Санкт-Петербургский государственный университет
Олимпиада школьников по математике 2020–2021
Заключительный этап
8–9 классы

1. Найдите все такие значения a, для которых квадратные трехчлены x^2+2x+a и $x^2+ax+2=0$ имеют по два корня, причем сумма квадратов корней первого трехчлена равна сумме квадратов корней второго трехчлена.

2. Каждый из островитян либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт (и те, и другие на острове есть). Каждый житель острова про каждого знает рыцарь он или лжец. Часть жителей острова заявила, что на острове проживает четное число рыцарей, а все оставшиеся жители заявили, что на острове проживает нечетное число лжецов. Может ли на острове быть ровно 2021 житель?

3. Для произвольных вещественных чисел a и b ($b \neq 0$) найдите наименьшее значение выражения $a^2 + b^2 + \dfrac{a}{b} + \dfrac{1}{b^2}$.

4. Точки B_1 и C_1 — середины сторон AC и AB треугольника ABC. На сторонах AB и AC как на диаметрах построены окружности ω_1 и ω_2. Обозначим за D точку пересечения прямой B_1C_1 с окружностью ω_1, лежащую по другую сторону от C относительно прямой AB. Обозначим за E точку пересечения прямой B_1C_1 с окружностью ω_2, лежащую по другую сторону от B относительно прямой AC. Прямые BD и CE пересекаются в точке K. Докажите, что прямая BC проходит через точку пересечения высот треугольника KDE.

5. На центральной клетке доски 11×11 стоит фишка. Петя и Вася играют в следующую игру. Каждым своим ходом Петя передвигает фишку на одну клетку по вертикали или горизонтали. Каждый своим ходом Вася возводит стенку с одной из сторон любой из клеток. Двигать фишку через стенку Петя не может. Игроки ходят по очереди, начинает Петя. Петя выигрывает, если сможет фишкой уйти с доски. Может ли он обеспечить себе победу вне зависимости от действий соперника?

6. Докажите, что существует бесконечно много таких натуральных чисел n, что количество различных нечетных простых делителей числа $n(n+3)$ кратно трем.

1	2	3	4	5	6	Сумма
20	20	0	0	20	0	60

Задача 1

x^2 + 2x + a. Найдем корни этого трехчлена. D = 4 – 4a. Первый корень равен (-2-корень дискриминанта)/2 = -1-(корень из 1-a). Второй корень равен -1 + (корень из 1-a). Также по теореме Виета мы знаем, что x1+ x2 = -2 и x1x2 = a.

Разберем второй трехчлен тоже по теореме Виета. (Для удобства я назвал корни второго уравнения x3 и x4).x3 + x4 = -a.x3x4 = 2.

Посмотрим на (x3+x4)^2 по теореме Виета он равен (-a)^2=a^2. Разложим по ФСУ: x3^2 + x4^2 + 2x3x4. Мы знаем из условия, что x3^2 + x4^2= x1^2 + x2^2. Следовательно (x3+x4)^2 = x1^2 + x2^2 + 2x3x4 = x1^2 + x2^2 + 4 = (-1-(корень из 1-a))^2 + (-1+(корень из 1-a))^2 + 4 = 1 + 1-a + 1 + 1-a + 4 = 8 – 2a =a^2

-a^2-2a+8=0

a^2+2a-8=0 D=36 a1=2 a2=-4. Но если a = 2 , то дискриминант первых двух трехчленов равен нулю, чего не может быть по условию, т.к иначе трехчлены имели бы только один корень. Следовательно a = - 4. Ответ: Единственное значение a, которое удовлетворяет условиям — это - 4.

Задача 2

Т.к по условию среди них есть хотя бы один лжец и лжецы не могут говорить правды, то есть хотя бы одно ложное утверждение. Т.к по условию среди них есть хотя бы один рыцарь и рыцарь не может лгать, то среди утверждений найдется хотя бы одно истинное. А т.к у нас всего два утверждения, то одно из них должно быть ложным, а другое истинным. Если второе утверждение является истинным, то первое является ложным. Следовательно в этом случае лжецов будет нечетное число, а рыцарей точно не может быть четное число. Значит в этом случае и рыцарей, и лжецов будет нечетное количество. Но тогда в сумме жителей острова будет четное число, а 2021 не является четным числом. Следовательно в этом случае 2021 жителя быть не могло. Посмотрим на случай, когда первое утверждение является истинным, а второе ложным. Тогда рыцарей четное количество, а количество лжецов не может быть четным. Тогда и рыцарей, и лжецов будет четное количество, но ведь в этом случае количество всех жителей опять будет четным, а 2021 — нечетное число. Следовательно 2021 жителя быть не могло.

Задача 3

a^2 + b^2 + a/b + 1/b^2= (b^2 + 1/b^2) + a^2 + a/b = (b^2 + 1/b^2 + 2) – 2 + a^2 + a/b = (b + 1/b)^2 – 2 + a^2 + a/b. Мы знаем, что модуль(x + 1/x) больше или равен 2. Также мы знаем, что квадрат всегда больше или равен 0. Следовательно минимальное значение (b+1/b)^2 = 4. При этом минимальное значение a^2 — это 0. Следовательно минимальное значение этого выражения равно = 4 - 2 + 0^2 + 0/b = 2. Данное значение достигается при a = 0 и b, модуль которого равен единице.

Задача 5

Вася выиграет тогда и только тогда, либо когда Пете некуда будет ходить, либо тогда, когда все выходы с доски заблокированы. Пете следует всегда ходить так, что даже если Вася заблокирует какой-то путь, то у Пети останутся выходы из этого места. Чтобы Петя точно смог завершить игру, ему нужно встать в угол,где есть сразу два выхода с поля, иначе Вася в свой ход сможет просто блокировать выходы из поля в тех клетках, где стоит Петя. До того, как Петя дойдет до края, у Васи будет минимум 4 хода, чтобы закрыть углы,(пятым ходом Васе придется закрыть выход с края, до которого дойдет Петя) за эти 4 хода Васе нужно просто перекрыть по одному выходу с каждого угла. Теперь, куда бы Петя не пришел, у этой клетки будет максимум 1 ход наружу, который Вася закроет в свой ход. Ответ: Нет, не может