Олимпиада школьников СПбГУ по математике.
Заключительный этап. 2020/2021 учебный год. 10 – 11 классы.

1. При каких натуральных n клетчатую доску $n \times n$ можно разрезать на прямоугольники 1×1 и 2×3 так, что прямоугольников разных размеров будет поровну?

2. Положительные числа a, b, c таковы, что $a^2b + b^2c + c^2a = 3$. Найдите минимальное значение выражения

$$A = \frac{\sqrt{a^6 + b^4c^6}}{b} + \frac{\sqrt{b^6 + c^4a^6}}{c} + \frac{\sqrt{c^6 + a^4b^6}}{a}.$$

3. Вокруг остроугольного треугольника ABC описана окружность. Точка K — середина меньшей дуги AC этой окружности, а точка L — середина меньшей дуги AK этой окружности. Отрезки BK и AC пересекаются в точке P. Найдите угол между прямыми BC и LP, если известно, что $BK = BC$.

4. Петя написал на доске подряд в убывающем порядке n последовательных двузначных чисел, последнее из которых не содержит цифру 7. Вася подумал, что это десятичная запись натурального числа x, и разложил x на простые множители. Оказалось, что их всего два и они различаются на 4. Что написано на доске?

5. В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством 2^n, $2^{n-1} \cdot 3$, $2^{n-2} \cdot 3^2$, $2^{n-3} \cdot 3^3$, $\ldots$, $2 \cdot 3^{n-1}$, 3^n пиастров, где n — натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?

1	2	3	4	5	Сумма
20	3	20	20	0	63

Задача 1

Пусть у нас к прямоугольников 1x1 и к прямоугольников 2x3. Тогда всего в квадрате nxn будет 1к+6к=7к клеток. Так как всего клеток n*n то получаем что n*n равно 7к. Отсюда следует, что n делится на 7. Значит чтобы можно было так разрезать квадрат n должно делиться на 7. Докажем что при любом n делящемся на 7 квадрат можно разрезать.

Заметим, что можно разрезать полоску 7x2 (7 строк, 2 столбца) на 2 прямоугольника 3*2 и две клетки 1x1. Полоску 7x3 можно разрезать на 3 прямоугольника 2x3 и три клетки 1x1.

Поскольку n делится на 7 можно представить n=7к. Тогда весть квадрат можно разбить на к горизонтальных полос размерами 7xn. Каждую такую полосу мы можем разрезать на прямоугольники 7x2 и 7x3 так как любое натуральное n большее 1 может быть представлено как сумма нескольких слагаемых по 2 и 3. Действительно, для четных n мы можем разбить n на несколько слагаемых по 2, а для нечетных n , т е для n=2d+1 мы можем представить n как сумму 1 тройки и d-1 двоек, т к d в этом случае хотя бы 1.

Таким образом мы разбиваем весь квадрат на прямоугольники размерами 7x2 и 7x3 и каждый из таких прямоугольников разбиваем на равное кол-во прямоугольников 1x1 и 2x3. Тогда получим что и весь квадрат разбит на равное кол-во прямоугольников 1x1 и 2x3 что и требовалось.

Ответ: n кратные 7.

Задача 2.

Докажем что выражение из условия больше либо равно 3sgrt(2).

В решении sqrt(x) – квадратный корень из x, x^y – x в степени y.

Докажем, что:

sqrt(a^6 + b^4*c^6)/b + sqrt(b^6+c^4*a^6)/c + sqrt(c^6+a^4*b^6)/a >= 3sqrt(2).

Разделим обе части на sqrt(2), получим:

sqrt((a^6 + b^4*c^6)/2)/b + sqrt((b^6+c^4*a^6)/2)/c + sqrt((c^6+a^4*b^6)/2)/a >= 3

По неравенству о среднем квадратическом и среднем арифметическим : $\sqrt{(a^2+b^2)/2} >= (a+b)/2$. Применим это неравенство в числителях в нашем выражении, получим:

$\sqrt{(a^6 + b^4*c^6)/2}/b + \sqrt{(b^6+c^4*a^6)/2}/c + \sqrt{(c^6+a^4*b^6)/2}/a >=$

$>=(a^3 + b^2*c^3)/2b +(b^3+c^2*a^3)/2c + (c^3+a^2*b^3)/2a$.

Докажем что полученное выражение больше либо равно 3.

