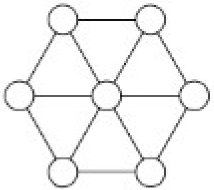
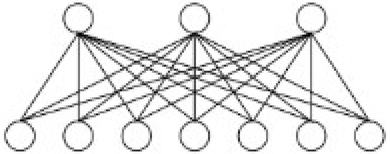
ВОПРОС 1: ЭССЕ

25 из 25 баллов

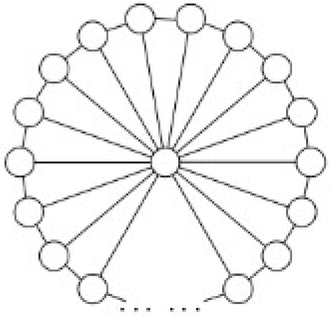
1. На картинке нарисовано n кружочков, некоторые кружочки соединены отрезками. Требуется расставить в кружочках числа от 1 до n (без повторений) так, чтобы выполнялось свойство: если кружочки соединены отрезками, то стоящие в них числа должны быть взаимно просты (то есть не иметь общих натуральных делителей, отличных от 1). Можно ли это сделать в каждом из следующих случаев? Если можно — опишите расстановку чисел, если нет — объясните, почему нельзя.



а) $n = 7$



б) $n = 10$



в) $n = 2022$: по кругу стоят 2021 кружочков, и еще один в центре

Данный ответ:

а) да. пример: в центре стоит семерка, в кругу можно пронумеровать все ячейки по порядку цифрами 1 2 3 4 5 6, и поставить в ячейки их номер. пронумеруем их по часовой стрелке, тогда справа и вверх от центра стоит 1, справа горизонтально 2, справа вниз от центра 3, слева вниз от центра 4, свела горизонтально стоит 5, и слева вверх от центра стоит 6. Почему этот пример работает? во первых с ребрами, соединяющие вершины с центральной вершиной все хорошо, т.к 7 простое число=> если с 7 кто то не взаимопрост, то это число делится на семь нацело, а у нас числа от 1 до 7, там таких нет. Во вторых заметим что числа а и а+1 взаимопросты т.к. их нод равен 1 по методу Евклида=> а т.к. все числа в круге идут по порядку, значит что все пары в круге соединенные ребром имеют вид(а и а+1), за исключением пары 1 и 6, но их нод также равен 1.

б) ответ нет. Заметим что у нас 5 четных чисел, также на рисунке у нас полный двудольный граф, где в первой доле 3 вершины, а во второй доле 7 вершин.

заметим что во второй доле в любой расстановке чисел от 1 до 10 есть хотя бы 2 четных числа, т.к четных чисел 5, а впервой доле максимум 3 четных числа следовательно во второй доле их хотя бы 2. так как во второй доле есть числа кратные 2(пусть есть число а), то в 1 доле их быть не должно т.к если есть(пусть число в) то нод а и в кратен двум=> они не взаимопросты.=> все числа кратные 2 находятся во 2 доле. тогда во второй доле точно есть числа 2 4 6 8 10,=> в первой доле нет чисел кратных 3 т.к. тогда нод этого числа и 6 кратен 3 а значит не равен 1, также в первой доле нет чисел кратных 5 т.к. тогда нод этого числа и 10 кратен 5 а значит не равен 1=> они не взаимопросты.=> в первой доле нет таких чисел как 2 3 4 5 6 8 9 10, а значит там могут быть только числа 1 и 7, НО их 2, ав первой доле 3 числа.

в) нет. заметим что в центре стоит нечетное число, тк если четное,а четных чисел от 1 до 2022 1011, значит в кругу есть четное число, а тогда их нод кратен 2 а значит не 1. Значит в центре нечетное число значит в кругу все четные числа ко их 1011, а всего чисел в кругу 2021, заметим что тогда 2 четных числа стоят рядом а значит они соеденены ребром, но их нод кратен 2, и это плохо тк он тогда не 1, а почему же 2 четных числа стоят рядом? Да потому что если нетБ то рассматривая числа по часовой стрелке, то после четного должно идти нечетное, т.к чисел четных 1011, тогда нечетных тоже хотя бы 1011 значит челев в кругу хотя бы 2022, но их меньше, следовательно такое не возможно.

