Олимпиада школьников СПбГУ по математике.
Заключительный этап. 2020/2021 учебный год. 10 – 11 классы.

1. При каких натуральных n клетчатую доску $n \times n$ можно разрезать на квадраты 1×1 и 2×2 так, что квадратов разных размеров будет поровну?

2. Положительные числа a, b, c таковы, что $a^2b + b^2c + c^2a = 3$. Найдите минимальное значение выражения

$$A = a^7b + b^7c + c^7a + ab^3 + bc^3 + ca^3.$$

3. Дан неравнобедренный остроугольный треугольник ABC. В нем проведены высоты BB_1 и CC_1, пересекающиеся в точке H. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами H и C соответственно касаются прямой AB. Из точки A к ω_1 и ω_2 проведены касательные, отличные от AB. Обозначим точки их касания с этими окружностями через D и E соответственно. Найдите угол B_1DE.

4. Петя написал на доске подряд n последовательных двузначных чисел ($n \geq 2$), первое из которых не содержит цифру 4, а последнее — цифру 7. Вася подумал, что это десятичная запись натурального числа x, и разложил x на простые множители. Оказалось, что их всего два и они различаются на 4. Что написано на доске?

5. В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством 3^n, $3^{n-1} \cdot 5$, $3^{n-2} \cdot 5^2$, $3^{n-3} \cdot 5^3$, $\ldots$, $3 \cdot 5^{n-1}$, 5^n пиастров, где n — натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?

1	2	3	4	5	Сумма
20	20	20	10	20	90

Задача №1

Т.к. Квадратиков 2*2 и 1*1 поровну, то суммарная площадь должна делиться на (2*2 + 1*1) = 5 => т. к. суммарная площадь это n*n , то n делится на 5.
Если n = 5, то квадратика каждого вида 5*5 / 5 = 5, но квадратиков 2*2 5 штук поместиться не может. Пронумеруем клетки от левой нижней парами чисел (x;y) где это будут координаты верхнего правого узла клетки. Тогда раскрасим клетки (2;2) , (2;4) , (4;2) , (4;4) в черный цвет, любой квадратик 2*2 обязательно покрывает ровно одну клетку => 5 их быть не может.
Если n > 5, то n = 5k, где k > 1, если k четное, то можно разделить n*n на квадратики 2*2 и ненужные превратить в 4 квадратика 1*1, если же k нечетное, то можно разбить (n – 1) * (n – 1) на 2*2 и ненужные, а так же оставшуюся часть квадрата разбить на 1*1. Нам нужны 5 * k^2 квадратиков 2*2, (5k – 1) * (5k – 1) = 25k^2 – 10k + 1 > 20 k^ 2 при k >= 3.
Ответ: n = 5k , где k натуральное и больше 1.

Задача №2

a^7*b + a*b^3 по неравенству Каши больше или равно чем 2 * sqrt(a^8 * b ^ 4) = 2*a^4*b*2, аналогично с двумя оставшимися парами. Из неравенств о средних следует, что квадратичное больше арифметического, тогда : 3 * sqrt((a^4*b^2 + b^4*c^2 + c^4*a^2)/3) >= a^2*b + b^2*c + c^2*a => sqrt((a^4*b^2 + b^4*c^2 + c^4*a^2)/3) >= 1 , тогда a^4*b^2 + b^4*c^2 + c^4*a^2 >= 3
Тогда т. к. изначальное выражение было больше или равно удвоенному этому, то оно было больше или равно 6.
6 достигается если a=b=c=1
Ответ: 6.

Задача №3

Угол ADH = угол AB1H = 90, тогда ADB1H вписанный четырехугольник. Тогда угол B1DH = углу CAH = 90 — угол ACB. AC1 = AD = AE как отрезки касательных, тогда угол ADE равен (90 – угол EAD / 2). Из-за симметрии отрезков AC1 и AE относительно AC, а так же симметрии отрезков AC1 и AD относительно AH, угол EAD / 2 = (EAC1 / 2 – DAC1/2) = CAB – HAB = углу CAH = 90 – угол ACB, тогда угол ADE = 90 – 90 + ACB = угол ACB.
Угол EDB1 = EDA + ADH+ HDB1 = ACB + 90 + 90 – ACB = 180.
Ответ: угол B1DE = 180.

