Олимпиада школьников СПбГУ по математике.
Заключительный этап. 2020/2021 учебный год. 10 – 11 классы.

1. При каких натуральных n клетчатую доску $n \times n$ можно разрезать на квадраты 1×1 и 2×2 так, что квадратов разных размеров будет поровну?

2. Положительные числа a, b, c таковы, что $a^2b + b^2c + c^2a = 3$. Найдите минимальное значение выражения

$$A = a^7b + b^7c + c^7a + ab^3 + bc^3 + ca^3.$$

3. Дан неравнобедренный остроугольный треугольник ABC. В нем проведены высоты BB_1 и CC_1, пересекающиеся в точке H. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами H и C соответственно касаются прямой AB. Из точки A к ω_1 и ω_2 проведены касательные, отличные от AB. Обозначим точки их касания с этими окружностями через D и E соответственно. Найдите угол B_1DE.

4. Петя написал на доске подряд n последовательных двузначных чисел ($n \geq 2$), первое из которых не содержит цифру 4, а последнее — цифру 7. Вася подумал, что это десятичная запись натурального числа x, и разложил x на простые множители. Оказалось, что их всего два и они различаются на 4. Что написано на доске?

5. В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством 3^n, $3^{n-1} \cdot 5$, $3^{n-2} \cdot 5^2$, $3^{n-3} \cdot 5^3$, $\ldots$, $3 \cdot 5^{n-1}$, 5^n пиастров, где n — натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?

1	2	3	4	5	Сумма
20	20	20	20	0	80

№1

Пусть квадратов каждого размера x штук. Площади квадратов 2*2 и 1*1 равны 4 и 1 соответственно, а площадь большого квадрата равны n^2. Тогда n^2 = 4x + 1x = 5x, так как мы такими квадратами полностью покрыли (аналогично разрезали) большой. Значит, n^2 делится на 5, а так как 5 простое, то n делится на 5. Значит, n=5y, y – целое. Тогда x = n^2 / 5 = 5y^2.

Рассмотрим, чему может быть равно y.

y не равно 1, так как тогда мы имеем квадрат 5*5, в который нужно уместить 5*1^2=5 квадратов 2*2. Докажем, что это невозможно. Пронумеруем столбцы и строки квадрата числами 1, 2, 3, 4, 5 и 1, 2, 3, 4, 5 соответственно последовательно от левой верхней клетки. Закрасим клетки с координатами (2, 2), (2, 4), (4, 2), (4, 4), где (a, b) – a столбец b строка. Любой из квадратов 2*2, который мы поместим в наш большой, будет покрывать ровно 1 из закрашенных клеток. Тогда, т.к. таких клеток всего 4, мы можем поместить всего 4 квадрата 2*2, а нужно 5.

Пусть тогда y >= 2. Будем заполнять полностью полосы из двух рядов квадратами 2*2, начиная с верхних двух рядов доски. Тогда, т.к. сторона доски равна n=5y, то всего квадратов в одну полосу поместится >= (5y – 1)/2. Всего таких полос тоже >= (5y - 1)/2. Значит, кол-во квадратов 2*2, которое может поместиться в таблицу, >= ((5y-1)^2) / 4. Докажем, что это >= x.

Тогда нужно доказать:

((5y-1)^2) / 4 >= 5y^2

(5y-1)^2 >= 4 * 5y^2

25y^2 – 10y + 1 >= 20y^2

5y^2 – 10y + 1 >= 0

Корни квадратного уравнения 5y^2 – 10y + 1 равны $1 \pm \frac{\sqrt{80}}{10}$, и при y>=2 число y не входит внутрь отрезка с концами в точках данных корней ($1 + \frac{\sqrt{80}}{10} < 2$). Т.к старший коэффициент квадратного многочлена равен 5 и больше 0, то ветви параболы данного квадратного многочлена направлены вверх, и тогда неравенство будет верно при выбранных y.

Тогда, т.к. возможное количество квадратов 2*2, которое можно таким методом поместить внутри данного, больше или равно необходимому, можно квадрат n*n заполнить необходимым кол-вом квадратов 2*2, а всё остальное заполнить квадратами 1*1. Тогда получим нужное разрезание, и количество квадратов каждого типа будет совпадать.

