

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Олимпиада школьников по математике 2020–2021
Заключительный этап
8–9 классы

1. Докажите, что для любых вещественных чисел a и b уравнение

$$(a^6 - b^6)x^2 + 2(a^5 - b^5)x + (a^4 - b^4) = 0$$

имеет решение.

2. На острове живут лжецы и рыцари. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Каждый житель острова про каждого из остальных знает, рыцарь он или лжец. Как-то раз встретились 28 островитян. Двое из них сказали: «Ровно двое из нас лжецы», затем четверо из остальных сказали: «Ровно четверо из нас лжецы», потом восемь из оставшихся сказали: «Ровно восемь из нас лжецы», наконец, все оставшиеся 14 сказали: «Ровно 14 из нас лжецы». Сколько лжецов было среди встретившихся? Приведите все возможные варианты и докажите, что других нет.

3. Сумма неотрицательных чисел a , b и c равна 3. Найдите наибольшее значение выражения $ab + bc + 2ca$.

4. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках K и L . Прямая ℓ пересекает окружность ω_1 в точках A и C , а окружность ω_2 — в точках B и D , причем точки идут на прямой ℓ в алфавитном порядке. Обозначим через P и Q соответственно проекции точек B и C на прямую KL . Докажите, что прямые AP и DQ параллельны.

5. Дана клетчатая доска 2021×2021 . Петя и Вася играют в следующую игру. Они по очереди ставят фишки в свободные клетки доски. Выигрывает тот игрок, после хода которого в каждом прямоугольнике 3×5 и 5×3 будет стоять фишка. Начинает Петя. Кто из игроков может обеспечить себе победу вне зависимости от действий соперника?

6. Найдите все такие натуральные числа n , что число $2^n + n^2 + 25$ является кубом простого числа.

1	2	3	4	5	6	Сумма
15	20	20	0	0	0	55

Задача 2

первое утверждение-ровно двое из нас лжецы

второе утверждение-ровно четверо из нас лжецы

третье утверждение-ровно восемь из нас лжецы

четвертое утверждение-ровно четырнадцать из нас лжецы

Если одно из утверждений верно, то остальные утверждения неверны. Поэтому первое утверждение неверно, ведь тогда рыцарями среди 28 островитян являются $28-2=26$ человек.

Но при этом все люди, что сказали другие утверждения лжецы. Всего их

$4+8+14=26$. Противоречие. Аналогично если верно второе утверждение, то 4 человека

являются лжецами, но при этом солгали $2+8+14=24$ человека. Противоречие. Если верно

третье утверждение, то 8 островитян являются лжецами, а остальные рыцарями. Но при этом

солгало $2+4+14=20$ человек. Противоречие. Но если же верно четвёртое утверждение, то

лжецами являются 14 человек, но все эти 14 человек сказали другие ложные высказывания.

Случай с 14 лжецами возможен.

Если же неверно ни одно из утверждений, то солгали все, ведь сказали какое-то из

высказываний. Поэтому все 28 островитян являются лжецами. Случай с 28 островитянами возможен.

Ответ: 14 лжецов или 28 лжецов.

Задача 1

$$(a^6 - b^6) \cdot x^2 + 2(a^5 - b^5) \cdot x + (a^4 - b^4) = a^6 \cdot x^2 - b^6 \cdot x^2 + 2a^5 \cdot x + a^4 -$$

$$b^4 = a^4(a^2 \cdot x^2 + 2ax + 1) - b^4(b^2x^2 + 2bx + 1) = a^4(ax+1)^2 - b^4(bx+1)^2 = (a^2(ax+1) -$$

$$b^2(bx+1)) \cdot (a^2(ax+1) + b^2(bx+1)) = 0$$

$$a^2(ax+1) - b^2(bx+1) = 0 \text{ или } a^2(ax+1) + b^2(bx+1) = 0$$

$$a^2(ax+1) - b^2(bx+1) = a^3 \cdot x + a^2 - b^3 \cdot x = 0$$

$$a^2 - b^2 = x(b^3 - a^3)$$

Поэтому для существенных чисел a и b уравнение имеет решение

Задача 3

$$(a+b+c)^2 = 3^2 = 9 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$(a+b+c)^2 - ab - bc - 2ac = a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc = a^2 + c^2 + b(a+b+c)$$

Пусть $ab+bc+2ac$ больше 4,5, тогда $ab+bc+2ac > a^2 + c^2 + b(a+b+c)$

$$2ac > a^2 + b^2 + c^2$$

$$2ac > (a-c)^2 + 2ac + b^2$$

$0 > (a-c)^2 + b^2$, но квадраты любых чисел ≥ 0 , а значит $(a-c)^2 \geq 0$, $b^2 \geq 0$, поэтому $(a-c)^2 + b^2 \geq 0$. Противоречие.

Значит $ab+bc+2ac$ не больше 4,5

$$a = 1,5$$

$$b = 0$$

$$c = 1,5$$

$$\text{тогда } ab+bc+2ac = 4,5$$

Ответ: 4,5