Олимпиада школьников СПбГУ по математике.

Заключительный этап. 2020/2021 учебный год. 10 – 11 классы.

1. Можно ли в таблице 35×35 расставить различные целые числа так, чтобы значения в клетках, имеющих общую сторону, отличались не более чем на 18?

2. При $a, b, c > 0$ найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b)}{a^3 + b^3 + c^3 - 2abc}.$$

3. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 соответственно пересекаются в точке A. Отрезок O_2A вторично пересекает окружность ω_1 в точке K, а отрезок O_1A вторично пересекает окружность ω_2 в точке L. Прямая, проходящая через точку A параллельно KL, вторично пересекает окружности ω_1 и ω_2 в точках C и D соответственно. Отрезки CK и DL пересекаются в точке N. Найдите угол между прямыми O_1A и O_2N.

4. В файле записано подряд 2021 двузначных пятеричных чисел, причем числа на нечетных позициях равны и на 1 больше чисел на четных позициях. Компьютер считал данные из файла как одно пятеричное число и разложил его на простые множители. Оказалось, что таких множителей ровно два и они различаются на 2. Могло ли такое быть?

5. В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством 5^n, $5^{n-1} \cdot 7$, $5^{n-2} \cdot 7^2$, $5^{n-3} \cdot 7^3$, $\ldots$, $5 \cdot 7^{n-1}$, 7^n пиастров, где n — натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?

1	2	3	4	5	Сумма
20	5	20	10	0	55

№1

35 * 35 = 1225 различных чисел

Пусть a - min число в таблице. Тогда двигаясь по соседним сторонам из клетки в клетку можно проделать путь к максимальнрому числу. Тогда max число ≤ a + 18 * (35 * 2 – 2) = a + 1224

(Это тк max отличие между клетками 18, а кротчайших путь между самыми удаленными клетками в таблице(например угловыми) равен 35*2 – 2 переходов.

Всего различных чисел 1225, разница между min и max есть 1224 => это подряд идущие числа от a до (a + 1224) в таблице(по другому быть не может, иначе числа не различные).

Осталось заметить, что до любого числа в таблице существует еще 1 симметричный путь из исходной клетки. То есть расстояние между min и max числом в 35*2 – 2 перехода – можно пройти хотя бы двумя способами. Но самые большие числа: a(min), a+18*1, a+18*2, ..., a+18*68(max). Мы потратили при составлении первого пути=> второй путь не может быть из таких же больших чисел=> нельзя будет выполнить условие различности чисел и различие между соседями в <= 18.

Ответ: Нельзя.

№3

Пусть P – точка пересечения O1A и O2N.

Треуг. O1AK и O2AL – равнобедренные => уголO1AK = уголO1KA, уголO2AL = уголO2LA.

уголO1AK = уголO2AL(вертикальные) => уголAO1K = уголAO2L => дуга(AK) = дуга(AL) => уголACK = уголADL = уголAO2L / 2 => уголKNL = угол DNC = 180гр. – уголACK – угол ADL = 180гр. – уголAO2L

Значит уголKNL = 180гр. – уголKO2L => KO2LN вписанный четырехугольник =>

уголKO2N = уголKLN = уголADL(KL параллельна CD)

уголLO2N = уголLKN = уголACK(KL параллельна CD)

уголADL = уголACK => уголKO2N = уголLO2N. Значит O2P – бис. в равнобедренном треуг. AO2L => O2P – высота => O2P = O2N перпенд. AL = O1A.

Ответ:90 градусов.

№2

a, b, c > 0

Из неравенства о средних:

a^3 + b^3 + c^3 >= 3abc

a^3 + b^3 + c^3 – 2abc >= abc

1 / (a^3 + b^3 + c^3 – 2abc) <= 1 / abc

Тогда A <= (a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b))/abc = ab(a + b)/abc + ac(a + c)/abc + bc(b + c)/abc = (a+b)/c + (a+c)/b + (b+c)/a = (a/c + c/a) + (a/b + b/a) + (b/c + c/b). Каждая их трех скобок <= 2.

Равенство при a = c и a = b и b = c, значит a=b=c.

Ответ: 6

№4

1)Число (A)(B)(A)(B-1)(A)(B)(A)(B-1)...(A)(B-1)(A)(B), где B = 1, 2, 3, 4

или

2)Число (A)(0)(A-1)(4)(A)(0)...(A)(0)

1)$p(p + 2) = B(5^0 + 5^4 +.. + 5^{4040}) + (B-1) * (5^2 + 5^6 + .. + 5^{4038}) + A*(5 + 5^3 +... +5^{4041})$

$\Leftrightarrow$

$p(p + 2) = B + 5A (5^0 + 5^2 +.. + 5^{4040}) – (5^2 + 5^6 + ... + 5^{4038}) = X$

Рассмотрим делимости по различному модулю:

Модуль 2:

$p(p+2) = 1$

$X = (B+5A)*2021-1010 = B+5A=B+A$ => B и A разной четности

Модуль 3:

$p(p+2) = 2$

$X = (B + 5A)*2021 – 1010 = (B +5A)*2 – 2 = 2B+A – 2 = 2B + A + 1$ => $2B + A = 1$

p	0	1	2
p+2	2	0	1
p(p+2)	0	0	2

Подходит только третий столбик(2 1 2)

Модуль 5:

$X = (B + 5A)*1 = B$ => B = 3 или 4

Подходит только B = 3 и A = 4

P	0	1	2	3	4
P +2	2	3	4	0	1
P(p+2)	0	3	3	0	4

Не подходят 1 и 4 столбик

Модуль 4:

$p(p+2) = 3$

$X = (B +5A)*2021 – 1010 = (B + 5A)*2 -2 = 21$(При B = 3 и A = 4) = 1 != 3

P	0	1	2	3
P + 2	2	3	0	1

$P(p+2)$ 0 3 0 3

В первом случае такого быть не может

2) $p(p+2) = 4*(5^2 + 5^6 +.. + 5^{4038}) + A*(5^1 + 5^5 +5^9 + ...+5^{4041}) + (A-1)(5^3 + 5^7 +... + 5^{4039})$
$= A(5^1 + 5^3 + .. +5^{4041}) - (5^3 + 5^7 +.. + 5^{4039}) + 4(5^2 + 5^6 +.. + 5^{4038})$

Где $A = 2$ или 3 или 4, но это число делится на 5.

Ответ: такое невозможно