Олимпиада школьников СПбГУ по математике.
Заключительный этап. 2020/2021 учебный год. 10 – 11 классы.

1. В некоторых клетках полоски 1×2100 поставлено по одной фишке. В каждую из пустых клеток записывается число, равное модулю разности количества фишек слева и справа от этой клетки. Известно, что все записанные числа различны и отличны от нуля. Какое наименьшее количество фишек может быть расставлено в клетках?

2. Положительные числа a, b, c таковы, что $a + b + c = 3$. Найдите минимальное значение выражения

$$A = \frac{a^3 + b^3}{8ab + 9 - c^2} + \frac{b^3 + c^3}{8bc + 9 - a^2} + \frac{c^3 + a^3}{8ca + 9 - b^2}.$$

3. Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Пусть K и L — точки пересечения описанной окружности треугольника AOB с прямыми AD и BC соответственно. Найдите отношение $OK : OL$, если известно, что $\angle BCA = \angle BDC$.

4. На доске написано число 12320. Петя приписал к нему справа $10n + 1$ троек, где n — неотрицательное целое число. Вася подумал, что это четверичная запись натурального числа x, и разложил x на простые множители. Оказалось, что среди них ровно два различных. При каких n это возможно?

5. В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством $6n + 1$, $6n + 4$, $6n + 7$ и $6n + 10$ пиастров, где n — натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?

1	2	3	4	5	Сумма
20	0	20	20	20	80

Задача 1.
Заметим сперва, что модуль разности количества фишек слева и справа -это то же самое, что и общее число фишек минус удвоенное число фишек с той стороны, с которой их не больше. Чем с другой. Следовательно, т. к. во всех пустых клетках числа различные, то у каждой из них свое минимальное количество фишек с одной стороны. Также из вышеупомянутго факта (про замену модуля разности) можно сделать вывод, что у всех чисел, записанных в пустые клетки одинаковый остаток при делении на 2 (он такой же, как и у общего количества фишек). Следовательно, если общее число фишек может быть представлено в виде $2\cdot k+1$, то пустых клеток может быть не более $k+1$; если же общее число фишек представляется в виде $2\cdot k$, то пустых клеток не более k . Всего 2100 клеток; если фишек 1399 и менее, то пустых клеток 700 и менее (может быть согласно выведенному факту) (недобор); если же фишек 1400 и более, то пустых клеток (потенциально) может быть 700 и более. Следовательно, фишек не менее 1400. Пример при 1400 фишках следующий: разобьем начальную полоску пополам. Каждую из половинок разобьем на тройки полей, стоящих подряд, и в тройках из левой половинку пустой клеткой всегда будет левая клетка, а в тройках из правой половинки пустая клетка всегда будет в середине тройки. Доказательство, почему этот пример рабочий: В каждой из половинок поровну фишек; следовательно, для фишики из правой половинки минимальное количество фишек находится справа, и наоборот (для фишки из левой половинки — слева). Для фишек из левой половинки минимумы (по возрастанию) — это 0, 2, 4 … 698, а минимумы для правой половинки (по возрастанию) — это 1, 3, … 699. Соответственно, в клетках записаны все четные числа от 702 до 2100 (включая оба конца) по одному разу, что соответсвует условию.
Ответ: 1400 фишек.

Задача 3.
Посмотрим на пятиугольник AOBLK (он вписанный). Мне неважно, пересекаются ли AK и LB, я никак не буду этим пользоваться, мне важно лишь то, что все эти 5 точек лежат на одной и той же окружности. Угол KAO = 180 – DAC, LBO = 180 – OBC. Углы DAC и OBC равны, т. к. они вписанные и опираются на одну и ту же дугу. Следовательно KAO = LBO. Т.к. Это 2 вписанных угла, находящихся в одной окружности, то они опираются на равные дуги, и стягивающие их хорды (т. е. OK и OL) равны.
Ответ:1.

