy легко получается перемножением разложений x и y с суммированием степеней при 5 и 7 вне коэф.)

Пусть x лежит в An и представляется как сумма ki*5^i*7^(n-i). Тогда если kn=0, то x = сумма (5*ki) *5^(i-1)*7^(n-i) => x в An-1. Аналогично для k0=0. Если для x не существует разложения где k0 или kn =0 (что ⇔ x не делится ни на 5 ни на7),   то x0-7^n и x0-5^n в An. Давайте также называть разложение “минимальным по 5”, если коффициенты при 5^i*7^(n-i), i>=1 меньше 7 : привети к такому виду разложение очень просто берем первый коэф. Не удовлетворяющий суловию, выделяем в нем часть кратную 7, выносим из части коэффициента 7 и вносим 5 – по сути сдвигаем его степень по 5 на 1 вниз. И так делаем пока все не спустилось. Аналогичным образом определяем “минимальное разложение по 7”

Покажем что t = 2(7^n+5^n-1*7 + …+5^n)-1 не в An. От противного : пусть есть разложение. Тогда поскольку число не делится ни на 5 ни на 7, то в разлож. Есть 5^n и 7^n. => 7^n+5^n-1 также имеют разложение. Если n-четное, 7^n+5^n-1 = 25^(n/2)-1=0 mod 7 => можно разложить без 5^n