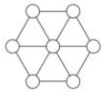
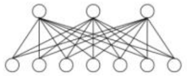
ВОПРОС 1: ЭССЕ

25 из 25 баллов

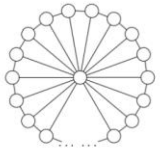
1. На картинке нарисовано n кружочков, некоторые кружочки соединены отрезками. Требуется расставить в кружочках числа от 1 до n (без повторений) так, чтобы выполнялось свойство: если кружочки соединены отрезками, то стоящие в них числа должны быть взаимно просты (то есть не иметь общих натуральных делителей, отличных от 1). Можно ли это сделать в каждом из следующих случаев? Если можно — опишите расстановку чисел, если нет — объясните, почему нельзя.



а) $n = 7$



б) $n = 10$



в) $n = 2022$: по кругу стоят 2021 кружочков, и еще один в центре

Данный ответ:

а) Ответ: можно.

Пример: (5 - в центре)

7

4 5 6

3 1

2

б) Ответ: нельзя.

Объяснение:

Заметим, что у нас 5 чётных чисел. Значит, ни одно из них не может стоять в верхних трёх кружочках (иначе оно будет соединено хотя бы с одним другим четным числом. Значит, они будут не взаимно просты). Следовательно, они все стоят в нижних семи кружочках. Но тогда там также должны стоять все их делители и числа, имеющие с этими общий делитель. Эти числа: 2, 4, 6, 8, 10, 3, 5, 9. То есть хотя бы 8, что противоречит рисунку.

в) Ответ: нельзя.

Объяснение:

Заметим, что у нас 1011 чётных и 1011 нечётных чисел. Если чётное число стоит в центре, то оно будет соединено хотя бы с несколькими чётными числами => они будут не взаимно просты. Этот случай не подходит. Значит, в центре стоит нечётное число. Тогда в круге осталось 1011 чётных чисел и 1010 нечётных. Значит, какие два чётных числа будут стоять рядом => не будут взаимно просты.

ВОПРОС 2: ЭССЕ

20 из 30 баллов

2. Назовем *каскадом, порожденным числом* r, набор из 12 натуральных чисел: $r, 2r, \ldots, 12r$.

а) Может ли какая-то пара чисел (a, b) содержаться в шести различных каскадах? Если да — приведите пример таких чисел, если нет — объясните, почему не может.

б) Верно ли, что множество натуральных чисел можно раскрасить в 12 цветов так, что в каждом каскаде все элементы будут разного цвета?

Данный ответ:

а) Ответ: да

Пример:

a=60

b = 120

1) r = 60: **60**, **120**, 180, 240; 300...

2) r = 30: 30, **60**, 90, **120**, 150, 180...

3) r = 20: *20*, 40, **60**, 80, 100, **120**, 140, 160, 180...

4) r = 15: 15, 30, 45, **60**, 75, 90, 105, **120**...

5) r = 12: 12, 24, 36, 48, **60**, 72, 84, 96, 108, **120**...

6) r = 10: 10, *20*, 30, 40, 50, **60**, 70, 80, 90, 100, 110, **120**.

б) Ответ: да

Объяснение:

Заметим, что если числа будут взаимно просты, то их нельзя будет включить в один каскад (где r>1), т.к. у них должен быть общий делитель r>1. Тогда заметим, что числа n и n+p взаимно просты, если p - простое. (Доказательство: пусть это не так, тогда n и n+p имеют общий делитель d>1, тогда p кратно d. Значит, p - не простое. Противоречие). Теперь разобьём эти числа на 12 групп, каждая своего цвета:

1) 1, 1+13, 1+13*2, 1+13k

2) 2, 2+13, 2+13*2, 2+13k

3) 3, 3+13, ..., 3+13k

...

12) 12, 12+13,..., 12+13k

Докажем, что у нас не получится каскад из чисел, из которых хотя бы два одного цвета.

Но заметим, что числа из одной группы могут иногда иметь общий делитель (например: 12 и 12+13*2=38). Представим такой случай:

1) n, n+13d (n кратно d. Значит, d<= n <= 12). Значит НОД(n, n+13d) = d. При делении на d получим n/d+13 - это число из предыдущей группы.

