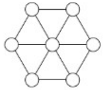
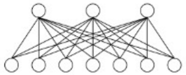
ВОПРОС 1: ЭССЕ

25 из 25 баллов

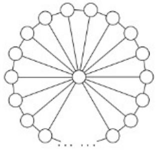
1. На картинке нарисовано n кружочков, некоторые кружочки соединены отрезками. Требуется расставить в кружочках числа от 1 до n (без повторений) так, чтобы выполнялось свойство: если кружочки соединены отрезками, то стоящие в них числа должны быть взаимно просты (то есть не иметь общих натуральных делителей, отличных от 1). Можно ли это сделать в каждом из следующих случаев? Если можно — опишите расстановку чисел, если нет — объясните, почему нельзя.



а) $n = 7$



б) $n = 10$



в) $n = 2022$: по кругу стоят 2021 кружочков, и еще один в центре

Данный ответ: а) Да, может. Пример: в центре число 1, числа 2, 3, 4, 5, 6, 7 по кругу именно в таком порядке. Заметим, что НОД(n, n + 1) = НОД(n + 1 - n, n) = НОД(1, n) = 1 - числа n, n + 1 взаимно простые при 2 <= n <= 6, НОД(2, 7) = 1, НОД(1, n) = 1. Значит этот пример подходит

б) Нет, не может. Число 6 имеет общие делители, большие 1, со следующими числами в интервале [1, 10]: 2, 3, 4, 8, 9, 10 и 6 - всего 7 чисел. Заметим что у нас двудольный граф. Докажем, что число 6 и числа 2, 3, 4, 8, 9, 10 должны быть в одной доле этого графа. Пусть это не так, тогда число существует число n, расположенное в другой доле, нежели число 6. В этом случае, как видно из рисунка, n и 6 соединены и значит взаимно простые, что неверно (n входит в список чисел, с которыми число 6 имеет общие делители, большие 1). Противоречие. Значит, так как в верхней доле всего 3 вершины, а у нас чисел 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10: семь, эти числа будут в нижней доле. Тогда в верхней: числа 1, 5, 7. Но числа 5 и 10, соединенные отрезком, не взаимно простые => противоречие, и такое невозможно, что и требовалось доказать.

в) Нет, не может. Рассмотрим 2 случая: то, что в центре находится четное число или что в центре находится нечетное число. В первом случае у нас будет 1011 нечетных и 1010 четных чисел расположенных на окружности. Центральное четное число соединено с другим четным числом на окружности (таких 1010). Значит, они соединены отрезком и имеют общий делитель 2, больший единицы, противоречие. Значит, в центре находится нечетное число. Тогда на окружности находится 1011 четных и 1010 нечетных чисел. Докажем, что на окружности будет хотя бы 2 подряд идущих четных числа. Предположим, что это не так, и любое четные число окружает ровно 2 нечетных. Изобразим двудольный граф, в котором в первой доле будут четные, а во второй - нечетные числа. Отрезками будем соединять числа, стоящие рядом, если они разной четности. Степень каждой вершины из первой доли будет 2, т.к. каждое четные число окружает ровно 2 нечетных . Степень каждой вершины из второй доли не более двух (у каждого числа на окружности не более двух соседей на окружности). Количество ребер, с одной стороны, ровно 1011 * 2 = 2022, с другой, не больше 1010 * 2 = 2020. Противоречие. Значит искомая расстоновка невозможна.

ВОПРОС 2: ЭССЕ

15 из 30 баллов

2. Назовем *каскадом, порожденным числом* r, набор из 12 натуральных чисел: $r, 2r, \ldots, 12r$.

а) Может ли какая-то пара чисел (a, b) содержаться в шести различных каскадах? Если да — приведите пример таких чисел, если нет — объясните, почему не может.

б) Верно ли, что множество натуральных чисел можно раскрасить в 12 цветов так, что в каждом каскаде все элементы будут разного цвета?

Данный ответ: а) Да, может: a = 120 и b = 240:

r1 = 120: a = r1, b = 2 * r1

r2 = 60: a = 2 * r2, b = 4 * r2

r3 = 40: a = 3 * r3, b = 6 * r3

r4 = 30: a = 4 * r4, b = 8 * r4

r5 = 24: a = 5 * r5, b = 10 * r5

r6 = 20: a = 6 * r6, b = 12 * r6

б) Нет, нельзя. Предположим, что можно. Рассмотрим каскад 1,2,3,4...12.

