

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Олимпиада школьников по математике 2020–2021
Заключительный этап
8–9 классы

1. Докажите, что для любых вещественных чисел a и b уравнение

$$(a^6 - b^6)x^2 + 2(a^5 - b^5)x + (a^4 - b^4) = 0$$

имеет решение.

2. На острове живут лжецы и рыцари. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Каждый житель острова про каждого из остальных знает, рыцарь он или лжец. Как-то раз встретились 28 островитян. Двое из них сказали: «Ровно двое из нас лжецы», затем четверо из остальных сказали: «Ровно четверо из нас лжецы», потом восемь из оставшихся сказали: «Ровно восемь из нас лжецы», наконец, все оставшиеся 14 сказали: «Ровно 14 из нас лжецы». Сколько лжецов было среди встретившихся? Приведите все возможные варианты и докажите, что других нет.

3. Сумма неотрицательных чисел a , b и c равна 3. Найдите наибольшее значение выражения $ab + bc + 2ca$.

4. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках K и L . Прямая ℓ пересекает окружность ω_1 в точках A и C , а окружность ω_2 — в точках B и D , причем точки идут на прямой ℓ в алфавитном порядке. Обозначим через P и Q соответственно проекции точек B и C на прямую KL . Докажите, что прямые AP и DQ параллельны.

5. Дана клетчатая доска 2021×2021 . Петя и Вася играют в следующую игру. Они по очереди ставят фишки в свободные клетки доски. Выигрывает тот игрок, после хода которого в каждом прямоугольнике 3×5 и 5×3 будет стоять фишка. Начинает Петя. Кто из игроков может обеспечить себе победу вне зависимости от действий соперника?

6. Найдите все такие натуральные числа n , что число $2^n + n^2 + 25$ является кубом простого числа.

1	2	3	4	5	6	Сумма
20	20	20	15	20	0	95

Задача 1

Решим как квадратное уравнение $(a^6 - b^6)x^2 + 2(a^5 - b^5)x + (a^4 - b^4) = 0$ относительно x , достаточно доказать что дискриминант больше или равен 0, но можно взять упрощённый дискриминант, т.к. коэффициент при x чётен,

$$d = (0.5b)^2 - a^*c = (a^5 - b^5)^2 - (a^4 - b^4)(a^6 - b^6) = a^{10} - 2a^5b^5 + b^{10} - (a^{10} - b^6a^4 - b^4a^6 + b^{10}) = b^6a^4 - 2a^5b^5 + b^4a^6 = (b^2a^3 - b^3a^2)^2, \text{ что действительно больше или равно } 0 \text{ из-за квадрата, а это что и требовалось доказать}$$

Задача 2

Разделим всех на группы: 1) где двое сказали; 2) где четверо сказали; 3) где восемь сказало; 4) где 14 сказало; что среди них какое-то количество лжецов (по условию задачи из столько же, сколько и человек в группе). Докажем, что в каждой группе не может быть одновременно и рыцарь и лжец, действительно, пусть был в группе рыцарь, тогда если в той же группе лжец, то либо они оба солгали, либо оба сказали правду, чего быть не может, значит в каждой группе не может быть одновременно и рыцарь и лжец. Может ли в первой группе быть рыцари? Нет, т.к. тогда либо лжецов нет (чего быть не может, т.к. рыцари сказали что есть 2 лжеца) либо они в других группах и их будет явно больше двух (т.к. в первой группе меньше всего человек), значит в первой группе лжецы, но также во второй группе лжецы, т.к. если в ней рыцари, то лжецов должно быть 4, но если рыцарей нет ни в 3 ни в 4 то лжецов мало, а если есть хотя бы в одной из 3 и 4 групп, то их больше 4, значит во второй группе тоже лжецы, а если в третьей рыцари, то если в 4 группе лжецы, то лжецов больше 8, а если нет в 4 группе рыцарей, то меньше 8, значит в третьей тоже лжецы, и наконец в четвёртой группе могут быть и рыцари и лжецы, в случае где лжецы это очевидно т.к. тогда 28 лжецов, и они все солгали, что верно, а также в случае где в четвёртой группе рыцари, то рыцари в четвёртой группе сказали правду, т.к. $2+4+8=14$, а все лжецы солгали, т.к. они все сказали что лжецов или 2 или 4 или 8, хотя их 14, значит подходят случаи, где 28 лжецов и 14 лжецов

ОТВЕТ: 14 или 28

Задача 3

$$ab + bc + 2ca = (ab + ca) + (bc + ca) = a(b + c) + c(b + a)$$

по условию $a + b + c = 3$, значит $b + c = 3 - a$ и $b + a = 3 - c$, подставим в $a(b + c) + c(b + a)$, получим

$3a + 3c - a^2 - c^2$, и нам надо найти максимальное значение этого выражение, оценим по отдельности $3a - a^2$ и $3c - c^2$

$3a - a^2 = -(a^2 - 3a + 2.25) + 2.25 = -(a - 1.5)^2 + 2.25$ т.к. $-(a - 1.5)^2$ меньше или равно 0, то выражение $-(a - 1.5)^2 + 2.25$ не превышает 2.25, по аналогии получаем $3c - c^2$ не больше 2.25, значит их сумма не более 4.5 чтобы неравенство $-(a - 1.5)^2 + 2.25 \leq 2.25$ стало равенством, надо чтобы квадрат стал 0, но оно достигается при $a = 1.5$, и по аналогии $c = 1.5$, подставляем в $a + b + c = 3$, получаем $b = 0$, что не противоречит условию задачи, и при этих значениях $ab + bc + 2ca = 4.5$

ОТВЕТ: 4.5

Задача 4

Решение :

Пусть точка пересечения KL с AD это точка O , тогда углы BOP и QOC , равны как вертикальные и т.к. проекции на прямую это перпендикуляр от точки до прямой значит углы OQC и OPB прямые, значит треугольники BOP и QOC подобны по двум углам, откуда $CO/OB = QO/OP$.

По свойству пересекающихся хорд окружности: $AO \cdot OC = KO \cdot OL = BO \cdot OD$, из того, что $AO \cdot OC = BO \cdot OD$, получаем, что $OD/AO = OC/BO$, значит: $OD/AO = CO/OB = QO/OP$, значит рассмотрим треугольники AOP и OQD , раньше мы доказали, что $BOP = QOC$, а также $OD/AO = QO/OP$, значит эти треугольники подобны по двум пропорциональным сторонам и углу между ними, из подобия следуют равенство всех углов этих треугольников, в том числе DQO и APQ равны, откуда и следуют параллельность прямых QD и AP , т.к. они накрест лежащие.

Задача 5

ОТВЕТ: Петя

Приведём симметричную стратегию за Петю, первым ходом он ставит фишку в центральную клетку (у любого клетчатого квадрата нечётной длины есть центральная клетка), а дальше будет ходить симметрично относительно центра этого квадрата. Заметим, что после любого хода Васи Петя сможет сделать ход, симметричный относительно центра, действительно, пусть это не так и симметричная клетка уже с фишкой, но тогда Вася не смог бы ходить, т.к. та клетка была бы уже с фишкой раньше, противоречие, значит Петя всегда сможет сделать ход. Во вторых предположим, что в каком-то прямоугольнике 5×3 нет фишки, но это значит что и в симметричном относительно центра тоже нет фишки (симметричные прямоугольники, это те в которых центральные клетки симметричны относительно центра и такой же ориентации, а бывают горизонтальной и вертикальной ориентации). Значит после хода Васи будет оставаться прямоугольник в котором нет фишки, значит он не сможет выиграть, значит выигрывает Петя.