По условию $3=a^2*b + b^2*c + c^2 *a$, подставляем это в правую часть и домножаем обе части на 2, получаем что надо доказать:

$(a^3 + b^2*c^3)/b +(b^3+c^2*a^3)/c + (c^3+a^2*b^3)/a >=2(a^2*b + b^2*c + c^2 *a)$

Заметим, что по неравенству о среднем арифметическом и геометрическом $(x+y)>=2\sqrt{xy}$. Тогда получаем:

$a^3/b +a^2*b^3/a >=2 \sqrt{(a^3*a^2*b^3)/(b*a)}=2\sqrt{a^4*b^3}=2a^2*b$

Аналогично получаем еще 2 неравенства:

$b^3/c+b^2*c^3/b>=2b^2*c$

$c^3/a+c^2*a^3/c>=2c^2*a$

Складывая эти 3 неравенства мы как раз и получаем то, что надо было доказать. Надо заметить что все неравенства о средних и переходы мы делали на условии того что числа по условию положительные.

Таким образом мы доказали, что исходное выражение больше либо равно $3\sqrt{2}$, это значение достигается при $a=b=c=1$, тогда каждая из трех дробей будет равна $\sqrt{2}$ и соответственно их сумма будет $3\sqrt{2}$.

Ответ: $3\sqrt{2}$.

Задача 3.

Обозначим величину угла BAC за x, а величину угла ABC за 2y. Тогда, т к K – середина дуги AC, то углы ABK и CBK равны, поэтому BK – биссектриса угла ABC. Значит углы ABK и CBK равны и равны y.

Четырехугольник ABCK вписанный, поэтому угол BKC равен углу BAC и равен x, а угол ACK равен углу ABK и равен y. Заметим, что по условию

ВК=ВС, поэтому ВКС равнобедренный, значит углы ВСК и ВКС равны и равны х.

Мы пользуемся тем что треугольник остроугольный говоря, что меньшая дуга АС это та на которой не лежит точка В так как угол В по условию острый, поэтому точка К лежит на дуге АС не содержащей точку В, отсюда следует что угол ВСК больше угла ВСА.

Угол ВСА равен разности углов ВСК и АСК то есть равен х-у. Посчитаем сумму углов в треугольнике АВС: она равна х+2у+х-у=2х+у. Значит 2х+у =180 градусов.

Заметим, что в треугольнике АВР угол АВР равен у, а угол ВАР равен х, значит угол АРВ равен 180-х-у=х. Получаем что треугольник ВАР равнобедренный с основанием АР. В треугольнике КСР угол КСР равен у, угол РКС равен х, а угол КРС равен углу АРВ равен х. Поэтому КСР равнобедренный с основанием КР.

Из того что L – середина дуги АК следует что BL- биссектриса угла АВК, то есть биссектриса угла АВР в треугольнике АВР, а так как он равнобедренный, то прямая BL будем так же содержать высоту и медиану, отсюда следует что BL перпендикулярна АР. Аналогично CL – биссектриса равнобедренного треугольника КСР поэтому CL перпендикулярна КР.

Таким образом мы получили, что ВК перпендикулярна CL и СА перпендикулярна BL. Отсюда следует, что ВК и СА содержат высоты треугольника BCL, а значит точка Р – ортоцентра в треугольнике BCL. Отсюда следует что LP содержит высоту этого треугольника, то есть LP перпендикулярна ВС, то есть угол между ВС и LP равен 90 градусов.

Ответ: 90 градусов.

Задача 4.

Пусть р и р+4 – простые числа произведение которых записано на доске. Очевидно р не равно 2 т к тогда р+4=6 –не простое. Значит р – нечетное простое и р+4 тоже тогда нечетное простое.

Давайте найдем последнюю цифру числа р. Она нечетная, то есть из набора 1,3,5,7,9. Заметим, что это не цифра 5, т к тогда р делится на 5, а так как р – простое то тогда р равно 5, а р+4=9 – не простое.

Значит осталось 4 варианта для последней цифры числа р. Рассмотрим тогда последнюю цифру числа р(р+4). Если последняя цифра р равна 1, то у р+4 это 5, тогда у р(р+4) это 1*5 =5. Тогда получаем р(р+4) делится на 5. А так как это произведение двух простых чисел то значит одно из них равно 5. Р не равно 5 по ранее доказанному. Р-4 тоже не равно 5 т к тогда р=1 – не простое.

Получаем противоречие значит последняя цифра у р не 1.

Если последняя цифра у р равна 7, то у р+4 она равна 1, тогда по модулю 10 у р(р+4) остаток 7, т е последняя цифра записанного числа равна 7, а это противоречит условию.

