Санкт-Петербургский государственный университет
Олимпиада школьников по математике 2020–2021
Заключительный этап
8–9 классы

1. Докажите, что для любых вещественных чисел a и b уравнение

$$(a^2-b^2)x^2+2(a^3-b^3)x+(a^4-b^4)=0$$

имеет решение.

2. На острове живут лжецы и рыцари. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Каждый житель острова про каждого из остальных знает рыцарь он или лжец. Как-то раз встретились 19 островитян. Трое из них сказали: «Ровно трое из нас лжецы», затем шестеро из остальных сказали: «Ровно шестеро из нас лжецы», наконец, девять из оставшихся сказали: «Ровно девять из нас лжецы». Сколько лжецов было среди встретившихся? Приведите все возможные варианты и докажите, что других нет.

3. Вещественные числа a, b, c и d удовлетворяют условию $a^6+b^6+c^6+d^6=64$. Найдите наибольшее значение выражения $a^7+b^7+c^7+d^7$.

4. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка K. К описанной окружности треугольника AKC проведена касательная ℓ_1, параллельная прямой AB и ближайшая к ней. Она коснулась окружности в точке L. Прямая AL пересекла описанную окружность треугольника ABK в точке M ($M \neq A$). К этой окружности в точке M проведена касательная ℓ_2. Докажите, что прямые BK, ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются в одной точке.

5. Дана клетчатая доска 2020×2021. Петя и Вася играют в следующую игру. Они по очереди ставят фишки в свободные клетки доски. Выигрывает тот игрок, после хода которого в каждом квадрате 4×4 будет стоять фишка. Начинает Петя. Кто из игроков может обеспечить себе победу вне зависимости от действий соперника?

6. Найдите все пары такие простых чисел p и q, что $p^2+5pq+4q^2$ является квадратом натурального числа.

1	2	3	4	5	6	Сумма
20	20	20	0	0	5	65

№1.

Посчитаем дискриминант данного уравнения, чтобы был хотя бы один корень, дискриминант должен быть больше или равен 0.

Дискриминант: $b^2 - 4ac = 4(a^3 - b^3)^2 - 4(a^4 - b^4)(a^2 - b^2) = 4a^6 + 4b^6 - 8a^3b^3 - 4(a^6 + +b^6 - b^4a^2 - b^2a^4) = 4b^4a^2 + 4b^2a^4 - 8a^3b^3 = 4a^2b^2(a^2 - 2ab + b^2) = 4a^2b^2(a - b)^2$

Т.к. у каждого числа четная степень, то мы перемножаем положительные числа, откуда следует, что после перемножения итоговое число будет тоже положительным, откуда следует, что есть хотя бы один корень.

№2.

Пусть у нас есть 3 группы – те трое, которые говорят, что 3 лжеца, шестеро, которые говорят, что 6 лжецов и девятеро, которые говорят, что 9 лжецов. В одной группе не могут быть и рыцари и лжецы, т.к. тогда получится, что у нас х лжецов и не х лжецов, что не может быть, т.к. х не равно (не х). Если хотя бы 2 группы из3 3 говорят правду, то у нас противоречие, т.к. они говорят правду о том, что у нас 3 и 6 лжецов или 3 и 9 лжецов или 6 и 9 лжецов. Если все 3 группы говорят правду, то тут у нас 3 и 6 и 9 лжецов, тоже противоречие. Рассмотрим случаи с 1 группой рыцарей из3 3. Пусть группа с тремя людьми говорит правду. Тогда они говорят, что всего 3 лжеца, при том у нас, как минимум, 15 людей лгут, откуда противоречие, аналогично при группе с шестью людьми, они говорят, что всего 6 лжецов, при том у нас, как минимум, еще 12 человек лгут, откуда тоже противоречие. Если у нас группа с девятью людьми говорит правду, то тут такое может быть, т.к. они говорят, что 9 лжецов и те самые 9 лжецов – люди из3 2 других групп, которых суммарно три+шесть, то есть 9, которые лгут, что лжецов 3 и 6. Тогда оставшийся 19й человек должен быть рыцарем, иначе лжецов будет 10. Значит есть вариант с 9 лжецами. Остался один случай, когда все 3 группы лгут, тогда есть 2 варианта, что всего 18 лжецов и 1 рыцарь, где рыцарь – тот самый 19й человек, который молчит, или все 19 лжецов, где тот 19й, который молчит, тоже лжец, меньше 18 лжецов не может быть, т.к. мы говорим, что все 3 группы лгут, остальные случаи уже рассмотрены.

Ответ: 9, 18, 19 лжецов.

№3.

Ответ: 128.

Оценка: Заметим, что a, b, c, d меньше или равны 2, т.к. если хотя бы одно число больше 2, то выражение уже будет больше 64, т.к. 2 в степени 6 равно 64, а числа отрицательными быть не могут, т.к. тут у a, b, c, d четная степень. Тогда Заметим, что каждое из3 чисел a, b, c, d увеличивается максимум в 2 ра3а в выражении $a^7 + b^7 + c^7 + d^7$, т.к. каждое из3 чисел a, b, c, d максимум 2, и мы на него домножаем, т.к. a^7 / a^6 = a, аналогично для b, c, d, тогда максимальное 3начение, которое может принимать выражение $a^7 + b^7 + c^7 + d^7$, равняется $2(a^6 + b^6 + c^6 + d^6) = 128$. Но для такого случая существует пример.

