Олимпиада школьников СПбГУ по математике.
Заключительный этап. 2020/2021 учебный год. 10 – 11 классы.

1. В некоторых клетках полоски 1×2021 поставлено по одной фишке. В каждую из пустых клеток записывается число, равное модулю разности количества фишек слева и справа от этой клетки. Известно, что все записанные числа различны и отличны от нуля. Какое наименьшее количество фишек может быть расставлено в клетках?

2. Положительные числа a, b, c таковы, что $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Найдите минимальное значение выражения

$$A = \frac{a^4 + b^4}{c^2 + 4ab} + \frac{b^4 + c^4}{a^2 + 4bc} + \frac{c^4 + a^4}{b^2 + 4ca}.$$

3. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием BC. На продолжении стороны AC за точку C отмечена точка K, и в треугольник ABK вписана окружность с центром в точке I. Через точки B и I проведена окружность, касающаяся прямой AB в точке B. Эта окружность вторично пересекает отрезок BK в точке L. Найдите угол между прямыми IK и CL.

4. На доске написано число 1200. Петя приписал к нему справа $10n + 2$ пятерок, где n — неотрицательное целое число. Вася подумал, что это шестеричная запись натурального числа x, и разложил x на простые множители. Оказалось, что среди них ровно два различных. При каких n это возможно?

5. В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством $6n + 1$, $6n + 3$, $6n + 5$ и $6n + 7$ пиастров, где n — натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?

1	2	3	4	5	Сумма
20	0	0	20	20	60

Задача 1

Пусть стоит n фишек. Найдем какие числа могут быть записаны в пустых клетках.

К - фишек	пусто	n -k – фишек

Модуль((n - k) – k) = Модуль(n – 2 * k)

Следовательно в пустых клетках могут быть записаны числа до n, одинаковой с n четности.

Заметим что если n < 1347 то количество возможных чисел в пустых клетках < ((1347 + 1) / 2) = 674 а пустых клеток > 2021 – 1347 = 674 Значит по принципу Дирихле числа в двух клетках будут совпадать. Покажем что n = 1347 достижимо.

Будем расставлять фишки так 1) пустая 2) фишка 3) фишка (затем повторяем цикл).

Заметим что предпоследняя - пустая, а последняя - с фишкой. (так как 2019 делится на три).

Пустых клеток ровно (2019 / 3) + 1 = 674. Покажем что модуль разности принимает все нечетные значения от 1 до 1347.

Всего фишек 1347 значит в первой пустой 1347. В следующей Модуль(1347 – 1 * 4).

Покажем что любое нечетное l записано.

1) l = 4*k + 3 4 * k + 3 = 1347 – m * 4; m = 336 - k
2) l = 4*k + 1 4 * k + 1 = m * 4 – 1347; m = 337 + k

   k принадлежит [0; 336].

Получим, что для каждого нечетного из 674 различных, мы знаем место, где оно стоит, мест ровно 674, значит числа не повторяются.

Ответ: 1347 фишек

Задача 4

К = 120055…5 (всего 10 * n + 2 пятерки)

Переведем число 1201 из шестеричной в десятеричную. 1201= 17 * 17

К = 1201(00…0 (10 * n + 2 всего нулей)) – 1

К = 17 * 17 * 6^(10* n + 2) – 1 = (17 * 6^(5 * n + 1) – 1) * (17 * 6 ^ (5 * n + 1) + 1)

Обозначим первый множитель за (a) второй за (a + 2)

К = a * (a + 2)

Заметим что n = 0 подходит. К = 101 * 103 (оба множителя простые числа)

Заметим что 6^5 (mod: 101) = (100 ^ (mod:101)) ≡ - 1

17 * 6 (mod:101) = 1

Тогда a =17 * 6 *((6 ^ 5)^n) – 1^(mod:101) ≡ 1 * ((-1)^n) – 1

(a + 2)^(mod:101) ≡ 1 * ((-1)^n) + 1

Если n четное то a делится на 101

Если n нечетное то a + 2 делится на 101

Следовательно если $n >= 1$ то хотя бы одно из чисел a, a + 2 делится на 101, при этом $17 * (6^(5n + 1)) – 1 > 101; n >= 1$

Следовательно одно из чисел является составным. Заметим что a a+2 не делятся на 2 следовательно у них не может быть общих делителей. Поймем что a не равно 101^k

От противного

$101^k = 17 * (6^(5n + 1)) – 1$

$(101^k) + 1 = 17 * (6^(5n + 1))$ Так как $n >= 1$ то $17 * (6^(5n + 1))$ делится на 4.