ВОПРОС 3: ЭССЕ

0 из 20 баллов

3. В треугольнике ABC точка D — середина стороны AB, E — середина стороны AC, F — середина биссектрисы AL, причем $DF = 1$, $EF = 2$. На плоскости изображены точки D, E, F так, что прямая DF горизонтальна, а остальные элементы чертежа стерты. Можно ли восстановить положение хотя бы одной из вершин треугольника, если известно, что вершина A находилась сверху от прямой DF?

Данный ответ: В треугольнике ADL: DF - средняя линия, т.к. AD = BD, AF = LF. => DF параллельна BL, BL = 2 * DF = 2

В треугольнике ALC: EF - средняя линия, т.к. AE = EC, AF = LF. => FE параллельна LC, LC = 2 * FE = 4

Т.к. прямые BL и LC совпадают, DF параллельно EF, и т.к. они проходят через общую точку F, точки D, E, F лежат на одной прямой.

Зная DF, продлим его за точку F, дважды отметив на продолжении отрезки, равные DF. Получим три отрезка, равные DF: DF, FO, OE, FE = 2 * DF. Найдя одну из вершин, мы сможем найти все остальные, восстановив их из сведений о средней линии и равенстве углов, разделенных биссектрисой.

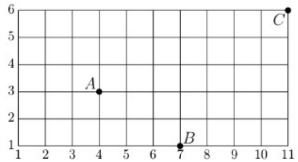
ВОПРОС 4: ЭССЕ

16 из 25 баллов

4. Город имеет форму клетчатого прямоугольника 5×10 клеток: линии — улицы, клетки — жилые кварталы. Расстояние между перекрестками измеряется как длина самого короткого пути по улицам города, проходящего от одного перекрестка до другого. Например, для перекрестков A, B и C на картинке $AB = 5$, $AC = 10$, $BC = 9$. Можно ли отметить в этом городе k перекрестков так, чтобы все расстояния между этими перекрестками оказались различными числами? Если да — укажите эти перекрестки (например, перекресток C находится на пересечении 11-й вертикальной и 6-й горизонтальной улицы), если нет — объясните, почему нельзя.

Решите задачу для

а) $k = 5$; б) $k = 6$; в) $k = 7$.



Данный ответ:

а) Да, возможно. Перекрестки:

A на пересечении 6-ой горизонтальной и 1-ой вертикальной

B на пересечении 6-ой горизонтальной и 2-ой вертикальной

C на пересечении 6-ой горизонтальной и 6-ой вертикальной

D на пересечении 4-ой горизонтальной и 1-ой вертикальной

E на пересечении 4-ой горизонтальной и 10-ой вертикальной

AB = 1, AC = 5, AD = 2, AE = 11

BC = 4, BD = 3, BE = 10

CD = 7, CE = 6

DE = 9

в) Нет, нельзя. Предположим, что можно. Тогда суммарно попарных расстояний 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21. Т.к. все эти расстояния по условию различные, минимально возможное значение максимального расстояния между перекрестками - это 21, т.к. если упорядочить эти расстояния в порядке возрастания: a1, a2, a3, ..., a21: a21>a20>...> a1>=1; *a21*>=*a20* + 1>=*a19* + *2* >= ... >= *a1* + 20 >= 1 + 20 = 21; *a21* >= 21. Но такое расстояние недостижимо, т.к. манхэтенское расстояние между точками есть сумма модулей разности горизонтальных и вертикальных координат точек, а здесь его максимальное значение равно abs(6 - 1) + abs(1 - 11) = 15 < 21, противоречие. => такое невозможно

б) Суммарно попарных расстояний чем 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15. Т.к. все эти расстояния по условию различные, минимально возможное значение максимального расстояния между перекрестками - это 15, т.к. если упорядочить эти расстояния в порядке возрастания: a1, a2, a3, ..., a15: a15>a14>...> a1>=1; *a15*>=*a14* + 1>=*a13* + *2* >= ... >= *a1* + 20 >= 1 + 14 = 15; *a15* >= 15. Манхэтенское расстояние между точками есть сумма модулей разности горизонтальных и вертикальных координат точек, а здесь его максимальное значение равно abs(6 - 1) + abs(1 - 11) = 15. Значит, *a15*=15, *a14*=14, ...*ai* = i ... *a1* = 1, т.е. все расстояния присутсвуют ровно по одному разу. Т.к. есть расстояние 15, два перекрестка находятся в углах сетки. Рассмотрим все точки,между которыми расстояние 14. Разность координат: 4 по горизонтали и 10 по вертикали , либо 5 по горизонтали и 9 по вертикали.