Олимпиада школьников СПбГУ по математике.
Заключительный этап. 2020/2021 учебный год. 10 – 11 классы.

1. При каких натуральных n клетчатую доску $n \times n$ можно разрезать на прямоугольники 1×1 и 2×3 так, что прямоугольников разных размеров будет поровну?

2. Положительные числа a, b, c таковы, что $a^2b + b^2c + c^2a = 3$. Найдите минимальное значение выражения

$$A = \frac{\sqrt{a^6 + b^4c^6}}{b} + \frac{\sqrt{b^6 + c^4a^6}}{c} + \frac{\sqrt{c^6 + a^4b^6}}{a}.$$

3. Вокруг остроугольного треугольника ABC описана окружность. Точка K — середина меньшей дуги AC этой окружности, а точка L — середина меньшей дуги AK этой окружности. Отрезки BK и AC пересекаются в точке P. Найдите угол между прямыми BC и LP, если известно, что $BK = BC$.

4. Петя написал на доске подряд в убывающем порядке n последовательных двузначных чисел, последнее из которых не содержит цифру 7. Вася подумал, что это десятичная запись натурального числа x, и разложил x на простые множители. Оказалось, что их всего два и они различаются на 4. Что написано на доске?

5. В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством 2^n, $2^{n-1} \cdot 3$, $2^{n-2} \cdot 3^2$, $2^{n-3} \cdot 3^3$, $\ldots$, $2 \cdot 3^{n-1}$, 3^n пиастров, где n — натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?

1	2	3	4	5	Сумма
20	0	20	10	20	70

Задача 1. Пусть прямоугольников каждого размера по a штук, тогда площадь всего квадрата это сумма площадей всех прямоугольников. Площадь прямоугольника 1*1 это 1, площадь прямоугольника 2*3 это 6. Тогда площадь квадрата равна 6*a+1*a=7a, т.е. площадь квадрата делится на 7, значит длина стороны квадрата делится на 7. Докажем, что для любого n, делящегося на 7 квадрат можно так разрезать. Если n=7k, то разрежем для начала квадрат на k^2 квадратов 7*7, а потом разрежем каждый из них на 7 прямоугольников 1*1 и 7 прямоугольников 2*3. Последнюю строчку разделим на 7 прямоугольников 1*1, в оставшейся части справа выделим прямоугольник 4*6 и разделим его на 4 прямоугольника 2*3 (2 по горизонтали и 3 по вертикали), а оставшийся прямоугольник 3*6 разделим на 3 прямоугольника 3*2 (3 по горизонтали и 2 по вертикали). Такое проделаем с каждым квадратом 7*7, тогда в каждом маленьком квадрате прямоугольников 1*1 и 2*3 поровну, значит и в большом квадрате их поровну.

Задача 3.

Пусть угол КВС равен 2a, тогда углы ВКС и ВСК равны 90-a, т.к. ВКС равнобедренный и сумма его углов 180, угол АВК = КВС=2a, т.к. К-середина дуги АС, тогда углы ABL LBK равны a, т.к. L- середина дуги АК. Угол ВАС =ВКС=90-a, т.к. они опираются на одну дугу. Пусть Н-точка пересечения АС и BL. Тогда в треугольнике ВАН сумма углов АВН и НАВ это a+(90-a)=90 значит угол ВНА прямой. Тогда в треугольнике ВАР ВН это биссектриса и высота, значит он равнобедренный, значит ВН еще и медиана, значит в треугольнике ALP LH это медиана и высота, следовательно он равнобедренный, значит углы LAP и LPA равны. Угол LAP=LAK+KAC=LBK+KBC(т.к. опир на одинак дуги) =a+2a=3a. LAC=3a следовательно LPA=3a, следовательно XPC=3a (как вертикальный), где Х-точка пересечения LP и СВ. ВСА= ВСК-АСК=90-a-АВК (т.к. АВК и АСК опир на одну дугу)=90-a-2a=90-3a, тогда в треуг РХС углы ХРС и РСХ в сумме дают 90-3a+3a=90, значит угол РХС (нужный угол между LP и ВС) равен 90.