2) n, n+13m (m кратно n. Значит, n <= 12 <= m). Если это так, то наибольший делитель n. Тогда это число равно: n(1+13*m/n). Число в скобках >=14. тогда пусть это r, а n - номер в каскаде. Тогда предыдущие или следующие числа в каскаде кратны 1+13m/n, а это число из первой группы, 2(1+13m/n) - число из второй группы и т.д.

Следовательно, нельзя собрать каскад, в котором хотя бы два числа будут из одной группы.

Ч.т.д.

(Пояснение: почему числа в разных группах не могут совпадать?

Потому, что тогда n1+13k=n2+13m

Тогда остаток при делении на 13 у n1 и n2 совпадают, но 0 < n1 и n2<= 12. Значит, различных n1 и n2 не существует. Значит, эти числа из одной группы Ч.т.д.)

ВОПРОС 3: ЭССЕ

20 из 20 баллов

3. В треугольнике ABC точка D — середина стороны AB, E — середина стороны AC, F — середина биссектрисы AL, причем $DF = 1$, $EF = 2$. На плоскости изображены точки D, E, F так, что прямая DF горизонтальна, а остальные элементы чертежа стерты. Можно ли восстановить положение хотя бы одной из вершин треугольника, если известно, что вершина A находилась сверху от прямой DF?

Данный ответ:

Ответ: нет.

Объяснение: треугольник ADF подобен треугольнику ABL (по первому признаку)

треугольник AEF подобен треугольнику ACL (по первому признаку)

Следовательно, DF || BL; EF || LC => D, E, F - на одной линии.

Заметим, что зная расположение хотя бы одной вершины треугольника, мы можем найти расположения оставшихся. (пусть знаем расположение точкеи A. Тогда проводим AB так, что AD = BD. Нашли вершину B. Далее проводим AC так, что AE=CE. Нашли вершину C. Аналогично найдём оставшиеся вершины, если знаем изначально другую).

Если мы построим произвольную прямую DG через (.) D. Далее нарисуем перпендикуляр FH к прямой DG. Нарисуем окружность с центро в точке F и радиусом FH. Проведём касательную K к окружности от (.) E. Пересечение EK и DG - это (.) A.

Так как DG - произвольная прямая, то (.) A - неоднозначная.

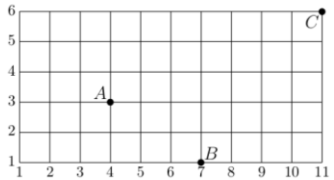
ВОПРОС 4: ЭССЕ

25 из 25 баллов

4. Город имеет форму клетчатого прямоугольника 5×10 клеток: линии — улицы, клетки — жилые кварталы. Расстояние между перекрестками измеряется как длина самого короткого пути по улицам города, проходящего от одного перекрестка до другого. Например, для перекрестков A, B и C на картинке $AB = 5$, $AC = 10$, $BC = 9$. Можно ли отметить в этом городе k перекрестков так, чтобы все расстояния между этими перекрестками оказались различными числами? Если да — укажите эти перекрестки (например, перекресток C находится на пересечении 11-й вертикальной и 6-й горизонтальной улицы), если нет — объясните, почему нельзя.

Решите задачу для

а) $k = 5$; б) $k = 6$; в) $k = 7$.



Данный ответ:

а) Ответ: можно.

Пример:

a - на пересечении 2-ой вертикальной и 2-ой горизонтальной

b - на пересечении 2-ой вертикальной и 3-ой горизонтальной

c - на пересечении 2-ой вертикальной и 5-ой горизонтальной

d - на пересечении 6-ой вертикальной и 6-ой горизонтальной

e - на пересечении 11-ой вертикальной и 5-ой горизонтальной

Заметим, что наибольшее расстояние между двумя точками - 15. Следоватлельно, возможные расстояния: 1, 2, 3, 4, 5,..., 14, 15.

б) Ответ: да

Пример:

a - на пересечении 1-ой вертикальной и 1-ой горизонтальной

b - на пересечении 1-ой вертикальной и 2-ой горизонтальной

c - на пересечении 1-ой вертикальной и 4-ой горизонтальной

d - на пересечении 5-ой вертикальной и 4-ой горизонтальной

e - на пересечении 11-ой вертикальной и 6-ой горизонтальной

f - на пересечении 11-ой вертикальной и 1-ой горизонтальной

в) Если у нас семь точек, то возможных расстояний 6*7/2=21>15. Значит, по принципу Дирихле хотя бы одно значение повтоится. Следоватльно, невозможно.

Ответ: невозможно.