Санкт-Петербургский государственный университет
Олимпиада школьников по математике 2020–2021
Заключительный этап
8–9 классы

1. Докажите, что для любых вещественных чисел a и b уравнение

$$(a^6 - b^6)x^2 + 2(a^5 - b^5)x + (a^4 - b^4) = 0$$

имеет решение.

2. На острове живут лжецы и рыцари. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Каждый житель острова про каждого из остальных знает рыцарь он или лжец. Как-то раз встретились 28 островитян. Двое из них сказали: «Ровно двое из нас лжецы», затем четверо из остальных сказали: «Ровно четверо из нас лжецы», потом восемь из оставшихся сказали: «Ровно восемь из нас лжецы», наконец, все оставшиеся 14 сказали: «Ровно 14 из нас лжецы». Сколько лжецов было среди встретившихся? Приведите все возможные варианты и докажите, что других нет.

3. Сумма неотрицательных чисел a, b и c равна 3. Найдите наибольшее значение выражения $ab + bc + 2ca$.

4. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках K и L. Прямая ℓ пересекает окружность ω_1 в точках A и C, а окружность ω_2 — в точках B и D, причем точки идут на прямой ℓ в алфавитном порядке. Обозначим через P и Q соответственно проекции точек B и C на прямую KL. Докажите, что прямые AP и DQ параллельны.

5. Дана клетчатая доска 2021×2021. Петя и Вася играют в следующую игру. Они по очереди ставят фишки в свободные клетки доски. Выигрывает тот игрок, после хода которого в каждом прямоугольнике 3×5 и 5×3 будет стоять фишка. Начинает Петя. Кто из игроков может обеспечить себе победу вне зависимости от действий соперника?

6. Найдите все такие натуральные числа n, что число $2^n + n^2 + 25$ является кубом простого числа.

1	2	3	4	5	6	Сумма
20	20	20	15	20	5	100

№1

Посчитаем дискриминант уравнения $(a^6-b^6)x^2+2(a^5-b^5)x+(a^4-b^4)$, если он всегда не меньше 0, то уравнение всегда имеет хотя бы одно решение.

$0.25D = (a^5-b^5)^2-(a^6-b^6)*(a^4-b^4) = a^{10}-2a^5b^5+b^{10}-(a^{10}-a^4b^6-a^6b^4+b^{10}) = a^4b^6-2a^5b^5+a^6b^4 = (a^2b^3-a^3b^2)^2$

А как мы знаем, квадрат любого вещественного числа неотрицателен => $0.25D = (a^2b^3-a^3b^2)^2 \geq 0$ <=>

$D \geq 0$ => уравнение $(a^6-b^6)*x^2+2(a^5-b^5)x+(a^4-b^4)$ имеет решение при любых вещественных a и b.

ЧТД

№2

Понятно, что если один человек сказал, что «Ровно m из нас лжецы», а другой заявил, что «Ровно n из нас лжецы», $m, n \in \mathbb{N}$; $m \neq n$, то среди этих двух есть хотя бы один лжец. Если же несколько человек заявили «Ровно m из нас лжецы», то либо они все лжецы, либо они все рыцари.

Разделим людей на 4 группы: тех, кто сделал первое высказывание (2 человека), определим в первую группу; тех, кто совершил второе высказывание (4 человека), определим во вторую группу; тех, кто сделал третье высказывание (8 человек), определим в третью группу; тех, кто сделал четвёртое высказывание (14 человек), определим в четвёртую группу.

Рассмотрим первое высказывание: «Ровно 2 из нас лжецы»

Пусть люди из первой группы рыцари, тогда остальные – лжецы. Тогда у нас 2 рыцаря и 28-2 = 26 лжецов, но так как люди из первой группы рыцари, то они сказали правду, значит лжецов 2, но 26 ≠ 2 => люди из первой группы всегда лжецы.

Аналогично рассмотрим второе высказывание: «Ровно 4 из нас лжецы»

Пусть люди из второй группы рыцари, тогда остальные – лжецы. Тогда у нас 4 рыцаря и 28-4 = 24 лжецов, но так как люди из первой группы рыцари, то они сказали правду, значит лжецов 4, но 24 ≠ 4 => люди из второй группы всегда лжецы.