Задача 4. Пусть простые делители Петиного числа это a и a+4. Заметим что a не может давать остатки 0, 2, 4, 6, 8, 5 при делении на 10, т.к. a простое за исключением a=2 и a=5. Если a=2 то a+4=6 – не простое, если a = 5, a+4= 9, тоже не простое. Итак, a дает остатки 1, 3, 7 или 9 при делении на 10. Если a дает остаток 1 то a+4 дает остаток 5,значит a+4 не простое (кроме a+4=4, но тогда a+1 – не простое). Если a дает остаток 7, то a+4 дает остаток 1, значит (a+4)*a дает остаток 7, но по условию последнее двузначное число Пети не содержит в себе 7, значит a не дает остаток 7. Если a дает остаток 9, то a+4 дает остаток 3, значит a(a+4) дает остаток 7 при делении на 10, что тоже противоречит условию, т.к. тогда последнее двузначное число заканчивается на 7. Итак, a может давать только остаток 3 при делении на 10, т.е. a+4 дает остаток 7. Тогда для какого то x a=10x+3, a+4=10x+7, тогда a*(a+4)=(10x+3)*(10x+7)=100x^2+70x+30x+21=100x^2+100x+21. Легко видеть, что это число будет давать остаток 21 при делении на 100, значит будет оканчиваться на 21. Тогда последнее петино двузначное число-21. Заметим, что 21 это 7*3,т.е. под условие подходит. Докажем что другие числа быть записаны не могут.

Пусть было написано число …24232221=x. Тогда a(a+4)=x, a^2+4a-x=0, a=-2+корень(4+x) по формуле корней квадратного уравнения, т.е. x+4=…24232225 должно быть квадратом какого то числа. Но …24232225=25*(…242322*4+1), т.е. …242322*4+1 тоже должно быть квадратом какого то числа. Давайте покажем что квадраты не могут давать остатки 89 при делении на 100. Если квадрат дает остаток 89 при делении на 100, то при делении на 10 у него остаток 9. Далее таблица в которой показано какой остаток дает a^2 при делении на 10 в зависимости от остатка a при делении на 10

Остаток a	остаток a^2
0	0
1	1

2	4
3	9
4	6
5	5
6	6
7	9
8	4
9	1

Видно что остаток 9 при делении на 10 у квадрата может быть только если а дает остаток 3 или 7. Если а дает остаток 3 то а=10х+3, тогда а^2=100х^2+9+60х. тогда 60х+9 сравнимо с 89 по модулю 100, значит 60х сравнимо с 80, тогда 6х сравнимо с 8 по модулю 10 или 3х сравнимо с 4 по модулю 5, но такого быть не может ни при каком остатке х при делении на 5.

Если а дает остаток 7 то а=10х+7, тогда а^2=100х^2+49+140х. тогда 40х+49 сравнимо с 89 по модулю 100, значит 40х+40 сравнимо с 80, тогда 4х+4 сравнимо с 8 по модулю 10 или 2х сравнимо с 2 по модулю 5. Значит х это 1 по мод 5, т.е. х это или 1, или 6, т.е. а это или 17 или 67, но оба числа в квадрате не дают число вида …242322*4+1.

Задача 5.

