Олимпиада школьников СПбГУ по математике.

Заключительный этап. 2020/2021 учебный год. 10 – 11 классы.

1. Натуральные числа от 1 до 2021 записаны в ряд в некотором порядке. Оказалось, что у любого числа его левый и его правый сосед имеют разную четность. Какое число может быть на первом месте?

2. При $a, b, c > 0$ найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{(a+b+c)^3 - 26abc}.$$

3. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B, а окружность с центром в точке O охватывает окружности ω_1 и ω_2, касаясь их в точках C и D соответственно. Оказалось, что точки A, C и D лежат на одной прямой. Найдите угол ABO.

4. Петя написал на доске подряд n двузначных восьмеричных чисел $(n \geq 2)$, образующих арифметическую прогрессию с разностью -8. Вася подумал, что это восьмеричная запись натурального числа x, и разложил x на простые множители. Оказалось, что их всего два, и они различаются на 6. Что написано на доске?

5. В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством $3n - 1$, $6n + 1$, $6n + 4$ и $6n + 7$ пиастров, где n — натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?

1	2	3	4	5	Сумма
20	20	20	0	0	60

Задача 1

Посчитаем общее количество выписанных чисел. Их будет 2021 - 1 + 1 = 2021. Из них 1010 четные и 1011 нечетные. Рассмотрим несколько случаев:

Если первое число четное:

1) Если после четного числа стоит четное число, то числа выстраиваются в такой ряд:

ЧЧННЧЧННЧЧНН...,

то есть идут «четверками». Но число 2021 сравнимо с 1 по модулю 4, поэтому последнее число в ряду будет четное:

ЧЧННЧЧННЧЧНН...ЧЧННЧ

(2021 - 1)/2 = 1010, что является четным числом, поэтому пар НН и ЧЧ равное кол-во. Но отсюда видно, что четных чисел больше, чем нечетных, что невозможно. Значит этот случай невозможен.

2) Если после четного числа стоит нечетное число, то ряд будет выглядеть так:

ЧННЧЧННЧЧНН...,

и так как 2021 сравнимо с 1 по модулю 4, то ряд будет оканчиваться на четверку ННЧЧ:

ЧННЧЧННЧЧНН...ННЧЧ

Но мы опять получаем, что четных чисел больше. Противоречие. Этот случай тоже невозможен.

Таким образом на первом месте не может идти четное число.

Если же первое число нечетное:

1) Если после него стоит нечетное число:

ННЧЧННЧЧННЧЧ...,

так как 2021 сравнимо с 1 по модулю 4, то последнее число нечетное:

ННЧЧННЧЧННЧЧ...ННЧЧН

Таким образом нечетных чисел на 1 больше, чем четных, что удовлетворяет условию задачи.

2) Если вторым стоит четное число:

НЧЧННЧЧННЧЧ...,

по тем же самым соображениям после ряд кончается на четверку ЧЧНН:

НЧЧННЧЧННЧЧ...ЧЧНН,

и здесь тоже видно, что нечетных на 1 число больше.

Таким образом первым числом может быть только нечетное число, то есть {1, 3, 5, ..., 2k - 1, ..., 2019, 2021}.

Ответ: на первом месте может быть только нечетное число.

Задача 2

$$A = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{(a+b+c)^3 - 26abc}$$

Так как $a, b, c > 0$, то мы можем пользоваться неравенством Коши о средних. Тогда:

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$$
$$(a+b+c)^3 \geq 27abc$$
$$(a+b+c)^3 - 26abc \geq 27abc - 26abc = abc$$

Тогда $A \leq \frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} = \frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ac} + \frac{c^2}{ab}$

По неравенству о среднем арифметическом и среднем гармоническом:

$$\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ac} + \frac{c^2}{ab} \leq \frac{9}{\frac{bc}{a^2} + \frac{ac}{b^2} + \frac{ab}{c^2}}$$

Знаменатель оценится как:

$$\frac{bc}{a^2} + \frac{ac}{b^2} + \frac{ab}{c^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2c^2}} = 3$$

Тогда само выражение оценится как:

$$\frac{9}{\frac{bc}{a^2}+\frac{ac}{b^2}+\frac{ab}{c^2}} \le \frac{9}{3} = 3$$

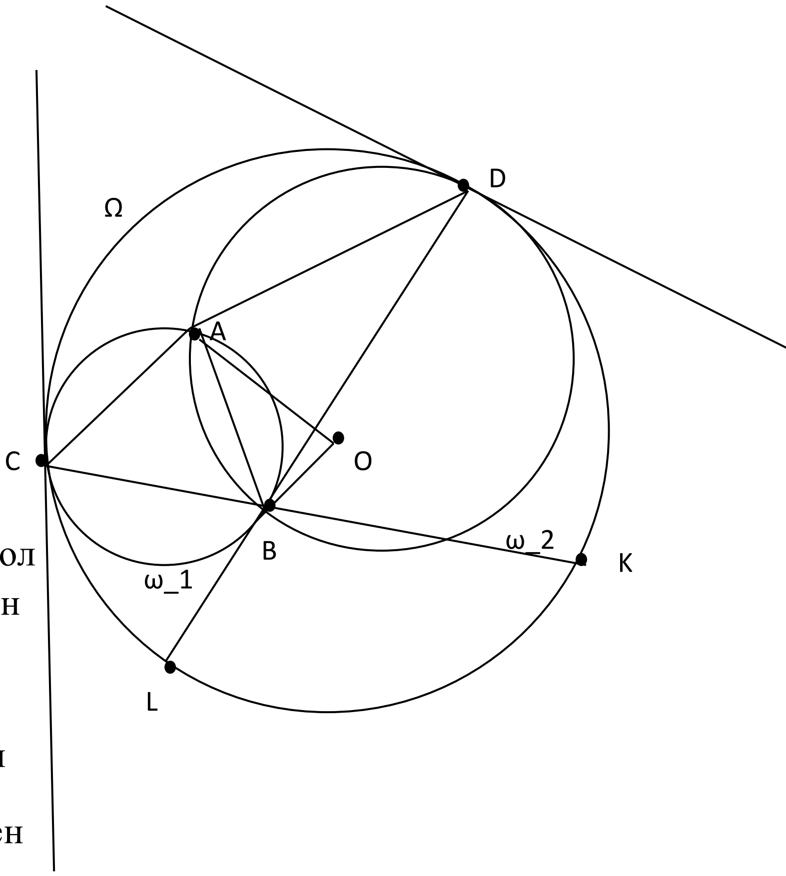
То есть мы получили цепочку равносильных переходов:

