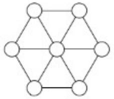
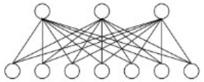
ВОПРОС 1: ЭССЕ 25 из 25 баллов

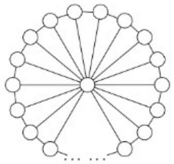
1. На картинке нарисовано n кружочков, некоторые кружочки соединены отрезками. Требуется расставить в кружочках числа от 1 до n (без повторений) так, чтобы выполнялось свойство: если кружочки соединены отрезками, то стоящие в них числа должны быть взаимно просты (то есть не иметь общих натуральных делителей, отличных от 1). Можно ли это сделать в каждом из следующих случаев? Если можно — опишите расстановку чисел, если нет — объясните, почему нельзя.



а) $n = 7$



б) $n = 10$



в) $n = 2022$: по кругу стоят 2021 кружочков, и еще один в центре

Данный ответ: а) Да, такое возможно. К примеру, в середине 7, а дальше, по периметру начиная с верхнего левого кружочка по часовой стрелке: 6, 1, 2, 3, 4, 5.

б) Нет, такое не возможно. В трёх верхних кружочках не могут стоять чётные числа, так как если там будет такое стоять, то все остальне чётные не могут стоять в кружочках снизу. Значит они будут стоять в кружочках сверху. Но четных чисел 5, а кружочков всего три. Числа, делящиеся на три тоже не могут стоять в кружочках сверху, так как если там окажется такое число, то все остальные числа, кратные трём, не могут стоять в кружочках снизу. Но тогда они будут стоять в кружочках сверху. Но есть число 6, которое ещё и четно, но четные числа не могут стоять в кружочках сверху. Остаётся три числа - 5, 7 и 1. Они тогда и должны стоять в кружочках сверху. Но 5 имеет общий делитель 5 с 10, поэтому противоречие.

в)Нет, такое не возможно. Предположим, что расстановка, удовлетворяющая всем правилам из условия существует. Всего среди чисел от 1 до 2022 1011 нечётных чисел и 1011 чётных. В центре будет стоять нечётное число. Значит по кругу будут стоять 1011 чётных и 1010 нечётных. Но если так, то, по принципу Дирихле, найдутся два таких чётных числа, что будут стоять рядом, так как мест 2021, а чётных чисел 1011. Но тогда у них окажется общий делитель 2. Противоречие.

ВОПРОС 2: ЭССЕ 15 из 30 баллов

2. Назовем *каскадом, порожденным числом* r, набор из 12 натуральных чисел: $r, 2r, \ldots, 12r$.

а) Может ли какая-то пара чисел (a, b) содержаться в шести различных каскадах? Если да — приведите пример таких чисел, если нет — объясните, почему не может.

б) Верно ли, что множество натуральных чисел можно раскрасить в 12 цветов так, что в каждом каскаде все элементы будут разного цвета?

Данный ответ: а) Да. Например пара 60 и 120. Она встречается в:

- *Каскаде, порожденным числом 60*
- *Каскаде, порожденным числом 30*
- *Каскаде, порожденным числом 20*
- *Каскаде, порожденным числом 15*
- *Каскаде, порожденным числом 12*
- *Каскаде, порожденным числом 10*

б) Нет, неверно.

ВОПРОС 3: ЭССЕ 0 из 20 баллов

3. В треугольнике ABC точка D — середина стороны AB, E — середина стороны AC, F — середина биссектрисы AL, причем $DF = 1$, $EF = 2$. На плоскости изображены точки D, E, F так, что прямая DF горизонтальна, а остальные элементы чертежа стерты. Можно ли восстановить положение хотя бы одной из вершин треугольника, если известно, что вершина A находилась сверху от прямой DF?

Данный ответ: [Ничего не дано]

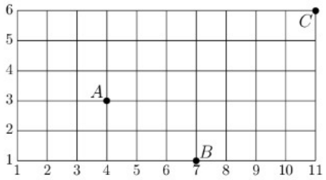
ВОПРОС 4: ЭССЕ

16 из 25 баллов

4. Город имеет форму клетчатого прямоугольника 5×10 клеток: линии — улицы, клетки — жилые кварталы. Расстояние между перекрестками измеряется как длина самого короткого пути по улицам города, проходящего от одного перекрестка до другого. Например, для перекрестков A, B и C на картинке $AB = 5$, $AC = 10$, $BC = 9$. Можно ли отметить в этом городе k перекрестков так, чтобы все расстояния между этими перекрестками оказались различными числами? Если да — укажите эти перекрестки (например, перекресток C находится на пересечении 11-й вертикальной и 6-й горизонтальной улицы), если нет — объясните, почему нельзя.

Решите задачу для

а) $k = 5$; б) $k = 6$; в) $k = 7$.



Данный ответ: а) да. Например:

1. (1, 1)
2. (2, 1)
3. (6, 1)
4. (3, 9)
5. (2, 3)

([номер строки], [номер столбца])

б)

в) Нет. Всего различных расстояний 15 штук. (от 1 до 15). Но так как 7 * 6 : 2 = 21, то расстояний должно быть 21, но это больше чем 15. Прот иворечие.