Олимпиада школьников СПбГУ по математике.
Заключительный этап. 2020/2021 учебный год. 10 – 11 классы.

1. Можно ли в таблице 25×41 расставить различные целые числа так, чтобы числа, стоящие в клетках, имеющих общую сторону, отличались не более чем на 16?

2. При $a, b, c > 0$ найдите максимальное значение выражения
$$A = \frac{a^3(b+c) + b^3(c+a) + c^3(a+b)}{(a+b+c)^4 - 79\,(abc)^{4/3}}.$$

3. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 соответственно пересекаются в точке B. Продолжение отрезка O_2B за точку B пересекает окружность ω_1 в точке K, а продолжение отрезка O_1B за точку B пересекает окружность ω_2 в точке L. Прямая, проходящая через точку B параллельно KL, вторично пересекает окружности ω_1 и ω_2 в точках A и C соответственно. Лучи AK и CL пересекаются в точке N. Найдите угол между прямыми O_1N и O_2B.

4. В файле записано подряд 2023 двузначных пятеричных чисел, причем числа на нечетных позициях равны и на 1 больше чисел на четных позициях. Компьютер считал данные из файла как одно пятеричное число и разложил его на простые множители. Оказалось, что таких множителей ровно два и они различаются на 2. Могло ли такое быть?

5. В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством 3^n, $3^{n-1} \cdot 4$, $3^{n-2} \cdot 4^2$, $3^{n-3} \cdot 4^3$, $\ldots$, $3 \cdot 4^{n-1}$, 4^n пиастров, где n — натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?

Задача 1.

1	2	3	4	5	Сумма
20	10	10	0	20	60

Допустим, что такая расстановка чисел существует.

Будем обозначать (a, b) квадратик в таблице 25x41 такой, что он идёт a-м по счёту в своей строке (считая слева направо) и b-м по счёту в своём столбце (считая снизу вверх).

Будем называть расстоянием между квадратиками (a, b) и (c, d) минимальную длину последовательности (далее будем называть эту последовательность минимальной длины путём) из клеток, начинающейся (a, b) и заканчивающейся (c, d) такой, что каждая следующая клетка в последовательности имеет общую сторону с предыдущей.

Длина пути между (a, b) и (c, d) равна $|a – c| + |b - d| + 1$. Действительно, если мы пройдём последовательно по всем клеткам пути из (a, b) в (c, d), то мы должны будем хотя бы $|a - c|$ раз перейти в клетку, соседнюю по горизонтали (иначе мы не попадём в c-й слева столбец), и $|b - d|$ раз – в соседнюю по вертикали клетку (иначе не попадём в d-ю строку снизу). Очевидно, что если мы ровно $|a - c|$ раз перешли в клетку, соседнюю по горизонтали, и ровно $|b - d|$ раз – в соседнюю по вертикали клетку, то мы попали из (a, b) в (c, d).

Заметим тогда, что числа в клетках (a, b) и (c, d) различаются не более, чем на

$16(|a - c| + |b - d|)$, раз в соседних клетках числа отличаются не более, чем на 16.

Рассмотрим минимальное и максимальное числа, стоящие в таблице. Поскольку в таблице стоят 25 * 41 = 1025 различных целых чисел, разность между наименьшим и наибольшим не менее 1024. Пусть наименьшее стоит в клетке (a, b), наибольшее – в (c, d); тогда $16(|a - c| + |b - d|) >= 1024$ и $|a - c| + |b - d| >= 64$.

Заметим, что тогда наименьшее и наибольшее число не стоят в одной вертикали или горизонтали (иначе $|a - c| + |b - d| < 64$). Поэтому путь между (a, b) и (c, d) можно построить хотя бы двумя способами – можно пройти сначала $|a - c|$ клеток подряд по горизонтали, а потом $|b - d|$ клеток подряд по вертикали, а можно наоборот – сначала $|b - d|$ клеток по вертикали, а потом $|a - c|$ клеток по горизонтали. Понятно, что эти два пути будут различны. Рассмотрим вторые по счёту клетки в путях (то есть соседние с (a, b)). Понятно, что для хотя бы одной из этих двух клеток верно, что разность числа, находящегося в ней и числа, находящегося в (a, b), не более 15 (так как в таблице числа различны). Рассмотрим такую клетку и путь, проходящий через эту клетку. Тогда числа в (a, b) и (c, d) различаются не более, чем на $15 + 16(|a - c| + |b - d|) = 16(|a - c| + |b - d| - 1$. (раз в других соседних клетках пути числа отличаются не более, чем на 16)

