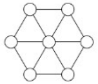
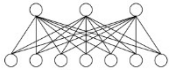
ВОПРОС 1: ЭССЕ

16 из 25 баллов

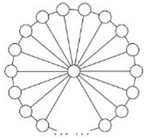
1. На картинке нарисовано n кружочков, некоторые кружочки соединены отрезками. Требуется расставить в кружочках числа от 1 до n (без повторений) так, чтобы выполнялось свойство: если кружочки соединены отрезками, то стоящие в них числа должны быть взаимно просты (то есть не иметь общих натуральных делителей, отличных от 1). Можно ли это сделать в каждом из следующих случаев? Если можно — опишите расстановку чисел, если нет — объясните, почему нельзя.



а) $n = 7$



б) $n = 10$



в) $n = 2022$: по кругу стоят 2021 кружочков, и еще один в центре

Данный ответ: а). Это возможно сделать.

В верхнем ряду слева находится число 6. В верхнем ряду справа находится число 7.

Во втором ряду слева находится число 5. В середине число 1. Справа число 2.

В нижнем ряду слева находится число 4. В нижнем ряду справа находится число 3.

б). Это возможно сделать.

В верхний ряд мы помещаем числа 3, 6, 9.

В нижний числа 10, 5, 8, 2, 4, 1, 7.

в). Это невозможно сделать.

Предположим, что это возможно. Тогда:

В середину мы поместим число 1, так как оно взаимно просто с любым натуральным числом.

Заметим, что чисел всего 2021 и из них чётных на один больше нечётных. Заметим, что чётные числа не могут стоять рядом, поскольку их НОД будет как минимум 2 и они не будут являться взаимно простыми.

Тогда нужно чередовать числа в кругу в порядке: ч н ч н ч н...

Но тогда, поскольку чётных на 1 больше, так или иначе двум чётным числам придётся стоять рядом, а это не соответствует условию.

Противоречие.

Примечание.

Рассмотрим случай, когда в середине стоит не число 1. Тогда в любом случае там не может стоять чётное число, так как оно не будет взаимно просто с остальными чётными числами. Тогда там стоит нечётное число, а это не противоречит решению.

ВОПРОС 2: ЭССЕ

15 из 30 баллов

2. Назовем *каскадом, порожденным числом* r, набор из 12 натуральных чисел: $r, 2r, \ldots, 12r$.

а) Может ли какая-то пара чисел (a, b) содержаться в шести различных каскадах? Если да — приведите пример таких чисел, если нет — объясните, почему не может.

б) Верно ли, что множество натуральных чисел можно раскрасить в 12 цветов так, что в каждом каскаде все элементы будут разного цвета?

Данный ответ: а). Это возможно.

Например числа 120 и 60, при r = {60; 30; 20; 15; 12; 10}

б). Нет, не верно.

ВОПРОС 3: ЭССЕ

0 из 20 баллов

3. В треугольнике ABC точка D — середина стороны AB, E — середина стороны AC, F — середина биссектрисы AL, причем $DF = 1$, $EF = 2$. На плоскости изображены точки D, E, F так, что прямая DF горизонтальна, а остальные элементы чертежа стерты. Можно ли восстановить положение хотя бы одной из вершин треугольника, если известно, что вершина A находилась сверху от прямой DF?

Данный ответ: Можно восстановить положение вершины A.

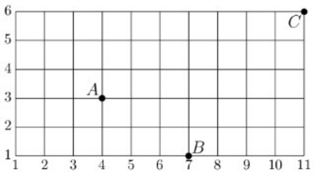
ВОПРОС 4: ЭССЕ

24 из 25 баллов

4. Город имеет форму клетчатого прямоугольника 5×10 клеток: линии — улицы, клетки — жилые кварталы. Расстояние между перекрестками измеряется как длина самого короткого пути по улицам города, проходящего от одного перекрестка до другого. Например, для перекрестков A, B и C на картинке $AB = 5$, $AC = 10$, $BC = 9$. Можно ли отметить в этом городе k перекрестков так, чтобы все расстояния между этими перекрестками оказались различными числами? Если да — укажите эти перекрестки (например, перекресток C находится на пересечении 11-й вертикальной и 6-й горизонтальной улицы), если нет — объясните, почему нельзя.

Решите задачу для

а) $k = 5$; б) $k = 6$; в) $k = 7$.



Данный ответ:

а). Это возможно.

Обозначим точки буквами A, B, C, D, E.

A(1;6), B(1;1), C(7;6), D(11;6), E(10;6).

б).Это возможно.

A(1;1), B(11;6), C(11;1), D(3;6), E(1;5), F(3;5).

в). Это невозможно.

Предположим, что это возможно. Тогда:

Обозначим точки буквами A, B, C, D, E, F, G.

Найдём количество всевозможных отрезков:

AB, AC, AD, AE, AF, AG, BC, BD, BE, BF, BG, CD, CE, CF, CG, DE, DF, DG, FG.

Всего 19 отрезков.

Заметим, что максимальный по длине отрезок пути между перекрёстками - 15. Значит различных по длине путей тоже 15. Пути длиной: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15. Но поскольку отрезков 19, значит и число путей различных по длине должно быть равно 19.

19>15

Противоречие.

Примечание:

При указывании координат указаны сначала горизонталь(до 11), а потом вертикаль(до 6).