Олимпиада школьников СПбГУ по математике.
Заключительный этап. 2020/2021 учебный год. 10 – 11 классы.

1. При каких натуральных n клетчатую доску $n \times n$ можно разрезать на прямоугольники 1×1 и 2×3 так, что прямоугольников разных размеров будет поровну?

2. Положительные числа a, b, c таковы, что $a^2b + b^2c + c^2a = 3$. Найдите минимальное значение выражения
$$A = \frac{\sqrt{a^6 + b^4c^6}}{b} + \frac{\sqrt{b^6 + c^4a^6}}{c} + \frac{\sqrt{c^6 + a^4b^6}}{a}.$$

3. Вокруг остроугольного треугольника ABC описана окружность. Точка K — середина меньшей дуги AC этой окружности, а точка L — середина меньшей дуги AK этой окружности. Отрезки BK и AC пересекаются в точке P. Найдите угол между прямыми BC и LP, если известно, что $BK = BC$.

4. Петя написал на доске подряд в убывающем порядке n последовательных двузначных чисел, последнее из которых не содержит цифру 7. Вася подумал, что это десятичная запись натурального числа x, и разложил x на простые множители. Оказалось, что их всего два и они различаются на 4. Что написано на доске?

5. В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством 2^n, $2^{n-1} \cdot 3$, $2^{n-2} \cdot 3^2$, $2^{n-3} \cdot 3^3$, $\ldots$, $2 \cdot 3^{n-1}$, 3^n пиастров, где n — натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?

1	2	3	4	5	Сумма
20	20	0	5	10	55

1.

Заметим, что если прямоугольников разного вида поровну, то кол-во клеток всей доски делится на сумму клеток в этих прямоугольников, значит n^2 кратно 6+1=7, значит n кратно 7.

Покажем, что при n кратном 7, так разбить на прямоугольники можно, для этого достаточно показать, что можно разбить квадрат 7x7, т.к. при n кратном 7, доска разбивается на квадраты 7x7:

Выделим прямоугольник 6x7, он разбивается на 2 полоски 2x6, и одну 3x6, каждая из них, очевидно разбивается на прямоугольники 2x3, остальные 7 клеток покрываются 7-ю единичными квадратами. Мы разбили квадрат 7x7 на прямоугольники по 7 каждого вида, значит, мы можем разбить любой квадрат при n кратном 7.

Ответ: при n кратном 7.

2.

Применим для каждого выражения под корнем, неравенство между средним квадратичным и средним арифметическим.

$A \geq \frac{1}{\sqrt{2}}((a^3 + b^2c^3)\frac{}{b} + (b^3 + c^2a^3)\frac{}{c} + \frac{c^3+a^2b^3}{a})$.

Далее для применим неравенство Коши суммы $\frac{a^3}{b} + a * b^3 \geq 2a^2b$ и для ей аналогичных и получим:

$$A \geq \frac{2a^2b + 2b^2c + 2c^2a}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

Равенство достигается при a=b=c=1.

Ответ: $3\sqrt{2}$.

3.

Дуги AK и KC равны, значит BL- биссектриса угла ABC.

BK=BC, значит BK и BC симметричны относительно диаметра BO, значит BO делит дугу KC пополам, угол KBC равен половине угла KBC равен углу BAC/4, BO изогонально сопряжен BH, значит BH тоже биссектриса угла ABK, значит проходит через точку L середину дуги AK. Тогда BH – высота и биссектриса в треугольнике ABP, значит она медиана. Отразим L относительно H, попадем в ортоцентр X, тогда ALPX- параллелограмм, т.к. его диагонали делятся пополам. значит LP параллельно высоте AX(противоположные стороны параллелограмма), значит, т.к. AX перпендикулярно BC, LP тоже перпендикулярно BC

Ответ: 90

4 .

При n=1, один из простых делителей не больше 10, значит меньший простой делитель это 3 или7(у остальных нет простых делителей отличных на 4), если это 7, то второ1 делитель 11, значит на доске число 77, оно оканчивается на7, значит нам не подходит. Если простой делитель 3, то второй это 7, значит наше число 21, оно нам подходит.

Также при n кратном 3, сумма цифр будет кратна 3, т.к. у последовательных чисел идет цикл остатков длины 3, в сумме все 3 остатка дают 0 по модулю 3, и всех остатков поровну. Значит полученное число кратно 3, а этот случай уже рассмотрен. Значит n не кратно 3.

Последняя цифра в числе не может быть четным или 5, т.к. тогда оно делится на 2 или5, а такое невозможно. Значит последняя цифра равна 1,3 или 9.

Пусть Ax- число, в котором чередуются x единиц и x-1 нулей. Тогда если наше число состоит из n двузначных, и первое это a, то его можно представить как a*An-(A(n-1)+A(n-2)…..+(A1))

Ответ:21

5.

Докажем по индукции, что наибольшая сумма $3^{n+1} - 2^{\mathrm{n+2}}$:

База: при n=1, даны числа 2 и 3 из них можно получить любое число больше 1 т.к. если число четное, оно равно 2x, если нечетное и больше 1, то оно равно 3+ 2x (x-какое-то натуральное число), значит наибольшее число это 1, база работает.

Переход от n к n+1: Допустим для n утверждение верно, докажем для n+1.

Заметим, что первые n чисел для n+1, это удвоенные числа из набора для n, а значит, они могут выдать только четное число и четный максимум, который они не могут выдать равен T=2$(3^{n+1} - 2^{(n+2)})$. Значит все большие четные числа банк умеет выдавать, если число нечетно, то нужно хотя бы 1 раз взять 3^(n+1), тогда если оставшееся число больше T, его можно выдать, если нет, то т.к. сумма нечетна, 3^(n+1) берем нечетное число раз, но тогда если взять еще четное число раз 3^(n+1), но 2(3^(n+1)) уже больше чем T, значит мы не берем больше 3^(n+1), но тогда максимум - который не могут выдать равен $2T + 3^{(n+1)} = 2\left(3^{n+1} - 2^{(n+2)}\right) + 3^{n+1} = 3^{n+2} - 2^{n+3}$

Предположение доказано.

Ответ:$3^{n+1} - 2^{n+2}$