Олимпиада школьников СПбГУ по математике.
Заключительный этап. 2020/2021 учебный год. 10 – 11 классы.

1. Натуральные числа от 1 до 2021 записаны в ряд в некотором порядке. Оказалось, что у любого числа его левый и его правый сосед имеют разную четность. Какое число может быть на первом месте?

2. При $a, b, c > 0$ найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{(a+b+c)^3 - 26abc}.$$

3. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B, а окружность с центром в точке O охватывает окружности ω_1 и ω_2, касаясь их в точках C и D соответственно. Оказалось, что точки A, C и D лежат на одной прямой. Найдите угол ABO.

4. Петя написал на доске подряд n двузначных восьмеричных чисел ($n \geq 2$), образующих арифметическую прогрессию с разностью -8. Вася подумал, что это восьмеричная запись натурального числа x, и разложил x на простые множители. Оказалось, что их всего два, и они различаются на 6. Что написано на доске?

5. В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством $3n - 1$, $6n + 1$, $6n + 4$ и $6n + 7$ пиастров, где n — натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?

1	2	3	4	5	Сумма
20	20	20	0	0	60

Задача № 2.
Ответ: 3
Решение:
Пример :
Пусть a = 1 b = 1 c = 1 тогда a ^3 + b^3 + c ^3 = 3 и (a+b+c)^3 -26abc = 1, тогда A= 3/1 = 3
Оценка: Пусть A> 3.
Тогда (a ^3 + b^3 + c ^3)/((a+b+c)^3 -26abc) > 3 (неравенство **)
По условию a,b,c > 0.Тогда мы можем применять нер-во Коши для n чисел.
(a+b+c)^3 -26abc = a ^ 3 + b^3 + c ^ 3 + 3*(a^2*b+a^2*c+b^2*a+b^2*c+c^2*a+c^2*b) + 6abc-26abc = a ^ 3 + b^3 + c ^ 3 + 3*(a^2*b+a^2*c+b^2*a+b^2*c+c^2*a+c^2*b) – 20abc
По нер-ву Коши a ^ 3 + b^3 + c ^ 3 >= 3*корень ст 3(a^3*b^3*c^3) = 3abc
По нер-ву Коши a^2*b+a^2*c+b^2*a+b^2*c+c^2*a+c^2*b >= 6* корень ст 6(a^6*b^6*c^6)= 6abc
Значит a ^ 3 + b^3 + c ^ 3 + 3*(a^2*b+a^2*c+b^2*a+b^2*c+c^2*a+c^2*b) – 20abc >= 3abc + 3*6abc-20abc = abc > 0 (по усл) Значит знаменатель положительный,тогда домножим обе части неравенства ** на знаменатель → a ^3 + b^3 + c ^3 > 3*((a+b+c)^3 -26abc) = 3*(a ^3 + b^3 + c ^3) + 9*(a^2*b+a^2*c+b^2*a+b^2*c+c^2*a+c^2*b) – 3*20abc ↔ взаимно уничтожается по a ^ 3 + b^3 + c ^ 3 и переносим в другую часть 60abc ,получаем :
60abc > 2*(a ^ 3 + b^3 + c ^ 3) + 9*(a^2*b+a^2*c+b^2*a+b^2*c+c^2*a+c^2*b) >= 2*(3abc) + 9*(6abc) = 60abc (воспользовались нер-вом Коши как и ранее) Получается 60abc>60abc.
Противоречие. Значит A <= 3. Оценка доказана.

Задача № 3
Ответ: угол ABO= 90
Решение: окружность с центром точкой O- q
Проведем общие касательные к окружностям w1 и q — прямая a; w2 и q — прямая b ,в точках C и D соответственно.
1)Пусть a и b параллельны . Возьмем тогда такие точки X и Y на прямых a и b соответственно,чтобы они находились в разных полуплоскостях с точкой B относительно прямой CD.
Из параллельности угол XCD + угол YDC= 180
Так как CX касательная к w1, то угол XCD = угол CBA(по теореме об угле между касательной и хордой.)
Так как YD касательная к w2, то угол YDC= угол DBA(по теореме об угле между касательной и хордой.)
Получается угол CBA + угол DBA = 180 → точки C, B, D лежат на 1 прямой , но тогда по условию же точки C,A,D лежат на 1 прямой. Тогда на окружности w1 есть три точки A,B,C лежащие на 1 прямой → Плохо. Значит a , b – не параллельны.
2)Пусть a и b пересекаются в точке Y. Так как YC и YD касательные,то YC= YD →
угол DCY= угол YDC = x1 → угол CYD=180-2x1.
(C, A,D – лежат на 1 прямой по условию).
Угол DCY= угол ACY = x1 и угол ACY = угол ABC = x1 (по теореме об угле между касательной и хордой.)
Аналогично получается, что угол YDC= угол YDA и угол YDA = угол DBA = x1.
→ угол DBA + угол ABC = угол DBA= 2*x1.
Так как CY   и YD касаются q , то OC перпендикулярно CY и OD перпендикулярно YD → точки Y,D,O,C – лежат на 1 окружности. → угол DOC = 180 – угол CYD = 180-(180-2x1) = 2*x1
Получили , что угол DOC = угол DBA= 2*x1 ->точки D,O,B,C – лежат на 1 окружности. →