$((101^k) + 1) \bmod 4 = 2$ (так как $(101^k) \bmod 4 = (1^k) (\bmod 4) = 1$

Поймем что a + 2 не равно (101^k)

От противного

$101^k = 17 * (6^(5n + 1)) + 1$

$(101^k – 1) = 17 * (6^(5n + 1))$

$(101^k – 1) \bmod 100 = 0$ в то время как $17 * (6^(5n + 1))$ не делится на 5 (т.е. $(101^k – 1)$ не делится на 100) следовательно $17 * (6^(5n + 1))$ не делится на 100.

Следовательно при $n >= 1$ либо a либо a + 2 делится на 101 причем, помимо 101 делится еще на одно простое, gcd(a, a+2) = 1 следовательно при $n >= 1$ у $a * (a + 2)$ хотя бы три различных простых делителя.

Ответ: возможно только при n = 0.

Задача 5

Заметим что четным количеством монет можно выдать только четную сумму а нечетным только нечетную.

Утверждение

Пусть мы использовали К монет. Покажем что можно получить любую сумму от 6 * n * К + К до 6 * n * К + 7 * К той же четности что и К.

Факт

Монетами 1 3 5 7 используя их К раз можно получить любую сумму от К до 7 * К той же четности что и К.

Доказательство

По индукции

База К = 1 получить 1 3 5 7 одной монетой можем.

Переход К -> К + 1 Умеем получать от К до 7 * К. Хотим получить от К + 1 до (К + 1) * 7

Алгоритм

Возьмем одну монету так чтобы остаток был от К до 7 * К (четность меняется, всегда можем сделать, взяв 1 или 7)

Корректность

Понятно что ни меньше К ни больше 7 * К получить невозможно (минимальная монета 1 а максимальная 7)

Используя доказанный факт понятно что верно утверждение (6 * n берем всегда + [1 3 5 7])

Теперь поймем какую сумму выдать нельзя.

1. Нечетные суммы
   Умеем выдавать [6 * n + 1, 6 * n+ 7]   [3 * (6 * n + 1),3 * (6 * n+ 7)]   [5 * (6 * n + 1),5 * (6 * n+ 7)]
2. Четные суммы
   Умеем выдавать [2 * (6 * n + 1),2 * (6 * n+ 7)]   [4 * (6 * n + 1),4 * (6 * n+ 7)]   [6 * (6 * n + 1),6 * (6 * n+ 7)]

Не можем выдать сумму X если существует такой К что

$\begin{cases} \mathrm{K} * (6 * \mathrm{n} + 7) < X \\ (K + 2) * (6 * n + 1) > X \end{cases}$ Следовательно К * (6 * n + 7) + 4 <= (К + 2)*(6*n + 1); (так как четность X и $\mathrm{K} * (6 * \mathrm{n} + 7)$ совпадают следовательно X >= $\mathrm{K} * (6 * \mathrm{n} + 7) + 2$. Четности X и К * (6 * n + 1) совпадают следовательно X <= (К + 1) * (6 * n + 1) – 2)

Найдем для каких К это выполнено

(К + 2) * (6 * n + 1) – К * (6 * n + 7) >= 4

12 * n – 2 >= 6 * К

К <= 2 * n – (1/3)

Максимальное К которое подходит равно 2 * n – 1.

Теперь найдем максимальное X

X > (2 * n – 1) * (6 * n + 7) = 12 * n * n + 8 * n – 7

X < (2 * n + 1) * (6 * n + 1) = 12 * n * n + 8 * n + 1

Тогда максимальное X равно 12 * n * n + 8 * n – 1

Ответ: 12 * n * n + 8 * n – 1

Задача 2

Будем пользоваться теоремой Коши

C^2 + 4*a*b <= c^2 + 2(a^2 + b^2) (так как по теорема Коши 4 * a * b <= 2 * a^2 * b^2

Аналогично для a^2 + 4*c*b, b^2 + 4*a*c

(a^4 + b^4) / (c^2 + 4 * a * b) – (a^2 +b^2)/ 2 = -1/2 * ((c^2*(a^2 + b^2)) / (c^2 + 2* (a^2 + b^2))

Сделаем эту операцию для всех остальных слагаемых

A >= -1/2 * (((c^2*(a^2 + b^2)) / (c^2 + 2* (a^2 + b^2)) +((a^2*(b^2 + c^2)) / (a^2 + 2* (c^2 + b^2)) + ((b^2*(a^2 + c^2)) / (b^2 + 2* (a^2 + c^2)) + 3 = -1/2 * ((c^2*(3 – c^2)) / (c^2 + 2*(3 – c^2)) + (a^2*(3 – a^2)) / (a^2 + 2*(3 – a^2)) + (b^2*(3 – b^2)) / (b^2 + 2*(3 – b^2)) + 3