Олимпиада школьников СПбГУ по математике.
Заключительный этап. 2020/2021 учебный год. 10 – 11 классы.

1. При каких натуральных n клетчатую доску $n \times n$ можно разрезать на квадраты 1×1 и 2×2 так, что квадратов разных размеров будет поровну?

2. Положительные числа a, b, c таковы, что $a^2b + b^2c + c^2a = 3$. Найдите минимальное значение выражения

$$A = a^7b + b^7c + c^7a + ab^3 + bc^3 + ca^3.$$

3. Дан неравнобедренный остроугольный треугольник ABC. В нем проведены высоты BB_1 и CC_1, пересекающиеся в точке H. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами H и C соответственно касаются прямой AB. Из точки A к ω_1 и ω_2 проведены касательные, отличные от AB. Обозначим точки их касания с этими окружностями через D и E соответственно. Найдите угол B_1DE.

4. Петя написал на доске подряд n последовательных двузначных чисел ($n \geq 2$), первое из которых не содержит цифру 4, а последнее — цифру 7. Вася подумал, что это десятичная запись натурального числа x, и разложил x на простые множители. Оказалось, что их всего два и они различаются на 4. Что написано на доске?

5. В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством 3^n, $3^{n-1} \cdot 5$, $3^{n-2} \cdot 5^2$, $3^{n-3} \cdot 5^3$, $\ldots$, $3 \cdot 5^{n-1}$, 5^n пиастров, где n — натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?

1	2	3	4	5	Сумма
20	20	20	20	20	100

Задача №5

Ответ: $5^{n+1} - 2 * 3^{n+1} = k$

Будем доказывать по индукции, что число k получить невозможно, а все большие k – можно.

База n = 1. Тогда k = 7, несложно проверить, что номиналами 3 и 5 нельзя получить 7. При этом 8 = 3 + 5, 9 = 3 + 3 + 3, 10 = 5 + 5. Любое число >= 8 можно представить в одном из трех видов: 3m + 8, 3m + 9, 3m + 10. То есть это число можно получить как m монет по 3 и монеты из которых получается 8, 9 или 10(зависит от того к какому типу принадлежит число).

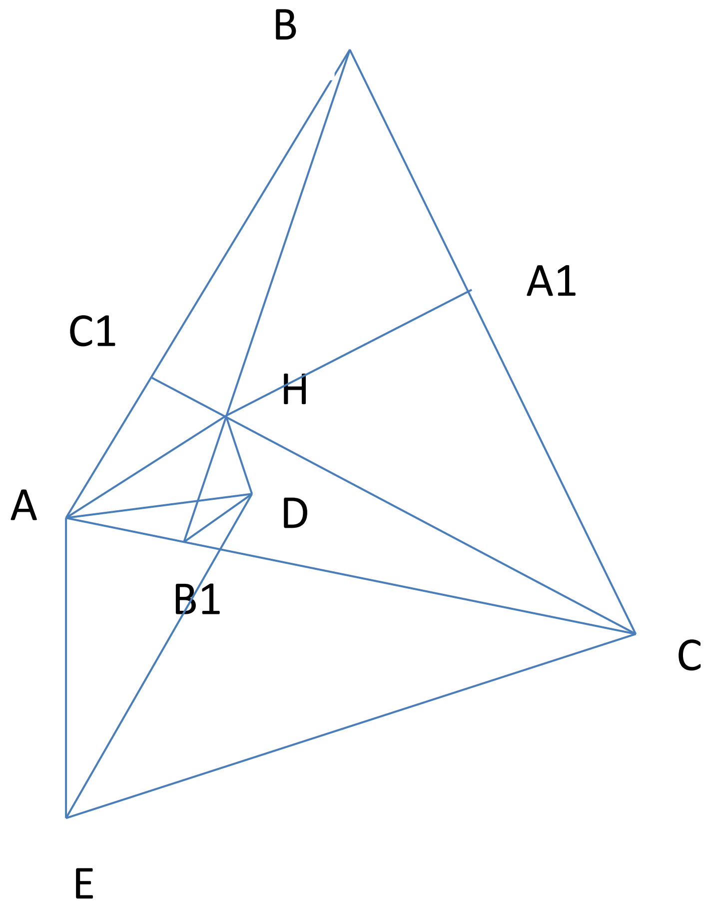
Переход n -> n + 1. Сначала докажем, что число k не представимо в виде суммы монет с такими номиналами.