Если последняя цифра у р равна 9, то у р+4 она равна 3, тогда по модулю 10 р(р+4) сравнимо с 3*9=27 , т е последняя цифра записанного числа равна 7, а это противоречит условию.

Значит последняя цифра у числа р равна 3, а у р+4 она тогда равна 7.

Запишем р=10к+3, р+4=10к+7.

Тогда р(р+4)=(10к+3)(10к+7)=100к*к +30к +70к+21 = 100(к*к+к)+21. Получаем что последние 2 цифрф числа р(р+4) равны 21. Значит последнее записанное число равно 21.

Докажем что это единственное записанное число.

Заметим, что если если р(р+4) кратно 3 то либо р либо р+4 равно 3 т к это простые числа. Р+4 очевидно не равно 3, а если р равно 3, то тогда на доске написано число 3*7=21.

Если же р(р+4) не кратно 3 то сумма цифр этого сила не кратна 3, заметим что остаток суммы цифр по модулю 3 всего числа сравним по модулю 3 с суммой остатков по модулю 3 сумм цифр всех двухзначных чисел то есть с суммой отсатков по модулю 3 всех двузначных чисел. Заметим, что так как эти числа подряд идущие то остатки в них идут по циклу, причем заканчиваем мы числом 21 с остатком 0 и числа идут по убыванию, поэтому последовательность остатков имеет вид …2, 1, 0, 2, 1, 0. Заметим, что если кол-во чисел кратно 3 то сумма остатков это несколько раз по 2+1+0=3, т е имеет остаток 0 что нам не подходит. Если кол-во чисел имеет вид 3к+1, то сумма остатков равна к(2+1+0) +0, то есть тоже кратна 3 и нам не подходит. Если же кол-во имеет вид 3к+2, то сумма остатков равна к(2+1+0)+1+0, то есть сравнима с 1 что подходит. Значит у числа записанного на доске остаток 1 по модулю 3.

Обозначит число на доске за 100м+21, то есть м – это число на доске без двух последних цифр. Тогда остаток числа по модулю 3 равен остатку по модулю 3 числа м , т к 21 делится на 3, а 100 сравнимо с 1 по модулю 3, т е число 100м+21 сравнимо с м по модулю 3. Значим у м остаток 1 по модулю 3.

При этом р(р+4)=100м+21. Запишем это как квадратное уравнение относительно р.

р*р +4р –(100м+21)=0 Посчитаем дискриминант. Чтобы нашелся целый корень дискриминант должен быть полным квадратом.

Д=16+4(100м+21)=16+400м+84=400м+100=100(4м+1).

Т к 100 –полный квадрат, то 4м+1 должно быть полным квадратом. Но 4м+1 дает остаток 2 по модулю 3 т к сравнимо с 4*1+1=5 что сравнимо с 2.

Но у квадратов натуральных чисел по модулю 3 всегда остаток либо1 либо 0 (для кратных 3 это 0, для числа с остатком 1 квадрат дает остаток 1*1=1, для числа с остатком 2 квадрат дает остаток 2*2=4 сравнимо с 1) – получили противоречие. Значит случай р(р+4) не кратно 3 невозможен, поэтому р(р+4)=21 – единственное решение. То есть на доске записано число 21, а простые числа – это 3 и 7.

Ответ: 21.

Задача 5

Обозначим f(n) – минимальное такое число, что банк может выдать любую сумму от f(n) выше.

Заметим, что чтобы выдать нечетную сумму денег, банк должен выдать хотя бы 1 монеты ценой в 3^n, т к номинал всех остальных монет четный.

Чтобы банк смог выдать нечетное число монет оно должно быть вида 3^n+m, при этом m – четное число. Пусть m<2*3^n. Тогда банк не может больше использовать монеты по 3^n так как тогда не получится нечетная сумма. Значит сумму m=2k банк набирает четными монетами. Заметим что четные монеты это те же монеты, что в случае когда вместо n стоит n-1 только умноженные на 2, то и сумма у нас равна 2k. Значит сумму к мы должны уметь набирать в случае n-1, поэтому k>=f(n-1). Получаем

$f(n) \geq m \geq 3^n+2f(n-1)-1$, мы вычитаем 1 т к мы посчитали минимальную нечетную сумму, а есть еще четные суммы.

Мы получаем рекурсивную формулу для $f(n)$:

$f(n)=3^n+2f(n-1)-1$. Мы можем получить любое четное больше либо равное $2f(n-1)$ поэтому с четными числами проблем также не будет.