

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Олимпиада школьников по математике 2020–2021
Заключительный этап
8–9 классы

1. Докажите, что для любых вещественных чисел a и b уравнение

$$(a^6 - b^6)x^2 + 2(a^5 - b^5)x + (a^4 - b^4) = 0$$

имеет решение.

2. На острове живут лжецы и рыцари. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Каждый житель острова про каждого из остальных знает, рыцарь он или лжец. Как-то раз встретились 28 островитян. Двое из них сказали: «Ровно двое из нас лжецы», затем четверо из остальных сказали: «Ровно четверо из нас лжецы», потом восемь из оставшихся сказали: «Ровно восемь из нас лжецы», наконец, все оставшиеся 14 сказали: «Ровно 14 из нас лжецы». Сколько лжецов было среди встретившихся? Приведите все возможные варианты и докажите, что других нет.

3. Сумма неотрицательных чисел a , b и c равна 3. Найдите наибольшее значение выражения $ab + bc + 2ca$.

4. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках K и L . Прямая ℓ пересекает окружность ω_1 в точках A и C , а окружность ω_2 — в точках B и D , причем точки идут на прямой ℓ в алфавитном порядке. Обозначим через P и Q соответственно проекции точек B и C на прямую KL . Докажите, что прямые AP и DQ параллельны.

5. Дана клетчатая доска 2021×2021 . Петя и Вася играют в следующую игру. Они по очереди ставят фишки в свободные клетки доски. Выигрывает тот игрок, после хода которого в каждом прямоугольнике 3×5 и 5×3 будет стоять фишка. Начинает Петя. Кто из игроков может обеспечить себе победу вне зависимости от действий соперника?

6. Найдите все такие натуральные числа n , что число $2^n + n^2 + 25$ является кубом простого числа.

Задача 1. Решение:

1	2	3	4	5	6	Сумма
20	20	5	0	20	0	65

- 1) Уравнение имеет решение, если дискриминант уравнения больше или равен нулю.
- 2) Найдем дискриминант по формуле для уравнения вида $ax^2 + bx + c$: $D = b^2 - 4ac$

$$D = (2(a^5 - b^5))^2 - 4(a^6 - b^6)(a^4 - b^4) = 4(a^{10} - 2a^5b^5 + b^{10} - a^{10} + a^6b^4 + a^4b^6 - b^{10}) \\ = 4(-2a^5b^5 + a^6b^4 + a^4b^6) = 4a^4b^4(a^2 - 2ab + b^2) = 4a^4b^4 * (a - b)^2$$

- 3) Поскольку все степени четные, то результат всегда будет больше или равен нулю. $D \geq 0$, следовательно, уравнение имеет решение для любых вещественных чисел а и b. **Ч.т.д.**

Задача 2. Решение:

- 1) Когда группа островитян говорит одинаковое утверждение, то все в группе либо являются лжецами, либо являются рыцарями (Потому что утверждение может быть либо ложным, либо истинным).
- 2) Поскольку каждое утверждение однозначно определяет количество лжецов и все утверждения расходятся, то рыцарями (если они есть) может оказаться только одна группа островитян.
- 3) Рассмотрим утверждение первой группы - «Ровно двое из нас лжецы»: Если они говорят правду, то все остальные группы лгут (по п. 2), тогда лжецов 28(общее кол-во встретившихся)-2(кол-во человек в группе)=26 человек. Возникает противоречие.
- 4) Рассмотрим утверждение второй группы - «Ровно четверо из нас лжецы»: Если они говорят правду, то все остальные группы лгут (по п. 2), тогда лжецов 28-4=24 человек. Возникает противоречие.
- 5) Рассмотрим утверждение третьей группы - «Ровно восемь из нас лжецы»: Если они говорят правду, то все остальные группы лгут (по п. 2), тогда лжецов 28-8=20 человек. Возникает противоречие.
- 6) Рассмотрим утверждение четвертой группы - «Ровно 14 из нас лжецы»: Если они говорят правду, то все остальные группы лгут (по п. 2), тогда лжецов 28-14=14 человек. Противоречия не возникает, следовательно, среди встретившихся могло быть 14 лжецов.
- 7) Рассмотрим случай, когда все собравшиеся лгут: Лжецов в этом случае 28.
 - а. Если первая группа лжет, значит лжецов не двое.
 - б. Если вторая группа лжет, значит лжецов не четверо.
 - с. Если третья группа лжет, значит лжецов не восемь.
 - д. Если четвертая группа лжет, значит лжецов не 14.
 Противоречия не возникло, следовательно, все встретившиеся могли оказаться лжецами.

