Санкт-Петербургский государственный университет
Олимпиада школьников по математике 2020–2021
Заключительный этап
8–9 классы

1. Найдите все такие значения a, для которых квадратные трехчлены x^2+2x+a и $x^2+ax+2=0$ имеют по два корня, причем сумма квадратов корней первого трехчлена равна сумме квадратов корней второго трехчлена.

2. Каждый из островитян либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт (и те, и другие на острове есть). Каждый житель острова про каждого знает рыцарь он или лжец. Часть жителей острова заявила, что на острове проживает четное число рыцарей, а все оставшиеся жители заявили, что на острове проживает нечетное число лжецов. Может ли на острове быть ровно 2021 житель?

3. Для произвольных вещественных чисел a и b $(b \neq 0)$ найдите наименьшее значение выражения $a^2+b^2+\dfrac{a}{b}+\dfrac{1}{b^2}$.

4. Точки B_1 и C_1 — середины сторон AC и AB треугольника ABC. На сторонах AB и AC как на диаметрах построены окружности ω_1 и ω_2. Обозначим за D точку пересечения прямой B_1C_1 с окружностью ω_1, лежащую по другую сторону от C относительно прямой AB. Обозначим за E точку пересечения прямой B_1C_1 с окружностью ω_2, лежащую по другую сторону от B относительно прямой AC. Прямые BD и CE пересекаются в точке K. Докажите, что прямая BC проходит через точку пересечения высот треугольника KDE.

5. На центральной клетке доски 11×11 стоит фишка. Петя и Вася играют в следующую игру. Каждым своим ходом Петя передвигает фишку на одну клетку по вертикали или горизонтали. Каждый своим ходом Вася возводит стенку с одной из сторон любой из клеток. Двигать фишку через стенку Петя не может. Игроки ходят по очереди, начинает Петя. Петя выигрывает, если сможет фишкой уйти с доски. Может ли он обеспечить себе победу вне зависимости от действий соперника?

6. Докажите, что существует бесконечно много таких натуральных чисел n, что количество различных нечетных простых делителей числа $n(n+3)$ кратно трем.

1	2	3	4	5	6	Сумма
10	10	20	20	20	0	80

№1.

$x^2+2x+a=0$ имеет два корня тогда и только тогда, когда $D>0$.$D=4-4a$ $4-4a>0$ $a<1$ $x^2+ax+2=0$ имеет два корня тогда и только тогда, когда $D>0$.$D=a^2-8$ $a^2-8>0$ $a^2>8$Пусть x_1,x_2-корни $x^2+2x+a=0$, а x_3,x_4-корни $x^2+ax+2=0$,тогда$x_1^2+x_2^2=x_3^2+x_4^2$ $(x_1+x_2)^2-2*x_1*x_2=(x_3+x_4)^2-2*x_3*x_4$По теореме Виетта:$x_1+x_2=-2$, $x_1*x_2=a$,$x_3+x_4=-a$, $x_3*x_4=2$Тогда $4-2a=a^2-4$ $a^2+2a-8=0$ $a=-4$ или $a=2$ по теореме Виетта.При $a=2$: $a>1$, а значит у $x^2+2x+a=0$ не 2 корня.При $a=-4$: $a<1$ и $a^2>8$, а значит $x^2+2x+a=0$ и $x^2+ax+2=0$ имеют по 2 корня.

Ответ : $a=-4$.

№2

Допустим, что на острове 2021 житель. Тогда если рыцарей четно, то лжецов нечетно, а значит лжецы (они есть по условию) не могли заявить ни одно из высказываний, а они должны были. Противоречие. Если же рыцарей нечетно, то лжецов четно, а значит рыцари (они есть по условию) не могли заявить ни одно из высказываний, а они должны были. Противоречие. Значит на острове не могло быть 2021 жителя.

Ответ : нет.

№5

Ответ:нет.

Покажем стратегию игры Васи при которой он гарантированно победит.Назовем угловыми стенками — стенки угловых клеток, лежащие на сторонах квадрата 11*11, а стенками стороны — стенки лежащие на сторонах квадрата, но не являющиеся угловыми стенками. Тогда за первые 4 хода Вася может поставить 4 угловые стенки так, что они не будут являться стенками одной угловой клетки. Заметим, что после этого у любой клетки рядом со стороной квадрата есть только 1 сторона на которую не поставили стенку и через которую Петя может вывести фишку за поле и при этом этом за свои 4 хода Петя не успеет перевести фишку ни в одну клетку рядом со стороной. После этого на каждый ход Пети Вася будет ставить забор либо на сторону клетки, в которой лежит фишка, лежащую на стороне квадрата, если фишка лежит рядом со стороной и любым другим способом если фишка не лежит у края. Заметим, что тогда фишка не сможет выйти с доски, так как для выхода должна быть боковая клетка с стороной без стены лежащей на стороне квадрата, в которой лежит фишка, а после хода Васи такой клетки остаться не может.Ответ : нет.

№4

B1-середина AB, а значит что B1 – центр окружности w1 построенной на стороне AB как на диаметре, при этом B1A – радиус окружности. Аналогично C1 — середина окружности w2 с радиусом C1A. Тогда DC1=BC1=AC1, а значит угол BDA=90 градусов. Аналогично EC=EB1=EA, а значит угол AEC=90 градусов. Тогда DB пересекает EC в точке K так, что K лежит на продолжении DB за точку B и на продолжении EC за точку C. Пусть EH- высота в треугольнике KDE. Тогда AD || EH , так как AD и EH перпендикулярны DK. Пусть EH пересекает BC в точке O, тогда угол DAO=180 градусов -угол HOA= углу AOE так как AD || EH. Тогда DO||AE, а значит DO перпендикулярно KE, а значит через точку O проходят две высоты. Значит точка O является точкой пересечения высот, и она лежит на BC.

№3

a^2+b^2+a/b+1/(b^2)=a^2+(1/b)*a+b^2+1/(b^2)Это парабола с ветвями вверх(относительно a).x вершины параболы=-(1/b)/(2)=-1/(2b)y вершины параболы=(-1/(2b))^2+(1/b)*(-1/(2b))+1/(b^2)+b^2=3/(4b^2)+b^2.Значит a^2+(1/b)*a+b^2+1/(b^2)>= 3/(4b^2)+b^2Пусть b^2=n, тогда 3/(4b^2)+b^2=3/(4n)+n и n>=0Значит 3/(4n)+n>=0Пусть 3/(4n)+n=k,где k-какое то конкретное число, тогда3/4+n^2=n*kn^2-n*k+3/4=0D=k^2-3Так как D>=0(так как по предположению 3/(4n)+n=k) и 3/(4n)+n>=0, то есть k>=0, tok хотя бы корень из 3. Значит a^2+(1/b)*a+b^2+1/(b^2)>= 3/(4b^2)+b^2>= корень из 3.Заметим, что при a=-1/(корень 4 степени из 12) и b=(корень 4 степени из 3)/(корень из 2): a^2+(1/b)*a+b^2+1/(b^2)=корню из 3.Тогда наименьшее значение этого выражения корень из 3.

Ответ: корень из 3.