Санкт-Петербургский государственный университет
Олимпиада школьников по математике 2020–2021

Заключительный этап

8–9 классы

1. Найдите все такие значения a, для которых квадратные трехчлены x^2+2x+a и $x^2+ax+2=0$ имеют по два корня, причем сумма квадратов корней первого трехчлена равна сумме квадратов корней второго трехчлена.

2. Каждый из островитян либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт (и те, и другие на острове есть). Каждый житель острова про каждого знает рыцарь он или лжец. Часть жителей острова заявила, что на острове проживает четное число рыцарей, а все оставшиеся жители заявили, что на острове проживает нечетное число лжецов. Может ли на острове быть ровно 2021 житель?

3. Для произвольных вещественных чисел a и b ($b \neq 0$) найдите наименьшее значение выражения $a^2+b^2+\dfrac{a}{b}+\dfrac{1}{b^2}$.

4. Точки B_1 и C_1 — середины сторон AC и AB треугольника ABC. На сторонах AB и AC как на диаметрах построены окружности ω_1 и ω_2. Обозначим за D точку пересечения прямой B_1C_1 с окружностью ω_1, лежащую по другую сторону от C относительно прямой AB. Обозначим за E точку пересечения прямой B_1C_1 с окружностью ω_2, лежащую по другую сторону от B относительно прямой AC. Прямые BD и CE пересекаются в точке K. Докажите, что прямая BC проходит через точку пересечения высот треугольника KDE.

5. На центральной клетке доски 11×11 стоит фишка. Петя и Вася играют в следующую игру. Каждым своим ходом Петя передвигает фишку на одну клетку по вертикали или горизонтали. Каждый своим ходом Вася возводит стенку с одной из сторон любой из клеток. Двигать фишку через стенку Петя не может. Игроки ходят по очереди, начинает Петя. Петя выигрывает, если сможет фишкой уйти с доски. Может ли он обеспечить себе победу вне зависимости от действий соперника?

6. Докажите, что существует бесконечно много таких натуральных чисел n, что количество различных нечетных простых делителей числа $n(n+3)$ кратно трем.

1	2	3	4	5	6	Сумма
20	15	20	0	0	0	55

№1

$x^2 + 2x + a = 0$

$D = 4 - 4a \Rightarrow x = (-2 \pm \sqrt{4 - 4a})/2 = -1 \pm \sqrt{1 - a}$

$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$

X1, x2 – корни произвольного трехчлена, b – коэффицент при x, a -коэффицент при x^2

$X1^2 + x2^2 = ((-b + \sqrt{D})^2 + (-b - \sqrt{D})^2)/4a^2 = 2(b^2 + D)/4a^2$

- ⇨ В данном случае сумма квадратов этих корней будет: $2(4 + 4 - 4a) / 4 = 4 - 2a$

Во втором случае $x^2 + ax + 2 = 0$ $D = a^2 - 8 \Rightarrow$ сумма квадратов будет: $2(a^2 + a^2 - 8)/4 = a^2 - 4$

По условию задачи $a^2 - 4 = 4 - 2a \Rightarrow a^2 + 2a - 8 = 0 \Rightarrow (a + 4)(a - 2) = 0 \Rightarrow a = -4$ или $a = 2$.

Также дискриминанты должны быть больше нуля $\Rightarrow 4 - 4a > 0 \Rightarrow a < 1$

$a^2 - 8 > 0 \Rightarrow |a| > \sqrt{8}$

$|2| < \sqrt{8} \Rightarrow a$ равное 2 не подходит

$|-4| > \sqrt{8}$ и $-4 < 1 \Rightarrow a = -4$ подходит.

Ответ: $a = -4$.

№2

Пусть в одной из двух групп жителей острова оказались рыцарь и лжец. Т.к они сказали одно и тоже, высказывание оказалось и правдой и ложью => в одной группе только лжецы или только рыцари. Т.к и те и другие на острове есть, одна группа состоит из лжецов, а вторая из рыцарей.

1) Пусть первая часть это рыцари: => рыцарей действительно четное число. => лжецов нечетное т.к 2021 – нечетное число, тогда 2-ая часть людей скажет правду, а там должны быть лжецы => такого не могло быть.
2) Пусть первая часть это лжецы: => рыцарей нечетное число. => лжецов четное т.к 2021 – нечетное число, тогда 2-ая часть людей скажет ложь, а там должны быть рыцари => такого не могло быть.

Ответ: такого быть не могло.

№3

$1/a + a \geq 2$ для всех положительных a

$b^2 > 0 \Rightarrow b^2 + 1 / b^2 \geq 2$. Если $a > 0$, $b > 0$ или $a<0$, $b < 0$, то $a / b > 0$, $a^2 > 0 \Rightarrow$ все выражение > 2.

Пусть $a/b < 0$, тогда превратим наше выражение в $a^2 + b^2 – a/b + 1 /(b^2)$. Тогда если мы можем минимизировать данное выражение, считая, что $b > 0$, $a \geq 0$, т.к если $a < 0$, заменим его на $–a$, иначе b на $–b$.

$a^2 – a / b$ максимизируем при фиксированном b.

Это квадратный трехчлен относительно $a \Rightarrow$ его максимум в вершине параболы, а ее координата x: $-1/2b \Rightarrow a^2 – a / b \geq 1/(4b^2) – 1/(2b^2) = -1/(4b^2)$.

Следовательно изначальное выражение больше либо равно чем $b^2 + 1/(b^2) – 1/(4b^2) = b^2 + 3/(4b^2) \geq 2 \cdot \sqrt{0,75} = \sqrt{3}$ по неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим.

При $a = 1 / 2b$ и $b = \sqrt{\sqrt{0,75}}$ выражение принимает значение $b^2 + 3/4b^2 = \sqrt{0,75} + 3/(4\sqrt{0,75}) = (\sqrt{0,75} \cdot 4 \cdot \sqrt{0,75} + 3) / (4\sqrt{0,75}) = 6 / (4 / 2 \cdot \sqrt{3}) = 3 / \sqrt{3} = \sqrt{3} \Rightarrow$ значение достижимо.

Получается если все числа одного знака выражение ≥ 2. Иначе $\geq \sqrt{3}$.

Ответ: $\sqrt{3}$.

№4 Как известно если у треугольника углы A, B, C , то если расположить в его вершинах A, B, C массы tg A, tg B, tg C соответственно, то его центр масс попадет в ортоцентр. Расположим в вершинах E, D, K массы CK, BK, BD + CE соответственно. BC || DE т.к DE содержит среднюю линию. Центр масс EDK будет лежать на BC т.к масса в K равна сумме BD + CE=> если мы поделим ее на две части центры масс попадут в B и C. Докажем, что данные массы также задают ортоцентр.

Для этого докажем, что массы в вершинах D и K относятся также как и тангенсы углов и аналогично, что массы в вершинах K и E относятся, как тангенсы углов=> отношения такие же => массы задают ортоцентр и он лежит на BC.

BD + CE / BK = tg DKE / tg EDK нужно доказать

tg DKE / tg EDK = tg (B + C) / 2 / tg(90 – B/2)

tg(B + C) / 2 = (tg(B/ 2) + tg C/ 2) / (1 – tg(B / 2)*tg(C/2)) = (BD / AD + CE / AE)*(1 – BD / AD * CE / AE)

tg(90 - B/ 2) = ctg(B/2) = AD / BD

tg DKE / tg EDK = (BD * AE + CE * AD) * (1 – BD * CE) / (AD * AE) / AD * BD

эти преобразования верны из параллельности и того, что ADB = 90 и AEC = 90 градусам т.к они опираются на диаметр.