Олимпиада школьников СПбГУ по математике.

Заключительный этап. 2020/2021 учебный год. 10 – 11 классы.

1. Натуральные числа от 1 до 2021 записаны в ряд в некотором порядке. Оказалось, что у любого числа его левый и его правый сосед имеют разную четность. Какое число может быть на первом месте?

2. При $a, b, c > 0$ найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{(a+b+c)^3 - 26abc}.$$

3. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B, а окружность с центром в точке O охватывает окружности ω_1 и ω_2, касаясь их в точках C и D соответственно. Оказалось, что точки A, C и D лежат на одной прямой. Найдите угол ABO.

4. Петя написал на доске подряд n двузначных восьмеричных чисел ($n \geq 2$), образующих арифметическую прогрессию с разностью -8. Вася подумал, что это восьмеричная запись натурального числа x, и разложил x на простые множители. Оказалось, что их всего два, и они различаются на 6. Что написано на доске?

5. В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством $3n - 1$, $6n + 1$, $6n + 4$ и $6n + 7$ пиастров, где n — натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?

1	2	3	4	5	Сумма
20	20	20	10	0	70

Задача 2

Ответ: 3

Решение:

Для начала докажем, что при любых $a, b, c > 0$, $A \leq 3$.

По неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим:

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3} \geq \sqrt[3]{a^3b^3c^3} = abc, \text{ откуда:}$$

$$2a^3 + 2b^3 + 2c^3 \geq 6abc. \ (1)$$

По неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим:

$$\frac{a^2b+b^2a+b^2c+c^2b+c^2a+a^2c}{6} \geq \sqrt[6]{a^2b \cdot b^2a \cdot b^2c \cdot c^2b \cdot c^2a \cdot a^2c} = abc, \text{ откуда:}$$

$$9a^2b + 9b^2a + 9b^2c + 9c^2b + 9c^2a + 9a^2c \geq 54abc. \ (2)$$

Сложив неравенства (1) и (2) получим:

$$2a^3 + 2b^3 + 2c^3 + 9a^2b + 9b^2a + 9b^2c + 9c^2b + 9c^2a + 9a^2c \geq 60abc,$$

$$3a^3 + 3b^3 + 3c^3 + 9a^2b + 9b^2a + 9b^2c + 9c^2b + 9c^2a + 9a^2c - 60abc \geq a^3 + b^3 + c^3,$$

$$3(a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3b^2a + 3b^2c + 3c^2b + 3c^2a + 3a^2c - 20abc) \geq a^3 + b^3 + c^3$$

$$3(a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3b^2a + 3b^2c + 3c^2b + 3c^2a + 3a^2c + 6abc - 26abc) \geq a^3 + b^3 + c^3,$$

$$3((a + b + c)^3 - 26abc) \geq a^3 + b^3 + c^3,$$

$$3 \geq \frac{a^3+b^3+c^3}{(a+b+c)^3-26abc},$$

$$A \leq 3, \text{ ч.т.д.}$$

При $a = b = c = 1$ $A = \frac{1^3+1^3+1^3}{(1+1+1)^3-26\cdot1\cdot1\cdot1} = \frac{1+1+1}{3^3-26} = \frac{3}{27-26} = 3.$

Т.к. $A \leq 3$ при любых $a, b, c > 0$, а значение $A = 3$ достигается при $a = b = c = 1$, то максимум A равен 3.

Задача 1

Ответ: любое нечётное число от 1 до 2021.

Решение:

Для начала докажем, что на первом месте не может стоять чётное число. От противного, пусть может. Рассмотрим 2 случая: когда следом за ним стоит чётное, и когда следом за ним нечётное.

В первом случае третье число обязательно нечётное, т.к. у второго уже есть чётный сосед. Тогда четвёртое число тоже нечётное, т.к. у третьего уже есть чётный сосед. Пятое число чётное, т.к. у четвёртого есть нечётный сосед, шестое тоже чётное, т.к. у пятого есть нечётный сосед и т.д.. Мы всегда сможем определить чётность следующего числа по чётности предыдущих, причём в начале стоят 2 чётных, а потом всё идёт по правилу: после 2 нечётных идут 2 чётных, а после 2 чётных 2 нечётных (объяснение такое же, как и для первых членов ряда). И в итоге получим, что наш ряд имеет вид: ч ч н н ч ч н н ч ч … ч ч н н ч (ч – чётное, н – нечётное), т.к. 2021 при делении на 4 даёт остаток 1, а наши числа расположены четвёрками вида «ч ч н н». Тогда чётных числе у нас больше, чем нечётных, что неверно, т.к. среди чисел от 1 до 2021 1011 нечётных и 1010 чётных. Противоречие. Значит, этот случай невозможен.

Во втором случае третье число обязательно нечётное, т.к. у второго уже есть чётный сосед. Тогда четвёртое число тоже нечётное, т.к. у третьего уже есть чётный сосед. Пятое число чётное, т.к. у четвёртого есть нечётный сосед, шестое тоже чётное, т.к. у пятого есть нечётный сосед и т.д.. Мы всегда сможем определить чётность следующего числа по чётности предыдущих, причём сначала стоит чётное число, потом 2 нечётных, а потом всё строится по правилу после 2 нечётных идут 2 чётных, а после 2 чётных 2 нечётных (объяснение такое же, как и для первых членов ряда). И в итоге получим, что наш ряд имеет вид: ч н н ч ч н н ч ч … ч ч н н (ч – чётное, н – нечётное), т.к. 2021 при делении на 4 даёт остаток 1, а наши числа расположены четвёрками вида «н н ч ч», с одним чётным в начале. Тогда чётных числе у нас больше, чем нечётных, что неверно, т.к. среди чисел от 1 до 2021 1011 нечётных и 1010 чётных. Противоречие. Значит, этот случай невозможен.

