Санкт-Петербургский государственный университет
Олимпиада школьников по математике 2020–2021
Заключительный этап
8–9 классы

1. Докажите, что для любых вещественных чисел a и b уравнение

$$(a^6 - b^6)x^2 + 2(a^5 - b^5)x + (a^4 - b^4) = 0$$

имеет решение.

2. На острове живут лжецы и рыцари. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Каждый житель острова про каждого из остальных знает рыцарь он или лжец. Как-то раз встретились 28 островитян. Двое из них сказали: «Ровно двое из нас лжецы», затем четверо из остальных сказали: «Ровно четверо из нас лжецы», потом восемь из оставшихся сказали: «Ровно восемь из нас лжецы», наконец, все оставшиеся 14 сказали: «Ровно 14 из нас лжецы». Сколько лжецов было среди встретившихся? Приведите все возможные варианты и докажите, что других нет.

3. Сумма неотрицательных чисел a, b и c равна 3. Найдите наибольшее значение выражения $ab + bc + 2ca$.

4. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках K и L. Прямая ℓ пересекает окружность ω_1 в точках A и C, а окружность ω_2 — в точках B и D, причем точки идут на прямой ℓ в алфавитном порядке. Обозначим через P и Q соответственно проекции точек B и C на прямую KL. Докажите, что прямые AP и DQ параллельны.

5. Дана клетчатая доска 2021×2021. Петя и Вася играют в следующую игру. Они по очереди ставят фишки в свободные клетки доски. Выигрывает тот игрок, после хода которого в каждом прямоугольнике 3×5 и 5×3 будет стоять фишка. Начинает Петя. Кто из игроков может обеспечить себе победу вне зависимости от действий соперника?

6. Найдите все такие натуральные числа n, что число $2^n + n^2 + 25$ является кубом простого числа.

1	2	3	4	5	6	Сумма
15	20	5	0	20	5	65

Задача 1

Дано квадратное уравнение:
$(a^6 - b^6)x^2 + 2(a^5 - b^5)x - (a^4 - b^4) = 0$.
Предположим, что уравнение имеет решение при любых вещественных a, b.
Так как уравнение имеет хотя бы одно решение, то:
$(2(a^5 - b^5))^2 - 4(a^6 - b^6)(a^4 - b^4) >= 0$;
$4a^{10} - 8a^5b^5 + 4b^{10} >= 4a^{10} - 4a^4b^6 - 4a^6b^4 + 4b^{10}$;
$4a^4b^6 + 4a^6b^4 >= 8a^5b^5$;
$a^4b^6 + a^6b^4 >= 2a^5b^5$;
$a^4b^4 (a^2 + b^2) >= a^4b^4(2ab)$;
$a^2 + b^2 >= 2ab$;
$a^2 - 2ab + b^2 >= 2ab - 2ab$;
$(a - b)^2 >= 0$.

Так как квадрат вещественного числа всегда неотрицателен, то приведённое выше неравенство - верно -> уравнение имеет хотя бы одно решение, чтд.

Задача 2

Разделим всех жителей на группы в зависимости от их высказываний (группа с 2 жителями, группа с 4 жителями, группа с 8 жителями и группа с 14 жителями).

Заметим, что группа могла состоять только целиком из лжецов, либо целиком из рыцарей (если в какой-то группе есть рыцари и лжецы, то они говорят про одинаковое число лжецов, значит, либо рыцарь лжёт, либо лжец говорит правду).

Также, группа могла состоять только целиком из лжецов, либо целиком из рыцарей (если в какой-то группе есть рыцари и лжецы, то они говорят про одинаковое число лжецов, значит, либо рыцарь лжёт, либо лжец говорит правду).

Также, возможно две ситуации: либо только одна группа жителей сказала правду, либо все группы сказали неправду (так как если хотя бы две группы жителей сказали правду, то количество лжецов по мнению одной группы не равно количеству лжецов по мнению другой группы, значит во всех из этих групп, кроме одной, есть лжецы -> есть только одна группа, состоящая из рыцарей - противоречие).

Заметим, что если бы в первой, второй или третьей группе говорили бы правду, то жители во всех остальных группах лжецы, однако, в таком случае количество лжецов по мнению первой, второй или третьей группы соответственно не совпадало бы с реальным числом лжецов (26 не равно 2; 24 не равно 4; 20 не равно 8), то есть все жители были бы лжецами. Однако, если бы правду говорили жители из четвёртой группы, то количество лжецов по их мнению совпадало бы с количеством лжецов на самом деле (28 - 14 = 14), следовательно, всего было бы 14 рыцарей и 14 лжецов.

Мы пересмотрели все возможные варианты развития событий без противоречий, и получили, что лжецов могло быть 14 или 28.

Ответ: 14 или 28 лжецов.