угол OBD= угол OCD= x2 . Так как т.O центр q , то OC=OD → угол OCD = угол CDO= x2
Посмотрим на треугольник OCD сумма его углов равна x2 + x2 + 2*x1 = 180 → x1 + x2 = 90
.Угол OBA = угол OBD + угол DBA = x1 + x2 = 90
Значит ответ 90 градусов. Можем считать, что счет был в направленных углах.

Задача № 1.
Ответ : Все нечетные числа от 1 до 2021(включая 2021).
Решение: - Н- нечетное число , Ч — четное число . У нас в списке 1010 Ч и 1011 Н.
Пусть в ряде есть ЧЧ → следующее число Н ,тк должны быть соседи разной четности по условию и после ЧЧН тоже еще 1 Н (если ряд не закончен) ,тк должны быть соседи разной четности по условию. То есть после ЧЧ будут НН если ряд не закончился.
Аналогично если в ряде НН ,то потом ЧЧ.(доказывается так же)
Пусть на первом месте любое Н. Тогда предъявим пример подходящего ряда.->
НН ЧЧ НН ЧЧ НН …...НН ЧЧ Н.Где многоточие там чередование двух НН с ЧЧ.Тк 2020 делится на 4 ,то будет одинаковое число пар ЧЧ и НН. Значит пар будет по 505 и в конце одно последнее нечетное число . Заметим, что условие того ,что соседи разной четности соблюдается. Пример построен . Значит на первом месте может быть любое Н число.
Пусть на первом месте может быть Ч,рассмотрим такой ряд .

1) на втором Ч
   Тогда использую ранее доказанный факт после ЧЧ — НН и так далее получаем ,что наш ряд это чередование ЧЧ и НН ,начиная с ЧЧ ,тогда на 2019-ом и 2020-ом месте будут НН ,тк 2020 делится на 4, но тогда осталось всего одно Н число и оно значит на последнем месте. Но тогда условие для 2020-ого числа не выполняется,тк оба его соседи Н.Противоречие.
2) на втором Н
   Получается ЧН ,тогда следующее число Н ,тк соседи должны быть разной четности.

Значит ЧНН , а далее по раннее доказанному значит будет чередование НН с ЧЧ.
Ч НН ЧЧ НН ЧЧ …... тк 2020 делится на 4 , то на 2020-ом и 2021-ом месте будут ЧЧ. Тогда общее кол-во Ч больше ,чем кол-во Н . Противоречие.
Значит на первом месте четное число не может быть.

Задача № 4
Решение :
Пусть первое число последовательности a0 = 8z + y (в десятичной записи и z,y < 8)и получается zy в восьмиричной записи .Тогда заметим, что тогда последовательность будет вида 8z+y, 8(z-1)+y, 8(z-2)+y, ….. 8(z -n +1) + y.
Вася подумал что это восьмиричная запись числа числа x, то есть это число (8z+y)*8 ^(2n-2) + (8(z-1) + y)*8^(2n-4) + …... (8(z – n + 1) + y)*8^ 0 = p*(p+6) (это уже перевели число в десятичную систему и по условию это число — произведение двух простых чисел с разностью 6 ,те p и p+6)
Заметим ,что левая часть равенства по модулю 8 имеет остаток y, а правая ?
Заметим, что тк p и p+ 6 простые и одинаковой четности ,то они нечетные . Значит p по модулю 8 может давать остатки 1 ,3,5,7 → p*(p+6) = 1*7; 3*1; 5*3; 7*5 = 3 ; 7 по модулю 8
Значит y равен либо 3, либо 7. Значит наша последовательность это n подряд идущих чисел либо из последовательности 73,63,53,43,33,23,13 -(числа в 8ой записи и двузначные) , либо 67,57,47,37,27,17 - (числа в 8ой записи и двузначные).