Задача №4

Т.к. Пара 2 и 6 это не пара простых, то тогда оба простых нечетны, пара 1 и 5 тоже не подходит, так же как и 5 и 9, тогда среди простых нет 5, тогда они могут заканчиваться только на 1,3,7,9. Тогда парой последних цифр простых может быть только 3 и 7, 7 и 1, 9 и 3, в случае 7 и 1, 9 и 3 произведение оканчивается на 7, а в последнем числе нет 7ки, тогда единственная пара это 3 и 7. Тогда оба простых числа представляются в виде 10 * y + 3 и 10 **y** + 7, их произведение это 100 * y^2 + 100 * y + 21, т. к. их произведение это ряд двузначных чисел, то т. к. по модулю 100 это 21, то последнее двузначное это 21.Заметим что пара простых 3 и 7 подходит, но тогда число было только одно, а по условию их хотя бы 2, тогда среди простых нет делящихся на 3. Тогда остаток при делении на 3 числа не может быть нулем. Т.к. Все степени десятки дают 1цу по модулю 3, то остаток при делении на 3 это остаток при делении суммы цифр, посмотрим на остатки возможных последовательностей:
2021 – 2
192021 – 0
18192021 – 0
1718192021 – 2
161718192021 – 0
15161718192021 – 0
1415161718192021 – 2
131415161718192021 – 0

12131415161718192021 – 0
1112131415161718192021 – 2
101112131415161718192021 – 0
числа с остатком 0 не подходят
число 2021 подходит, т. к. 2021 = 43 * 47
число, начинающееся с 14 не подходит по условию.
Число начинающееся с 11 = 11 * 101102855923792562911 не подходит, т. к. делится на 11, что гораздо меньше возможных простых
А число 1718192021 = 7 * 245456003 делится на 7, что тоже гораздо меньше требуемых простых.
Ответ: На доске могло быть только число 2021.

Задача №5
7 нельзя предсатвить в виде суммы чисел 3 и 5, если была 3 ка, то 4 нельзя представить, если была 5ка, то 2 нельзя представить. Любое число большее 7ми можно представить в виде суммы троек и пятерок.
8 = 3 + 5
9 = 3 * 3
10 = 2 * 5
11 = 3 * 2 + 5
12 = 3 * 4
13 = 3 + 2*5
14 = 3 * 3 + 5
15 = 3 * 5
16 = 2 * 3 + 2 * 5
17 = 4 * 3 + 5
18 = 6 * 3
19 = 3 * 3 + 2 * 5
20 = 4 * 5
21 = 7 * 3
22 = 4 * 3 + 2 * 5
остальные числа представляются как 3 * 5 + то что уже мы умеем представлять.
Тогда для n = 1, 7 является максимальной суммой, которую не могут выдать в банке.
Заметим что при n = 1, 7 = 5 ^(n + 1) – 2 * 3 ^ (n + 1)
Давайте по индукции докажем, что ответ это 5 ^(n + 1) – 2 * 3 ^ (n + 1)
База для n = 1 уже доказана
Докажем, что если для n -1 это верно, то верно и для n.
Заметим, что если убрать монету стоимостью 3 ^n , то останутся монеты для случая при n -1, только умноженные на 5. Давайте объединим в группы числа вида:
5k, 5k + 3^n, 5k + 2 * 3 ^ n, 5k + 3 * 3 ^n, 5k + 4*3^n. Заметим что тогда все числа большие 3 ^n разобьются на такие группы без повторов, т. к. любое число представимо в таком виде единственным образом. Тогда мы знаем, что если мы могли для случая n – 1 получить число k, то можем получить для нашего случая все числа из группы и наоборот, если не могли получить, то и сейчас не можем. Тогда очевидно, что наибольшее число, которое мы не можем получить сейчас это 5k + 4 * 3 ^ n, где k это максимальное число, которое мы не могли получить для случая n – 1. Но по индукции мы знаем это k. Тогда найдем наше число при этом k:
5 * (5 ^(n) – 2 * 3 ^ (n)) + 4 * 3 ^ n = 5 ^ (n + 1) – (10 – 4) * 3 ^ n = 5 ^ (n + 1) – 2 * 3 ^ (n + 1), ч.т.д.
Ответ: максимальная сумма, которую ему не могут выдать в банке 5 ^(n + 1) – 2 * 3 ^ (n + 1)