Олимпиада школьников СПбГУ по математике.
Заключительный этап. 2020/2021 учебный год. 10 – 11 классы.

1. Натуральные числа от 1 до 2023 записаны в ряд в некотором порядке. Оказалось, что любые три числа, расположенные через одно, дают разные остатки от деления на 3. Какое число может быть на первом месте?

2. При $a, b, c > 0$ найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{a^4 + b^4 + c^4}{(a+b+c)^4 - 80\,(abc)^{4/3}}.$$

3. Окружность ω_1 с центром O пересекается в точках K и L с окружностью ω_2, проходящей через точку O. Через точку O проведена прямая, вторично пересекающая окружность ω_2 в точке A. Отрезок OA пересекает окружность ω_1 в точке B. Найдите отношение расстояний от точки B до прямых AL и KL.

4. Петя написал на доске подряд n двузначных восьмеричных чисел ($n \geq 2$), образующих арифметическую прогрессию с разностью 8, причем первое число не содержит цифру 2. Вася подумал, что это восьмеричная запись натурального числа x, и разложил x на простые множители. Оказалось, что их всего два, и они различаются на 2. Что написано на доске?

5. В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством $3n-2$, $6n-1$, $6n+2$ и $6n+5$ пиастров, где n — натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?

1	2	3	4	5	Сумма
15	20	20	10	0	65

Задача 1.

Заменим числа 1, … 2023 на их остатки от деления на 3. Получим набор чисел 1, 2, 0, 1, 2, 0 … ,1, 2, 0, 1. Здесь (337$\times$ 2) чисел 2, (337$\times$ 2) чисел 0 и (1+337$\times$2) чисел 1.

В блоке из 6 чисел искомого ряда рассмотрим позиции с нечетными номерами.

·		·		·	

На листах отмеченных точками находятся ровно по одному числу 0, 1 или 2. Причем порядок их следования однозначно определяет порядок следования этих чисел на нечетных позициях во всех последующих блоках из 6 чисел.

Аналогичные рассуждения можно провести для чисел, находящихся на четных позициях в блоках из 6 чисел.

Таким образом, каждый блок из 6 чисел содержит в некотором порядке два 0, две 1, две 2 по одному экземпляру на четном и нечетном листе.

Всего у нас может получиться 337 полных блоков и останется одно число 1. Значит первым будет такое число: (*таблички должны идти в ряд горизонтально)

1					

1					

…

1					

1

ИЛИ

1

					1

					1

…

					1

Ответ: любое из чисел, дающее при делении на 3 остаток 1.

Задача 2.

Используем неравенство о средних:

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times \ldots \times x_n}$$

$a^3b + a^3c + ab^3 + ac^3 + b^3c + bc^3 \geq 6\sqrt[6]{a^8b^8c^8} = 6(abc)^{\frac{4}{3}}$

$a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 \ \geq 3\sqrt[3]{a^4b^4c^4} = 3(abc)^{\frac{4}{3}}$

$a^2bc + ab^2c + abc^2 \geq 3\sqrt[3]{a^4b^4c^4} = 3(abc)^{\frac{4}{3}}$

Тогда $(\mathrm{a} + \mathrm{b} + \mathrm{c})^4 \geq a^4 + b^4 + c^4 + 4 \times 6(abc)^{\frac{4}{3}} + 6 \times 3(abc)^{\frac{4}{3}} + 12 \times 3(abc)^{\frac{4}{3}} = a^4 + b^4 + c^4 + 78(abc)^{\frac{4}{3}}$, тогда

A=$\frac{a^4+b^4+c^4}{(\mathrm{a+b+c})^4-80(abc)^{\frac{4}{3}}} \leq \frac{(\mathrm{a+b+c})^4-78(abc)^{\frac{4}{3}}}{(\mathrm{a+b+c})^4-80(abc)^{\frac{4}{3}}}$ = 1+$\frac{2}{\frac{(\mathrm{a+b+c})^4}{(abc)^{\frac{4}{3}}}-80}$