Оба случая невозможны, противоречие. Значит, первое число не может быть чётным, ч.т.д.

Теперь докажем, что любое нечётное число может быть первым.

Теперь докажем, что 1 может быть первым числом. Действительно, рассмотрим ряд 1 2 4 3 5 6 8 7 9 … 2018 2020 2019 2021 (сначала 1, потом первое и второе чётное, второе и третье нечётные, третье и четвёртое чётные, четвёртое и пятое нечётные и т.д.). В нём действительно у каждого числа 1 сосед чётный, другой нечётный, т.к. ряд имеет вид: н ч ч н н ч ч н н … нн, где ч – чётное, н – нечётное, а значит, пример рабочий.

Теперь заметим, что в приведённом выше примере можно любое нечётное число >= 3 поменять местами с 1, и пример останется рабочим, т.к. нас интересует только чётность чисел, а она у 1 и любого нечётного одинакова. И при этой замене мы получим рабочий пример для любого нечётного числа, что и требовалось.

Задача 3

Ответ: 90°

Решение:

Угол будем обозначать значком «^». Например, ^ABC – угол ABC.

Центры окружностей ω_1 и ω_2 обозначим за P и Q соответственно. В треугольниках POB и QOB проведём высоты PS и QT соответственно. Радиусы окружностей ω_1 и ω_2 обозначим за a и b соответственно. Окружность, охватывающую ω_1 и ω_2 и касающуюся их в точках C и D соответственно, обозначим за w.

Треугольник COD равнобедренный, т.к. CO = DO как радиусы w. Значит, ^OCD = ^ODC.

Т.к. C – точка касания ω_1 и w, а P и O – их центры соответственно, то C, P, O лежат на одной прямой. Т.к. D– точка касания ω_2 и w, а Q и O – их центры соответственно, то Q, D, O лежат на одной прямой.

Треугольник APC равнобедренный, т.к. AP = CP = a. Значит, ^PCA = ^ CAP. Треугольник AQD равнобедренный, т.к. AQ = QD = b. Значит, ^DAQ = ^ADQ = ^ACP = ^PAC, а, следовательно, треугольники COD, CPA и AQD попарно подобны, а значит, CO / CP = CD / CA = (CA + AD) / CA = 1 + AD / CA = 1 + DQ / AP = 1 + b / a = (a + b) / a, т.е. CO / a = (a + b) / a, откуда, DO = CO = a + b.

PO = OC – CP = (a + b) – a = b = QB.

OQ = OD – QD = (a + b) – b = a = BP.

Треугольники POB и QBO равны по 3 сторонам (PO = QB, OB = OB, PB = QO), а, следовательно, соответственные высоты PS и QT в них равны.

PS и QT перпендикулярны одной и той же прямой OB, а значит, параллельны. Кроме того, он равны. Значит, PSTQ – параллелограмм, а, следовательно, OB и PQ параллельны. Т.к. линия центров двух окружностей перпендикулярна их обще хорде, то AB и PQ перпендикулярны. А т.к. PQ параллельна OB, то AB и BO перпендикулярны, т.е. ^ABO = 90°.

Задача 4

Ответ: 7767

Решение:

Пусть разложение x на простые множители имеет вид p*(p-6). Числа p и p-6 сравнимы по модулям 2 и 3 и оба простые, а значит, ни одно из них на 2 или 3 не делится, а значит, не делится и их произведение, т.е. x.

Т.к. разница нашей арифметической прогрессии равна -8, то любые 2 соседних числа имеют одинаковые остатки при делении на 8. А остатки при делении на 8 у восьмизначных чисел = это их последние цифры. Значит, все числа на доске имеют одинаковую последнюю цифру, которую мы обозначим за c.

Пусть первая цифра последнего числа на доске равна a. Тогда у числа перед ним первая цифра равна (a+1), у третьего с конца (если оно есть) (a+2) и т.д..

У восьмеричных чисел есть свойства, схожие со свойствами у десятичных чисел. Так, если десятичное число сравнимо с суммой своих цифр по модулю 9, то восьмеричное по модулю 7. Если десятичное сравнимо с знакопеременной суммой своих цифр по модулю 11, то восьмеричное по модулю 9 (и, соответственно, 3).

Т.к. n >= 2, то x >= 8^3 = 512.

n не может превосходить 7, т.к. всего двузначных восьмеричных чисел с одинаковой цифрой не больше 7.

Сумма цифр x равна na + nc + n(n-1)/2. Если n кратно 7, то и сумма цифр кратна 7, а значит, и x кратно 7. Тогда p*(p-6) = x = 7k, где k – целое. Т.к. p И p-6 простые, , а их произведение кратно 7, то одно из них равно 7. Другое тогда или 13, ил 1. Но в любом случае x получается меньше 512, что невозможно. Значит, n не равно 7.

Знакопеременная сумма цифр x равна na + n(n-1)/2 – nc. Если n кратно 3, то и знакопеременная сумма цифр кратна 3, а значит, и x кратно 3, что невозможно. Значит n не равно 3 и 6.

У n остаются 3 варианта: 2, 4 или 5.

При n = 2 единственный вариант x = 7767, при остальных n вариантов нет.