Олимпиада школьников СПбГУ по математике.

Заключительный этап. 2020/2021 учебный год. 10 – 11 классы.

1. Натуральные числа от 1 до 2021 записаны в ряд в некотором порядке. Оказалось, что у любого числа его левый и его правый сосед имеют разную четность. Какое число может быть на первом месте?

2. При $a, b, c > 0$ найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{(a+b+c)^3 - 26abc}.$$

3. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B, а окружность с центром в точке O охватывает окружности ω_1 и ω_2, касаясь их в точках C и D соответственно. Оказалось, что точки A, C и D лежат на одной прямой. Найдите угол ABO.

4. Петя написал на доске подряд n двузначных восьмеричных чисел ($n \geq 2$), образующих арифметическую прогрессию с разностью -8. Вася подумал, что это восьмеричная запись натурального числа x, и разложил x на простые множители. Оказалось, что их всего два, и они различаются на 6. Что написано на доске?

5. В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством $3n-1$, $6n+1$, $6n+4$ и $6n+7$ пиастров, где n — натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?

1	2	3	4	5	Сумма
15	20	20	0	0	55

Задача 2.

Докажем неравенство:

(a+b+c)^3-26abc>=1/3(a^3+b^3+c^3)

Раскроем скобки в левой части неравенства:

a^3+b^3+c^3+3a^2b+3b^2a+3a^2c+3c^2a+3b^2c+3c^2b+6abc-26abc>=1/3(a^3+b^3+c^3)
2/3(a^3+b^3+c^3)+3a^2b+3b^2a+3a^2c+3c^2a+3b^2c+3c^2b>=20abc

Числа положительные, поэтому можно записать неравенства о средних:

a^3+b^3+c^3>=3$\sqrt[3]{(abc)^3}$=3abc
a^2b+b^2c+c^2a>=3$\sqrt[3]{(abc)^3}$=3abc
b^2a+c^2b+a^2c>=3$\sqrt[3]{(abc)^3}$=3abc

Сложим первое неравенство, умноженное на 2/3, со вторым и третьим, умноженными на 3:

2/3(a^3+b^3+c^3)+3a^2b+3b^2a+3a^2c+3c^2a+3b^2c+3c^2b>=2/3*3abc+3*3abc+3*3abc=20abc

Получили, что исходное неравенство верно ((a+b+c)^3-26abc>=1/3(a^3+b^3+c^3)).

Тогда A=(a^3+b^3+c^3)/((a+b+c)^3-26abc)<=1/(1/3)=3 (получаем это как раз из неравенства, которое доказали)

Пример, показывающий, что 3 достигается:

a=b=c=1
A=3/1=3

Ответ: 3.

Задача 3.

Обозначим за O1 и O2 центры первой и второй окружности соответственно.

Мы знаем, что, если окружности касаются, то их центры и точка касания лежат на одной прямой. То есть на одной прямой лежат точки O, O1 и C, а также O, O2 и D.

Обозначение: <ABC – угол ABC.

<DCO=<CDO (так как CDO равнобедренный), <ACO1 (он же <DCO так как C,D,A и C,O,O1 лежат на одной прямой) = <CAO1 (так как CAO1 равнобедренный) , <ADO2 (он же <CDO так как C,D,A и D,O,O2 лежат на одной прямой) = <DAO2 (так как DAO2 равнобедренный). То есть <CAO1=<ACO1=<ADO2=<DAO2=x.

Тогда <COD (он же <O1OO2) =180-2x и O1AO2=180-2x. Треугольники AO1O2 и BO1O2 равны по трем сторонам. Значит <O1BO2=<O1AO2=180-2x. Тогда четырехугольник O1BOO2 вписанный и углы O2O1O и O2BO равны(1).

Также <DAO2=<ACO1 (он же <DCO) => AO2 параллельна CO => <O2O1O=<AO2O1, который в свою очередь равен <BO2O1 (из равенства треугольников AO1O2 и BO1O2)(2).

<ABO=<ABO2+<O2BO=<ABO2+<O2O1O (из (1))= <ABO2+<BO2O1 (из (2)).

Заметим, что AB перпендикулярно O1O2 (так как AB – рад. ось, а O1O2 – линия центров). Обозначим за K точку пересечения AB и O1O2. Тогда <ABO2=<KBO2, <BO2O1=<BO2K => <ABO=<ABO2+<BO2O1=<KBO2+<BO2K=180-<O2KB=180-90=90.

Ответ: 90.

Задача 1.

Рассмотрим какое-нибудь четное число. Пусть справа от него стоит нечетное, а слева четное (то есть …ЧЧН…). Тогда слева от левого четного должно стоять нечетное, а справа от правого нечетного – нечетное (то есть …НЧЧНН…). Далее слева от левого нечетного должно стоять нечетное, а справа от правого нечетного – четное (то есть …ННЧЧННЧ...). Раскручивая далее эту цепочку, получаем, что происходит чередование – два четных, два нечетных, два четных и т.д. (в начале/ в конце может стоять только одно четное/нечетное).