Задача 3

Заметим, что 2ca даёт наибольший вклад в сумму, так как у ab и bc нет множителей. Очевидно, самым выгодным будет максимизировать произведение ca для наибольшей суммы. ca будет максимальным, если b = 0 и c = a, т.е. максимальная возможная сумма ab + bc + 2ca = 0 + 0 + 2(3/2 * 3/2) = 9/2 = 4.5.

Задача 5

Заметим, что прямоугольник, стороны которого параллельны осям координат, всегда может описываться четырьмя точками - (a; b; c; d), где a - положение левой верхней точки по оси x, b - положение левой верхней точки по оси y, c - положение правой нижней точки по оси x, d - положение правой нижней точки по оси y.

Представим доску как таблицу 2021x2021. Пусть координаты левой верхней клетки - (1; 1), а координаты правой нижней клетки - (2021; 2021).

Всегда будет побеждать Петя. Рассмотрим алгоритм его победы:

- первым ходом Петя ставит фишку на центральную клетку (клетку с координатами (1011; 1011))

- в последующие ходы Петя “зеркально повторяет” ходы Васи: если Вася ставит свою фишку на клетку (a; b), то Петя ставит фишку на клетку (2021 - a + 1; 2021 - b + 1)

Заметим, что для любой клетки, кроме центральной, есть “зеркальная” ей клетка, отличная от неё. Однако, Вася не может поставить в центральную клетку свою фишку, так как там уже стоит фишка Пети.

Предположим, что при вышеописанной игре Пети Вася сможет победить. В таком случае, Вася сможет найти такой прямоугольник D с координатами (D_0; D_1; $D_0 + 5$; $D_1 + 3$) или (D_0; D_1; $D_0 + 3$; $D_1 + 5$), что в “зеркальном” ему прямоугольнике (2021 - D_0 + 1 - 5; 2021 - D_1 + 1 - 3; 2021 - D_0 + 1; 2021 - D_1 + 1) или (2021 - D_0 + 1 - 3; 2021 - D_1 + 1 - 5; 2021 - D_0 + 1; 2021 - D_1 + 1) уже стоит фишка H. Очевидно, что если Петя играет по вышеописанному алгоритму, то есть такая фишка F, которая “зеркальна” H. Если прямоугольник D - прямоугольник 3x5, то:

- возможные координаты фишки H: $2021 - D_0 + 1 - 3 <= x <= 2021 - D_0 + 1$; $2021 - D_1 + 1 - 5 <= y <= 2021 - D_1 + 1$ -> возможные координаты фишки F: $2021 - (2021 - D_0 + 1 - 3) + 1 >= x >= 2021 - (2021 - D_0 + 1) + 1$; $2021 - (2021 - D_1 + 1 - 5) + 1 >= y >= 2021 - (2021 - D_1 + 1) + 1$ -> возможные координаты фишки F: $D_0 <= x <= D_0 + 3$; $D_1 <= y <= D_1 + 5$, то есть фишка F в любом случае будет лежать в прямоугольнике D, противоречие.

Иначе:

- возможные координаты фишки H: $2021 - D_0 + 1 - 5 <= x <= 2021 - D_0 + 1$; $2021 - D_1 + 1 - 3 <= y <= 2021 - D_1 + 1$ -> возможные координаты фишки F: $2021 - (2021 - D_0 + 1 - 5) + 1 >= x >= 2021 - (2021 - D_0 + 1) + 1$; $2021 - (2021 - D_1 + 1 - 3) + 1 >= y >= 2021 - (2021 - D_1 + 1) + 1$ -> возможные координаты фишки F: $D_0 <= x <= D_0 + 5$; $D_1 <= y <= D_1 + 3$, то есть фишка F в любом случае будет лежать в прямоугольнике D, противоречие.

Получается, что если бы Вася смог найти такой прямоугольник D, что в нем не стоит фишка, а в “зеркальном” ему прямоугольнике фишка стоит, то получилось бы противоречие. Значит, если Вася ставит фишку в прямоугольник без фишки, то и Петя поставит фишку в прямоугольник без фишки, то есть в последний прямоугольник без фишки поставит фишку именно Петя.

Ответ: при правильной игре всегда побеждает Петя.

Задача 6.

Обозначим искомое простое число как p = k + 1.

Заметим, что число 2^n делится только на одно простое число - 2, а число 25 делится только на простое число 5. Эти случаи стоит рассмотреть отдельно, так как во всех остальных случаях 2^n и 25 точно не делятся на p.

p = 2: $2^n + n^2 = -17$ - невозможно, т.к. n - натуральное.

p = 5: $2^n + n^2 = 100$ - возможно, пример: n = 6.

Заметим, что n - всегда чётное, т.к. если бы n было нечётным, то $2^n + n^2 + 25$ - чётное, однако, ни одно чётное число не подходит под условие (все числа, кроме 2 - составные, случай p = 2 - рассмотрен).

Ответ: n = 6.