**Олимпиада школьников СПбГУ по математике.**
**Заключительный этап. 2020/2021 учебный год. 10 – 11 классы.**

**1.** При каких натуральных $n$ клетчатую доску $n \times n$ можно разрезать на прямоугольники $1 \times 1$ и $2 \times 3$ так, что прямоугольников разных размеров будет поровну?

**2.** Положительные числа $a, b, c$ таковы, что $a^2b + b^2c + c^2a = 3$. Найдите минимальное значение выражения
$$A = \frac{\sqrt{a^6 + b^4c^6}}{b} + \frac{\sqrt{b^6 + c^4a^6}}{c} + \frac{\sqrt{c^6 + a^4b^6}}{a}.$$

**3.** Вокруг остроугольного треугольника $ABC$ описана окружность. Точка $K$ — середина меньшей дуги $AC$ этой окружности, а точка $L$ — середина меньшей дуги $AK$ этой окружности. Отрезки $BK$ и $AC$ пересекаются в точке $P$. Найдите угол между прямыми $BC$ и $LP$, если известно, что $BK = BC$.

**4.** Петя написал на доске подряд в убывающем порядке $n$ последовательных двузначных чисел, последнее из которых не содержит цифру 7. Вася подумал, что это десятичная запись натурального числа $x$, и разложил $x$ на простые множители. Оказалось, что их всего два и они различаются на 4. Что написано на доске?

**5.** В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством $2^n$, $2^{n-1} \cdot 3$, $2^{n-2} \cdot 3^2$, $2^{n-3} \cdot 3^3$, $\ldots$, $2 \cdot 3^{n-1}$, $3^n$ пиастров, где $n$ — натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Сумма |
|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 0 | 20 | 20 | 0 | 60 |

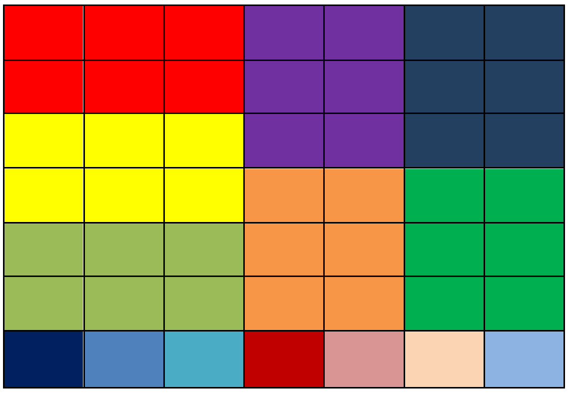
Задача 1

Решение:

Пусть доска n*n разрезана на k фигур 1*1 и на k фигур 2*3. Тогда общая площадь n*n, если считать по размерам, 1*1*k+2*3*k, если считать по фигурам. 1*1*k+2*3*k= n*n.

7*k=n*n, так как k, n – натуральные, то n делится на 7. Доказано, что n делится на 7.

Теперь докажем, что если n делится на 7, то доску можно разрезать нужным образом. Рассмотрим квадрат 7*7.



Мы разрезали доску 7*7 на фигуры (7 фигур 2*3, 7 фигур 1*1), один цвет – одна фигура. Теперь остальные доски, где n делится на 7, разбиваем на ((n/7) * (n/7)) непересекающихся квадратов 7*7 ((n/7) в строке, (n/7) в столбце), и каждый получившийся квадрат 7*7 красим таким образом. В каждом квадрате 7*7 одинаковое число фигур 2*3 и 1*1, а значит на доске суммарно их тоже одинаковое.

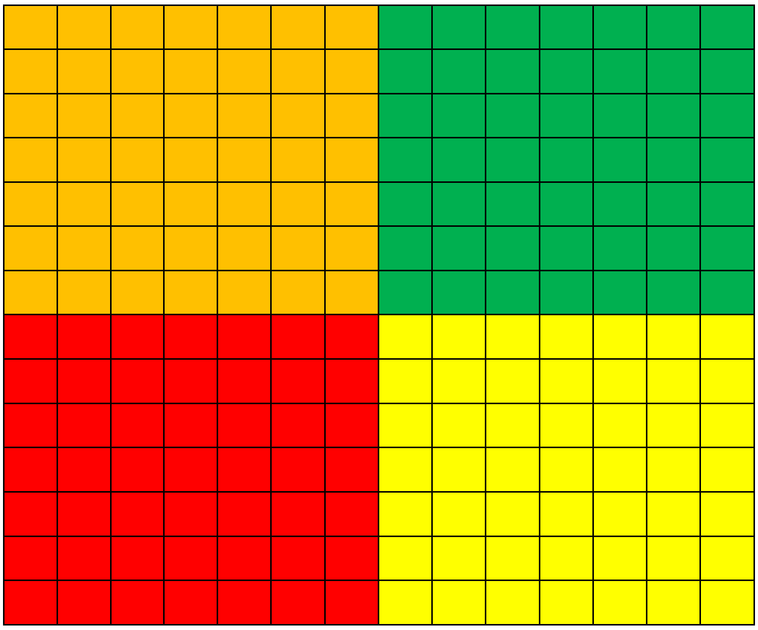


Рисунок выше – например, таким образом делим доску 14*14 на квадраты 7*7.

