Олимпиада школьников СПбГУ по математике.
Заключительный этап. 2020/2021 учебный год. 10 – 11 классы.

1. В некоторых клетках полоски 1×2100 поставлено по одной фишке. В каждую из пустых клеток записывается число, равное модулю разности количества фишек слева и справа от этой клетки. Известно, что все записанные числа различны и отличны от нуля. Какое наименьшее количество фишек может быть расставлено в клетках?

2. Положительные числа a, b, c таковы, что $a + b + c = 3$. Найдите минимальное значение выражения
$$A = \frac{a^3 + b^3}{8ab + 9 - c^2} + \frac{b^3 + c^3}{8bc + 9 - a^2} + \frac{c^3 + a^3}{8ca + 9 - b^2}.$$

3. Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Пусть K и L — точки пересечения описанной окружности треугольника AOB с прямыми AD и BC соответственно. Найдите отношение $OK : OL$, если известно, что $\angle BCA = \angle BDC$.

4. На доске написано число 12320. Петя приписал к нему справа $10n + 1$ троек, где n — неотрицательное целое число. Вася подумал, что это четверичная запись натурального числа x, и разложил x на простые множители. Оказалось, что среди них ровно два различных. При каких n это возможно?

5. В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством $6n + 1$, $6n + 4$, $6n + 7$ и $6n + 10$ пиастров, где n — натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?

1	2	3	4	5	Сумма
20	15	20	20	0	75

Задача 1

Закрасим клетки, в которых стоят фишки в черный цвет, остальные в белый. Заметим, что нет двух белых клеток, стоящих рядом, иначе в них записаны равные числа.
Пусть поставлено n фишек. Посмотрим, какие числа могут быть написаны в белых клетках. Покажем, что все они одной четности: действительно, пусть в некой белой клетке написано число t = l - r где l и r - количества фишек слева от нее и справа соответственно. Тогда l + r = n, а также заметим, что l+r и l-r - числа одной четности. Тогда в каждой клетке четность написанного числа совпадает с четностью n. Что и требовалось. Тогда могут быть написаны k не более n/2 чисел при n четном и (n+1)/2 при n нечетном. (*)
Хотим найти минимум фишек => хотим максимальное количество написанных чисел => их будет ровно как в (*)

Тогда n + k - всего клеток.

1) при четном n:

2100 <= n + k <= n + n/2 = 3n/2;
1400 <= n;

2) при нечетном n:

2100 <= n + k <= n + (n+1)/2 = (3n+1)/2;
4200 <= 3n + 1;
1400 - 1/3 <= n;

Так как n целое то n >= 1400. - ***оценка.***

Пример на n = 1400:

Первые 1400 клеток - чередующиеся белые и черные по одной. Остальные 700 - черные. Тогда фишек - сколько и черных, то есть 1400. А в белых клетках написаны числа:
Пронумеруем белые клетки слева направо, начиная с 1, заканчивая 700. Тогда в них написаны числа 1400, 1398,

1396, ... В i-той клетке написано число 1400-2(i - 1) = 1402 - 2i. При i = 1, 2, 3, ... 700 все такие числа - 1400, 1398, ... , 2 - различные натуральные ненулевые числа. Что и требовалось.

Ответ: 1400.

Задача 3

По условию четырехугольник ABCD - вписанный. =>
∠BCA = ∠BDA. Углы ∠AOD и ∠BOC равны как вертикальные. Тогда рассмотрим угол ∠KAO. По теореме о внешнем угле либо он, либо его смежный равен ∠ADO + ∠AOD. В любом из этих двух случаев:
sin(∠KAO) = sin(∠ADO + ∠AOD);

Аналогично рассмотрим угол ∠LBO. По теореме о внешнем угле либо он, либо его смежный равен
∠BCO + ∠BOC. В любом из этих двух случаев:
sin(∠LBO) = sin(∠BCO + ∠BOC);

Заметим теперь, что отрезки OK и OL - хорды одной окружности и отрезок OK виден из вершины A под углом ∠KAO, а отрезок OL виден из вершины B под углом ∠LBO. По теореме синусов:

OK = 2*R*sin(∠KAO)
OL = 2*R*sin(∠LBO)

Где R - радиус окружности описанной около треугольника ABO. Так как:
sin(∠KAO) = sin(∠ADO + ∠AOD) = sin(∠BCO + ∠BOC) = sin(∠LBO) (Углы ∠AOD и ∠BOC равны - см выше, ∠BCO = ∠BCA = ∠BDA = ∠ADO), а радиус один и тот же, то OK = OL. Тогда ответ: 1

Ответ: 1

Задача 4

Ответ: $n = 0$.