А принимает наибольшее значение при наименьшем значении знаменателя, т. е. при наименьшем значении $\frac{(\mathrm{a+b+c})^4}{(abc)^{\frac{4}{3}}}$=$\frac{(\mathrm{a+b+c})^4}{\sqrt[3]{abc}}$

По a+b+c ≥3 $\sqrt[3]{abc}$

Тогда $\geq 3^4 = 81$

Т. е. А$\leq$ 3, причем $\mathrm{A} = 3$ при $a = b = c$

Ответ: A=3 при a=b=c

Задача. 3

Решение:

1) Угол КОА равен углу KLA, так как это вписанные углы, опирающиеся на одну дугу в окружности ω_2
2) В окружности ω_1 угол КОВ – центральный, а угол KLB – вписанный, опирающийся на ту же дугу.
3) Значит угол KLB равен половине угла КОВ ,то есть половине угла KLA ,следовательно, угол В –биссектриса угла KLA. Тогда расстояния от точки В до сторон угла KL и AL одинаковые.

Ответ: 1

Задача 4.

Если восьмеричные числа образуют арифметическую прогрессию с разностью 8, то они отличаются первой цифрой , то есть это числа вида $\overline{1b}$,$\overline{2b}$, … ,$\overline{7b}$. По условию x=p(p+2), значит, цифра b не может быть четной. И последняя цифра p тоже не может быть четной. Посмотрим на последние цифры чисел p и (p+2):

P p+2 x

1)… a_1 ….a_3 (…+8a+1)(…+8a+3) $\equiv_8$

$\equiv_8$32a+3, то есть …$(4a)_8 3$

2)…a_3 …. a_5 …17

3)…a_5 …a_7 …$(4a+4)_8 3$

4)…a_7 …$(a+1)_1$ …77

Случай 2) не подходит, n≥2, а у нас получается что x=17

Случай 1) x=…$(4a)_8 3$

Если a=0, то x=03 не подходит

a=1, то x=…43

Аналогично , a – четное не подходит, a – нечетное делает x=…43

Случай 3) x=…$(4a+4)_8 3$

Если a=0, то x=…43

a=1, x=…03 (-)

a=2, x=…43

a=3, x=…03 (-)

Значит x=…43

Разберемся с x=…43. Возможные варианты: x=13233343 и x=3343

Для проверки заметим, что x=p(p+2)=$(\mathrm{p}+1)^2-1$, то есть x+1 – полный квадрат.

$(3343+1)_8$=1764_{10}=42^2 - верно и p=$41_{10}=51$

p+2=$43_{10}=53$

13233343_8*+1*=2963172_{10} - не может быть полным квадратом.

Теперь рассмотрим случай 4) x=…77

X=6777 , x+1=3584_{10} (не полный квадрат)

X=56777, x+1=196096_{10} (не подходит не кв.)

X=47576777, x+1=10419712 (не подходит)

X=3747576777

x+1=530513408_{10} (не подходит, не квадрат)

x=17273747576777

x+1=1056018726400 (не подходит, не квадрат)

Ответ: 3343_8

Задача 5.

3n-2 – меньшая из монет, все суммы ей кратные банк выплатить не может.

При n=1, 3n-2=1, в таком случае любую сумму банк выплатит. Значит надо смотреть n> 1

A=m$(3n-2)+k, m\epsilon N, k \in N$

k$< 3n-2$

Если k можно выплатит монетами 6n-1, 6n+2, 6n+5, то A банк выдать сможет

6n-1=2(3n-2)+3

6n+2=2(3n-2)+6

6n+5=2(3n-2)+9

N=1:   1,5 ,8,11

N=2:   4,11,14,17

N=3: 7, 17, 20, 23

N=4: 10, 23, 26, 29

И т. д.

Наибольшее число, которое житель не сможет получить =3.

Ответ:3