$$A = \frac{a^3+b^3+c^3}{(a+b+c)^3-26abc} \le \frac{a^3+b^3+c^3}{abc} = \frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ac} + \frac{c^2}{ab} \le \frac{9}{\frac{bc}{a^2}+\frac{ac}{b^2}+\frac{ab}{c^2}} \le \frac{9}{3} = 3$$

Значит наибольшее значение A равно 3, и достигается это значение при $a = b = c$

Ответ: 3.

<u>Задача 3</u>



Продлим CB и DB до пересечения с большей окружностью. Получим точки K и L соответственно. Проведем касательные к окружностям в точках C и D. Тогда угол между касательной и AC будет равен половине дуги CD, так как A, C и D лежат на одной прямой. Так же угол между касательной и AD будет равен половине дуги CD. Теперь рассмотрим этот угол относительно маленьких окружностей. Угол между касательной и хордой AC в маленькой окружности будет равен половине дуги AC, то есть углу ABC. Аналогично угол между касательной и AD будет равен углу ABD.

В большой окружности на дугу CD опираются углы CLD и CKD. То есть в итоге: уг. CLD = уг. ABB = уг. DKC = уг. ABC. Из этого следует, что CL параллельна AB, и DK параллельна AB. Значит CL параллельна DK, то есть вписанный четырехугольник CLKD есть на самом деле трапеция. Но раз она вписанная, то это означает, что она равнобокая. Тогда у нас есть прямая AB параллельная основаниям трапеции, и проходящая через точку пересечения диагоналей этой трапеции. Но так как трапеция равнобокая, то серединный перпендикуляр к основаниям тоже пройдет через точку пересечения диагоналей, то есть В. Но точка О есть центр описанной окружности нашей трапеции, и лежит на серединном перпендикуляре. Значит угол АВО равен 90 градусов, так как серединный перпендикуляр перпендикулярен и АВ, ведь АВ параллельна основаниям.

Ответ: уг. АВО равен 90 градусов.

Задача 4

Число -8 в восьмеричной системе это -10. То есть если на доске было записано число АВ, то следующее будет (А-1)В. То есть на доске написано число:

AB(A-1)B(A-2)B...(A-n+1)B, так как всего записано n чисел. $(A, B \leq 7)$

Перепишем это число в десятичной записи:

$$(B + B \cdot 8^2 + \dots + B \cdot 8^{2n-2}) + \left((A-n+1) \cdot 8 + (A-n+2) \cdot 8^3 + \dots + A \cdot 8^{2n-1}\right)$$

Перепишем первую скобку по формуле суммы геометрической прогрессии:

$$\frac{B(8^{2n}-1)}{8^2-1} = B(8^{2n-2} + 8^{2n-4} + \dots + 1)$$

8^k сравнимо с 1 по модулю 3, если k четное, и с -1, когда k нечетное

Перепишем наше выражение по модулю 3:

$$\begin{aligned} B(1+1+1+1 \dots + 1 + 1) - \left((A-n+1) + (A-n+2) + \dots + A\right) \\ = Bn - \left((A-n+1) + (A-n+2) + \dots + A\right) \\ = Bn - \frac{2A-n+1}{2} n \end{aligned}$$

То есть $n = 1, n = 3, n = 6$ нам не подходят, так как тогда десятичная запись будет делиться на три, а значит второй просто множитель должен быть 9, но он не простой.

Запишем теперь условие, что число x раскладывается на два простых множителя с разностью 6:

$$p(p+6) = x$$

$p^2 + 6p - x = 0$
$\frac{D}{4} = 9p^2 + x$
$p = -3 + \sqrt{9p^2 + x}$, так как $-3 - \sqrt{9p^2 + x} < 0$

Запишем число на доске по модулю 7:

$$B(1 + 1 + 1 + 1 \dots + 1 + 1) + \left((A - n + 1) + (A - n + 2) + \dots + A\right)$$
$$= Bn + \left((A - n + 1) + (A - n + 2) + \dots + A\right)$$
$$= Bn + \frac{2A - n + 1}{2}n$$

Отсюда видно, что при n = 7 число делится на 7, но тогда второе просто число будет 13, а 7 * 13 = 91, что в восьмеричной системе запишется как 133, но это не удовлетворяет условию.

Значит нам осталось рассмотреть случаи, когда n = 2, n = 4, или n = 5.

n = 2:

Получим число AB(A-1)B. В десятичной системе перепишется как $512A + 64B + 8(A - 1) + B = 65B + 520A - 8 = p(p + 6)$

$p = -3 + \sqrt{9p^2 + (65B + 520A - 8)^2}$