

1. Найдите все такие значения a , для которых квадратные трехчлены $x^2 + 2x + a$ и $x^2 + ax + 2 = 0$ имеют по два корня, причем сумма квадратов корней первого трехчлена равна сумме квадратов корней второго трехчлена.

2. Каждый из островитян либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт (и те, и другие на острове есть). Каждый житель острова про каждого знает рыцарь он или лжец. Часть жителей острова заявила, что на острове проживает четное число рыцарей, а все оставшиеся жители заявили, что на острове проживает нечетное число лжецов. Может ли на острове быть ровно 2021 житель?

3. Для произвольных вещественных чисел a и b ($b \neq 0$) найдите наименьшее значение выражения $a^2 + b^2 + \frac{a}{b} + \frac{1}{b^2}$.

4. Точки B_1 и C_1 — середины сторон AC и AB треугольника ABC . На сторонах AB и AC как на диаметрах построены окружности ω_1 и ω_2 . Обозначим за D точку пересечения прямой B_1C_1 с окружностью ω_1 , лежащую по другую сторону от C относительно прямой AB . Обозначим за E точку пересечения прямой B_1C_1 с окружностью ω_2 , лежащую по другую сторону от B относительно прямой AC . Прямые BD и CE пересекаются в точке K . Докажите, что прямая BC проходит через точку пересечения высот треугольника KDE .

5. На центральной клетке доски 11×11 стоит фишка. Петя и Вася играют в следующую игру. Каждым своим ходом Петя передвигает фишку на одну клетку по вертикали или горизонтали. Каждый своим ходом Вася возводит стенку с одной из сторон любой из клеток. Двигать фишку через стенку Петя не может. Игроки ходят по очереди, начинает Петя. Петя выигрывает, если сможет фишкой уйти с доски. Может ли он обеспечить себе победу вне зависимости от действий соперника?

6. Докажите, что существует бесконечно много таких натуральных чисел n , что количество различных нечетных простых делителей числа $n(n + 3)$ кратно трем.

1	2	3	4	5	6	Сумма
10	20	0	20	20	0	70

Задача 5.

Заметим, что чтобы Пете добраться до граничной клетки, ему потребуется минимум 5 ходов (расстояние от центра до границы $= (11-1)/2 = 5$). Опишем стратегию Васи, чтобы Петя проиграл, Васе надо закрыть все граничные стороны клеток. Граничная сторона - это сторона клетки, которая граничит с выходом из доски. Всего граничных клеток $10 \times 4 = 40$. Из них у 36 клеток по 1 границе и у 4 (угловых) клеток по две границы. Первыми 4 ходами Вася закрывает по одной границе угловых клеток. А далее остается 40 клеток и 40 незакрытых границ. И если Петя наступает на какую-то граничную клетку, Вася тут же закрывает её границу. Таким образом Вася будет постоянно мешать Пете выйти, пока полностью не лишит его этой возможности. (если Петя после первых 4 ходов, в какой-то момент встанет не на граничную клетку, то угрозы для проигрыша Васи нет, и он закрывает любую сторону в любом месте) То есть Петя не сможет всегда побеждать, независимо от действий соперника.

Ответ: Нет. Не сможет

Задача 1.

Каждое уравнение имеет два корня, значит:

Первое, пусть корни первого уравнения $= x_1$ и x_2 , тогда:

$$x_1^2 + 2x_1 + a = x_2^2 + 2x_2 + a$$

Выделим полный квадрат в обеих частях:

$$(x_1 + 1)^2 + a - 1 = (x_2 + 1)^2 + a - 1$$

$$(x_1+1)^2=(x_2+1)^2$$

Значит модули x_1+1 и x_2+1 равны, а так как x_1 и x_2 различны, то справедливо:

$$x_1+1=-(x_2+1)$$

$$x_1=-x_2-2$$

Второе, пусть корни второго уравнения = x_3 и x_4 .

$$x_3^2+ax_3+2=x_4^2+ax_4+2$$

Выделим полный квадрат:

$$(x_3+a/2)^2 - a^2/4 + 2 = (x_4+a/2)^2 - a^2/4 + 2$$

$$(x_3+a/2)^2 = (x_4+a/2)^2$$

Значит модули $x_3+a/2$ и $x_4+a/2$ равны, а так как x_3 и x_4 различны, то справедливо:

$$x_3+a/2=-(x_4+a/2)$$

$$x_3=-x_4-a$$

Так как все уравнения равны между собой и =0, то сумма первых двух=сумма вторых, то есть:

$$x_1^2+x_2^2+2(x_1+x_2)+2a=x_3^2+x_4^2+a(x_3+x_4)+4$$

А так как по условию $x_1^2+x_2^2=x_3^2+x_4^2$, то вычтем их:

$$2(x_1+x_2)+2a=a(x_3+x_4)+4$$

$$2(x_1+x_2-2)=a(x_3+x_4-2)$$

Заменим x_1 на x_2 и x_3 на x_4 :

$$2(-4)=a(-a-2)$$

$$-8 = -a(a+2)$$

$$8 = a(a+2)$$

Такое возможно только если $a=2$

Ответ: $a=2$

Задача 2.

Рыцарей и лжецов определённое число, значит одну и ту же фразу и рыцарь и лжец произнести не могли, а значит одну фразу сказали все рыцари а вторую все лжецы. Если рыцари сказали что рыцарей чётно, то рыцарей четно, лжецов не нечётно, а значит четно и в сумме их чётное число, 2021 быть не может. Если рыцари сказали вторую фразу, что лжецов нечётно, то лжецов нечётно, рыцарей не чётно, то есть нечётно и сумме людей неч+неч= чётно. И снова 2021 быть не может

Отвее: Нет, не может.

Задача 4.

Пусть O - точка пересечения высот в KDE . EE_1 и DD_1 - две из этих высот. Проведём отрезки EA и AD это катеты в прямоугольных треугольниках ACE и ADB . Они прямоугольные, так как медианы EB_1 и DC_1 равны половине сторон- радиус = половине диаметра. Значит углы AEC и ADB по 90 градусов

И из за равенства соответствующих углов прямые AE и DD_1 , AD и EE_1 параллельны, а значит четырехугольник $AEOD$ - параллелограмм. Треугольники ADE и OED равны как половинки параллелограмма. Их площади равны и есть общая

сторона ED а значит по формуле площади треугольника, у них равны и высоты на эту сторону. Так как высота здесь из точки A опирается на B_1C_1 - среднюю линию в ABC . То она равна половине высоты из точки A в ABC . Высота из точки O опирается на ту же прямую и параллельна высоте из A , при этом она так же равна пол высоте из A в ABC . А значит точка O - необходимая нам, лежит ровно на прямой CB . Доказано.