Санкт-Петербургский государственный университет
Олимпиада школьников по математике 2020–2021
Заключительный этап
8–9 классы

1. Найдите все такие значения a, для которых квадратные трехчлены x^2+2x+a и $x^2+ax+2=0$ имеют по два корня, причем сумма квадратов корней первого трехчлена равна сумме квадратов корней второго трехчлена.

2. Каждый из островитян либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт (и те, и другие на острове есть). Каждый житель острова про каждого знает рыцарь он или лжец. Часть жителей острова заявила, что на острове проживает четное число рыцарей, а все оставшиеся жители заявили, что на острове проживает нечетное число лжецов. Может ли на острове быть ровно 2021 житель?

3. Для произвольных вещественных чисел a и b $(b \neq 0)$ найдите наименьшее значение выражения $a^2+b^2+\frac{a}{b}+\frac{1}{b^2}$.

4. Точки B_1 и C_1 — середины сторон AC и AB треугольника ABC. На сторонах AB и AC как на диаметрах построены окружности ω_1 и ω_2. Обозначим за D точку пересечения прямой B_1C_1 с окружностью ω_1, лежащую по другую сторону от C относительно прямой AB. Обозначим за E точку пересечения прямой B_1C_1 с окружностью ω_2, лежащую по другую сторону от B относительно прямой AC. Прямые BD и CE пересекаются в точке K. Докажите, что прямая BC проходит через точку пересечения высот треугольника KDE.

5. На центральной клетке доски 11×11 стоит фишка. Петя и Вася играют в следующую игру. Каждым своим ходом Петя передвигает фишку на одну клетку по вертикали или горизонтали. Каждый своим ходом Вася возводит стенку с одной из сторон любой из клеток. Двигать фишку через стенку Петя не может. Игроки ходят по очереди, начинает Петя. Петя выигрывает, если сможет фишкой уйти с доски. Может ли он обеспечить себе победу вне зависимости от действий соперника?

6. Докажите, что существует бесконечно много таких натуральных чисел n, что количество различных нечетных простых делителей числа $n(n+3)$ кратно трем.

1	2	3	4	5	6	Сумма
20	20	20	0	20	0	80

1. Запишем ОДЗ : Дискриминант обоих квадратных трехчленов больше 0, значит 4-4a>0 и

a^2-8>0, следовательно 1>a и a^2>8. Пусть кони первого трехчлена x1 и x2 , а корни второго x3 и x4, значит по теореме виета: x1x2=a и x1+x2=-2 , x3x4=2 и x3+x4=-a. (x1+x2)^2=4 =>x1^2+x2^2=

=4-2x1x2=4-2a , аналогично x3^2+x4^2=a^2-4 и по условию сумма квадратов корней первого уравнения равна сумме квадратов 2 => 4-2a=a^2-4 =>a^2+2a-8=0 => считаем корни через дискриминант : D=36 => a=2; a=-4 подставим в ОДЗ , откуда следует , что a=2 не подходит , значит a=-4; Ответ:a=-4;

2. Предположим противное , что всего может быть 2021 человек на острове .Пусть в первой части x людей , а во второй y , значит x+y=2021 , значит одно из чисел четное , а другое нечетное . Без ограничения общности пусть x- четное , значит y-нечетное .

1 случай : Часть x говорит про четное число рыцарей на острове .

Если среди x людей есть и рыцарь , и лжец , то тогда рыцарь скажет правду , а лжец произнесет ту же фразу , значит скажет тоже правду , но лжецы всегда лгут , значит противоречие , следовательно среди группы x , либо все рыцари , либо все лжецы , аналогично и у группы y. Пусть в группе x все рыцари , тогда они скажут , что рыцарей четное кол-во , а x –четное , значит все верно , но тогда в группе y есть по условию хотя бы один лжец (иначе лжецов вообще не будет) , значит все в группе y лжецы , тогда они скажут , что лжецов нечетное кол-во , но в группе y все лжецы и их как раз нечетное , а в группе x их нет , значит лжецов всего будет нечетное кол-во и тогда лжецы скажут правду , противоречие . Пусть в группе x все лжецы , они говорят , что рыцарей четное , но тогда рыцарей нечетное , т.к. лжецы всегда лгут . Тогда в группе y все рыцари , тогда их нечетное и они говорят , что лжецов нечетное , но x – четное , значит и лжецов четное , тогда рыцари лгут , противоречие .

2 случай: Часть x говорит про нечетное кол-во лжецов.

Если x- рыцари , тогда y- лжецы , тогда лжецы скажут , что рыцарей четное , значит они скажут правду , противоречие .

Если x-лжецы , тогда y-рыцари , тогда рыцари скажут , что рыцарей четное , значит они солгут , противоречие .

Мы рассмотрели все случаи , во всех получили противоречие , тогда наше предположение не верно . Ответ : нет , не может .

3. Заметим , что можно переписать исходное выражение так : a^2 +a/b + 1/4b^2+b^2+3/4b^2

Тогда a^2 +a/b + 1/4b^2=(a+1/2b)^2 и по свойству квадрата , это значение не отрицательно , тогда минимальное значение этого квадрата равно 0 и достигается при a=-1/2b.

Заметим , что оба оставшихся слагаемых положительны , т. К. b не равно 0 и 3/4b^2 не равно 0, воспользуемся неравенством коши, чтобы как-то оценить их сумму, тогда b^2+3/4b^2>=2(b^2 * 3/4b^2)^1/2=2(3/4)^1/2=

=3^1/2 и равенство достигается при b^2=3/4b^2, откуда b =+-(3/4)^1/4, тогда минимальное значение равно 3^1/2 и достигается при b=+-(3/4)^1/4 , a=-1/2b, откуда a=+-1/(2*(3/4)^1/4) соответственно. Ответ : 3^1/2.

5.Заметим , что чтобы выйти Пети с доски он должен дойти до крайней клетки доски , пусть он дошел не до угловой крайней клетки доски , но сейчас ход Васи , и он закроет сторону квадрата не граничащую ни с каким другим квадратом , тогда с этой клетки Петя выйти с доски уже не сможет .Значит , чтобы Петя смог выйти он должен прийти в уголок (причем если в этом уголке закрыта одна из сторон не граничащая ни с каким квадратом , то максимум открыта лишь одна такая сторона , через которую можно выйти с доски , но тогда Вася закроет эту сторону , и Петя не сможет выйти с доски) , тогда чтобы Петя смог выйти с доски ему нужен уголок с 2-мя не закрытыми сторонами , ведущими с доски . Пете нужно как минимум 5 ходов , чтобы дойти до крайней клетки доски , за первые 4 хода Вася закроет в каждом уголке ровно одну победную сторону для Пети , а потом если Петя приходит на крайнюю клетку, то Вася закрывает у этой клетки победную для Пети сторону и тогда Петя не сможет выйти ни с какой клетки , тогда Вася победит .

Ответ : нет , не сможет .

6.По КТО всегда существуют два числа , таких что n делиться на px и n+3 делиться на py*pz , если px,py,pz взаимно просты и px,py,pz >3. Тогда изначально существуют число n , а дальше будем представлять число n , как предыдущее n*px , где px,py,pz простые числа на которые предыдущее n не делилось . Тогда каждый раз кол-во простых делителей увеличивается на 3 . А ничинаем с n=1 , тогда 1*4=4 и кол-во простых нечетных делителей равно 0 и 0 кратен 3 . Ч.Т.Д.