При этом, по-прежнему должно быть верно, что $16(|a - c| + |b - d|) - 1 >= 1024$

$|a - c| + |b - d| >= 1025/16 > 64$. Поэтому $|a - c| + |b - d| >= 65$. То есть расстояние между наибольшим и наименьшим числом хотя бы $|a - c| + |b - d| + 1 >= 66$.

Очевидно, что наибольшее расстояние между клетками в таблице – это расстояние между угловыми клетками с разными координатами; оно равно $24 + 40 + 1 = 65$. Противоречие, поскольку мы нашли пару клеток с большим расстоянием.

Задача 2.

$T(x, y, z) = a^x * b^y * c^z + a^x * b^z * c^y + a^y * b^x * c^z + a^y * b^z * c^x + a^z * b^y * c^x + a^z * b^x * c^y$

$T(3, 1, 0) <= T(4, 0, 0)$ по неравенству Мюрхеда, поэтому $ba^3 + ca^3 + ab^3 + cb^3 + ac^3 + bc^3 <= 2a^4 + 2b^4 + 2c^4$

$(b + c)a^3 + (a + c)b^3 + (a + b)c^3 <= 2a^4 + 2b^4 + 2c^4$

То есть числитель не превосходит $2(a^4 + b^4 + c^4)$.

Для любых x, y, z верно $x^2 + y^2 + z^2 >= 1/3 (x + y + z)^2$ (1)

Раскроем скобки: $x^2 + y^2 + z^2 >= 1/3(x^2 + y^2 + z^2) + 2/3(xy + yz + xz)$

$2/3(x^2 + y^2 + z^2) – 2/3(xy + yz + xz) >= 0$

$2(x^2 + y^2 + z^2) – 2(xy + yz + xz) >= 0$

Что верно по неравенству Мюрхеда: $T(2, 0, 0) >= T(1, 1, 0)$

Поэтому по неравенству (1) $a^2 + b^2 + c^2 >= 1/3(a + b + c)^2$

И $1/3(a^2 + b^2 + c^2)^2 <= (a^4 + b^4 + c^4)$

Поэтому $(a^4 + b^4 + c^4) >= 1/3(a^2 + b^2 + c^2)^2 >= 1/27 (a + b + c)^4$, как выписано выше.

$(a + b + c)^4 – (a^4 + b^4 + c^4) = 1/2T(4, 0, 0) + 4T(3, 1, 0) + 3T(2, 2, 0) + 6T(2, 1, 1) – ½ T(4, 0, 0) = 4T(3, 1, 0) + 3T(2, 2, 0) + 6T(2, 1, 1)$

(так как при $x + y + z = 4$, $x > y > z$ $T(x, y, z)$ встречается $C_4^x C_{4-x}^y$ раз,

$T(x, y, y)$ встречается $\frac{1}{2} C_4^x C_{4-x}^y$ раз).

$T(x, y, z) >= 6(xyz)^{(4/3)}$ при $x + y + z = 4$. Действительно, по неравенству о средних

$T(x, y, z)/6 =$ (**$a^x * b^y * c^z + a^x * b^z * c^y + a^y * b^x * c^z + a^y * b^z * c^x + a^z * b^y * c^x + a^z * b^x * c^y$**)$/6 >= ((abc)^{2x + 2y + 2z})^{1/6}=$

= (abc)^(4/3)

Поэтому 4T(3, 1, 0) + 3T(2, 2, 0) + 6T(2, 1, 1) >= (4 + 3 + 6)* 6 * (abc)^(4/3) = 78(abc)^(4/3)

(a + b + c)^4 – 79(abc)^(4/3) = (a^4 + b^4 + c^4) + ((a + b + c)^4 – (a^4 + b^4 + c^4) – 79(abc)^(4/3)) >= a^4 + b^4 + c^4 + (78(abc)^(4/3) – 79(abc)^(4/3)) = a^4 + b^4 + c^4 – abc^(4/3) = 2/3(a^4 + b^4 + c^4) + (1/3(a^4 + b^4 + c^4) – abc^(4/3)) >=

>= 2/3(a^4 + b^4 + c^4), так как 1/3(a^4 + b^4 + c^4) >= abc^(4/3) по неравенству о среднем арифметическом и средним геометрическим.