Ответ: n делится на 7.

Задача 4

Пусть p – меньшее из простых делителей x, тогда (p+4) – большее. Рассмотрим возможную последнюю цифру p.

0) 6, тогда p – четное простое, p=2, но p оканчивается на 0. Противоречие, p не оканчивается на 0.

1) 1, тогда последняя цифра (p+4) 5, но тогда (p+4) делится на 5 по признаку делимости на 5 (последняя цифра делится на 5), а значит так как (p+4) – простое, p+4 = 5, p=1, но 1 – не простое. Противоречие, p не оканчивается на 1.

2) 2, тогда p – четное простое, p=2, но тогда p+4=6, но 6 – составное, противоречие, p не оканчивается на 2.

3) 3, тогда последняя цифра (p+4) 7, в этом случае противоречий не возникнет.

4) 4, тогда p – четное простое, p=2, но p оканчивается на 4. Противоречие, p не оканчивается на 4.

5) 5, тогда p по признаку делимости на 5 делится на 5 => p=5, p+4=9, но 9 – составное. Противоречие, p не оканчивается на 5.

6) 6, тогда p – четное простое, p=2, но p оканчивается на 6. Противоречие, p не оканчивается на 6.

7) 7, тогда последняя цифра (p+4) 1, но произведение p*(p+4) оканчивается на 7, значит x оканчивается на 7, но тогда противоречие что последние 2 цифры x не содержат 7, p не оканчивается на 7.

8) 8, тогда p – четное простое, p=2, но p оканчивается на 8. Противоречие, p не оканчивается на 8.

9) 9, тогда последняя цифра (p+4) 3, но тогда произведение p*(p+4) оканчивается на 7 (сравнимо с 9*3 по модулю 10), значит x оканчивается на 7, но тогда противоречие что последние 2 цифры x не содержат 7, p не оканчивается на 9.

Мы рассмотрели все возможные варианты последней цифры p, не получили противоречие только в случае окончания на 3.

Тогда пусть p = 10*k+3, тогда p + 4 = 10*k+7,

x = p*(p+3)=(10*k+3)*(10*k+7) = 100*$k^2$+100*k+21, но тогда так как 100*$k^2$+100k делится на 100, то 2 последние цифры x 21. x = 100*a+21.

100*a+21 = 100*$k^2$+100*k+21

$100*a=100*k^2+100*k$

$a = k^2 + k$

1) $a = 0$, тогда $n = 1$, $x = 21$, $21 = 3*7$, противоречий нет.

2) $a>0$, тогда $x = …232221$, $a=...2322$

$a = k^2 + k$ имеет целые корни, так как a, k – целые, то корень из дискриминанта тоже целое.

$k^2 + k – a = 0$

$D = 1^2+4*a = y^2$, y – целое.

Заметим, что квадрат целого числа сравним либо с 0, либо с 1 по модулю 3. (0 в квадрате сравнимо с 0, 1 с 1, 2 в квадрате сравнимо с 1). , значит 1 + 4 * a сравнимо тоже или с 0, или с 1 по модулю 3.

1) a сравнимо с 2 по модулю 3. Заметим, что такого быть не может, так как a представляет собой убывающую последовательность двузначных чисел, оканчивающуюся на 22. Известно, что число сравнимо по модулю 3 с суммой цифр по модулю 3. Число 22 сравнимо с 1 по модулю 3, а дальше идут двузначные числа, сравнимые с 2, 0, 1, 2, 0, ..., так как это последовательные числа, а значит a сравнимо с (1 + 2 + 0 + 1 + 2 + 0 + ...), а это либо 0, если a начинается с двузначного числа, сравнимого с 2 или 0, по модулю 3, либо 1, если a начинается с двузначного числа, сравнимого с по модулю 3. Доказано.

2) a сравнимо с 0 по модулю 3, но тогда так как 21 сравнимо с 0 по модулю 3, тоже x тоже сравним с 0, по модулю 3, а значит x делится на 3. Значит один из его простых делителей 3, значит другой 7 (так как 3>4), значит x=21.

3) a сравнимо с 1 по модулю 3, но тогда 1+4*a сравнимо с 2 по модулю 3. Но это дискриминант, а мы доказали, что дискриминант должен быть сравним с 0 или 1 по модулю 3. Противоречие.

Единственные случай при котором мы не получили противоречие x=21.

