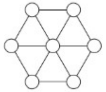
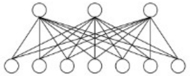
ВОПРОС 1: ЭССЕ

25 из 25 баллов

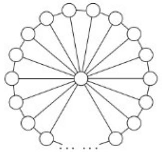
1. На картинке нарисовано n кружочков, некоторые кружочки соединены отрезками. Требуется расставить в кружочках числа от 1 до n (без повторений) так, чтобы выполнялось свойство: если кружочки соединены отрезками, то стоящие в них числа должны быть взаимно просты (то есть не иметь общих натуральных делителей, отличных от 1). Можно ли это сделать в каждом из следующих случаев? Если можно — опишите расстановку чисел, если нет — объясните, почему нельзя.



а) $n = 7$



б) $n = 10$



в) $n = 2022$: по кругу стоят 2021 кружочков, и еще один в центре

Данный ответ: а) Да, можно. Пример: 2 5

3 1 6

4 7

б) Нет, нельзя. Чётных чисел сверху быть не может, так как их 5(при n=10), значит 3 чет. максимум сверху. Но тогда есть и минимум 2 снизу, а дв а чётных числа взаимно простыми не являются(есть общий делитель 2). Значит, все четные числа находятся снизу и никак не соединены между собой. Тогда сверху могут быть только нечётные числа(1,3,5,7,9). Снизу есть число 6, которое не является взаимно простым с 3 и 9, т.е. 3 и 9 све рху быть не могут. Также есть и число 10, которое не является взаимно простым с 5. То есть, взаимно простыми со всеми являются только 1 и 7. Но нам нужно 3 взаимно простых со всеми числа. Противоречие. Это означает, что числа мы расставить в круги по условию не можем.

в) Нет, нельзя. В центре не может быть четное число, иначе оно не является взаимно простым с каким-нибудь четным числом на окружности. То есть, все четные числа находятся на окружности. Значит, в центре стоит нечетное число. Среди 2022 чисел есть 1011 четных и 1011 нечётных, з которых на окружности находится 1011 четных и 1010 нечетных. Четные числа никак не должны контактировать между собой, так как они не вз аимно простые. Значит, между каждой парой чётных чисел должно стоять как минимум одно нечётное число. Но таких пар нечётное число+чётн ое число может быть максимум 1010 штук(так как нечётных чисел на окружности 1010 штук). Тогда останется одно чётное число, которое не буде т иметь при себе нечётного. Значит, оно будет стоять по соседству либо с полседним четным, либо с первым четным(если ставить числа по круг у). Получается, что есть два соединённых чётных числа, а они взаимно простыми не являются. Противоречие. Расставить числа в круги по услов ию мы не можем.

Ответ: а) Да б) Нет в) Нет

ВОПРОС 2: ЭССЕ

15 из 30 баллов

2. Назовем *каскадом, порожденным числом* r, набор из 12 натуральных чисел: r, $2r$, $\ldots$, $12r$.

а) Может ли какая-то пара чисел (a, b) содержаться в шести различных каскадах? Если да — приведите пример таких чисел, если нет — объясните, почему не может.

б) Верно ли, что множество натуральных чисел можно раскрасить в 12 цветов так, что в каждом каскаде все элементы будут разного цвета?

Данный ответ: а)Да, может. Пара чисел 60 и 120 может находится в 6 каскадах(r=60, r=30, r=20, r=15, r=12, r=10).

б)Да, можно, первые 12 чисел мы красим в разные цвета(они точно попадут в каскад r=1), а все последующие числа красим в один цвет два чис ла подряд(они никак не попадут в один каскад, поскольку они взаимно простые). В этом случае все числа будут разного цвета.

ВОПРОС 3: ЭССЕ

0 из 20 баллов

3. В треугольнике ABC точка D — середина стороны AB, E — середина стороны AC, F — середина биссектрисы AL, причем $DF = 1$, $EF = 2$. На плоскости изображены точки D, E, F так, что прямая DF горизонтальна, а остальные элементы чертежа стерты. Можно ли восстановить положение хотя бы одной из вершин треугольника, если известно, что вершина A находилась сверху от прямой DF?

Данный ответ: Нельзя, поскольку нет построений треугольника в которых нет углов, за исключением построения треугольника по трём равным сторонам, но их нет здесь также.

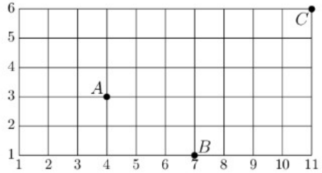
ВОПРОС 4: ЭССЕ

16 из 25 баллов

4. Город имеет форму клетчатого прямоугольника 5×10 клеток: линии — улицы, клетки — жилые кварталы. Расстояние между перекрестками измеряется как длина самого короткого пути по улицам города, проходящего от одного перекрестка до другого. Например, для перекрестков A, B и C на картинке $AB = 5$, $AC = 10$, $BC = 9$. Можно ли отметить в этом городе k перекрестков так, чтобы все расстояния между этими перекрестками оказались различными числами? Если да — укажите эти перекрестки (например, перекресток C находится на пересечении 11-й вертикальной и 6-й горизонтальной улицы), если нет — объясните, почему нельзя.

Решите задачу для

а) $k = 5$; б) $k = 6$; в) $k = 7$.



Данный ответ:

а) Можно. Первый перекрёсток находится на пересечении 1-ой вертикальной и 1-ой горизонтальной улицы, второй на пересечении 2-ой вертикальной и 1-ой горизнотальной улицы, третий на пересечении 3-ей вертикальной и 2-ой горизонтальной улицы, четвёртый на пересечении 5-ой вертикальной и 4-ой горизонтальной улицы, пятый на пересечении 9ой вертикальной и 5ой горизонтальной улицы.

б) Нельзя. Всего дорог будет (6*5):2=15(полный граф). Минимальная сумма расстояний всех дорог 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15=120 сторон клеток. Всего же сторон клеток у нас 5*11+10*6=115. 120 больше 115, нам не хватит места для всех дорог, следовательно, нельзя.

в) Нельзя. Всего дорог будет (7*6):2=21(полный граф). Минимальная сумма расстояний всех дорог 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16+17+18+19+20+21=231 сторона клеток. Всего же сторон клеток у нас 5*11+10*6=115. 231 больше 115, нам не хватит места для всех дорог, следовательно, нельзя.