Олимпиада школьников СПбГУ по математике.
Заключительный этап. 2020/2021 учебный год. 10 – 11 классы.

1. При каких натуральных n клетчатую доску $n \times n$ можно разрезать на прямоугольники 1×1 и 2×3 так, что прямоугольников разных размеров будет поровну?

2. Положительные числа a, b, c таковы, что $a^2b + b^2c + c^2a = 3$. Найдите минимальное значение выражения

$$A = \frac{\sqrt{a^6 + b^4c^6}}{b} + \frac{\sqrt{b^6 + c^4a^6}}{c} + \frac{\sqrt{c^6 + a^4b^6}}{a}.$$

3. Вокруг остроугольного треугольника ABC описана окружность. Точка K — середина меньшей дуги AC этой окружности, а точка L — середина меньшей дуги AK этой окружности. Отрезки BK и AC пересекаются в точке P. Найдите угол между прямыми BC и LP, если известно, что $BK = BC$.

4. Петя написал на доске подряд в убывающем порядке n последовательных двузначных чисел, последнее из которых не содержит цифру 7. Вася подумал, что это десятичная запись натурального числа x, и разложил x на простые множители. Оказалось, что их всего два и они различаются на 4. Что написано на доске?

5. В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством 2^n, $2^{n-1} \cdot 3$, $2^{n-2} \cdot 3^2$, $2^{n-3} \cdot 3^3$, $\ldots$, $2 \cdot 3^{n-1}$, 3^n пиастров, где n — натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?

1	2	3	4	5	Сумма
20	20	20	0	0	60

Задача 1

1) Пусть k – количество каждого из видов фигур. Тогда количество всех клеток n^2 = 6*k+k
2) (тк в фигуре 2x3 6 клеток). n^2 = 7k => если можно разрезать как описано в условии, то n делится на 7.
3) Докажем, что если n делится на 7, то квадрат n*n можно разрезать так, как описано в условии. Квадрат 7*7 можно разрезать следующим образом:

1	1	3	3	3	6	6
1	1	3	3	3	6	6
1	1	4	4	4	6	6
2	2	4	4	4	7	7
2	2	5	5	5	7	7
2	2	5	5	5	7	7
8	9	10	11	12	13	14

(одинаковыми цифрами обозначены клетки одной фигуры). Здесь по 7 прямоугольников 2x3 и квадратов 1x1.

При всех n, делящихся на 7, квадрат можно сперва разрезать на несколько квадратов 7x7, а затем каждый из них разрезать, как показано выше. Получим разрезание с равным количеством фигур разного вида.

Ответ: при всех n, делящихся на 7.

Задание 2

1) По неравенству о среднем квадратичном и среднем арифметическом:

Sqrt((a^3)^2 + (b^2 c^3)^2) >= (a^3 + b^2 c^3) * srt(2) / 2

Используя это неравенство аналогично для остальных двух слагаемых получаем, что

A >= sqrt(2) / 2 * ((a^3 + b^2 c^3) / b + (b^3 + c^2 a^3) / c + (c^3 + a^2 b^3) / a) =

= (приведём к общ знаменателю) sqrt(2) / 2abc * (a^4 c + b^2 c^4 a + b^4 a + c^2 a^4 b + c^4 b + a^2 b^4 c) >=

2) Используем неравенство о среднем арифм и среднем геом:

a^4 c + a^2 b^4 c >= 2 sqrt(a^6 b^4 c^2) = 2abc* (a^2 b)

3) Используя это неравенства анологично для двух других пар слагаемых (грубировка обозначена подчеркиваниями) получаем:

>= sqrt(2) * (a^2 b + b^2 c + c^2 a) = 3 sqrt(2)

4) Это минимальное значение достигается при a=b=c=1.

Ответ: 3 sqrt(2)

Задание 3

1) Пусть <BAC = x, <ABK = y, <BCA = z. <ACK = <ABK = y (опираются на дугу AK), <BKC=<BAC = x (дуга BC)
2) <BCK = <BKC (тк треуг BCK равнобедр) =x= <BCA+<ACK => x=y+z
3) Рассмотрим треуг APK: <PAK=<KBC=y (дуга KC) , <PKA=<BCA=z (дуга AB) => <CPK=y+z= x

4) <CPK=<CKP=x, <BPA = <BAP = x, значит треугольники CPK и BPA равнобедренные. Прямые CL и BL являются биссектриссами соответствующих треугольников (тк L – середина дуги AK) значит эти прямые являются высотами соответствующих треугольников (тк трегольники рб). Тогда BL перпенд AC, CL перпен BK.
5) Рассмотрим треуг BCL. BK, AC – его высоты (это доказано в п.4), причём эти прямые пересекаются в точке P. Высоты трегольника пересекаются в одной точке, значит высота этого треугольника, опущенная на BC из L будет проходить через точку P, то есть прямая LP перпен BC.

Ответ: 90 градусов.

Задание 4

1) Простые числа могут заканчиваться на цифры 1, 3, 7, 9 (если на 2 4 или 6 – они делятся на 2, если на 0 или 5 - на пять). Значит два простых числа могут различаться на 4 только если они имеют вид 10k+9 и 10k+10+3 либо 10k+3 и 10k+7.
2) Рассмотрим первый вариант

$X = (10k+9)(10k+13) = 100k^2 + 10*22k + 117$, тогда число x заканчивается на 7, что противоречит условию

3) Значит два сомножителя имеют вид 10k+4 и 10k+7

$X=(10k+3)(10k+7)=100k^2 + 100k + 21 = 100(k^2+k) + 21$

x-21 делится на 100, значит последнее двузначное число, выписанное Петей есть 21.

4) Пусть $x=100y + 21$. Тогда $100(k^2+k) + 21 = 100y+21$

$k(k+1)=y$. Заметим, что y=20 – решение этого уравнения. Действительно, 2021 = 43*47.

5) Перебором убеждаемся, что больше таких чисел нет (каждое из чисел x, которые начинаются с 10,11,12…19 имеют делитель, гораздо меньший, чем корень из данного числа (например, 3, 7 и другие), а значит не могут быть представлены в виде произведения двух простых чисел, отличающихся на 4)
6) Значит x=2021

Ответ: 2021