Для удобства заменим обозначение n на a. Пусть для a наибольшая сумма которую нельзя выдать это f(a). Заметим, что число 3^a+2*f(a-1) нельзя выдать, т.к. это число нечетное, т.е. для того чтобы его выдать необходимо выдать хотя бы одну монету достоинством 3^a (т.к. у других монет достоинство - четное число), но тогда останется выдать 2*f(a-1). Докажем, что это число нельзя набрать монетами. Предположим противное. Давайте при выдаче этой суммы не пользоваться монетами 3^a, т.к. если при выдаче суммы мы выдали p монет достоинством 3^a, то p-четное число, т.к. сумма четная и 3^a- единственный нечетный номинал. Тогда все монеты достоинством 3^a можно разбить на пары и каждую пару монет 3^a представить в виде трех монет достоинством 2*3^(a-1) т.к. 2*3^a=3*(2*3^(a-1)). Т.е. можно считать что монетами достоинством 3^a мы не пользовались (если пользовались то заменим их). Тогда заметим, что выдать эту сумму монетами по 2^a, 2^(a-1)*3…2*3^(a-1) равносильно тому, чтобы выдать сумму f(a-1) монетами по 2^(a-1), 2^(a-2)*3…3^(a-1). (т.к. и сумма уменьшилась в два раза, и каждый номинал, т.е. если мы при выдаче 2y использовали n монет какого то номинала, то и при выдаче y будем использовать n монет того же номинала) но сумму a f(a-1) монетами такого номинала выдать не получится по определению f.

(в случае a=1 максимальная сумма которую нельзя набрать это 1, т.к. любая сумма по модулю три дает остаток 1 2 или 0, если остаток 0, то набираем всю сумму монетами по 3, если остаток 2, то набираем всю сумму монетами по 3, кроме последней монеты которая будет достоинством 2, а если остаток 1, то пусть сумма это 3x+1, если x отличен от 0, тогда берем x-1 монету достоинством 3, и 2 монеты достоинством 2, т.е. максимальная сумма которую нельзя набрать это 3*0+1=1).

Покажем как выдать четную сумму которая больше 3^a+2*f(a-1). Пусть нам надо выдать сумму 2y. Давайте при выдаче четной суммы не пользоваться монетами 3^a, т.к. если при выдаче суммы мы выдали p монет достоинством 3^a, то p-четное число, т.к. сумма четная и 3^a- единственный нечетный номинал. Тогда все монеты достоинством 3^a можно разбить на пары и каждую пару монет 3^a представить в виде трех монет достоинством 2*3^(a-1) т.к. 2*3^a=3*(2*3^(a-1)). Т.е. можно считать что монетами достоинством 3^a мы не пользовались (если пользовались то заменим их). Тогда заметим, что выдать сумму 2y монетами по 2^a, 2^(a-1)*3…2*3^(a-1) равносильно тому, чтобы выдать сумму y монетами по 2^(a-1), 2^(a-2)*3…3^(a-1). (т.к. и сумма уменьшилась в два раза, и каждый номинал, т.е. если мы при выдаче 2y использовали n монет какого то номинала, то и при выдаче y будем использовать n монет того же номинала) но наибольшая сумма которую нельзя выдать монетами по 2^(a-1), 2^(a-2)*3…3^(a-1) это f(a-1), т.е. y не больше f(a-1), т.е. 2y не больше 2f(a-1), но 3^a+2*f(a-1)> 2f(a-1).

Покажем как выдать любую нечетную сумму больше 3^a+2*f(a-1) (т.е. больше или равную 3^a+2*f(a-1)+2). Выдадим одну монету достоинством 3^a, останется выдать сумму 2*f(a-1)+2, а это мы умеем делать, тк 2*f(a-1)+2>2*f(a-1).

Итак, f(a)=3^a+2*f(a-1) и f(1)=1. По индукции f(a)=(3^a+3^(a-1)*2…+2^a)-2^a+2^(a-1)-3*2^(a-1). (3^a+3^(a-1)*2…+2^a)-это сумма номиналов для a. Т.к. для a=2: f(2)=3^2+2, а при переходе от a к a+1: f(a+1)=3^(a+1)+2*f(a)=3^(a+1) + 2*((3^a+3^(a-1)*2…+2^a)-2^a+2^(a-1)-3*2^(a-1)) = (3^(a+1)+3^a*2…+2^(a+1))-2^(a+1)+2^a-3*2^a.