Олимпиада школьников СПбГУ по математике.
Заключительный этап. 2020/2021 учебный год. 10 – 11 классы.

1. В некоторых клетках полоски 1×2100 поставлено по одной фишке. В каждую из пустых клеток записывается число, равное модулю разности количества фишек слева и справа от этой клетки. Известно, что все записанные числа различны и отличны от нуля. Какое наименьшее количество фишек может быть расставлено в клетках?

2. Положительные числа a, b, c таковы, что $a + b + c = 3$. Найдите минимальное значение выражения

$$A = \frac{a^3 + b^3}{8ab + 9 - c^2} + \frac{b^3 + c^3}{8bc + 9 - a^2} + \frac{c^3 + a^3}{8ca + 9 - b^2}.$$

3. Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Пусть K и L — точки пересечения описанной окружности треугольника AOB с прямыми AD и BC соответственно. Найдите отношение $OK : OL$, если известно, что $\angle BCA = \angle BDC$.

4. На доске написано число 12320. Петя приписал к нему справа $10n + 1$ троек, где n — неотрицательное целое число. Вася подумал, что это четверичная запись натурального числа x, и разложил x на простые множители. Оказалось, что среди них ровно два различных. При каких n это возможно?

5. В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством $6n + 1$, $6n + 4$, $6n + 7$ и $6n + 10$ пиастров, где n — натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?

1	2	3	4	5	Сумма
20	15	20	20	0	75

№1

Заметим, что две пустые клетки не могут находиться рядом, так как числа, которые в них запишут будут равны → на полоску поставлены хотя бы 1050 фишек. Но тогда свободных клеток тоже 1050 → присутствуют все возможные разности от 1 до 1050. Но заметим что, разности всегда одной четности, т.к. Если слева уменьшить количество фишек на k,то справа их количество увеличится на k,итого разность измениться на 2k. → возможных разностей не более n/2(т.к 0 не разрешен) ,где n — количество фишек(если n — нечетно — округляем вниз). Тогда свободных мест должно быть не более 1/3 от общего числа мест, так как там должны быть записаны не более n/2 разностей тогда фишки занимают не менее 2/3 мест = 1400 от 2100 мест.
Пример, когда такое работает:O – пустые места, . - фишки.
O.O.O.O – 700 пустых мест и 700 фишек соответственно(чередуются)
и оставшиеся 700 клеток фишки.
Ответ:1400

№3
Так как угол BCA = углу BDC, то им же равны углы ADB, CAB, так как опираются на те же дуги. Также заметим, что угол OLB = углу CAB так как четырехугольник AKLB вписанный, и эти углы опираются на одну дугу. Так как угол CAB = углу BCA → угол OLB = углу BCA → треугольник COL – равнобедренный → CO = OL. Запомним это.
Так как четырехугольник AKLB – вписанный, угол AKB = углу ABO ,который из-за вписанности ABCD = углу DCO. Но тогда заметим, что треугольники DKO и DCO равны по двум углам ODC и KDO и OKD и OCD и стороне DO. Тогда KO = OC.
Тогда отношение искомых отрезков 1,так как они равны.
Ответ: 1

№4
Переведем получившиеся число в десятичную систему счисления
^ - знак степени,*- умножение, 10n =10*n.
получаем:
4^(10n + 5) + 2*4^(10n + 4) + 3*4^(10n + 3) + 2*4^(10n + 2) + 3*(4^(10n) + 4^(10n – 1) … +1)

Заметим, что 3*(4^(10n)+4^(10n-1) … +1) = 4^(10n+1)-1 как разность 10n+1 степеней
вынесем из получившегося числа 4^(10n+1) за скобку, не включая последнюю -1:

4^(10n+1)*(441) – 1 = 2^(20n+2)*3^2*7^2-1 = (2^(10n + 1)*3*7 – 1)*(2^(10n+1)*3*7+1) по формуле разности квадратов.

Итого получаем, что наше число представимо в виде произведения двух нечетных чисел вида 2^(10n+1)*21 – 1 и 2^(10n+1)*21+1.

1024^n*42-1 и 1024^n*42+1.

Заметим, что они различаются на 2 →их нечетные делители не пересекаются(то есть нет равных делителей)
Заметим, что 1024 сравнимо с 40 по модулю 41.
рассмотрим n=0:
41*43 – подходит,так как 41 и 43 простые.
!= - не равно
Пусть n != 0,тогда 1024^n*42+1 кратно 41,но тогда 1024^n*42-1 не кратно 41,т.к. разность 2. Тогда если 1024^n*42+1 не является степенью 41 или 1024^n*42-1 не простое, то такое n не подходит, т.к более 2 различных делителей.
Заметим, что 1024^n*42+1 не является степенью 41,по последней цифре,т.к. последняя цифра 41 1 → последняя цифра 1024^n*42 =0 ,но оно не делится на 5.
Значит n=0, единственный возможный вариант.
Ответ: n=0.

№2

Воспользуемся методом Штурма.
Будем двигать a и b навстречу друг-другу с сохранением суммы:
Рассмотрим первое слагаемое.
Заметим, что a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2), сумма const, произведение возрастает, сумма квадратов убывает, тогда a^2-ab+b^2 = (a+b)^2 – 3ab – убывает.
В знаметеле находится произведение ab, которое возрастает → первое слагаемое убывает.

Рассмотрим оставшиеся два слагаемых.

Заметим, что относительно a и b, они симметричны →когда мы приведем их к общему знаменателю, их можно разбить на пары соответсвующих (симметричных относительно a и b слагаемых) которые являются различными степенями домноженными на коэфициент. Но мы знаем, что симметричные степенные функции при движении с сохранением суммы — уменьшаются(т.к. итоговое значение больше 0) Тогда осталось понять, что знаменатель увеличился. Но это так,так как знаменатель имеет вид (8bc+9-a^2)*(8ac+9-b^2), при сближении a и b множители приблизятся друг к другу с сохранением суммы → он увеличиться → сумма этих двух слагаемых уменьшиться .
Тогда мы доказали,что при сближении a и b выражение A – уменьшается.
Тогда приравняем a и b и ровно такими же рассуждениями приравняем к ним c. Тогда min достигается при a=b=c
И равен: 3/8

Ответ:3/8