Значит, раз числитель не более 2(a^4 + b^4 + c^4), а знаменатель хотя бы 2/3(a^4 + b^4 + c^4), то A <= 2 / (2/3) = 3. A = 3, если a = b = c = 1 (тогда числитель равен 6, а знаменатель 2).

Ответ: 3.

Задача 3

(здесь и далее будем обозначать угол XYZ как \XYZ)

O1K = O1B, O2L = O2B, поэтому

\O1KB = \O1BK = \O2BL = \O2LB (использовали также вертикальность углов)

Значит, по суммам углов треугольников O1KB, O2LB, \KO1B = \LO2B.

По теореме о вписанном угле \KAB = ½ \KO1B = 1/2 \LO2B = \BCL

Значит, треугольник NAC РАВНОБЕДРЕННЫЙ (УГЛЫ ПРИ ОСНОВАНИИ AC РАВНЫ).

Обозначим \KAB = ½ \KO1B = 1/2 \LO2B = \BCL = x. Тогда раз \O1KB = \O1BK = \O2BL = \O2LB, по суммам углов O1KB, O2LB (раз \KO1B = \LO2B = 2x),

\O1KB = \O1BK = \O2BL = \O2LB = 90 – x.

Раз (KL) || (AC), то \NKL = \NLK = x и NKL равнобедренный тоже.

Поэтому NK = NL и NA = NC. Значит, NA * NK = NC * NL и N лежит на радикальной оси двух окружностей из условия. То есть N лежит на прямой, соединяющей точки пересечения окружностей. Значит, (BN) и (O1O2) перпендикулярны.

Кроме того, заметим, что раз \O1KO2 = \O1KB = \O2LB = \O1LO2,

То точки O1, O2, K, L лежат на одной окружности.

Обозначим \LKB = y. Тогда \NKB = x + y и

\O2O1B = \O2O1L = \LKO2 = \LKB = y по теореме о вписанном угле.

Обозначим M точку пересечения прямых BN и O1O2. Тогда \O1MN = 90 (как было сказано выше), по теореме о внешнем угле \O1BN = 90 + y.

Поскольку \O1BK = 90 – x, то \KBN = (90 + y) – (90 - x) = x + y.

Т. Е. \NKB = \NBK и NBK – равнобедренный, NB = NK. Но O1B = O1K, значит, O1 и N лежат на серединном перпендикуляре к BK. То есть O1N перпендикулярно BK. Значит, O1N перпендикулярно O2B.

Ответ: 90 градусов.

Задача 5.

Ответ: 2 * 4^(n + 1) – 3^(n + 2).

Докажем по индукции. Обозначим a_n наибольшую сумму, которую невозможно разменять такими монетами: 3^n, 3^(n - 1) * 4, …, 3 * 4^(n - 1), 4^n.

База n = 1

Тогда у нас есть только монеты по 3 и 4 пиастра.

сумму вида 6 + 3k, где k – целое неотрицательное, всегда можно разменять монетами по 3 пиастра

Сумму вида 7 + 3k, где k – целое неотрицательное, всегда можно разменять монетами 3 пиастра и монетой 4 пиастра

Сумму вида 8 + 3k, где k – целое неотрицательное, всегда можно разменять монетами по 3 пиастра и 2 монетами по 4 пиастра

2 * 4^2 – 3^3 = 5 пиастров разменять нельзя; 5 – 4 = 1 – нельзя разменять, 5 – 3 = 2 (тоже нелья).

