Олимпиада школьников СПбГУ по математике.
Заключительный этап. 2020/2021 учебный год. 10 – 11 классы.

1. При каких натуральных n клетчатую доску $n \times n$ можно разрезать на прямоугольники 1×1 и 2×3 так, что прямоугольников разных размеров будет поровну?

2. Положительные числа a, b, c таковы, что $a^2b + b^2c + c^2a = 3$. Найдите минимальное значение выражения

$$A = \frac{\sqrt{a^6 + b^4c^6}}{b} + \frac{\sqrt{b^6 + c^4a^6}}{c} + \frac{\sqrt{c^6 + a^4b^6}}{a}.$$

3. Вокруг остроугольного треугольника ABC описана окружность. Точка K — середина меньшей дуги AC этой окружности, а точка L — середина меньшей дуги AK этой окружности. Отрезки BK и AC пересекаются в точке P. Найдите угол между прямыми BC и LP, если известно, что $BK = BC$.

4. Петя написал на доске подряд в убывающем порядке n последовательных двузначных чисел, последнее из которых не содержит цифру 7. Вася подумал, что это десятичная запись натурального числа x, и разложил x на простые множители. Оказалось, что их всего два и они различаются на 4. Что написано на доске?

5. В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством 2^n, $2^{n-1} \cdot 3$, $2^{n-2} \cdot 3^2$, $2^{n-3} \cdot 3^3$, $\ldots$, $2 \cdot 3^{n-1}$, 3^n пиастров, где n — натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?

1	2	3	4	5	Сумма
20	17	20	5	0	62

Задача 1

Заметим, что площадь квадрата 1x1 равна 1, а площадь прямоугольника 2x3 равна 6. Тогда так как их равное количество, то площадь исходного квадрата n x n делится на 1+6=7. Это следует из того что их равное количество, а следовательно мы можем разбить их всех на пары, и суммарная площадь каждой пары будет равна 7.
Теперь, так как 7- простое число, то и n должно делится на 7. То есть n имеет вид 7k. Осталось заметить, что любой квадрат 7k x 7k разбивается на k^2 меньших квадратов 7x7. Осталось привести пример замощения квадрата 7x7 согласно условию задачи, причем это крайне легко сделать. Действительно, разобьем квадрат 7x7 на полоску 1x7 и прямоугольник 6x7. Очевидно, что в полоске ровно 7 квадратов 1x1, а прямоугольник 6x7 легко бьется на 7 прямоугольников 2x3. Достаточно расположить в 2 слоя по 2 прямоугольника 3x2, и оставшуюся полоску 6x3 заполнить 3 прямоугольниками 2x3.

Задача 3

В данном решении под обозначением ABC будем подразумевать угол ABC.
Пусть ABC=4b, BCA=2a. тогда KBC=2b,   KBL=ABL=b, KCA=KAC=2b (так как CK=AK) . Тогда так как по условию BK=BC, то BKC=KCB=2a+2b. В треугольнике BCK сумма углов получилась 2b+2(2a+2b)=4a+6b=180, а значит 2a+3b=90. В треугольнике CKP, KPC=180-(2a+2b) -2b= 2a+2b. Этот же угол очевидно равен BPA. На дугу BC в исходной окружности опирается угол BKC=2a+2b, а также угол BAC, поэтому BAC=2a+2b. Значит треугольник PBA равнобедренный так как угол BPA=BAP=2a+2b. Тогда так как L- середина дуги AK, то ABL=LBK=b, а также LAK=b,(опирается на дугу LK) . Тогда BL - биссектриса в равнобедренном треугольнике BPA, а значит она также является серединным перпендикуляром к PA, и тогда любая точка на ней лежащая равноудалена от P и A, следовательно LP=LA. Тогда угол LPA=LAC=LAK+KAC=b+2b=3b. Обозначим точку пересечения PL и BC как H. Тогда HPB=180-LPA-BPA=180-3b-(2a+2b)=180-5b-2a=2a+b. (4a+6b=180, я писал это выше). В конце концов, PHB=180-2b-(2a+b)=180-(2a+3b)=90. ОТВЕТ: 90 градусов.

