Олимпиада школьников СПбГУ по математике.
Заключительный этап. 2020/2021 учебный год. 10 – 11 классы.

1. При каких натуральных n клетчатую доску $n \times n$ можно разрезать на квадраты 1×1 и 2×2 так, что квадратов разных размеров будет поровну?

2. Положительные числа a, b, c таковы, что $a^2b + b^2c + c^2a = 3$. Найдите минимальное значение выражения

$$A = a^7b + b^7c + c^7a + ab^3 + bc^3 + ca^3.$$

3. Дан неравнобедренный остроугольный треугольник ABC. В нем проведены высоты BB_1 и CC_1, пересекающиеся в точке H. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами H и C соответственно касаются прямой AB. Из точки A к ω_1 и ω_2 проведены касательные, отличные от AB. Обозначим точки их касания с этими окружностями через D и E соответственно. Найдите угол B_1DE.

4. Петя написал на доске подряд n последовательных двузначных чисел $(n \geq 2)$, первое из которых не содержит цифру 4, а последнее — цифру 7. Вася подумал, что это десятичная запись натурального числа x, и разложил x на простые множители. Оказалось, что их всего два и они различаются на 4. Что написано на доске?

5. В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством 3^n, $3^{n-1} \cdot 5$, $3^{n-2} \cdot 5^2$, $3^{n-3} \cdot 5^3$, $\ldots$, $3 \cdot 5^{n-1}$, 5^n пиастров, где n — натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?

1	2	3	4	5	Сумма
20	20	15	10	0	65

Задача 1,Если квадратиков 2 на 2 и 1 на 1 будет одинаково,тогда , рассмотрим количество клеток в них , если квадратов 2 на 2 и 1 на 1 будет x ,тогда квадратиков в квадратах 2 на 2 будет 4*x,а в квадратах 1 на 1 будет ровно x квадратов ,всего квадратиков 4x + x = 5 *x, из этого следует что N должно делитьться на 5 так как всего квадратов N * N.Что если N делится на 5 и делится на 2 , тогда очевидно что можно весь квадрат разбить на квадраты 2 на 2 так как N четное ,поэтому ,если N делится на 2 можно разбить так как сказано в условии ,потому что можно разместить N /5 квадратов 2 на 2 ,а остальную часть разбить на квадраты 1 на 1 и их будет поровну , что если N нечетное ,тогда в квадрат N на N при N равыном 5 нельзя разместить квадраты так чтобы соблюдалось условие , так как возьмем квадрат 5 на 5 а отметим каждую клетку как в игре морской бой ,левая верхняя 1;1 , правая нижняя 5;5.Теперь покрасим клетки 2;2 4;2 2;4 4 ; 4 в белый цвет ,а все остальное в черный ,тогда в каждом квадрате 2 на 2 есть ровно одна белая клетка , поэтому квадратов 2 на 2 не больше 4 , а квадратов 1 на 1 больше 4 не подходит что если N > 5 , тогда в кадрат N на N можно разместить не меньше чем ((N-1)(N-1))/4 квадрата 2 на 2 ,так как если убрать верхнюю строку и правый столбец мы получаем квадрат N-1 на N -1 , где N -1 четное ,а так как ((N-1)(N-1))/4 >(N*N)/5 при N >=10, можно разместить квадраты так чтобы условие выполнялось ,Ответ при N >5 и N которые делятся на 5

Задача 3 , проведем отрезки ED;C1D;HB1;HA ;HE, угол AC1C = углу ADC =углу AEH = 90 , так как AD ;AE;AC1 касательные к двум окружностям ,отметим угол EAC за Z , а угол C1AE за X,а угол ACC1 за Y, тогда Z+X+Y = 90, так как угол AEH = углу AC1H= 90 , четырехугольник AC1HE вписанный так как сумма противоположных уголов равна 180,а также AC1 = AE так как это касательные и HC1 =HE так как это радиусы поэтому треугольники AC1H и AHE равны ,поэтому угол C1AH= углу HAE = X/2,а также угол AHC1 = углу AHE = (Z +Y +X/2) , так как сумма углов C1AE и угла C1HE должна быть 180 градусов,угол AHB1 = Y +X/2, так как угол B1AH = Z+X/2 в сумме с углом AHB1 дают 90 градусов , а так как угол AEH = углу AB1H = 90 ,поэтому четырехугольник AHEB1 вписанный так как углы опираются на одну дугу ,из этого следует , что угол AHB1 = углу AEB1 = Y +X/2, а так как AD = AE в треугольнике AED угол AED=(180 – угол DAE)/2, все это равняется (180-2*Z -X)= Y +X/2, поэтому угол AED = углу AEB1 , значит B1 лежит на ED . Значит угол B1DE = 0 градусов .Что и требовалось доказать

Задача 4 ,число x делится на 2 простых множителя которые отличаются на 4 , это не может быть 2 , так как 6 не простое , это не может быть 5, так как 9 и 1 не простые , значит они оканчиваются на 3 и 7 или 7 и 1 , если они оканчиваются на 7 и 1 то последняя цифра числа x это 7 чего не может быть по условию , значит последнии цифры друх простых множителей это 7 и 3 , значит последние две цифры чила x это 21, значит есть несколько вариантов чисел x, числа :
2021;192021;18192021;1718192021;161718192021;15161718192021;13141516171819202 1;1213141516171819202 1;111213141516171819202 1;10111213141516171819202 1;среди них подходит только одно число 2021= 43*47.Что и требовалось доказать .

Задача 2 ,c^7*a +c*a^3 >=2*c^4*a^2 , по неравевству о средних , среднее арифм больше среднего геометрического,поэтому b^7*c +b*c^3+ c^7*a +c*a^3+ a^7*b +a*b^3 >=2*c^4*a^2+ 2*b^4*c^2 + 2*a^4*b^2. Теперь по неравенству КБШ имеем что (1 +1+ 1)(a^4*b^2 +c^4*a^2 +b^4*c^2)>=(a^2*b + b^2*c +c^2*a)^2=9;из этого следует,что (a^4*b^2 +c^4*a^2 +b^4*c^2)>=3;поэтому b^7*c +b*c^3+ c^7*a +c*a^3+ a^7*b +a*b^3 >=2*c^4*a^2+ 2*b^4*c^2 + 2*a^4*b^2>=3*2=6, равенство достигается если a = b =c = 1, что и требовалось доказать .