1) Пусть на первом месте стоит четное число. Тогда наша цепочка имеет вид ЧЧННЧЧНН…ЧЧННЧ или ЧННЧЧННЧЧ…ННЧЧ и в ней 1011 четных чисел и 1010 нечетных. Однако среди чисел 1…2021 1011 нечетных чисел и 1010 четных. Значит это невозможно.

2) Если на первом месте стоит нечетное число, то цепочка имеет вид ННЧЧННЧЧ…ННЧЧН или НЧЧННЧЧНН…ЧЧНН и в ней 1011 нечетных чисел и 1010 четных. Понятно, что неважно с какого именно нечетного числа начинается цепочка.

Ответ: любое нечетное число.

Задача 4.

Обозначения: xy..z – число, x*y ..*z – произведение чисел.

Пусть очередное Петино число это xy, тогда следующее число будет (x-1)y, поскольку их разность в десятичной системе счисления должна быть 8 (то есть 10 в восьмеричной). Значит Петя написал на доске какую-то подстроку строки 7y6y5y4y3y2y1y (Причем подстрока начинается с цифры и заканчивается символом y. Например, 6y5y4y.), где y – какая-то цифра от 0 до 7.

Пусть Петя записал строку my(m-1)y…(m-n+1)y=П. Тогда Васино число x равно y+8*(m-n+1)+8^2*y+8^3*(m-n+2)+8^4*y+…+8^(2n-1)*m и равно p1*(p1+6), где p1 и (p1+6) – простые числа.

Заметим, что y совпадает с остатком числа x при делении на 8. Посмотрим, какие остатки может давать p1*(p1+6) при делении на 8 при условии, что оба эти числа простые. Это остатки 3 и 7. Значит y – это либо 3, либо 7.

Заметим, что y+8*(m-n+1) дает такой же остаток при делении на 16, как и число x. Посмотрим, какие остатки может давать p1*(p1+6) при делении на 16 при условии, что оба эти числа простые. Это остатки 11 и 7. Если взять y=3 и m-n+1 четным, то получится остаток 3, а если нечетным, то 11 => если y=3, то m-n+1 нечетно. Если взять y=7 и m-n+1 нечетным, то получится остаток 15, а если четным, то 7 => если y=7, то m-n+1 четно.

Теперь посмотрим, какие остатки может давать число p1*(p1+6) при делении на 7. Это остатки 0,2,5 и 6. С другой стороны число по модулю 7 сравнимо со своей суммой цифр в восьмеричной системе счисления, то есть в данном случае с суммой m+y+m-1+y…+m-n+1+y=m*n+y*n-n*(n-1)/2=A.

Также заметим, что число сравнимо по модулю 3 со своей знакопеременной суммой цифр в восьмеричной системе счисления, то есть в данном случае y-(m-n+1)+y-(m-n+2)..+y-m=n*y-m*n+n*(n-1)/2=B. p1*(p1+6) может давать по модулю 3 только остаток 1.

1) y=3

a) m-n+1=1

n=2: A=4+6-1=9, B=6-4+1=3 дает остаток 0 по модулю 3. Не подходит.

$n=3$: $A=9+9-3=15$ дает остаток 1 по модулю 7. Не подходит.

$n=4$: $A=16+12-6=22$ дает остаток 1 по модулю 7. Не подходит.

$n=5$: $A=25+15-10=30$, $B=15-25+10=0$ дает остаток 0 по модулю 3. Не подходит.

$n=6$: $A=36+18+15=39$ дает остаток 4 по модулю 7. Не подходит.

$n=7$: $A=49+21-21=49$, $B=21-49+21=-7$ дает остаток 2 по модулю 3. Не подходит.

б)$m-n+1=3$

$n=2$: $A=8+6-1=13$, $B=6-8+1=-1$ дает остаток 2 по модулю 3. Не подходит.

$n=3$: $A=15+9-3=21$, $B=9-15+3=-3$ дает остаток 0 по модулю 3. Не подходит.

$n=4$: $A=24+12-6=30$, $B=12-24+6=-6$ дает остаток 0 по модулю 3. Не подходит.

$n=5$: $A=35+15-10=40$, $B=15-35+40=20$ дает остаток 4 по модулю 7. Не подходит.

в)$m-n+1=5$

$n=2$: $A=12+6-1=17$ дает остаток 3 по модулю 7. Не подходит.

$n=3$: $A=21+9-3=27$, $B=9-21+3=-9$ дает остаток 0 по модулю 3. Не подходит.

Значит $y=7$:

а)$m-n+1=2$

$n=2$: $A=6+14-1=19$, $B=14-6+1=9$ дает остаток 0 по модулю 3. Не подходит.

$n=3$: $A=12+21-3=30$, $B=21-12+3=12$ дает остаток 0 по модулю 3. Не подходит.

$n=4$: $A=20+28-6=42$, $B=28-20+6=14$ дает остаток 2 по модулю 3. Не подходит.

$n=5$: $A=30+35-10=55$, $B=35-30+10=15$ дает остаток 0 по модулю 3. Не подходит.

$n=6$: $A=42+42-15=69$, $B=42-42+15=15$ дает остаток 0 по модулю 3. Не подходит.

б)