Задача 2

В силу невозможности напечатать знак корня будем использовать обозначение V(a)- корень из a.

Вспомним неравенство о среднем квадратическом и среднем арифметическом :
V(x^2+y^2)   >=   (x+y) * 1/V(2).   (здесь мы корень квадратный 1/V(2) из среднего квадратического перенесли вправо, умножив на него, так как в таком виде оно будет более удобно для применения в дальнейшем).

Теперь применим данное неравенство, а также частный случай неравенства Коши
a+b >= 2V(ab). Имеем:
A = V(a^6 + b^4*c^6)/b + V(b^6 + c^4*a^6)/c + V(c^6 + a^4*b^6)/a   >=   1/V(2) * ((a^3 + b^2*c^3)/b+(b^3 + c^2*a^3) /c +(c^3 + a^2*b^3)/a)   =   1/V(2) *((a^3/b + a*b^3) + (b^3/c + b*c^3) + (c^3/a + c*a^3)   >=   1/V(2) * 2(a^2*b + b^2*c + c^2*a) = 6/V(2)   =   3*V(2).

ОТВЕТ: 3 корня из 2.

Задание 4

Заметим, что любое простое число (не включая 5 и 2) заканчивается на 1, 3 , 7, 9.
Пусть, по условию X=p(p+4), где p- простое число
По условию число x не заканчивается на 7. Под такую характеристику подходят только простые числа заканчивающиеся на 1 и 3. Действительно, это легко проверить, если подставить поочередно вместо p числа вида 10k+1, 10k+3, 10k+7 и 10k+9 в формулу X=p(p+4), а после смотреть остатки от полученного числа на 10; при p=10k+7 и Kp=10k+9 остатки будут равны 7, а значит и число X заканчивается на 7, что противоречит условию задачи.

Тогда имеем 2 случая:
Если p заканчивается на 1, то само число заканчивается на 1*(4+1)=5, а если простое число заканчивается на 3, то исходное число X заканчивается на 3*(3+4)=21, то есть на единицу. (Мы берем остаток от деления числа на 10, чтобы найти последнюю цифру).

Рассмотрим 1 случай : p заканчивается на 1.
Если число p заканчивается на 1, то как я выше писал , число X заканчивается на 5 , то есть оно делится на 5 (признак делимости на 5), а значит одно из чисел p и p+4 равно 5 (это верно потому, что оба числа p и p+4 являются простыми), так как других простых чисел делящихся на 5 очевидно не существует . Это возможно только если p=1 , однако 1- не простое число, и если p=5, тогда p+4=9, а 9 также не простое. Значит число p не может заканчиваться на 1.

Рассмотрим 2 случай : p заканчивается на 3.
В этом случае число X=p(p+4) заканчивается на 1.
Тогда у нас p=10k+3, p+4=10k+7.
Имеем , что X=p(p+4)=(10k+3)(10k+7)=100kˆ2+100k+21. Тогда видно, что при делении на 100, число x дает остаток 21, а значит заканчивается на 21.
То есть последнее число цепочки двузначных чисел это 21. Предположим , что до него идут числа 22, 23 и тд.
Тогда …24232200=X-21=100(k+1)k.
Значит число вида …2322=(k+1)k
Однако , число вида k(k+1) не может заканчиваться на 22. Это следует из того , что это невозможно для k<10 (простой перебор), а дальше остатки при делении на 100 будут циклическими с некоторым периодом. Исключение составляют числа k , которые делятся на 11. При их подстановке в выражение k(k+1) действительно могут получаться числа заканчивающиеся на 22 ,однако тогда само число будет делиться на 11, что очевидно не возможно для числа вида …2322.(В силу признака делимости на 11 о разности сумм цифр на четных и нечетных позициях).

Значит на доске записано одно число, и это число 21. А его единственные простые делители это 3 и 7, разница между которыми ровно 4.

ОТВЕТ: на доске записано число 21, а его простые делители это 3 и 7.