Аналогично рассмотрим второе высказывание: «Ровно 8 из нас лжецы»

Пусть люди из третьей группы рыцари, тогда остальные – лжецы. Тогда у нас 8 рыцарей и 28-8 = 20 лжецов, но так как люди из первой группы рыцари, то они сказали правду, значит лжецов 8, но 20 ≠ 8 => люди из третьей группы всегда лжецы.

Осталось последнее высказывание четвёртой группы: «Ровно 15 из нас лжецы»

Пусть люди из третьей группы рыцари, тогда остальные – лжецы. Тогда у нас 8 рыцарей и 28-14 = 14 лжецов. Так как люди из первой группы рыцари, то они сказали правду, значит лжецов 14, и 14 = 14 => люди из третьей группы – рыцари.

Если среди всех людей есть хотя бы один рыцарь, то он обязательно в группе 4 и в этом случае ответ 14 лжецов. Но если среди всех присутствующих нет ни одного рыцаря, то они все лжецы. Если они все лжецы, то все 4 высказывания неверны, значит, этот вариант тоже может быть.

Ответ: 14 или 28 лжецов

№3

По условию a, b, c ≥ 0; a+b+c = 3 ⇔ b = 3-a-c

Подставим это в $ab+bc+2ac = (3-a-c)a+(3-a-c)b+2ac = 3a+3c-a^2-c^2-2ac+2ac = 3(a+c)-(a+c)^2+2ac$

Заметим, что от b наша сумма никак не зависит, значит она наибольшая при $b = 0 \Leftrightarrow a+c = 3$

$ab+bc+2ac = 3(a+c)-(a+c)^2+2ac = 3*3-3^2+2ac = 2ac$

Пусть, не умаляя общности, $a \geq c$, значит мы можем записать такое равенство: $a = c+x$, где $x \geq 0$.

Тогда сумма $a+c = 3 \Leftrightarrow 2c+x = 3 \Leftrightarrow c = 1.5-0.5x$

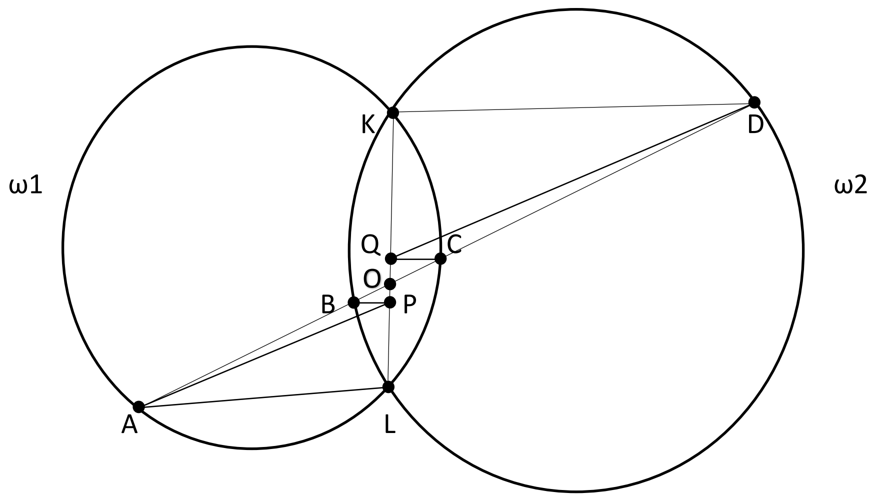
Рассмотрим, чему равно произведение $ac = (c+x)(1.5-0.5x) = (1.5+0.5x)(1.5-0.5x) = 2.25 - 0.25x^2$.

Наибольшее значение этого произведения достигается при $x = 0$ и равно $ac = 2.25$, так как при $x > 0$, $ac < 2.25$.

$ab+bc+2ac = 3(a+c)-(a+c)^2+2ac = 3*3-3^2+2ac = 2ac = 2*2.25 = 4.5$

Ответ: 4.5

№4



Заметим, что четырёхугольники ALCK и BLDK – вписаны в окружности $\omega 1$ и $\omega 2$ соответственно. Пусть O - точка пересечения прямых AD и KL. Воспользовавшись тем, что четырёхугольники вписаны, мы можем записать 2 равенства: $AO*OC = (AB+BO)*OC = KO*OL$; $BO*OD = (OC+CD)*BO = KO*OL$.