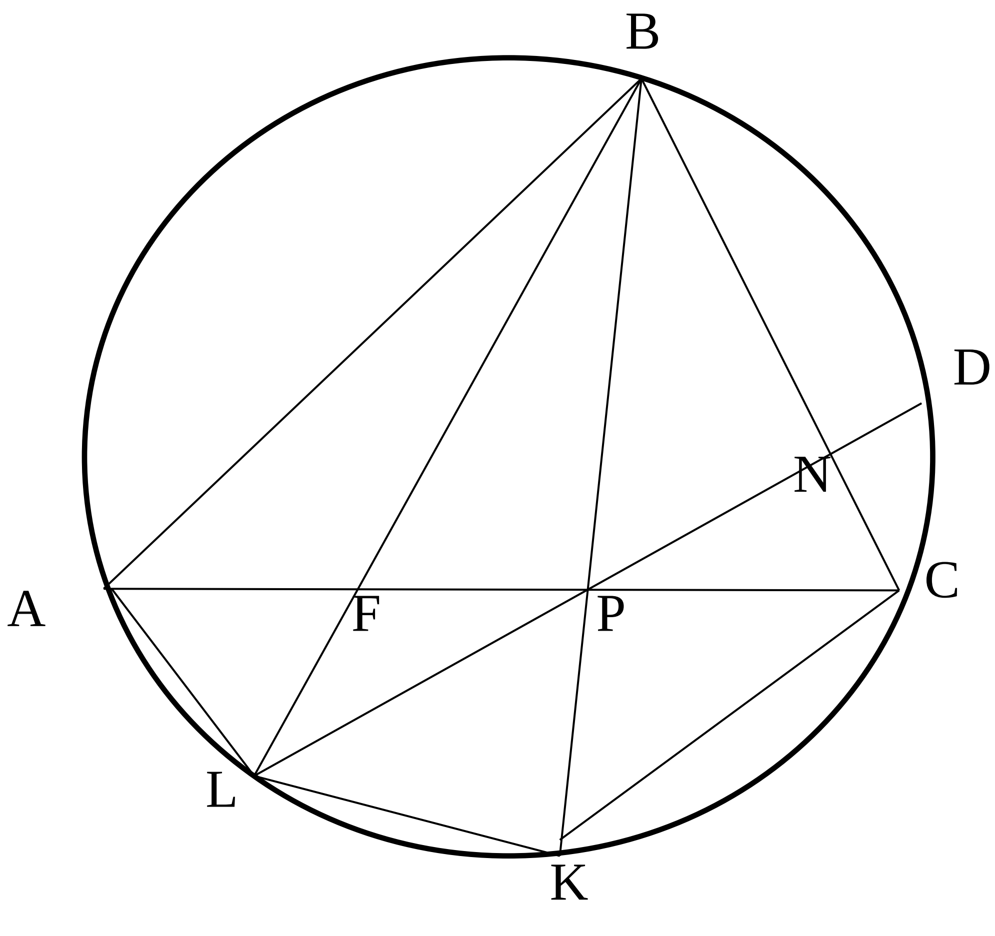
Ответ: 21.

## Задача 5

Запишем в ряд всевозможные суммы, которые можно запросить в банке от 0 до бесконечности. Заметим, что нам не смогут выдать в банке сумму в том и только том случае, если нам не смогут выдать эту сумму без монеты любого достоинства. Так как если мы можем выдать какую-то сумму, то прибавлением еще одной монеты, мы можем получить сумму, которую также смогут выдать.

Необходимо найти максимальную сумму, которую не смогут выдать. Пусть сумма A – максимальная четная, которую нам не могут выдать. Но тогда мы можем к этой сумме прибавить монету $3^n$, и получить нечетную сумму, если нем необходимо выдать нечетную сумму, то должны выдать нечетное число монет нечетного номинала, а единственная монета нечетного номинала $3^n$, значит в банке обязаны будут выдать хотя бы одну такую монету, а значит одну $3^n$, а затем останется сумма A, которую нам выдать не могут, а значит и A + $3^n$ тоже не могут выдать, значит искомая сумма – нечетная.

Задача 3




Пусть BL пересекает AC в F, LP пересекает AC в N.

Пусть угол BCK=x, тогда угол BKC=x(BKC-равнобедренный), угол BAC = угол BKC=x (вписанные). Угол KBC=180-2x, по сумме углов BKC. угол KBC=угол ABK=180-2x, так как дуга AK=дуга KC. Тогда угол ACB=3x-180(сумма углов ABC), тогда угол BPC=180-x(сумма углов PBC). Тогда угол APB=x(смежные), тогда угол APB= угол BAC=x => BAP-равнобедренный, BF-биссектриса, высота и медиана (дуга AL = дуга LK). AL=LK(равные хорды на равные дуги), AL=LP (в ALP LF-высота и медиана)=>LPKравнобедренный. Угол LKP=угол LPK=2x-90, (дуга AB=6x-360, дуга AL=180-2x, по вписанным ACB и половине дуги AK ) Пусть LN пересекает окружность в точке D. LPK=(LK+BD)/2=>BD=6x-360. Угол BND=(LC+BD)/2 = (6x-360+360-4x+180-2x)/2=90 (дуга LC=CK+LK=360-4x+180-2x). Тогда искомый угол = 90 градусов.

Ответ: 90.