Итог: Из п. 2 следует, что либо только одна группа состояла из рыцарей, либо рыцарей среди встретившихся не было. В первом случае возможен только один вариант (когда правду говорит четвертая группа). Вторым случаем просто возможен.

Ответ: 1 вариант: 14 лжецов; 2 вариант: 28 лжецов.

Задача 3. Решение: Поскольку произведение $a * c$ в выражении удваивается, логично выбрать такие числа а, b, с, чтобы произведение $a * c$ было наибольшим.

Если два некоторых числа (р и q) дают в сумме третье число (n), то наибольшее возможное произведение р и q получается, когда $p = q = n/2$.

Доказательство :

Дано: $p + q = n$

$$1) p = q = n/2. \text{ Тогда } p * q = \left(\frac{n}{2}\right)^2$$

$$2) p = \left(\frac{n}{2}\right) - \varepsilon, q = \left(\frac{n}{2}\right) + \varepsilon. \text{ Тогда } p * q = \left(\left(\frac{n}{2}\right) - \varepsilon\right) * \left(\left(\frac{n}{2}\right) + \varepsilon\right) = \left(\frac{n}{2}\right)^2 - \varepsilon^2$$

$$\left(\frac{n}{2}\right)^2 > \left(\frac{n}{2}\right)^2 - \varepsilon^2. \quad \text{Что и требовалось доказать.}$$

Следовательно, чтобы добиться наибольшего произведения а и с, а должно быть равно с.

Наибольшее значение выражение достигается, когда $a = c$, $a * c > a * b$, $b * c$. Чтобы максимально увеличить произведение а и с, необходимо взять наименьшее b. $b=0$.

Итог: Наибольшее значение выражение принимает при $a=1,5$ и $b=0$ и $c=1,5$:

$$ab + bc + 2ca = 1,5 * 0 + 1,5 * 0 + 2 * 1,5 * 1,5 = 4,5$$

Ответ: 4,5

Задача 5. Решение:

Заметим, что если поставить точку О в центр доски, то каждому прямоугольнику соответствует другой прямоугольник, симметрично отраженный относительно точки О. Единственное исключение – два прямоугольника, с центрами в точке О.

Поэтому Петя сможет выиграть вне зависимости от ходов Васи, используя следующую стратегию: **Первым ходом он ставит фишку на центральную клетку доски, а потом, после каждого хода Васи, Петя симметрично отражает его клетку относительно центра доски и ставит свою фишку на полученную клетку.**

Почему это работает:

1) По пункту №1 каждому прямоугольнику соответствует другой прямоугольник, симметрично отраженный относительно центра доски, поэтому когда Вася ставит фишку и она «заполняет» несколько прямоугольников, фишка Пети «заполняет» их симметричные пары. Поэтому куда бы ни ходил Вася, все равно останутся симметричные прямоугольники, которые заполнит Петя, поэтому Петя завершит игру.

2) Первым ходом Петя делает две важных вещи: Ставит центральную фишку (которую невозможно отразить относительно центра доски) и одновременно «заполняет» центральные прямоугольник (у которых нет симметричных пар). Таким образом, убрав все исключения, он сможет в любой ситуации использовать описанную стратегию.

Ответ: Петя.