Олимпиада школьников СПбГУ по математике.
Заключительный этап. 2020/2021 учебный год. 10 – 11 классы.

1. При каких натуральных n клетчатую доску $n \times n$ можно разрезать на прямоугольники 1×1 и 2×3 так, что прямоугольников разных размеров будет поровну?

2. Положительные числа a, b, c таковы, что $a^2b + b^2c + c^2a = 3$. Найдите минимальное значение выражения

$$A = \frac{\sqrt{a^6 + b^4c^6}}{b} + \frac{\sqrt{b^6 + c^4a^6}}{c} + \frac{\sqrt{c^6 + a^4b^6}}{a}.$$

3. Вокруг остроугольного треугольника ABC описана окружность. Точка K — середина меньшей дуги AC этой окружности, а точка L — середина меньшей дуги AK этой окружности. Отрезки BK и AC пересекаются в точке P. Найдите угол между прямыми BC и LP, если известно, что $BK = BC$.

4. Петя написал на доске подряд в убывающем порядке n последовательных двузначных чисел, последнее из которых не содержит цифру 7. Вася подумал, что это десятичная запись натурального числа x, и разложил x на простые множители. Оказалось, что их всего два и они различаются на 4. Что написано на доске?

5. В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством 2^n, $2^{n-1} \cdot 3$, $2^{n-2} \cdot 3^2$, $2^{n-3} \cdot 3^3$, $\ldots$, $2 \cdot 3^{n-1}$, 3^n пиастров, где n — натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?

1	2	3	4	5	Сумма
20	0	20	20	0	60

Задача 1
Пусть всего прямоугольников 1*1 — x штук, тогда 2*3 — тоже x. Тогда общая площадь квадрата n*n равна x*(1*1 + 2*3) = 7x. Значит, n*n делится на 7, а так как 7 — простое число, n кратно 7.
Тогда квадрат можно разрезать на квадраты 7*7 (так как n кратно 7). Покажем, как разрезать квадрат 7*7 так, чтобы в нем было поровну прямоугольников 2*3 и 1*1.

1	1	2	2	3	3	3
1	1	2	2	3	3	3
1	1	2	2	4	4	4
11	12	13	14	4	4	4
10	7	7	6	6	5	5
9	7	7	6	6	5	5
8	7	7	6	6	5	5

Числа с 1 по 7 — прямоугольники 2*3, с 8 по 14 — 1*1. Несложно проверить, что прямоугольников 2*3 и 1*1 поровну. Таким образом разрежем каждый квадрат 7*7, и следовательно весь квадрат n*n. Значит, для всех n, кратных 7, искомое разрезание существует.
Ответ: при всех n, кратных 7.

Задача 2
Пусть $a^2b = x$, $b^2c = y$, $c^2a = z$, abc = P. Значит, x + y + z = 3 по условию. Тогда воспользуемся неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим:
$(x+y+z) / 3 >= (xyz)^{1/3}$. Тогда $1 >= P^{1/3}$, => P <= 1, $P_{min} = 1$.
Теперь посмотрим на наше выражение.
$sqrt(n^2 + m^2) >= sqrt(2m*n)$ для всех положительных m, n, так как если возвести обе части в квадрат и разделить их на 2, получим неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим $((n^2 + m^2)/2 >= sqrt(m^2*n^2) = m*n)$.
Подставим $n = a^3$, $m = b^2c^3$. Тогда $sqrt(a^6 + b^4c^6) >= sqrt(2a^6 * b^4c^6) = sqrt(2)* a^3 * b^2c^3$, => вся левая дробь нашего выражения >= $sqrt(2)* a^3 * b^2c^3 / b = sqrt(2)* a^3 * bc^3$. Аналогично для остальных дробей. Значит, наше выражение $A >= sqrt(2)*(a^3bc^3 + ab^3c^3 + a^3b^3c) = sqrt(2)*P*(a^2c^2 + b^2c^2 + a^2b^2)$.
Снова воспользуемся неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим:

$(a^2c^2 + b^2c^2 + a^2b^2)/3 >= (a^2c^2 * b^2c^2 * a^2b^2)^{1/3} = P^{2/3}$, => $(a^2c^2 + b^2c^2 + a^2b^2) >= 3*P^{2/3}$. Значит, A >= $sqrt(2)*P*(a^2c^2 + b^2c^2 + a^2b^2) >= sqrt(2)*P*3* P^{2/3}$. Но P >= 1, => A >= sqrt(2)*3*1*1 = 3*sqrt(2), => $A_{min} = 3*sqrt(2)$.
Ответ: $A_{min} = 3*sqrt(2)$.

