Санкт-Петербургский государственный университет
Олимпиада школьников по математике 2020–2021
Заключительный этап
8–9 классы

1. Найдите все такие значения a, для которых квадратные трехчлены x^2+2x+a и $x^2+ax+2=0$ имеют по два корня, причем сумма квадратов корней первого трехчлена равна сумме квадратов корней второго трехчлена.

2. Каждый из островитян либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт (и те, и другие на острове есть). Каждый житель острова про каждого знает рыцарь он или лжец. Часть жителей острова заявила, что на острове проживает четное число рыцарей, а все оставшиеся жители заявили, что на острове проживает нечетное число лжецов. Может ли на острове быть ровно 2021 житель?

3. Для произвольных вещественных чисел a и b ($b \neq 0$) найдите наименьшее значение выражения $a^2+b^2+\dfrac{a}{b}+\dfrac{1}{b^2}$.

4. Точки B_1 и C_1 — середины сторон AC и AB треугольника ABC. На сторонах AB и AC как на диаметрах построены окружности ω_1 и ω_2. Обозначим за D точку пересечения прямой B_1C_1 с окружностью ω_1, лежащую по другую сторону от C относительно прямой AB. Обозначим за E точку пересечения прямой B_1C_1 с окружностью ω_2, лежащую по другую сторону от B относительно прямой AC. Прямые BD и CE пересекаются в точке K. Докажите, что прямая BC проходит через точку пересечения высот треугольника KDE.

5. На центральной клетке доски 11×11 стоит фишка. Петя и Вася играют в следующую игру. Каждым своим ходом Петя передвигает фишку на одну клетку по вертикали или горизонтали. Каждый своим ходом Вася возводит стенку с одной из сторон любой из клеток. Двигать фишку через стенку Петя не может. Игроки ходят по очереди, начинает Петя. Петя выигрывает, если сможет фишкой уйти с доски. Может ли он обеспечить себе победу вне зависимости от действий соперника?

6. Докажите, что существует бесконечно много таких натуральных чисел n, что количество различных нечетных простых делителей числа $n(n+3)$ кратно трем.

1	2	3	4	5	6	Сумма
20	15	20	0	0	0	55

Номер 1

Рассмотрим приведённый трёхчлен x^2+px+q. Пусть, x_1 и x_2 – его корни. По т.Виета $x_1+x_2=-p$, $x_1 \cdot x_2=q$. $(x_1+x_2)^2-2 \cdot x_1 \cdot x_2=x_1^2+x_2^2$. $X_1^2+x_2^2= p^2-2q$.

Значит, сумма квадратов корней первого уравнения равна $2^2-2a=4-2a$, а второго- $a^2-2 \cdot 2=a^2-4$. По условию $4-2a=a^2-4$; $a^2+2a-8=0$; $D=4+4 \cdot 8=36$; $a_1=2$; $a_2=-4$;

В первом случае первый многочлен принимает вид x^2+2x+2; $D=4-8<0$, корней нет, значит, этот случай не подходит.

Во втором случае первый многочлен принимает вид x^2+2x-4; $D=4+4 \cdot 4>0$, т.е. есть 2 корня. Второй многочлен принимает вид $x^2-4x+2=0$; $D=16-4 \cdot 2=8>0$, значит, есть 2 корня. Таким образом, второй случай удовлетворяет условию.

Ответ: -4.

Номер 2

Докажем от противного, что не может быть. Пусть, жителей 2021. Это нечётное число. Тогда либо рыцарей чётное число, а лжецов нечётное (в этом случае лжецы не смогут сказать оба утверждения, и получили противоречие), либо рыцарей нечётное, а лжецов чётное(в этом случае рыцари не смогут сказать оба утверждения, и получили противоречие)

Во всех случаях получили противоречие, значит, такого не может быть.

Ответ: нет.

Номер 3

Заметим, что значение всех слагаемых, кроме a/b всегда положительно и не зависит от знаков a и b, т.к. они входят в выражения в чётных степенях. Значит, значение будет наименьшим при $a/b<0$. Значит, числа a и b разного знака. Без ограничения общности можно считать, что $b>0$, $a<0$(в противном случае все слагаемые будут принимать те же значения). Пусть, $b=x$, $a=-y$, где числа x,y неотрицательные. Тогда искомое выражение принимает вид $y^2+x^2-y/x+1/x^2= y^2-y(1/x)+(x^2+1/x^2)$. Рассмотрим это как трёхчлен относительно y. Его старший коэф. Положителен, значит, у этой параболы ветви направлены вверх. Значит, наименьшее значение будет в вершине параболы при $y=(1/x)/2=1/(2x)$. При этом значении выражение принимает вид $1/(4 \cdot x^2)-1/(2 \cdot x^2)+x^2+1/(x^2)=3/(4 \cdot x^2)+x^2$. Из неравенства о ср.арифм и ср. геом это выражение $\geq 2 \cdot \sqrt{3 \cdot x^2}/(\sqrt{4 \cdot x^2})=2 \cdot \sqrt{3}/\sqrt{4}=\sqrt{3}$. Значит, наименьшее значени равно $\sqrt{3}$.

Ответ: $\sqrt{3}$.

Номер 5

Покажем, что у второго игрок может не дать 1-му выиграть. Первые свои 4 хода 2-й игрок должен закрасить по одному отрезку у чётырёх угловых квадратиков(у каждого из них красим один из двух отрезков, лежащих на границе квадрата $11 \cdot 11$. Заметим, что за первые 5 ходов 1-й игрок не сможет выйти из квадрата. 2-й игрок далее ходит так:

Назовём квадратик $1 \cdot 1$ крайним, если хотя бы одна из его сторон лежит на границе квадрата $11 \cdot 11$(такие стороны назовём главными). Если на стороне стоит перегородка, то будем говорить, что она закрашена. Заметим, что сейчас у всех крайних квадратиков есть не более одной незакрашенной стороны. Если фигура стоит не в крайней клетке, то 2-й игрок ходит произвольно. Если она стоит в крайней клетке, то 2-й игрок своим ходом закрашивает главную незакрашенную сторону у этого квадратика(если она есть), а если нет, то ходит произвольно. Предположим, что 1-му игроку удалось выйти из квадрата. Это значит, что к какому-то его ходу он стоял в крайней клетке, у которой хотя бы одна из сторон не закрашена. Но по стратегии 2-го такого быть не может- проитворечие.

Ответ: нет.

Номер 4

Т.к. E лежит на окружности с диаметром AC, EB1=AB1=B1C и у.AEC=90. Аналогичные рассуждения можно проделать для точки D.
Т.к. B1C- средняя линия тр. ABC, B1C парал. BC, значит, треугольники AB1C1 и ACB подобны. B1C=a, ED=(a+b+c)/2, значит, коэф. Подобия равен (a+b+c)/(2a). Опустим высоту KO на ED, пусть, H- её точка пересечения с BC. Тр. CHK и KOE подобны, отношение KO/KH равно (a+b+c)/(2a). Осталось доказать, что в тр. EKD точка пересечения высот делит высоту из точки K в таком отношении. Это можно доказать с помощью метода масс.