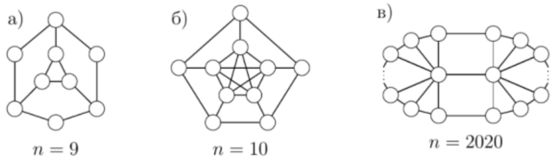
ВОПРОС 1: ЭССЕ 25 из 25 баллов

1. На картинке нарисовано n кружочков, некоторые кружочки соединены отрезками. Требуется расставить в кружочках числа от 1 до n (без повторений) так, чтобы выполнялось свойство: если кружочки соединены отрезками, то стоящие в них числа должны быть взаимно просты (то есть не иметь общих натуральных делителей, отличных от 1). Можно ли это сделать в каждом из следующих случаев? Если можно — опишите расстановку чисел, если нет — объясните, почему нельзя.

В случае в) и левая, и правая части рисунка состоят из "центрального" кружочка, соединенного отрезками с 1009-ю "боковыми"; каждый из "боковых", помимо "центрального", соединен только со своими соседями справа и слева.



Данный ответ: для а) ответ: да, существует 7 здесь 6,5,1 в треугольнике, и 7 соединено с 4, 6 и 8, 8 с 7 и 9, 9 с 8,1 и 2,...3 с 2,5 и 4, 5 с 1, 6 и 3.

4 8

6

5 1

3 9

2

для б) ответ: нет, несуществует. четных стало 5, а их нужно ставить через 1 слот, (потому что их общий дел. 2) , снаружи так можно поставить только 2, и в внутренем 5-угольнике тоже только два (что бы между ними не было проведено линии)

для в) ответ: нет, несуществует. четных 1010 и неч. 1010, понятно, что в одной из двух центральных клеток не может быть чет. чисел, потому что если все соеденённые с ним числа неч (их 1010) то ост. чет., которые соеденены ?! Поэтому все чет по краям,но если они (чет) должны идти через 1, то в 2018 отделений влезут лишь 1009 чет., а последнее никуда не влезет.

ВОПРОС 2: ЭССЕ 30 из 30 баллов

2. а) Существуют ли такие натуральные числа, что их сумма равна 2021 и в записи этого равенства есть ровно одна пара совпадающих цифр.

б) Существуют ли такие натуральные числа, что их сумма равна 2021 и все цифры в записи этого равенства различны?

Данный ответ: К пункту А) Ответ: да, существует. Например 1998+23=2021, совпадающие цифры в нём это 9 и 9 в числе 1998.

И пункту Б) Ответ:да, существует. Например 1987 + 34= 2021, совпадающих цифр в нём нет.

ВОПРОС 3: ЭССЕ 20 из 20 баллов

3. Каждое натуральное число окрашено в желтый или зеленый цвет таким образом, что есть числа каждого цвета. Сумма любых трёх (не обязательно различных) чисел одного цвета имеет тот же самый цвет, что и эти три числа. Найдите все такие раскраски.

Данный ответ: Предположем, что 1 - желтый (так как все натуральные числа раскрашены, то 1 имеет некий цвет) , тогда 1+1+1=3 - тоже желтый. Нетрудно понять,что все нечетные числа - желтые, потому что если у нас есть неч. число n (которое желтое), то что бы сделать след. число (неч.) n+2 можно получить из: n+1+1= n+2. Окей, теперь докажем, что мы случайно складывая нечетные числа не получим четное. Ну что ж, при сложение неч+неч+неч=чет+неч(так как неч+неч=чет), а чет+неч=неч, поэтому все неч являются желтыми. Теперь рассмотрим число 2, оно зеленое, т.к. его нельзя получить при сложении трех желтых, и так же заметим, что 4 тоже неполучается при сложении трёх желтых чисел, но должен иметь свой цвет,а 6= 2+2+2, 8=4+2+2, и все ост. четные числа желтые (рассмотрим число n, оно равно n-4+2+2=n-4+4=n, чтд.), поэтому все неч числа имеюют один цвет, а все чет, другой.

ВОПРОС 4: ЭССЕ 10 из 25 баллов

4. а) У Васи есть фонарик, работающий от двух аккумуляторов, и запас из 13 аккумуляторов. Ему известно, что какие-то 7 аккумуляторов заряжены, а остальные аккумуляторы разряжены, но ему неизвестно, какие именно. Вася может вставить в фонарик два аккумулятора, и если оба заряжены, то фонарик загорится, а иначе — нет. Как ему за 7 таких проверок найти два заряженных аккумулятора?

б) Как Васе за 16 таких проверок найти два заряженных аккумулятора, если у него есть 25 аккумуляторов, из которых какие-то 12 заряжены?

Данный ответ: к пункту а) мы сначала нумеруем батарейки от 1 до 13, а потом используем 6 попыток, сранивая пары, то есть берем батарейку номер 1 и батарейку номер 2:

1 2 ; 3 4 ; 5 6 ; 7 8 ; 9 10 ; 11 12 (и ост 13). Если ничего не получилось, то вспоминаем условие, что 7 батареек- рабочие, и если для работы нужно что бы работало 2 батарейки, **в каждой паре** есть по одной работующей батарейке, и ост., что батарейка номер 13 тоже рабочая. своей последней попыткой мы сравниваем батарейку номер 13 с любой батарейкой в своей паре (1 и 2 например), если фонарик не загорелся, то гарантировано батрейка номер 13 и другая батарейка из этой же пары будут заряженными.

к пункту б) сначала нумерум батарейки от 1 до 25, потом делим на двенадцать пар: 1 2; 3 4 ; 5 6 ;........; 23 24 и ост 25 (потрачено 12 проверок). Потом сравниваем 25 с 24, потом с 23, если не включилось, то где-то среди этих трех 2 разряженных, поэтому на свою предпоследнюю попытку берем 2 и 3, если не включились, то 1 и 4 и потом 1 и 3, 1 не включился 3 раза значит он будет плохим, тогда 2 хорошее, а из-зи тогочто с 3 он не включился, то он включится с 4.