Заметим, что $KO*OL = (AB+BO)*OC = (OC+CD)*BO \Leftrightarrow AB*OC+BO*OC = BO*OC+CD*BO \Leftrightarrow AB/CD = BO/OC$

Заметим, что треугольники $\triangle BOP$ и $\triangle COQ$ подобны

1) $\angle BPO = \angle OQC = 90°$ (по условию)
2) $\angle BOP = \angle COQ$ (вертикальные)

Треугольники $\triangle BOP$ и $\triangle COQ$ подобны $\Rightarrow BO/OC = OP/OQ$; $\angle OBP = \angle QCO \Leftrightarrow \angle ABP = \angle QCD$ (так как смежные углы равны)

Докажем, что $\triangle ABP$ подобен $\triangle DQC$

1) $AB/CD = BO/OC = OP/OQ$
2) $\angle ABP = \angle QCD$

$\triangle ABP$ подобен $\triangle DQC \Rightarrow \angle QDC = \angle BAP$. Заметим, что это накрест лежащие углы при прямых DQ и AP и секущей AD, а так как они равны, то AP || DQ

ЧТД

№5

Выигрывает всегда Петя. Пронумеруем строчки и столбцы от 1 до 2021, любые 2 соседних столбца или строчки по номеру отличаются на 1. Первым ходом Петя ставит фишку (назовём ее центральной) на клетку пересечения 1011 строчки и 1011 столбца. Далее Петя просто ходит симметрично ходам Васи, относительно центральной фишки. Объясним, почему это выигрышная стратегия. У Пети всегда может походить симметрично Васе, относительно центральной клетки. Докажем это. Пусть это неправда и в какой-то момент Петя не может так походить. Тогда эта клетка, в которую Петя хотел поставить фишку, уже занята, значит и симметричная ей клетка, в которую Вася поставил фишку, была уже занята до Васи, а так как мы играем без жульничества, Вася так не мог походить и у Пети всегда есть ход. Теперь докажем, что только после хода Пети игра может закончиться. Опять же, пусть это не так, тогда игра закончилась после хода Васи, и он закрыл последний(ие) прямоугольник 5х3 или 3х5. Тогда рассмотрим эту же область, только симметричную относительно центральной клетки. Она должна быть закрыта, так как игра закончилась, но если она закрыта, то и область которую «закрыл» Вася последним ходом уже до него была закрыта, значит, такого быть не может и всегда побеждает Петя.

Ответ: Петя

№6

При n = 1; 2+1+25 = 28 – не является кубом числа => n = 1 не подходит

При n = 2; 4+4+25 = 33 – не является кубом числа => n = 2 не подходит

При n = 3; 8+9+25 = 42 – не является кубом числа => n = 3 не подходит

Будем искать решения при $4 \le n$

Рассмотрим остатки по модулю 4 квадратов и кубов натуральных чисел

n	n^2	n^3
1	1	1
2	0	0
3	1	-1
0	0	0

Кубы натуральных чисел дают остатки 0; 1 и -1 при делении на 4, а сумма $2^n+n^2+25 \equiv 0$ (так как $n>3$, $2^n⋮4$) + $n^2+1 \equiv 0$; 1 или -1 (mod 4) => $n^2 \equiv -1$; 0 или 2 (mod 4), но так как остатков -1 и 2 квадраты натуральных чисел не могут давать, то $n⋮2$

Теперь рассмотрим остатки по модулю 8 квадратов и кубов натуральных чисел

n	n^2	n^3
1	1	1
2	4	0
3	1	3
4	0	0
5	1	5
6	4	0
7	1	7
0	0	0

Кубы натуральных чисел дают остатки 0; 1; 3; 5; 7 при делении на 8, а сумма $2^n+n^2+25 \equiv 0$ (так как $n>3$, $2^n⋮8$) + $n^2+1 \equiv 0$; 1; 3; 5; 7 (mod 8) => $n^2 \equiv -1$; 0; 2; 4; 6 (mod 8), но так как остатков -1, 2 и 6 квадраты натуральных чисел не могут давать, и $n⋮2$, то либо $n⋮4$, либо $n⋮3$

Если n одновременно делится и на 2 и на 3, то оно делится на 6. Проверим $n = 6$

$2^6+6^2+25 = 64+36+25 = 125 = 5^3 \Rightarrow n = 6$ подходит