Задача 3
Пусть угол ABL = X, BKC = Y. Так как L — середина дуги AK, углы ABL и LBK равны X. Тогда угол ABK = 2X. K — середина AC, => аналогично угол ABK = KBC, => угол KBC = 2X. Так как BK = BC, угол BCK = Y, => Y + Y + 2X = 180, => X + Y = 90 (из суммы углов треугольника BKC).
Из вписанности четырехугольника BAKC следует, что угол BAC = BKC = Y. Тогда угол BPC = 180 — 2X - Y = Y, => угол BAP = BPA, => BA = BP.
Угол BPA = KPC = Y как вертикальный, угол PKC = Y, => угол CPK = CKP = Y, => CP = CK.

BR — биссектриса треугольника ABP (R — пересечение AC и BL). Так как треугольник ABP равнобедренный, BR еще и медиана и высота этого треугольника. Значит, точки A и P симметричны относительно прямой BL, => треугольники BAL = BPL, => угол BLA = BLP. Из вписанности четырехугольника BALK следует, что угол BLA = BKA. Найдем угол BKA из треугольника BKA.
Угол ABK = 2X, угол BAK = BAC + CAK = CAK + Y. Из вписанности BAKC селдует, что угол CAK = CBK = 2X, => угол BAK = Y + 2X, => угол BKA = 180 - 2X - (Y + 2X) = 180 - 3X - (X+Y). Но X + Y = 90 (доказано выше), => угол BKA = 180 - 3X - 90 = 90 - 3X. Значит, и угол BLP = BLA = BKA = 90 - 3X.
Пусть N — точка пересечения BC и LP. Тогда угол LNB (искомый) = 180 - BLP — LBC. Но угол LBC = KBC + LBK = 2X + X = 3X, а угол BLP = 90 - 3X, => угол LNB = 180 — (90-3X)-3X = 90.
Ответ: угол между прямыми BC и LP равен 90 градусов.

Задача 4

Если один из простых множителей =5, тогда второй — либо 5-4, либо 5+4, но ни 1, ни 9 не являются простыми. Значит, один из множителей не может быть равен 5.

Значит, оба простых множителя не заканчиваются на 5 (иначе они либо =5, чего не может быть, либо делятся на 5, но это невозможно, так как они простые). Посмотрим. На что они могут заканчиваться:
1 и 5 — нет
3 и 7 — да
5 и 9 — нет
7 и 1 — да
9 и 3 — да

Так как множители отличаются на 4, их последние цифры тоже отличаются на 4 (возможно, с переходом через десяток, как в случаях 7 и 1 и 9 и 3).
Но в случае 7 и 1 последняя цифра их произведения (то есть числа x) равна 7, чего не может быть по условию. Аналогично в случае 9 и 3. Значит, наши простые множители обязательно оканчиваются на 3 и 7.

Пусть тогда они равны (10a + 3) и (10a + 7) соответственно. Тогда их произведение равно $100a^2 + 10a*(3+7) + 21 = 100*(a^2 + a) + 21$, то есть x должен заканчиваться на 21.
Рассмотрим 2 случая:
1) a = 0, тогда множители равны 3 и 7 соответственно, x = 21 — подходит.
2) a > 0, тогда оба множителя больше 10 (так как они больше 10a), => они оба не кратны 3 (так как они простые).
10a + 3 не кратно 3, => 10a не кратно 3, => a не кратно 3.
10a + 7 не кратно 3, => 10a + 1 не кратно 3, => 9a + a +1 не кратно 3, => a+1 не кратно 3, => у a не может быть остатков 0 или 2 при делении на 3. Значит, a можно представить в виде 3y + 1.
Тогда $x = (10a+3)*(10a+7) = (10*(3y+1)+3)*(10*(3y+1)+7) = 900(y^2 + y) + 221$.
Число x имеет вид ...2221, так как оно состоит из последовательных натуральных чисел и оканчивается на 21 (случай, когда x = 21, разобран в п.1).
Значит, $(x - 221) = ...2000 = 900*(y^2 + y)$, то есть число ...2000 делится на 9, => число q = ...2 делится на 9, так как 1000q = ...2000 делится на 9, а 1000 не делится на 9.
Распишем q:
q = 2
q = 232
q = 24232
q = 2524232
…

Изначально у q остаток 2 при делении на 9. Дальше к нему прибавляется 5, 6, 7, ... (так как у каждого следующего двухзначного числа остаток на 1 больше предыдущего). Докажем, что q никогда не будет делиться на 9.