Заметим, что все номиналы монет кроме 5^n делятся на 3 => если мы выкинем все монеты по 5^n, то оставшееся число будет делится на 3. k – не кратно 3. $k - 5^n = 5^n * 4 - 2 * 3^{n+1}$ – не кратно 3. $k - 2 * 5^n = 5^n * 3 - 2 * 3^{n+1}$ – делится на 3.Аналогично $k - 3 * 5^n$, $k - 4 * 5^n$ – не делятся на 3, а $k - 5 * 5^n$ уже меньше 0.

Значит если k можно представить такими номиналами монет, то в этом представлении обязательно 2 монеты по 5^n. $s = k - 2 * 5^n = 5^n * 3 - 2 * 3^{n+1}$ представимо только монетами 3^n……$3*5^{n-1}$. Давайте разделим s и номинал каждой монеты на 3. Равенство сохранится, $s/3 = 5^n - 2 * 3^n$, номиналы монет будут 3^{n-1}……5^{n-1}. По предположению индукции такое число s/3 нельзя представить такими монетами => исходное число s нельзя было представить исходными номиналами => число k нельзя представить исходными номиналами.

Теперь докажем, что начиная с k + 1 можно представить все числа. Будем вычитать 5^n пока число не станет кратно 3. Заметим, что получившийся остаток >= $3 * 5^n - 2 * 3^{n+1} + 3$, поскольку если мы вычли 5^n 0 или 1 раз, то это верно, а если мы вычли 2 раза, то изначальное число было хотя бы k+3(k + 1 и k + 2 имеют остаток по модулю 3 отличный от остатка k, для которого нужно сделать 2 вычитания). Теперь разделим это число и все номиналы на 3. Получим число >= $5^n - 2*3^n + 1$ и номиналы 3^{n-1}……5^{n-1}. По предположению индукции это число можно представить в виде суммы получившихся номиналов, а значит и исходное число с исходными номиналами можно представить. А значит и число до вычитания 5^n можно представить в виде суммы монет с начальными номиналами.

Задача №3



Пусть <ABC = b, <BAC = a. Из треугольника BAA1 <BAH = 90 – b.

AC1 = AD(отрезки касательных); DH=HC1 (радиусы); <ADH=<AC1H = 90 => треугольники AC1H и AHD – равны. Аналогично треугольники AC1C и AEC равны. <C1AH = <HAD = 90 - b значит <C1AD = 180-2b => <DAB1 = a + 2b – 180; <HB1D = 90 – b, поскольку четырехугольник AHDB1 – вписанный(<AHD = 90 = <AB1H). Тогда из треугольника ADB1: <ADB1 = 180 – (a + 2b - 180) – 90 – (90 - b) = 180 – a – b.

По доказанному равенству треугольников <C1AC = a = <CAE и <C1AH = 90 – b = <HAD. Тогда <DAE = <C1AE - <DAC1 = 2a – (180 – 2b) = 2a + 2b – 180. Поскольку треугольник ADE – равнобедренный(AD = AC1 = AE), <ADE = (180 – (2a + 2b - 180))/2 = 180 – a – b.

Таким образом <ADE = <ADB1 => D, B1, E – лежат на одной прямой => <B1DE = 0

Задача №1

Ответ: при n кратных 5 и n > 5.

Пусть квадрат n x n разбили на k квадратов 1 x 1 и k квадратов 2 x 2. Тогда общая площадь = 5 * k = n * n. Значит n кратно 5. n = 5 * m. Нетрудно проверить, что при n = 5 в n x n помещается не более 4 квадратов 2 x 2, в то время как k = 5m * 5m / 5 = 5 * m^2 = 5. То есть квадрат 5 x 5 нельзя так разбить.