Ответ: n=5y, y – натуральное, y>=2

№2

Заметим, что по неравенству Коши о средних $\frac{a^7b+ab^3}{2} \geq \sqrt{a^7b * ab^3} = a^4b^2$. Тогда, если сгруппировать подобным образом мономы в $\frac{A}{2}$, то есть $\frac{a^7b}{2}$ с $\frac{ab^3}{2}$, $\frac{b^7c}{2}$ с $\frac{bc^3}{2}$, $\frac{c^7a}{2}$ с $\frac{ca^3}{2}$, то получим, что $\frac{A}{2} \geq a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2$. Тогда, опять используя неравенство Коши о средних:

$\frac{A}{2} + 3 \geq (a^4b^2 + 1) + (b^4c^2 + 1) + (c^4a^2 + 1) \geq 2(a^2b + b^2c + c^2a) = 6$, т.к $(a^2b + b^2c + c^2a)$ = 3 по условию. Значит,

$$\frac{A}{2} \geq 3$$

$A \geq 6$

Равенство очевидно достигается при a=b=c=1 (при этом все необходимые свойства выполняются).

Ответ: 6

№4

Пусть простые числа p и p + 4, получившиеся у Васи, равны $\overline{x_1 x_2 \dots x_m}$ и $\overline{x_1 x_2 \dots x_m} + 4$ соответственно (черта обозначает, что это разряды числа, а не произведение чисел). Тогда рассмотрим возможные значения x_m:

4, 6, 8, 0 невозможны, т.к. ни одно простое число на них не оканчивается.

Если 2, то тогда p=2, т.к. оно простое, и p+4=6 – не простое

Если 5, то тогда p=5, т.к. оно простое, и p+4=9 – не простое

Если 7, то тогда p+4 оканчивается на 1, и произведение p(p+4) оканчивается на 7, чего не может быть по условию (в Петиных числах последнее из двузначных не содержит 7).

Если 9, то тогда p+4 оканчивается на 3, и произведение p(p+4) оканчивается на 7, чего не может быть по условию.

Если 1, то тогда p+4 оканчивается на 5, значит, p+4=5, т.к. оно простое. Тогда p=1 – не простое.

Значит, $x_m = 3$. Тогда p+4 оканчивается на 7. Если выполнить произведение чисел в виде $(10^{m-1}x_1 + 10^{m-2}x_2 + \dots + 10 * x_{m-1} + 3) * (10^{m-1}x_1 + 10^{m-2}x_2 + \dots + 10 * x_{m-1} + 7) = \dots + 10(70x_{m-1} + 30x_{m-1}) + (21) = \dots + 10 * 2 + 1$. Получаем что последнее из двузначных чисел равно 21. Тогда для исходных чисел возможны следующие варианты (т.к. по условию Петей записаны последовательные натуральные числа):

2021 = 43*47 – подходит

192021 – делится на 3 (1 + 9 + 2 + 0 + 2 + 1 = 15 - делится на 3), но не равно 3 * (3 + 4) = 21

18192021 – делится на 3 (1 + 8 + 1 + 9 + 2 + 0 + 2 + 1 = 24 – делится на 3), но не равно 3 * (3 + 4) = 21

1718192021=7*245456003 – делится на 7, но не равно 3 * 7 или 7 * 11

161718192021 – делится на 3 (1 + 6 + 1 + 7 + 1 + 8 + 1 + 9 + 2 + 0 + 2 + 1 = 39 – делится на 3), но не равно 3 * (3 + 4) = 21

15161718192021 – делится на 3 (1 + 5 + 1 + 6 + 1 + 7 + 1 + 8 + 1 + 9 + 2 + 0 + 2 + 1 = 45 – делится на 3), но не равно 3 * (3 + 4) = 21

1415161718192021 – содержит 4 в первом двузначном числе, чего не может быть по условию.

