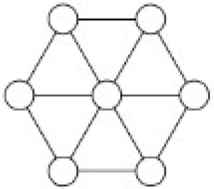
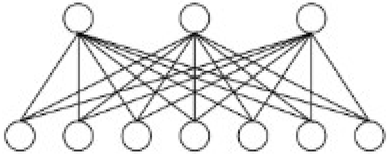
ВОПРОС 1: ЭССЕ

25 из 25 баллов

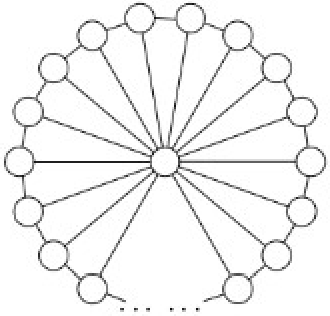
1. На картинке нарисовано n кружочков, некоторые кружочки соединены отрезками. Требуется расставить в кружочках числа от 1 до n (без повторений) так, чтобы выполнялось свойство: если кружочки соединены отрезками, то стоящие в них числа должны быть взаимно просты (то есть не иметь общих натуральных делителей, отличных от 1). Можно ли это сделать в каждом из следующих случаев? Если можно — опишите расстановку чисел, если нет — объясните, почему нельзя.



а) $n = 7$



б) $n = 10$



в) $n = 2022$: по кругу стоят 2021 кружочков, и еще один в центре

Данный ответ:

а) Можно. Поставим в центр число 1 и расставим следующие числа, начиная с верхнего левого, по часовой стрелке: 2, 3, 4, 5, 6, 7.

б)Нельзя. Рассмотрим 3 числа в верхней строке. Каждое из них связано со всеми семью числами нижней строки. Тогда предположим, что расстановка чисел при n=10 возможна. В таком случае все 3 верхних числа взаимно просты с нижними семью. При этом, среди чисел от 1 до 10 таикм свойством обладают лишь 2 числа-1 и 7. Но таких чисел должно быть не менее 3, так как повторения запрещены. Противоречие. Значит это не возможно.

в)Нельзя. Тогда предположим, что расстановка чисел при n=2022 возможна. Мы знаем, что любые 2 чётных числа не взаимно просты, так как оба имеют делитель 2. Из этого следует, что между любыми 2-мя чётными числами должностоять нечётное. Также, чётное число не может стоять в центре, кол-во чётных чисед среди 2022 больше 1. Тогда в центре стоит нечётное число, а значит по кругу будет 1011 чётных и 1010 нечётных чисел. Так как чётных чисел больше, чем нечётных, всегда найдётся место,где 2 чётных числа будут стоять подряд. Но чётные числа не могут стоять подряд. Проитиворечие.

ВОПРОС 2: ЭССЕ

15 из 30 баллов

2. Назовем *каскадом, порожденным числом* r, набор из 12 натуральных чисел: $r, 2r, \ldots, 12r$.

а) Может ли какая-то пара чисел (a, b) содержаться в шести различных каскадах? Если да — приведите пример таких чисел, если нет — объясните, почему не может.

б) Верно ли, что множество натуральных чисел можно раскрасить в 12 цветов так, что в каждом каскаде все элементы будут разного цвета?

Данный ответ: а)Да, может. a=60, b=120. Они содержатся в каскадах чисел 10, 12, 15, 20, 30, 60.

б)Да, верно.

ВОПРОС 3: ЭССЕ

0 из 20 баллов

3. В треугольнике ABC точка D — середина стороны AB, E — середина стороны AC, F — середина биссектрисы AL, причем $DF = 1$, $EF = 2$. На плоскости изображены точки D, E, F так, что прямая DF горизонтальна, а остальные элементы чертежа стерты. Можно ли восстановить положение хотя бы одной из вершин треугольника, если известно, что вершина A находилась сверху от прямой DF?

Данный ответ: Так как D, E, F-середины сторон треугольника ABC, DE, EF, DF-средние линии треугольника ABC, а треугольник DEF подобен треугольнику ABC. Также, можно понять, что AC=2DF, BC=2DE, AB=2DF. При этом, мы знаем ГМТ D, E, F, в следствие чего мы знаем расстояния между ними. Тогда мы сможем восстановить треугольник ABC, а значит и его вершины.

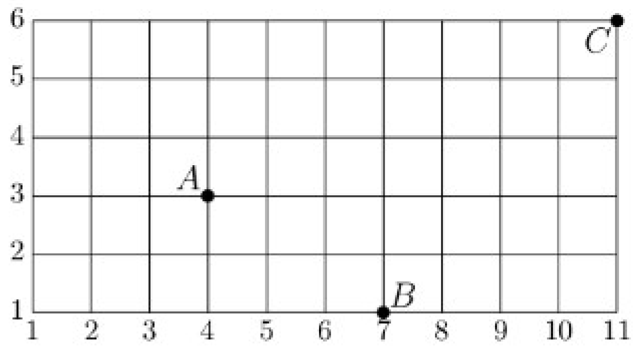
ВОПРОС 4: ЭССЕ

16 из 25 баллов

4. Город имеет форму клетчатого прямоугольника 5×10 клеток: линии — улицы, клетки — жилые кварталы. Расстояние между перекрестками измеряется как длина самого короткого пути по улицам города, проходящего от одного перекрестка до другого. Например, для перекрестков A, B и C на картинке $AB = 5$, $AC = 10$, $BC = 9$. Можно ли отметить в этом городе k перекрестков так, чтобы все расстояния между этими перекрестками оказались различными числами? Если да — укажите эти перекрестки (например, перекресток C находится на пересечении 11-й вертикальной и 6-й горизонтальной улицы), если нет — объясните, почему нельзя.

Решите задачу для

а) $k = 5$; б) $k = 6$; в) $k = 7$.



Данный ответ:

а)Ответ: да, можно. Точки: A(1;1), B(2;1), C(4;1), D(2;5), E(11;6). Первое число-вертикальная строка, второе число-горизонтальная строка.

б)Общая длина всех улиц равна 10*6+5*11=115. Всего между между перекрёстками будет (6*5)/2=15 расстояний. Тогда суммарная длина всех расстояний между перекрёсткамибудет не менее 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15=120. 115<120. Значит такого не может быть. Ответ: нет, нельзя.

в)Наибольшее возможное расстояние между двумя прекрёстками равно 10+5=15. Соответственно возможных расстояний между перекрёстками всего 15. При этом, кол-во расстояний между перекрёстками при k=7 должно быть равно (7*6)/2=21. 21>15. Тогда всегда найдутся два равных расстояния между перкрёстками. Ответ: нет, нельзя.