Олимпиада школьников СПбГУ по математике.

Заключительный этап. 2020/2021 учебный год. 10 – 11 классы.

1. При каких натуральных n клетчатую доску $n \times n$ можно разрезать на квадраты 1×1 и 2×2 так, что квадратов разных размеров будет поровну?

2. Положительные числа a, b, c таковы, что $a^2b + b^2c + c^2a = 3$. Найдите минимальное значение выражения

$$A = a^7b + b^7c + c^7a + ab^3 + bc^3 + ca^3.$$

3. Дан неравнобедренный остроугольный треугольник ABC. В нем проведены высоты BB_1 и CC_1, пересекающиеся в точке H. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами H и C соответственно касаются прямой AB. Из точки A к ω_1 и ω_2 проведены касательные, отличные от AB. Обозначим точки их касания с этими окружностями через D и E соответственно. Найдите угол B_1DE.

4. Петя написал на доске подряд n последовательных двузначных чисел ($n \geq 2$), первое из которых не содержит цифру 4, а последнее — цифру 7. Вася подумал, что это десятичная запись натурального числа x, и разложил x на простые множители. Оказалось, что их всего два и они различаются на 4. Что написано на доске?

5. В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством 3^n, $3^{n-1} \cdot 5$, $3^{n-2} \cdot 5^2$, $3^{n-3} \cdot 5^3$, $\ldots$, $3 \cdot 5^{n-1}$, 5^n пиастров, где n — натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?

1	2	3	4	5	Сумма
20	18	0	20	0	58

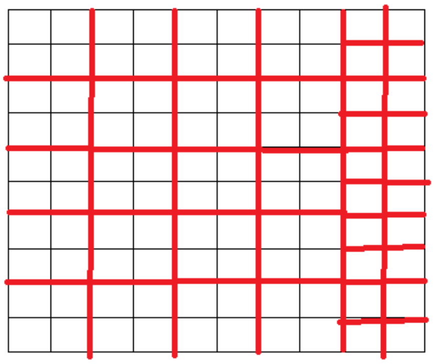
№1

Посчитаем площадь всех фигурок. Квадратов 1*1 и 2*2 равное количество (пусть количество каждого типу будет = k). Тогда площадь всех квадратов будет равняться S = 1*1*k + 2*2*k = 5k. С другой стороны площадь всех квадратов равна площади всей доски со стороной n (S = n^2)

S = 5k = n^2. Значит n^2 делиться на 5, следовательно n делиться на 5.

1	2	1	2	1
3	4	3	4	3
1	2	1	2	1
3	4	3	4	3
1	2	1	2	1

Рассмотрим случай, когда n=5. Раскрасим доску в 4 цвета. Заметим, что любой квадрат 2*2 покрывает ровно 1 квадратик 4го цвета, а это значит, что квадратов 2*2 не больше, чем квадратиков цвета 4 (в квадрате 5*5 всего 4 таких квадратика). Значит k<=4, то есть S=5k<=20, но S=25 – противоречие



Построим пример для n=5s, где s – натуральное четное. Разобьем нашу доску на квадраты 10*10 (у нас получиться, так как сторона квадрата кратна 10) и каждый такой квадрат разобьем на квадратики как показано на рисунке

Построим пример для n=5s, где s-натуральное нечетное и >=3, то есть вида 10x+5 (где x>0)

Выделим внутри большого квадрата поменьше со стороной (10x+4). Тогда в такой квадрат поместиться $(10x+4)^2/4$ квадратиков 2*2 (так как 10x+4 – четное). А нам нужно k=S/5 = $(10x+5)^2/5$

Сравним эти 2 числа. Проведя преобразования убеждаемся (получается, что должно выполняться следующее $100x^2>=20$ – а это верно для x>0), что у нас хватит ресурсов, чтоб разрезать на нужное количество квадратов 2*2. А значит разрежем квадрат (10x+5)*(10x+5) на k штук (где k = $(10x+5)^2/5$) квадратов 2*2, а все остальное разрежим на квадраты 1*1

Ответ: при n = 5s, где s – натуральное и >=2

№2

$$a^2b + b^2c + c^2a = 3.$$

Выражение разобъем $A = \underline{a^7b} + \underline{b^7c} + \underline{c^7a} + \underline{ab^3} + \underline{bc^3} + \underline{ca^3}.$ на 3 части

Оценим каждую часть снизу неравенсвом между средним арифметическим и средним гармоническим

$a^7b+ab^3>=2$ корня из $(a^8b^4)= 2 (a^2b)^2$ (так проделаем с каждой частью)

сложим все 3 неравенства и получим A >= 2*($(a^2b)^2+(b^2c)^2+(c^2a)^2$). Выражение в скобках

обозначим за X, а $a^2b + b^2c + c^2a$ обозначим за Y

Запишем неравенство между средним арифметическим и средним квадратичным для суммы Y. Тогда получиться, что $\sqrt{\frac{X}{3}} \geq \frac{Y}{3}$

Из этого следует, что X >= $Y^2/3$

$A >= 2*X >= 2Y^2/3 = 2*3*3/3 = 6$

Приведем пример, что такое А существует. Пусть a=b=c=1, тогда все неравенства обратятся в равенства и А будет равно 6

Ответ:6

№3

AC1 = AE и AC1 = AD – так как это касательные к окружностям, значит AC1 = AE = AD

При инверсии D переходит в B1, а B1 в E => они лежат на одной прямой

Ответ: 0

№4

Заметим, что число x имеет четную длину, так как состоит из n двухзначных чисел (длина x равна 2n)

Так как разложили число на простые множители и их всего 2, значит это 2 простых числа (p и q, где p<q). Их разница равна 4, значит p=4+q. pq=p*p+4p=x>=1000, тогда $p^2+4p-1000>=0$, решая неравенство приходим к тому, что p>33. Значит p – нечетное.

Рассмотрим на что может оканчиваться p (то есть рассмотрим остатки по модулю 10). Так как число простое и нечетное, то оно дает только остатки 1, 3, 7, 9 (5 не может, так как p>33, а если будет оканчиваться на 5, то будет делиться на 5)

p	p^2	4p	p^2+4p
1	1	4	5
3	9	2	1
7	9	8	7
9	1	6	7

Из таблицы видим, что числа оканчивающиеся на 7 и 9 не подходят (так как в условии сказано, что последнее число не имеет цифру 7), еще не подходят те, которые оканчиваются на 1, так как x будет делиться на 5 – что невозможно

Простые числа, которые подходят нам: 43, 53, 73, 83, 103, …

Тогда q соответственно равно: 47, 57, 77, 87, 107,…

57, 77 и 87 – не простые

Тогда x равен: 2021, 3021(не последовательные), 11021 (не подходит, так как имеет нечетную длину)

$X=(y+n-1)+(y+n-2)*100+…+(y+1)*10^{2n-4}+y*10^{2n}$ – запись числа x, через последовательные числа y

Заметим, что максимум может идти подряд 9 чисел, иначе одно из них будет заканчиваться на 7, значит последнее число заканчивается на 6, а нельзя чтоб заканчивалось на четную цифру, так как будет делиться на 2. На 5 тоже не может заканчиваться, так как будет делиться на 5. Для 4 аналогично как и для 6. Значит максимум чисел может быть 6. Но если будет 6 чисел, значит их сумма будет делиться на 3, то есть x будет делиться на 3 (аналогично, еслт всего 3 числа) => максимум 5 чисел, из которых состоит x

Ответ: 2021