Олимпиада школьников СПбГУ по математике.
Заключительный этап. 2020/2021 учебный год. 10 – 11 классы.

1. Натуральные числа от 1 до 2023 записаны в ряд в некотором порядке. Оказалось, что любые три числа, расположенные через одно, дают разные остатки от деления на 3. Какое число может быть на первом месте?

2. При $a, b, c > 0$ найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{a^4 + b^4 + c^4}{(a+b+c)^4 - 80\,(abc)^{4/3}}.$$

3. Окружность ω_1 с центром O пересекается в точках K и L с окружностью ω_2, проходящей через точку O. Через точку O проведена прямая, вторично пересекающая окружность ω_2 в точке A. Отрезок OA пересекает окружность ω_1 в точке B. Найдите отношение расстояний от точки B до прямых AL и KL.

4. Петя написал на доске подряд n двузначных восьмеричных чисел $(n \geq 2)$, образующих арифметическую прогрессию с разностью 8, причем первое число не содержит цифру 2. Вася подумал, что это восьмеричная запись натурального числа x, и разложил x на простые множители. Оказалось, что их всего два, и они различаются на 2. Что написано на доске?

5. В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством $3n-2$, $6n-1$, $6n+2$ и $6n+5$ пиастров, где n — натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?

1	2	3	4	5	Сумма
20	20	20	3	0	63

ЗАДАЧА 1

Заметим, что в ряду 1...2023 ровно 675 чисел сравнимы с 1 по модулю 3; ровно 674 с 2 по модулю 3; ровно 674 числа делятся на 3.

Любые три числа, расположенные через одно, имеют различные остатки при делении на три. Пусть числа с номером n, n+2, n+4 имеют различные остатки, тогда числа с номерами n и n+6 имеют одинаковые остатки при делении на 3

пусть число с номером 2 имеет остаток k2 по модулю 3, тогда все числа с номерами 2,8, 14... 2018 имеют остаток k2 по модулю 3. Их 337.

Также пусть число с номером 4 имеет остаток k4 по модулю 3, тогда все числа с номерами 4,10,16...2020 имеют остаток k4 по модулю 3. Их 337.

Тогда числа с номерами 6,12,18...2022 имеют третий остаток при делении на 3. Назовем его k6. Их 337.

Числа k2, k4, k6 различны и из мн-ва 0,1,2

Также мы знаем, что числа с номерами 1,7,13...2023 имеют ост k1 при дел на 3. Их 338

3,9,15...2019 им ост k3 при дел на 3. Их 337

5,11,17... 2021 им ост k5 при дел на 3. Их 337 k1,k3,k5 различны и из множества 0,1,2

Чисел с остатком k1 больше. Среди k2, k4, k6 найдется ровно одно, которое будет равно k1.

Тогда чисел с остатком k1 будет 675. Тогда k1 есть 1. Нас спрашивали про первый номер. Туда как раз входит число с номером 1.

Значит число с номером 1 имеет остаток k1 = 1 при делении на 3.

В силу того, что только остаток при делении на 3 влияет на позицию числа в ряду, На первом месте стоит любое число из ряда 1...2023, которое дает остаток 1 при делении на 3

Ответ: любое число из ряда 1...2023, которое дает остаток 1 при делении на 3.

ЗАДАЧА 2

Поработаем со знаменателем. Если мы минимизируем знаменатель, то максимизируем всю дробь.

Раскроем $(a+b+c)^4$ в знаменателе. Будем иметь страшный многочлен

$aaaa+bbbb+cccc+(4aaab+6aabb+4abbb+4caaa+12aabc+12bbac+4bbbc+6aaccc+12ccab+6bbcc+4ccca+4cccb)$.

Представим, что здесь 78+3 слагаемых. Оценим по неравенству Коши то, что я выделил в скобках.

Получим, что этот многочлен будет $\geq aaaa+bbbb+cccc+78*$ (корень 78-й степени из $(abc)^{104}$)=

$a^4+b^4+c^4+78*(abc)^{(4/3)}$. Вычтем отсюда то, что было в знаменателе.

Итого знаменатель $\geq a^4+b^4+c^4-2*(abc)^{(4/3)}$, тогда вся дробь $A \leq (a^4+b^4+c^4)/(a^4+b^4+c^4-2*(abc)^{(4/3)}) = B$

прибавим и вычтем $2*(abc)^{(4/3)}$ в числителе. Тогда мы можм выделить целую часть

$B = 1+ (2*(abc)^{(4/3)})/(a^4+b^4+c^4-2*(abc)^{(4/3)})$.

Оценим $a^4+b^4+c^4$ по Коши в знаменателе $B \leq 1+ 2*(abc)^{(4/3)}/(3*(abc)^{(4/3)}-2*(abc)^{(4/3)})=3$

Итого $A \leq B \leq 3$. Оценка достигается, если $a=b=c$. При $a=b=c$ при любом a $A=3$.

Ответ 3.

ЗАДАЧА 3

OK = OL КАК РАДИУСЫ w1. Также в w2 OK и OL хорды, тогда углы KAO и LAO равны. Также равны OLK и OKL, как углы при основании в равнобедренном OKL.

Угол OLK также является вписанным для w2 и оприается на дугу OK, тогда он равен KAO, тогда верно, что KAO= LAO = OLK = OKL.

Пусть угол KLB = x=> OLB = x+OLK = x + LAO. OLB = OBL, как углы при основании в равнобедренном тр OBL.

Тогда OBL = x+LAO. O,B,A на одной прямой, угол OBL внешний для тр ABL. Тогда угол BLA = OBL-LAO= (x+LAO)-LAO= x.

Это значит, что KLB = x = LBA. Тогда B лежит на биссектрисе KLA. Также мы знаем, что B лежит на биссектрисе угла KAL, так как KAO = LAO

Следовательно B является центром вписанной окружности для треугольника KAL. Тогда расстояние от точки B до прямых AL, KL, AK равны.

Значит отношение расстояний от B до пр AL и KL равно 1.

Ответ 1.

ЗАДАЧА 4

Разность 8 для восьмеричной системы счисления означает, что число меняется так, что его цифра в разряде десятков увеличивается на 1.

простые числа нечетные. Тогда они заканчиваются на 1 3 5 или 7. Тогда если меньшее оканчивается на 1, то большее на 3.

1 3 пр-ние 3, оканчивается на 3

3 5 пр-ние 15 -> 17(8) оканчивается на 7

5 7 пр-ние 35 -> 43(8) оканчивается на 3

7 1 пр-ние 7 оканчивается на 7.

Оканчивается на 3 или на 7

Находится один пример. 3343_(8) = 1763 = 41*43 = 51_(8)*53_(8). То есть число 3343 в восьмеричной раскладывается на 51*53 в восьмеричной. Оба эти числа простые