Олимпиада школьников СПбГУ по математике.
Заключительный этап. 2020/2021 учебный год. 10 – 11 классы.

1. В некоторых клетках полоски 1×2100 поставлено по одной фишке. В каждую из пустых клеток записывается число, равное модулю разности количества фишек слева и справа от этой клетки. Известно, что все записанные числа различны и отличны от нуля. Какое наименьшее количество фишек может быть расставлено в клетках?

2. Положительные числа a, b, c таковы, что $a + b + c = 3$. Найдите минимальное значение выражения

$$A = \frac{a^3 + b^3}{8ab + 9 - c^2} + \frac{b^3 + c^3}{8bc + 9 - a^2} + \frac{c^3 + a^3}{8ca + 9 - b^2}.$$

3. Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Пусть K и L — точки пересечения описанной окружности треугольника AOB с прямыми AD и BC соответственно. Найдите отношение $OK : OL$, если известно, что $\angle BCA = \angle BDC$.

4. На доске написано число 12320. Петя приписал к нему справа $10n + 1$ троек, где n — неотрицательное целое число. Вася подумал, что это четверичная запись натурального числа x, и разложил x на простые множители. Оказалось, что среди них ровно два различных. При каких n это возможно?

5. В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством $6n + 1$, $6n + 4$, $6n + 7$ и $6n + 10$ пиастров, где n — натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?

1	2	3	4	5	Сумма
20	10	20	5	10	65

1 задача

Оценка

Пусть всего поставлено x фишек. Тогда модуль разности фишек слева и справа это число от 1 до X (нулевых чисел нет). Заметим, что все эти числа одной четности, поскольку если слева К фишек, то справа X-К и разность X-2К той же четности, что и X. поэтому максимальное число клеток это X + [(X+1)/2] поскольку в них могут стоять только фишки, которых не более X и числа, которых с одной четностью не более половины X, округленной вверх. Тогда x + [(x+1)/2]>=2100, что значит , что x >=1400.

Пример

Пусть справа будет 700 подряд идущих фишек. А в левых 1400 клетках фишки будут стоять на четных местах, тогда правых всегда больше, самое левое число 1400, и все последующие будут уменьшаться на 2, поскольку мы справа переносим 1 фишку налево. Т.Е всего будет 700 четных чисел от 1400 до 2.

Ответ: 1400

3 задача

Заметим некоторые равенства углов

угол Bca = углу bda ; угол bdc =углу bac из вписанности четырехугольника (опираются на одну дугу)

Далее ablo вписанный, поэтому в нем углы при a и при l дополняют друг друга до 180 градусов, поэтому углы clo и bac равны т.к. дополняют один и тот же угол до 180 градусов.

Тогда в треугольнике clo углы напротив lo и co равны, поэтому lo=co.

Abok тоже вписан в описанную окружность abo, поэтому по аналогичным причинам углы abd и okd равны, тогда равны и okd и ocd т.к. ocd и oba опираются на одну дугу в вписанном четырехугольнике abcd

Теперь в треугольниках kod и cod равны углы odk=odc и okd=ocd , значит все углы равны и есть общая сторона, видная в треугольниках под равными углами, значит ok=oc=ol

Тогда ok:ol=1

Ответ: 1

Задача 4

Посчитаем чему равно получившееся число X

Посчитаем первые 10n+1 тройку это 3*(1+4+4^2+…+4^(10n))=3*(4^(10n+1)-1)/3=4^(10n+1)-1

Изначальное число умножилось на 10^(10n+1), что в стандартной системе счисления 4^(10n+1)

Оно было равно 440. Тогда X равно 441*4^(10n+1)-1=(2^(10n+1)*21-1)(2^(10n+1)*21+1).

Заметим, что эти две скобки больше 1 и взаимно просты, поэтому они должны сами быть простыми числами.

Также заметим, что 2^10+1 =41*25 , поэтому 2^(10n) дает по модулю 41 остаток 1 или -1, тогда

2^(10n+1)*21=2^(10n)*42 тоже дает такие остатки, тогда одна из скобок всегда делится на 41, значит одна из скобок должна быть равна 41, при n>0 обе скобки явно больше 41, а при n=0

X= 41*43

Ответ: n=0

Задача 5

Заметим, что каждую монету можно изменять на 3 в пределах, заданных номиналами монет, поэтому если взять l монет, то ими можно выдать суммы от (6n+1)*l до (6n+1)*l+9l с остатками по модулю 3 такими же, как и у l. Тогда чтобы можно было покрыть все суммы с некоторого места, необходимо, чтобы следующий отрезок с таким же остатком покрывал все следующие числа т.е. следующий отрезок получается l+3 монетами и нужно уметь считать сумму (6n+1)*l+9l+3, тогда

(6n+1)*l+9l+3>=(6n+1)*(l+3)

Откуда можно узнать, что l>=2n

Суммы с одинаковыми остатками по модулю 3 можно всегда набрать начиная с 2n*(6n+1) ;

(2n+1)*(6n+1) и (2n+2)*(6n+1) соответственно для 3 остатков по модулю 3.

Заметим, что верно и обратное утверждение, поэтому в рядах сумм с одинаковыми остатками нельзя выдать суммы соответственно 2n*(6n+1)-3 ;(2n+1)*(6n+1) -3; (2n+2)*(6n+1)-3,

Поэтому максимальная сумма, которую нельзя выдать это (2n+2)*(6n+1)-3=12n^2+14n-1

Ответ: 12n^2+14n-1

Задача 2

Преобразуем каждую дробь, все они симметричны, поэтому рассмотрим первую

Числитель оставим прежним, меняем знаменатель

9=3^2=(a+b+c)^2 заменим 9 и сократим c^2

Теперь заменим c на 3-a-b,тогда знаменатель будет равен

6ab-a^2-b^2+6(a+b)<=4ab+6(a+b) по неравенству о средних, тогда мы можем оценить так дробь снизу

Можно оценить знаменатель, как число <= (a+b)(a+b+6) по неравенству о средних

Тогда первая дробь хотя бы (a^2-ab+b^2)/(a+b+6)

Будем сближать числа меньшие 1 и большие 1 с сохранением суммы, тогда их произведение будет увеличиваться, а сумма квадратов уменьшаться

Пусть сближаем a и b, тогда первая дробь уменьшается т.к. знаменатель растет, а числитель уменьшается, рассмотрим остальные дроби.

Приведем их к общему знаменателю, заметим, что сумма знаменателей при фиксированнном c постоянна, поэтому знаменатель при сближениииа a и b увеличивается

Рассмотрим числитель, он равен

(b^2+c^2-bc)(a+c+6)+(a^2+c^2-ac)(b+c+6), нам необходимо доказать, что он уменьшается, поэтому рассмотрим только слагаемые, которые меняются (все слагаемые, которые можно сгруппировать, чтобы они зависели только от c и a+b мы сразу опустим)

$Ab(a+b)+c(a^2+b^2)+6(a^2+b^2)-2abc$, пусть ab увеличивается на q, тогда сумма квадратов уменьшается га $2q$ ведь $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

Посчитаем ихменение в числителе

$Q(a+b)-2qc-12q-2q<0$, поскольку $a+b<3$ и при замене первого слагаемого останутся только отрицательные слагаемые, то есть числитель уменьшится, а знаменатель увелчиться, поэтому сумма всех дробей при штурме уменьшается, а при $a=b=c=1$ равна $3/8$

Тогда $A >= 3/8$ и равенство достигается при $a=b=c=1$

Ответ : 3/8