131415161718192021 - делится на 3 (1 + 3 + 1 + 4 + 1 + 5 + 1 + 6 + 1 + 7 + 1 + 8 + 1 + 9 + 2 + 0 + 2 + 1 = 54 – делится на 3), но не равно 3 * (3 + 4) = 21

12131415161718192021 – делится на 3 (1 + 2 + 1 + 3 + 1 + 4 + 1 + 5 + 1 + 6 + 1 + 7 + 1 + 8 + 1 + 9 + 2 + 0 + 2 + 1 = 57 – делится на 3), но не равно 3 * (3 + 4) = 21

1112131415161718192021 – делится на 11 (1 – 1 + 1 – 2 + … + 2 – 0 + 2 – 1 = -33 – делится на 11), но не равно 11 * 7 = 77 или 11 * 15 = 165

101112131415161718192021 - делится на 3 (1 + 0 + 1 + 1 + 1 + 2 + 1 + 3 + 1 + 4 + 1 + 5 + 1 + 6 + 1 + 7 + 1 + 8 + 1 + 9 + 2 + 0 + 2 + 1 = 60 – делится на 3), но не равно 3 * (3 + 4) = 21

Дальше можно не идти, так как по условию Петя выписывал только двузначные числа. Значит, подходит только 2021

Ответ: 2021

№3

1) Заметим, что четырёхугольник AC_1HD – вписанный, так как AC_1 и AD- касательные к окружности с центром в H (тогда они образуют с HC_1 и HD углы по 90°, в сумме дающие 180° и являющиеся противоположными в рассматриваемом четырёхугольнике). Заметим также, что $\angle AB_1H = 90°$, т.к. H – точка пересечения высот CC_1 и BB_1 треугольник ABC, т.е. его ортоцентр, B_1 – основание высоты треугольника ABC. ∠HDA равен 90°, т.к. AD – касательная к окружности с центром в точке H. Значит, $\angle HDA = 90° = \angle AB_1H$, притом эти углы опираются на один отрезок. Значит, четырёхугольник HDB_1A – тоже вписанный. У четырёхугольников AC_1HD и HDB_1A совпадают три точки, при том они оба вписанный, следовательно, пятиугольник $AC_1HDB_1 -$ вписанный. Тогда $\angle B_1DA = \angle B_1HA$ как опирающиеся на одну дугу. $\angle B_1HA = 90° - \angle B_1AH = 90° - \angle CAA_1 = \angle ACA_1 = \angle ACB$, где A_1- основание высоты треугольника ABC из точки A (проходит через ортоцентр H), так как треугольники AHB_1 и $CAA_1 -$ прямоугольные. Значит, $\angle B_1DA = \angle ACB$
2) $AD = AC_1$ как отрезки касательных к ω_1 и $AC_1 = AE$ как отрезка касательных к ω_2. Значит, AD = AE и треугольник ADE – равнобедренный с основанием DE. Значит, $\angle EDA = \frac{180° - \angle DAE}{2}$
3) $\angle DAE = \angle C_1AE - \angle C_1AD$
$$\angle C_1AE = 2\angle C_1AC = 2\angle BAC, \text{т. к. } AC_1 \text{и } AE - \text{касательные к окружности с центром в точке } C$$
$$\angle C_1AD = 2\angle C_1AH, \text{т. к. } AC_1 \text{и } AD - \text{касательные к окружности с центром в точке } H$$
$\angle C_1AH = 90° - \angle ABA_1 = 90° - \angle ABC,$ т.к. треугольник ABA_1 – прямоугольный ($AA_1 -$ высота треугольника ABC)
Значит, $\angle DAE = 2\angle BAC - 2(90° - \angle ABC) = 2\angle BAC + 2\angle ABC - 180°$
4) $\angle EDA = \frac{180° - \angle DAE}{2}$ (по доказанному)
$\angle DAE = 2\angle BAC - 2(90° - \angle ABC) = 2\angle BAC + 2\angle ABC - 180°$ (по доказанному).

   Значит, $\angle EDA = \frac{180° - 2\angle BAC - 2\angle ABC + 180°}{2} = 180° - \angle BAC - \angle ABC = \angle ACB$ (по теореме у сумме углов теругольника).

   Получаем, что $\angle B_1DA = \angle ACB = \angle EDA$, притом точки B_1 и E лежат по одну сторону от AD. Значит, точки D, B_1 и E лежат на одной прямой, и $\angle B_1DE$ равен 0°

   Ответ: 0°