Санкт-Петербургский государственный университет
Олимпиада школьников по математике 2020–2021
Заключительный этап
8–9 классы

1. Докажите, что для любых вещественных чисел a и b уравнение

$$(a^2 - b^2)x^2 + 2(a^3 - b^3)x + (a^4 - b^4) = 0$$

имеет решение.

2. На острове живут лжецы и рыцари. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Каждый житель острова про каждого из остальных знает рыцарь он или лжец. Как-то раз встретились 19 островитян. Трое из них сказали: «Ровно трое из нас лжецы», затем шестеро из остальных сказали: «Ровно шестеро из нас лжецы», наконец, девять из оставшихся сказали: «Ровно девять из нас лжецы». Сколько лжецов было среди встретившихся? Приведите все возможные варианты и докажите, что других нет.

3. Вещественные числа a, b, c и d удовлетворяют условию $a^6+b^6+c^6+d^6 = 64$. Найдите наибольшее значение выражения $a^7 + b^7 + c^7 + d^7$.

4. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка K. К описанной окружности треугольника AKC проведена касательная ℓ_1, параллельная прямой AB и ближайшая к ней. Она коснулась окружности в точке L. Прямая AL пересекла описанную окружность треугольника ABK в точке M ($M \neq A$). К этой окружности в точке M проведена касательная ℓ_2. Докажите, что прямые BK, ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются в одной точке.

5. Дана клетчатая доска 2020×2021. Петя и Вася играют в следующую игру. Они по очереди ставят фишки в свободные клетки доски. Выигрывает тот игрок, после хода которого в каждом квадрате 4×4 будет стоять фишка. Начинает Петя. Кто из игроков может обеспечить себе победу вне зависимости от действий соперника?

6. Найдите все пары такие простых чисел p и q, что $p^2 + 5pq + 4q^2$ является квадратом натурального числа.

1	2	3	4	5	6	Сумма
20	20	20	15	15	10	100

1. Если модуль a = модуль b то x = 0 корень. Так как ур – е имеет вид cx = 0 где c – любое вещественное число.
   В противном случае уравнение является квадратным и дискриминант равен $4(a^3 – b^3)^2 – 4(a^2 – b^2)(a^4 – b^4) = 4(a^6 + b^6 – 2a^3b^3 – a^6 – b^6 + a^4b^2 + b^4a^2) = 4a^2b^2(a-b)^2 > 0$ значит у уравнения есть решение.
2. Все 19 человек могли быть лжецами. Пусть был хотя бы один рыцарь.
   Если он среди первой группы с 3 или второй группы с 6 жителями то либо все 3 либо всего 6 лжецов значит есть ещё хотя бы 19 – 6 – 6 = 7 рыцарей в других группах но тогда есть 2 рыцаря которые назвали разное кол во лжецов. Противоречие.
   Если рыцарь среди 3 группы то все те 9 жителей рыцари , оставшиеся 9 которые что то сказали – лжецы, а 1 житель которые ничего не говорил – рыцарь.
   Или рыцарь мог быть только 1 оставшийся человек тогда всего 18 лжецов – все те кто что то сказали потому что они говорили то что всего лжецов не 18.
   Ответ: 19 , 18 , 9.
3. $2^6 = 64$ значит ни одно из чисел по модулю не больше двух.
   Значит $a^7 <= 2*a^6$ $b^7 <= 2*b^6$ $c <= 2*c^6$ $d <= 2*d^6$ равенство если переменная равна 2 или 0. Тогда $a^7 + b^7 + c^7 + d^7 <= 2(a^6 + b^6 + c^6 + d^6) = 128$.
   Равенство при a = 2 b = c =d = 0. Ответ: 128
4. Пусть F точка пересечения l1 и BK тогда <MAB = <MKB т.к. MAKB вписан.
   < MAB = <MLF из параллельности l1 AB. Значит <MLF = <MKB = <MKF
   Значит MFKL вписан, тогда <FMK = < FKL <FKL = <LAK как угол между касательной и хордой
   Тогда < KMF = < MAK угол между прямой MF и хордой MK равен вписанному в окружность (MAK) <MAK который опирается на хорду MK значит MF – касательная к окружности (MAK)
   Проведенная в точке M значит MF = l2 тогда l1 l2 и BK пересекаются в точке F. Ч.т.д.

5.Предположим что у Пети есть выигрышная стратегия. Тогда рассмотрим последний ход Васи , после которого Петя должен выиграть. В позиции Васи остается 2 хода , значит есть не более 2 непересекающихся пустых квадратов. Если их ровно 2 то нет никаких свободных клеток вне этих квадратов ,

Т.к. в противном случае Вася может поставить туда фишку и Петя не сможет поставить по фишке в непересекающиеся квадраты. Не могло так случиться что осталось только 2 квадрата потому что после ходов Пети остаётся нечётное число свободных клеток. Тогда один из 2 квадратов пересекается с несколькими другими квадратами по 1 клетке, чтобы в каждый из квадратов можно было поставить фишку за 2 хода. Тогда Вася может поставить фишку в любую клетку любого из пересекающихся квадратов кроме клетки пересечения. Такая свободная клетка найдется потому что все эти квадраты пустые. Тогда остаётся 2 непересекающихся квадрата и Петя не может поставить в них по фишке за 1 ход. Если нет 2 непересекающихся квадратов то все оставшиеся пустые квадраты пересекаются в одной точке значит Вася может выиграть на своем ходу если поставить фишку в клетку пересечения. Противоречие. Значит у Пети нет выигрышной стратегии , значит она есть у Пети так как игра конечная и в ней не может быть ничьи.

Ответ: Вася

6. $p^2 + 5pq + q^2 = (p + 2q)^2 + pq = n^2 => pq = (n – p – 2q)(n + p + 2q)$
   Т.к. p и q – простые числа либо одно из множителей равен p а второй q
   Либо один из множителей равен pq а второй 1. $n + p + 2q > p$ $n + p + 2q > q =>$
   $n + p +2q = pq$ $n – p – 2q = 1$ => $2n = (pq + 1) / 2$ => $pq + 1 – 2p – 4q = 2 => pq – 2p - 4q = 1$
   - ⇨ Тогда $q(p – 4) = 2p + 1$ => $q = (2p + 1) / p – 4$ Если p = 5 q = 11 если p = 7 q = 5 если p = 13 q = 3 $(2p + 1) / p – 4 = (2(p – 4) + 9) / p – 4 = 2 + 9/ p – 4$ => q целое только если p – 4

– делитель 9. => p либо 5 либо 7 либо 13 если $p < 4$ то $q < 2$ => q – не простое. Значит других пар нет. $5^2 + 5*5*11 + 11^2 = 28^2$ $7^2 + 5 * 7*5 + 5^2 = 18^2$ $13^2 + 5*13*3 + 3^2 = 20^2$. Ответ: (5,11) (7,5) (13,3)