Заметим ,что p по модулю 3 дает остаток 1 либо 2 иначе 0 ,но тогда $p+6$ делится на 3 и больше 3 и простое,плохо. Тогда $p*(p+6) = 1*7; 2*8 = 1$ по модулю 3.
Рассмотрим последовательность 73,63,53,43,33,23,13 .Пусть из нее в ряд выписано n чисел. $(8z+3)*8^{(2n-2)} + (8(z-1) + 3)*8^{(2n-4)} + \ldots (8(z-n+1) + 3)*8^0 = p*(p+6) = 1$ по модулю 3 Заметим ,что $(8z+3)*8^{(2n-2)} + (8(z-1) + 3)*8^{(2n-4)} + \ldots (8(z-n+1) + 3)*8^0 = (8z)*8^{(2n-2)} + (8(z-1))*8^{(2n-4)} + \ldots (8(z-n+1))*8^0 = z*8^{(\text{нечетной})} + (z-1)*8^{(\text{нечетной})} + \ldots + (z-n+1)*8^{(\text{нечетной})} = 2*(z + (z-1) + \ldots + (z-n+1))$ по модулю 3. и это с другой стороны 1 по модулю 3 $\rightarrow z + (z-1) + \ldots + (z-n+1) = 2$ по модулю 3. $n >= 2$ по условию
То есть из последовательности 7,6,5,4,3,2,1 = 1,0,2,1,0,2,1 по модулю 3 выбрали несколько подряд идущих чисел , а именно n и их сумма должная давать остаток 2 по модулю 3. Заметим,что сумма любых 3-х подряд идущих делится на 3. Значит либо n по модулю 3 равен 1 и тогда последовательность из n чисел разбивается на тройки чисел (из 0 1 2 в каком то порядке и их сумма делится на 3) и еще одна 2 ,либо n по модулю 3 = 2 ,тогда последовательность из n чисел разбивается на тройик чисел (из 0 1 2 в каком то порядке ,и их сумма делится 3) и еще два числа , а именно 0 и 2 ,чтобы сумма давала остаток 2 по модулю 3 . Получается это либо (6,5), либо(3,2), либо(6,5,4,3,2), либо(5,4,3,2). То есть возможные числа x ,которые могли быть записаны на доске это 6353, 3323,6353433323, 53433323 — в 8-ой записи.
Посмотрим на остатки по модулю 7 числа $p*(p+6)$, (p не равно 0 по модулю 7,только если $p = 7$ и $p+6 = 13$, и $p+6$ не равно 0 по модулю 7 иначе $p+6 = 7 \rightarrow p = 1$ плохо)
$p*(p+6) = 0*6$(особый случай) ; $1*0$(плохо); $2*1$; $3*2$; $4*3$;$5*4$;$6*5 = 0;2;6;5$ по модулю 7 .
Посмотрим на число 6353 в 8-ой системе . Оно по модулю 7 дает остаток $6 + 3 + 5 + 3 = 3$, тк 8 по модулю 7 равно 1. И это число получается не подходит ,тк остаток другой.
Число 3323 в 8-ой записи по модулю 7 дает остаток $3 + 3 + 2 + 3 = 4$.Плохо,тк не 2,5,6.
Число 53433323 в 8-ой записи по модулю 7 дает остаток $5 + 3+4+3+3+3+2+3 = 5$. Возможно подходит.
Число 6353433323 в 8-ой записи по модулю 7 дает остаток $6+3+5+3+4+3+3+3+2+3 = 0$.Особый случай возможен только если $p = 6$, но число 6353433323 в 8-ой записи больше числа $6*13$ в десятичной . Значит не подходит.
Значит если $y = 3$,то может подходить только возможно число $x = 53433323$.

Задача № 5.
Решение :
$3n-1, 6n+1, 6n+4, 6n+7$
$3n-1 + 6n + 1 = 9n$. Значит банк может выдать любую сумму вида $9nk$ (k — целое , не отрицательное)
Пусть $X = 9nq + 3p$, где $3p$ остаток по модулю $9n$,те $3p < 9n \rightarrow p <= 3n - 1$
Если $q >= p$ Тогда $X = 9n(q-p) + p*(3n-1 + 6n+4)$ – банк может выдать . Значит $q <p <= 3n- 1 \rightarrow q<=3n-2 \rightarrow X<= 9n(3n-2)+3(3n-1) = 27n^2 -9n-3$
Пусть $X = 9nq + (3p +1)$ и $3p + 1 < 9n \rightarrow p<= 3n-1$.
$X = 9n(q-1) + (6n+4) + (3n+3p-3) = (6n+4) + 9n(q-1) + 3*(n + p - 1)$ и банк может выдать эту сумму если $q-1>= n + p - 1 \leftrightarrow q >= n + p$. Тогда если $q <= n+p - 1 <= 4n-2$,то возможно число X нельзя выдать в банке .