Действительно, остаток q при делении на 9 будет меняться так:
+5, +6, +7, +8, +0, +1, +2, +3, +4, +5, +6, +7, +8, +0, и снова по циклу.
2 + 5 = 7
7 + 6 = 13 = 4(mod 9)
4 + 7 = 11 = 2(mod 9)
2 + 8 = 10 = 1(mod 9)
1 + 0 = 1(mod 9)
1 + 1 = 2(mod 9)
2 + 2 = 4(mod 9)
4 + 3 = 7(mod 9)
7 + 4 = 11 = 2(mod 9)
2 + 5 = 7(mod 9)
7 + 6 = 13 = 4(mod 9)
4 + 7 = 11 = 2(mod 9)
2 + 8 = 10 = 1(mod 9)
Цикл закончился, остатка 0 в нем нет, и таким образом после других циклов остатка 0 тоже не будет. Докажем это строго.
Предположим противное, тогда в какой-то момент остаток все же стал равен 0. Тогда это произошло после «прецикла» (+5, +6, +7, +8, +0), какого-то количества циклов (+1, +2, +3, +4, +5, +6, +7, +8, +0) и «постцикла» (то есть какого-то префикса цикла). Заметим, что полный цикл не меняет остатка q при делении на 9, так как сумма 1 + 2 + .. + 8 + 0 = 36, что кратно 9. Значит, весь процесс изменения остатка q эквивалентен его изменению в «прецикле» и «постцикле», а мы уже проверили, что там не может быть остатка 0. Значит, остатка 0 не может быть вообще, противоречие.
Получили, что q не делится на 9. Но такого не может быть, ведь q = 900*(y^2 + y). Значит, ситуации, когда a >0 , быть не может, и => единственный вариант числа x — когда оно равно 21.
Ответ: на доске написано число 21.

Задача 5
Лемма. С помощью монет вида 2k и 3k, k — некое натуральное число, максимальное кратное k число, которое нельзя выдать, равно k.
Доказательство:
Предположим противное, тогда существует число x > 1 такое, что его нельзя выдать вышеуказанными монетами Если x = 2, выдадим его монетой 2k, x = 3 — монетой 3k. Иначе если x — четное (x = 2y), выдадим его y монетами по 2k, если x — нечетное (x = 2y + 3, y > 0, так как случай x = 3 разобран отдельно), выдадим его 1 монетой 3k и y монетами 2k. Противоречие, так как мы смогли выдать сумму xk искомым способом. Лемма доказана.

Заметим, что если мы не смогли выдать число 2^X*k, то мы не сможем выдать и число 2^X*k + 2^{X-1}*3^{N-X+1}. Предположим противное, тогда мы выдали число 2^X*k + 2^{X-1}*3^{N-X+1}. Рассмотрим его разложение на слагаемые вида 2^A*3^{N-A}, где A <= N. Там обязательно встретится число 2^{X-1}*3^{N-X+1}, так как иначе

Пусть G — максимальное четное число, которое мы не смогли выдать. Тогда заметим, что мы не сможем выдать и число G + 3^N. Действительно, ведь в разложении на слагаемые числа G + 3^N обязательно присутствует число 3^N, так как число G + 3^N нечетно, а 3^N - единственное

доступное нам нечетное число. Тогда сумма остальных слагаемых равна G, чего не может быть, так как G мы не можем выдать. Противоречие, => мы не можем выдать число $G + 3^N$.
Теперь докажем, что число $G + 3^N$ — максимальное, которое мы не можем выдать. Предположим противное, тогда есть число $F > G + 3^N > G$, что мы его не смогли выдать. Если F — четно, G не является максимальным четным числом, которое мы не можем выдать, противоречие. Если же F — нечетно, то его можно представить как $3^N + Q$, причем Q — четно и $Q > G$ (так как $F = 3^N + Q > G + 3^N$). Значит, мы не можем выдать четное число $Q > G$, противоречие, ведь G — максимальное четное число, которое мы не смогли выдать. Получили противоречие, => число $G + 3^N$ — максимальное, которое мы не можем выдать.
Найдем число G.
Очевидно, что при выдаче четной суммы мы можем использовать только четные монеты (так как использование 2k монет 3^N эквивалентно использованию 3k монет $2*3^{N-1}$). Тогда рассмотрим набор монет 2^N, $2^{N-1}*3$, …, $2*3^{N-1}$. С помощью него мы хотим получить число G = 2*H (так как G — четное). Разделим все на 2: теперь мы хотим выдать число H монетами 2^{N-1}, $2^{N-2}*3$, …, 3^{N-1}. Несложно заметить, что H — максимальное число, которое мы не можем выдать при N = N-1. Значит, функция H(t), где H(t) — максимальное число, которое мы не можем выдать при t = N, рекурсивно задается так:
$H(t) = 2*H(t-1) + 3^T$ (ведь $2*H(t-1) = G$).
Причем H(1) = 1, что следует из леммы при k = 1.
$H(t-1) = 2*H(t-2) + 3^{N-1}$, => $H(t) = 4*H(t-2) + 2*3^{N-1} + 3^N$.
…
$H(N) = 2^{N-1} * H(0)+ 2^{N-2} * 3^2 + … + 3^N = 2^{N-1} + 2^{N-2} * 3^2 + … + 3^N$.
Ответ: $2^{N-1} + 2^{N-2} * 3^2 + … + 3^N$.