Задача 4.
Переведем сперва число из четверичной системы счисления в десятичную (сумму последних n+1 членов посчитаем через сумму членов геометрической прогресии)
$123203333_4=4^{10n+1}-1+2\cdot4^{10n+2}+3\cdot4^{10n+3}+2\cdot4^{10n+4}+4^{10n+5}=441\cdot4^{10n+1}-1$ Исходя из условия, число $441\cdot4^{10n+1}$ дает остаток 1 при делении ровно на 2 простых числа; т. к. это квадрат, то его корень дает остаток ±1 при делении не более чем на 2 простых числа (имеется в виду, что все остальные простые числа дают остаток, по модулю отличимый от 1). Корень равен $21\cdot2^{10n+1}$; он четный, т. е. Если к нему прибавить или вычесть 1, то получится нечетное число; у двух чисел, получивышихся в результате прибавления и вычитания единицы, суммарно должно быть не более 2х простых делителей. У каждого из них не менее одного простого делителя, т. к. Корень >= 42; общих делителей у них быть не может (т. к. иначе их разность 2 делилась бы на них) следовательно, у каждого из них ровно 1 простой делитель — т. е. Каждое из них это некоторое простое число в натуральной степени. Корень можно представить как $42\cdot1024^z$, где z – целое неотрицательное число. Этот корень в любой случае дает остаток ±1 при делении на 41 (т. к. и 42, и 1024 дают такой остаток). Рядом с ним 2 нечетных числа; одно из них делится на 41, т. е. Является степенью 41. Будем пытаться решить уравнение $41^a\pm1=42\cdot1024^b$, где а

— натуральное, b – целое неотрицательное. Заметим, что если перед 1 в левой части стоит минус, то левая часть кратна 5, а правая часть никогда не кратна 5, следовательно, в левой части стоит +. Тогда, левая часть дает остаток 2 при делении на 8, т. е. Она никогда не кратна степени двойки, превышающей 1; следовательно b = 0 и a = 1.
Исходя из этого, единственное n, являющееся решением — 0; в таком случае записанное число равно 1683 = 1684-1 = 42*42 — 1 = 41*43.
Ответ: только при 0.

Залача 5.
Остаток от деления на 3 той суммы, которую хотят выдать жителю, равен остатку от деления на 3 количества монет, которые ему дадут (т. к. номинал каждой монеты дает огстаток 1 при делении на 3)
Пусть жителю хотят выдать некоторую сумму. Тогда ему дадут несколько монет. Увеличим сумму, которую мы хотим выдать на 3, не меняя количество выдаваемых монет; будем продолжать так делать, пока все монеты, которые мы выдаем, не станут номиналом 6н+10. Увеличив сумму на 3 еще раз, придется увеличить число монет. Т.к. Остаток количества монет равен остатку суммы (при делении на 3), следовательно ,придется добавить сразу аж 3 монеты. Сделаем так: добавим их и номинал всех монет изменим на 6н+1. Пусть мы выдавали a монет, теперь выдаем a+3. Новая сумма = (a+3)(6н+1) = 6ан + 18н +a + 3, до этого мы выдавали сумму a*(6н+10) = 6ан + 10a, т. е. Сумма стала больше на 18н-9a+3. Если это число больше 3х, то сы шагнули больше, чем на 3, т. е. Какая-то сумма из интервала (6ан + 10a; 6ан+18н+a+3) недостижима. Максимальное a, при котором это верно: 6н-3a+1>1; 2н-a>0; a<2н. Максимальное a = 2н-1. При таком количестве монет максимальная сумма = (2н-1)(6н+10) = 12н*н + 14н — 10; при 2н+2 монетах минимальная сумма (2н+2)(6н+1) = 12н*н +14н + 2; следовательно, 12н*н +14н — 1 — максимальная сумма, которую жителю не смогут выдать.
Ответ: $12\cdot n^2+14\cdot n-1$.