Решение:

Представим x в десятичной системе счисления (переведем из четверичной):

$x = 3*(1 + 4 + 4^2 + ... + 4^{(10n)}) + 2*4^{(10n+2)} + 3*4^{(10n+3)} +$
$+ 2*4^{(10n+4)} + 4^{(10n+5)} = 3 * (1 + 4 + 4^2 + ... + 4^{(10n + 5)}) -$
$- 2*4^{(10n+5)} - 4^{(10n+4)} - 4^{(10n+2)} - 3 * 4^{(10n+1)} =$

Преобразуем первое слагаемое по формуле суммы геометрической прогрессии:

$= 3 * (4^{(10n+6)} - 1) / 3 - 2*4^{(10n+5)} - 4^{(10n+4)} - 4^{(10n+2)} - 3 * 4^{(10n+1)} =$

$= 4^{(10n+1)} * (2 * 4 ^ 4 - 64 - 4 - 3) - 1 =$
$= 4^{(10n+1)} * (441) - 1 = 2 ^ {(20n + 1)} * 21 ^ 2 - 1 =$

Раскроем по формуле разности квадратов

$= (2^{(10n+1)} * 21 - 1) (2^{(10n+1)} * 21 + 1)$

То есть у числа x мощность множества простых делителей 2, а также x представляется как :

$(2^{(10n+1)} * 21 - 1) (2^{(10n+1)} * 21 + 1)$

Заметим, что обе скобки - нечетные числа, отличающиеся на 2, значит они взаимнопросты и не имеют общих делителей. Также они оба больше единицы, так что единственный возможный вариант - когда оба эти числа - степени различных простых (может быть и первые степени).

Заметим, что $n = 0$ подходит: $x = 41 * 43$.

Теперь пусть $n > 0$:

Приведем цепочку сравнений по модулю. В силу особенности проведения олимпиады обозначим за $\approx$ знак сравнения по модулю 41.

$2^{(10n+1)} * 21 - 1 \approx 42 * (2^{10})^n - 1 \approx 1024^n - 1 \approx 40^n - 1 \approx$
$\approx (-1)^n - 1$. То есть при четном n первая скобка кратна 41. Покажем, что она не является точной степенью 41 и отсюда последует, что у нее будет второй простой делитель, а третий простой - из второй скобки, так как множители взаимнопросты.

Пусть является, тогда:

$2^{(10n+1)} * 21 = 41^t + 1$. При $n > 0$ левая часть кратна 4, а правая по модулю 4 дает остаток 2. => такого не может быть.

Теперь рассмотрим случай нечетного n. Аналогично вторая скобка по модулю 41:

$2^{(10n+1)} * 21 + 1 \approx 42 * (2^{10})^n + 1 \approx 1024^n + 1 \approx$
$40^n + 1 \approx (-1)^n + 1$. Тогда при нечетном n вторая скобка кратна 41. Она, очевидно, больше 41. Покажем, что она не является точной степенью 41. От противного: пусть является, тогда:

$2^{(10n+1)} * 21 = 41^t - 1$

Тогда правая часть равенства кратна 5, а левая нет. Противоречие.

Таким образом это возможно только при $n = 0$;

Ответ: $n = 0$.

Задача 2

Ответ: 3/8

Решение:

Легко видеть, что указанный минимум достигается при $a=b=c=1$

Оценим снизу:

Рассмотрим первое слагаемое

$(a^3 + b^3) / (8ab + 9 - c^2)$

По неравенству о среднем степенном:

$((a^3 + b^3) / 3) ^ (1 / 3) >= (a + b) / 2$

Отсюда следует, что

$a^3 + b^3 >= (a + b)^3 /4 = (3 - c)^3 / 4$

Заметим неравенство Коши:

$1 = (a + b + c) / 3 >= (abc)^(1/3);$
$1 >= abc;$
$1/c >= ab;$

Тогда оценим первое слагаемое снизу:

$(a^3 + b^3) / (8ab + 9 - c^2) >= (3-c) ^ 3 / 4(8/c + 9 - c^2) =$
$= c(3 - c)^3 / 4(8 +9c - c^3)$

Заведем функцию одной переменной:

$f(x) = x(3 - x)^3 / 4(8 +9x - x^3)$

$f(1) = 1/8$
$f'(1) = -7/64$

Тогда заметим, что исходные слагаемые можно оценить касательной функции $f(x)$ в точке 1:

$l(x) = -7/64(x - 1) + 1/8$
Тогда исходное выражение $\geq -7/64(a + b + c - 3) + 3/8 = 3/8$

Что и требовалось.

Теперь почему можно оценить касательной:

Докажем неравенство:

$f(x) \geq l(x)$ на интервале $(0;3)$

$x(3 - x)^3 / 4(8 +9x - x^3) \geq -7/64(x - 1) + 1/8$;

Проверить его не составляет труда: расскрыв скобки и перенеся все в левую часть получим многочлен 4 степени, у которого $x = 1$ - корень 2 кратности, а оставшийся множитель второй степени иметь отрицательный старший коэффициент и отрицательный дискриминант. Что и требовалось.

Ответ: 3/8.