Покажем, что при m > 1 квадрат 5m x 5m можно разбить на квадраты 1x1 и 2x2. Выделим в большом квадрате хотя бы 5 * m^2 квадратов 2x2: если m четно, то можно разбить весь квадрат на 2x2, которых будет 25 * m^2 / 4 > 5 * m^2; если m – нечетно, то разобьем квадрат (5m – 1) x (5m - 1) на квадраты 2x2; получим (25m^2 – 10m + 1) / 4 квадратов. Докажем, что при m > 1 это количество >= 5 * m^2

(25m^2 – 10m + 1) / 4 >= 5 * m^2

5m^2 – 10m + 1 >= 0

D = 100 – 20 = 80

$m_{1,2}$ = (10 ±sqrt(80)) / 10 = 1±sqrt(4/5)

4/5 < 1 => при m >= 2 это неравенство верно.

Теперь сделаем финальное разбиение. Из всех выбранных квадратов 2x2 выберем 5 * m^2 любых, а все оставшиеся клетки заполним квадратами 1x1. Итого получим 5 * m^2 квадратов 2x2 и 25 * m^2 – 4 * 5 * m^2 = 5 * m^2 квадратов 1x1

Задача №2

Ответ: 6

Заметим, что по неравенству между средним арифметическим и геометрическим:

$c^7a + ca^3 >= 2c^4a^2$

$b^7c + bc^3 >= 2b^4c^2$

$a^7b + ab^3 >= 2a^4b^2$

То есть $A >= 2c^4a^2 + 2b^4c^2 + 2a^4b^2$

Пусть $x = a^2b$, $y = b^2c$, $z = c^2a$. Тогда $x + y + z = 3$.

$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 >= 0$

$x^2 + y^2 + z^2 >= xy + yz + xz$

$9 = (x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx <=3(x^2 + y^2 + z^2)$

$6 <= 2(x^2 + y^2 + z^2) = 2c^4a^2 + 2b^4c^2 + 2a^4b^2 <= A$

Осталось привести пример, когда $A = 6$.

Пусть $a = b = c = 1$. Тогда $a^2b + b^2c + c^2a = 3$. Каждое слагаемое в A равно 1 => $A = 6$

Задача №4

Ответ: 2021 = 43*47

X = p(p + 4). Заметим, что p > 5, поскольку n хотя бы 1. Тогда посмотрим какие остатки по модулю 10 может давать p(p + 4).

p	1	3	7	9
p(p + 4)	5	1	7	7

Число x не может оканчиваться на 5, поскольку p и p + 4 не равны 5, а также не может оканчивать на 7 по условию. Значит x оканчивается на 1.

Число p(p+4) дает остаток 1 по модулю 4, а значит число x может оканчиваться на 21, 41, 61 или 81.(Заметим, что число x дает остаток по модулю 25 и 4 такой же, как его 2 последние цифры) Посмотрим какие остатки по модулю 25 дает p(p+4).

p	p(p+4)
1	5
2	12
3	21
4	7
5	20
6	10
7	2
8	21
9	17
10	15
11	15
12	17
13	21

14	2
15	10
16	20
17	7
18	21
19	12
20	5
21	0
22	22
23	21
24	22

Число 41 сравнимо с 16, 61 с 11, а 81 с 6 по модулю 25. Этих чисел нет в нашей таблице, а значит число x может оканчиваться только на 21. Переберем все такие x. Если число кратно простому < 13, то это число < 13 * 17 = 221 => оно не подходит

2021 = 43 * 47 – подходит

19 20 21 – кратно 3, не подходит

18 19 20 21 – кратно 3, не подходит

17 18 19 20 21 кратно 7, не подходит

16 17 18 19 20 21 – кратно 3 – не подходит

15 16 17 18 19 20 21 – кратно 3 – не подходит

14 15 16 17 18 19 20 21 – не подходит по условию

13 14 15 16 17 18 19 20 21 – кратно 3, не подходит

12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 – кратно 3, не подходит

11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 – кратно 11, не подходит

10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 – кратно 3, не подходит