Пример: a = 2; b = 0; c = 0; d = 0.

№5.

Покрасим каждую 7 клетку в строке в один и тот же цвет, так и каждую 7 клетку в столбце в один и тот же цвет. 2020 или 2021 при делении на 7 дает 288 с чем-то. Тогда каждого цвета в строке 288 или 289 клеток, аналогично и в столбце. Тогда посчитаем, сколько цветов у нас имеют 289 клеток в строке и 289 клеток в столбце. Т.к. остаток при делении 2020 на 7 равен 4, а остаток при делении 2021 на 7 равен 5, то таких цветов 20. Тогда посмотрим на действия второго игрока, пусть первый сходит в какой-то цвет, если цвет имеет 288 в строке или в столбце, или и там, и там, тогда кол-во клеток данного цвета чётное, и второй игрок просто ставит в любую другую клетку такого цвета, если же, первый ходит в тот цвет, которого и в строке, и в столбце 289 штук, тогда второй ходит в любую клетку другого цвета, которого и в строке, и в столбце 289 штук, а т.к. таких цветов 20, то у второго всегда найдется такой цвет после хода первого. Берем мы именно каждую 7 клетку, потому что если поставить куда-нибудь в центр фишку, то она Закрывает 3 клетки со всех сторон, то есть квадрат 7*7, и получается, что побеждает второй игрок. Также при такой раскраске получается, что если первый Закрывает квадрат, то есть еще клетка такого цвета, Закрывающая квадрат, т.к. они берут квадраты 7*7 и общих квадратов данные точки не имеют.

Ответ: Вася побеждает

№6.

ПреобраЗуем данное выражение: $\mathrm{p}^2 + 5\mathrm{p}q + 4q^2 = (\mathrm{p} + 2q)^2 + \mathrm{p}q$, что должно равняться какому-то x в квадрате.

Перенесем (p+2q)^2 в правую часть: $\mathrm{p}q = x^2 - (\mathrm{p} + 2q)^2$

У нас тут раЗность квадратов, раЗложим правую часть на множители: $\mathrm{p}q = (x + \mathrm{p} + 2q)(x - \mathrm{p} - {} - 2q)$

То есть проиЗведение каких-то двух чисел равно проиЗведению простых чисел p и q, но т.к. числа у нас целые, то одно иЗ чисел в правой части должно равняться p, другое q, т.к. по другому нельЗя представить проиЗведение простых чисел, потому что у них нет делителей, кроме самого себя и 1. Тогда у нас есть 2 случая, рассмотрим первый: $x + \mathrm{p} + 2q = \mathrm{p}; x - \mathrm{p} - 2q = q$ =>

=> $x + 2q = 0; x - \mathrm{p} - 3q = 0$(Все перенесли в одну сторону) => $x + 2q = x - \mathrm{p} - 3q$(Т.к. оба уравнения в правой части дают 0) => $5q + \mathrm{p} = 0$(Перенесли все в левую сторону) => Противоречие, т.к. простые числа больше 0, тогда в таком случае решений нет.

Рассмотрим второй случай: $x + \mathrm{p} + 2q = q; x - \mathrm{p} - 2q = \mathrm{p}$ =>

=> $x + \mathrm{p} + q = 0; x - 2\mathrm{p} - 2q = 0$(Все перенесли в левую сторону) => $3\mathrm{p} + 3q = 0$ (ИЗ первого уравнения вычел второе уравнение) => Противоречие, т.к. простые числа больше 0, тогда в таком случае решений нет.

Тогда у нас нет решений.

Ответ: Таких p и q не существует.

№4.

Заметим, что у нас есть 2 вписанных четырехугольника ALKC и AMBK. Значит сумма противоположных углов равна 180. То есть угол LAC + угол LKC равняется угол MAK + угол MBK. Заметим, что у углов LAC и MAK есть общий угол LAK, Заметим, что 2 иЗ 3 вершин треугольника

LAK – вершины, которые являются пересечениями данных двух описанных окружностей ABK и AKC. Пусть у нас прямые l1 и l2 пересекаются в точке N. Докажем, что N принадлежит прямой BK. Вспомним, что AB параллельно l1, посмотрим на треугольник ABK, вспомним, что на описанной окружности данного треугольника лежит точка M. Но у нас прямая, проходящая чере3 точку M и l1 пересекаются в одной точке. И т.к. у нас прямые AB и l1 параллельны, то углы при вершине B и пересечения l1 с прямой BK равны, тогда BK пересекается с l1 в той же точке, где и пересекаются l1 с прямой l2. Тогда BK, l1, l2 пересекаются в одной точке, т.к. две прямые и другие две прямые, где в каждой паре есть общая, пересекаются в одной точке.