Олимпиада школьников СПбГУ по математике.

Заключительный этап. 2020/2021 учебный год. 10 – 11 классы.

1. В некоторых клетках полоски 1×2021 поставлено по одной фишке. В каждую из пустых клеток записывается число, равное модулю разности количества фишек слева и справа от этой клетки. Известно, что все записанные числа различны и отличны от нуля. Какое наименьшее количество фишек может быть расставлено в клетках?

2. Положительные числа a, b, c таковы, что $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Найдите минимальное значение выражения

$$A = \frac{a^4 + b^4}{c^2 + 4ab} + \frac{b^4 + c^4}{a^2 + 4bc} + \frac{c^4 + a^4}{b^2 + 4ca}.$$

3. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием BC. На продолжении стороны AC за точку C отмечена точка K, и в треугольник ABK вписана окружность с центром в точке I. Через точки B и I проведена окружность, касающаяся прямой AB в точке B. Эта окружность вторично пересекает отрезок BK в точке L. Найдите угол между прямыми IK и CL.

4. На доске написано число 1200. Петя приписал к нему справа $10n + 2$ пятерок, где n — неотрицательное целое число. Вася подумал, что это шестеричная запись натурального числа x, и разложил x на простые множители. Оказалось, что среди них ровно два различных. При каких n это возможно?

5. В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством $6n + 1$, $6n + 3$, $6n + 5$ и $6n + 7$ пиастров, где n — натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?

1	2	3	4	5	Сумма
20	10	18	10	10	68

2) x^4 +y^4 >= (x^2 + y^2)/2 применим это неравенство к числителю

$$\frac{a^4+b^4}{c^2+4ab}+\frac{b^4+c^4}{a^2+4cb}+\frac{a^4+c^4}{b^2+4ac}\geq\frac{(a^2+b^2)^2}{2*(c^2+4ab)}+\frac{(b^2+c^2)^2}{2*(a^2+4cb)}+\frac{(a^2+c^2)^2}{2*(b^2+4ac)}\geq\frac{(a^2+b^2+b^2+c^2+a^2+c^2)^2}{2*(c^2+4ab+a^2+4cb+a^2+4cb)}$$

последнее равенство верно по КБШ(надо домножить на знаменатель)

4ab+4bc+4ac<=2(a^2+b^2) + 2(a^2+b^2) + 2(a^2+b^2) =4(a^2 + b^2 + c^2)

применим это неравенство к знаменателю нашей дроби

$$\frac{4*(a^2+b^2+c^2)^2}{2(5(a^2+b^2+c^2))}=\frac{6}{5}$$

Минимум достигается в 6/5 при a= b =c =1

3)обозначим (ABC) — угол ABC

(ABI) = (BLI)(из касасния) (ABI) =(IBL) (IB -бисс)

Итого (IBL) = (ILB) то есть IL = IB

тр(AIB) = тр(AIC) то есть IC = IB = IL так же (ICK) = (ABI) = (BLI) то есть раны дополняющие их до 180 (ICK)= (ILK)

Теперь замении, что тр ICK и ILK равны.

(IKC)= (IKL)(KI -бисс)

Il = IC

(ICK) = (BLI)

Равны две пары углов значит равны все углы и есть равная сторона, значит треугольники равны и KC = KL

KI бис в равнобед тр, значит и высота то есть KI перпендикулярна CL

Значит ответ 90 градусов

4) X = 12005555555555….5555555

Ответ n=0 120055(6) =101*103

X = 5 **(1 +6 + ….. 6^(10n +1))+ 8***6^(10n+4) = 5 * $\frac{6^{(10n+2)}-1}{5}$ +**8***6^(10n+4) = 6^(10n+2) (8*36+1) -1 = 6^(10n+2)*17^2 – 1 = (6^(5n+1)*17 – 1) * (6^(5n+1)*17 + 1)

Заметим, что 6^(10n+2)*17^2 – 1 делится на 101.Докажем по индукции база приведена в примере. 6^10 -1 делится на 101 Это равносильно индукционному переходу. X представили в виде произведения двух взаимнопростых чисел(нечетные с разностью 2) и оно делися на 101 Значит одна из скобок это 101^a ,при чем это вторая скобка при n>0 тк 101^a это число вида 4k+1. 6^(5n+1)*17 + 1 =101^a

6^(5n+1)*17 = 101^a -1

правая часть делится на 100 (на 101 -1)

А левая нет . Противоречие. Значит подходит только n=0

1) пусть у нас было n пустых клеток на них были написаны числа a1 a2 …. an Причем набор возрастающий Докажем, что все числа одной четности . Пусть всего x фишек , причем слева от какого-нибудь числа t фишек, значит справа x-t , а разность x -2t. Четность всех чисел совпадает с четностью числа фишек. Тогда an >= a1 +2*(n-1)>= 1 + 2n-2=2n-1

2021-n >=S1 >= S1- S2 = an >= 2n-1(S1 S2 фишки справа и слева)

2022 >= 3n

n<=674

2021 – n =1347 Это ответ

Пример
a_{674} F a_{673} F a_{672} F F a_1 FFFFFFFFFFFFF
F -фишка, a_i свободная клетка
$a_{674} = 1347$
Последующие числа на 2 меньше
справа от a_1 673 фишки , значит справа 674 и $a_1 = 1$
Пример верен

5) Ответ $(6n+1)(2n+1) – 2 = 12n^2 + 8n - 1$
Оценка:
Пусть мы получили это число , тогда мы использовали нечетное число монет, пусть их было хотя бы $2n+1$ тогда сумма хотя бы $(2n+1)(6n+1)$ что больше нашего числа. Пусть мы взяли не более $2n-1$ числа, тогда сумма не более $(6n+7)(2n-1) = 12n^2 + 8n – 7$ Что меньше
Пример:
Теперь покажем, как получить любое число больше сначала для нечетных Возьмем $2n+1$ монеи достоинстсвом $6n+1$.Теперь покажем как получить любое большое нечетное .Если у нас есть монета вида не $6n+7$ заменим ее на монету достоинсовом больше ровно на 2. Пусть все монет $6n+7$ тогда их хотя бы $2n$ Иначе сумма маленькая. $2N$ монет вида $6n+7$ меняем на $(2n+2)$ монеты по $6n+1$. Разность $(2n+2)*(6n+1) – 2n*(6n+7) = 2$ И так мы всегда можем увеличить наше число на 2. Значит можем получить любое неч не меньше $(2n+1)(6n+1)$. Для четных все аналогично, только первоначальный набор берем $2n*(6n+1) < (2n+1)(6n+1) - 1$ значит из него можем получить все нужные нам четные