ВОПРОС 2: ЭССЕ

15 из 30 баллов

2. Назовем *каскадом, порожденным числом* r, набор из 12 натуральных чисел: $r, 2r, \ldots, 12r$.

а) Может ли какая-то пара чисел (a, b) содержаться в шести различных каскадах? Если да — приведите пример таких чисел, если нет — объясните, почему не может.

б) Верно ли, что множество натуральных чисел можно раскрасить в 12 цветов так, что в каждом каскаде все элементы будут разного цвета?

Данный ответ:

а) ответ: да, есть. Пример,числа 60 и 120.

1 каскад) г=60, тогда г=60, 2г=120

2 каскад) г=30, тогда 2г=60, 4г=120

3 каскад) г=20, тогда 3г=60, 6г=120

4 каскад) г=15, тогда 4г=60, 8г=120

5 каскад) г=12, тогда 5г=60, 10г=120

6 каскад) г=10, тогда 6г=60, 12г=120

б) да. будем вести индукцию по п, по колличевству чисел, если число п простое то это хорошо красим в любой цвет если не простое, то смотри м ранее каскадов с этим числом было не более 11 => было использовано не более 11 цветов. а значит есть свободный.

ВОПРОС 3: ЭССЕ

2 из 20 баллов

3. В треугольнике ABC точка D — середина стороны AB, E — середина стороны AC, F — середина биссектрисы AL, причем $DF = 1$, $EF = 2$. На плоскости изображены точки D, E, F так, что прямая DF горизонтальна, а остальные элементы чертежа стерты. Можно ли восстановить положение хотя бы одной из вершин треугольника, если известно, что вершина A находилась сверху от прямой DF?

Данный ответ: de средняя линия треугольника abc, d e f лежат на одной прямой т.к df средняя линия abl => df//ab, u de //ab=> они совпали т.к выходят из одной точки д. Отношение сторон треугольника равно 2 к 1, значит стороны равны 6 2х и х

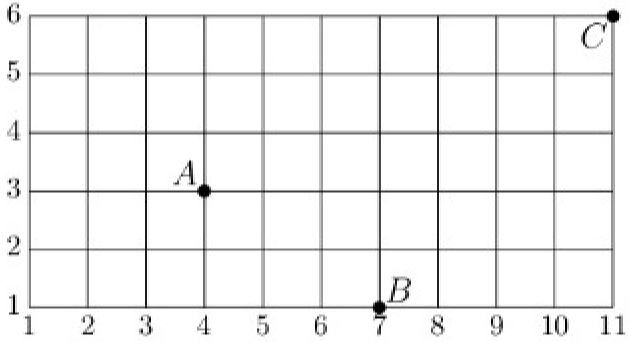
ВОПРОС 4: ЭССЕ

16 из 25 баллов

4. Город имеет форму клетчатого прямоугольника 5×10 клеток: линии — улицы, клетки — жилые кварталы. Расстояние между перекрестками измеряется как длина самого короткого пути по улицам города, проходящего от одного перекрестка до другого. Например, для перекрестков A, B и C на картинке $AB = 5$, $AC = 10$, $BC = 9$. Можно ли отметить в этом городе k перекрестков так, чтобы все расстояния между этими перекрестками оказались различными числами? Если да — укажите эти перекрестки (например, перекресток C находится на пересечении 11-й вертикальной и 6-й горизонтальной улицы), если нет — объясните, почему нельзя.

Решите задачу для

а) $k = 5$; б) $k = 6$; в) $k = 7$.



Данный ответ:

а) да.

коордитаты(11,6)=перекресток находится на пересечении 11 вертикальной и 6 горизонтальной.

1 перкресток) а=(11,6)

2 перекресток)в=(1,1)

3) с=(1,2)

4)д = (3,1)

5)е = (7,6)

ав=15 ас=14 ад = 13 ае=4 вс=1 вд=2 ве=11 сд=3 се=10 де=9

в)нет. потому что самый короткий путь из точки а с координатами (х у) в точку б с координатами (с к)= /х-с/+/у-к/. (/м/ модуль числа м). мах значение /х-с/=10, мах значение /у-к/=5=> наибольшая длина пути = 15, те всего длины путей от 1 до 15, а тк они разные путей не более 15, а если перекрестков 7, то путей 7*6/2=21 что больше 15