Переход (от n к n + 1)

Пусть некоторую монету x мы как-то разменяли:

Выполнено x = c_{n + 1} * 3^(n + 1) + c_n * 3^n * 4 + … + c_0 * 4^(n + 1)

Заметим тогда, что c_{n + 1} можно считать меньшим четырёх. Действительно, ведь мы можем вычесть из c_{n + 1} число 4k для некоторого натурального k, и прибавить к c_n число 3k. Тогда сумма не поменяется, так как её изменение равно -4k * 3^(n + 1) + 3k * 3^n + 4 = -4k * 3^(n + 1) + 4k * 3^(n + 1) = 0.

Докажем, что любую сумму y > 4a_n + 3^{n + 2} можно разменять монетами 3^{n + 1}, 3^n * 4, …, 3 * 4^n, 4^{n + 1}.

Заметим, что хотя бы одно из чисел y, $y – 3^{n + 1}$, $y – 2*{3n + 1}$, $y – 3*3{n + 1}$ делится на 4. Пусть это число s. Тогда $s / 4 > a_n$. Разменяем s монетами 3^n, $3^{(n - 1)} * 4, …, 3 * 4^{(n - 1)}, 4^n$ по предположению индукции:

И $s = b_{n} * 3^n + b_{n – 1} * 3^{n – 1} * 4 + … + b_0 * 4^n$

Домножим на 4:

Тогда $y = 4s + b_{n + 1} * 3^{n + 1} = b_{n + 1} * 3^{(n + 1)} + b_n * 3^n * 4 + … + b_0 * 4^{(n + 1)}$

То есть сумму y тоже можно разменять.

Сумму $4a_n + 3 * 3^{n + 1} = 4a_n + 3^{n + 2}$ разменять нельзя монетами $3^{n + 1}, 3^n * 4, …, 3 * 4^n, 4^{n + 1}$.

Предположим противное. Тогда возьмём $x = 4a_n + 3^{n + 2}$:

$x = c_{n + 1} * 3^{(n + 1)} + c_n * 3^n * 4 + … + c_0 * 4^{(n + 1)}$

Тогда (как уже было сказано) можем считать $c_{n + 1} <= 3$.

В сумме все слагаемые, кроме $c_{n + 1} * 3^{(n + 1)}$ делятся на 4. При этом, x сравнимо с $3^{n + 2}$ по модулю 4 (т. .к $x = 4a_n + 3^{n + 2}$).

Значит, $c_{n + 1} * 3^{n + 1}$ сравнимо с $3^{n + 2}$ по модулю 4. Т. Е.

$c_{n + 1} = 3$.

Поэтому $4a_n = x – 3^{n + 2} = x – 3 * 3^{n + 1} = c_n * 3^n * 4 + … + c_1 * 3 * 4^n + c_0 * 4^{n + 1}$

$a_n = c_n * 3^n + … + c_1 * 3 * 4^{n – 1} + c_0 * 4^n$

то есть a_n можно разменять монетами $3^n, 3^{(n - 1)} * 4, …, 3 * 4^{(n - 1)}, 4^n$

противоречие. Значит, $a_{n + 1} = 4a_n + 3^{n + 2} = 4(2 * 4^{(n + 1)} – 3^{(n + 2)}) + 3^{n + 2} = 2 * 4^{n + 3} – 3^{n + 3}$

ответ: $2 * 4^{(n + 1)} – 3^{(n + 2)}$

Задача 4.

Пусть наше число записывается в пятеричной системе как abcdabcd…abcdab

Найдём его в десятичной системе счисления.

сумма по всем разрядам с номерами вида $4k + 1$ и $4k + 2$ равна (нумеруем слева направо, начиная с нулевого)

$(a + 5b) + (a + 5b) * 5^4 + (a + 5b)^8 + … + (a+ 5b) * 5^{4044} =$

$= (a + 5b) * (5^{4048} - 1) / (5^4 - 1)$

сумма по остальным разрядам

$(c + 5d)*5^2 + (c + 5d) * 5^6 + \dots (c + 5d)* 5^{4042} = (c + 5d) * 5^2 * (5^{4044} - 1)/(5^4 - 1) = (a + 5b – 1) * 5^2 * (5^{4044} - 1)/(5^4 - 1)$

Сложим, получим $p^2 + 2p$ для некоторого простого p. Т. е. $(p + 1)^2 – 1$.