Олимпиада школьников СПбГУ по математике.
Заключительный этап. 2020/2021 учебный год. 10 – 11 классы.

1. При каких натуральных n клетчатую доску $n \times n$ можно разрезать на квадраты 1×1 и 2×2 так, что квадратов разных размеров будет поровну?

2. Положительные числа a, b, c таковы, что $a^2b + b^2c + c^2a = 3$. Найдите минимальное значение выражения

$$A = a^7b + b^7c + c^7a + ab^3 + bc^3 + ca^3.$$

3. Дан неравнобедренный остроугольный треугольник ABC. В нем проведены высоты BB_1 и CC_1, пересекающиеся в точке H. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами H и C соответственно касаются прямой AB. Из точки A к ω_1 и ω_2 проведены касательные, отличные от AB. Обозначим точки их касания с этими окружностями через D и E соответственно. Найдите угол B_1DE.

4. Петя написал на доске подряд n последовательных двузначных чисел ($n \geq 2$), первое из которых не содержит цифру 4, а последнее — цифру 7. Вася подумал, что это десятичная запись натурального числа x, и разложил x на простые множители. Оказалось, что их всего два и они различаются на 4. Что написано на доске?

5. В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством 3^n, $3^{n-1} \cdot 5$, $3^{n-2} \cdot 5^2$, $3^{n-3} \cdot 5^3$, $\ldots$, $3 \cdot 5^{n-1}$, 5^n пиастров, где n — натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?

1	2	3	4	5	Сумма
15	20	20	0	0	55

№1 Решение:

1) Пусть мы смогли разложить квадрат n на n по квадратам 2 на 2 и 1 на 1. Пусть было k квадратов каждого вида, тогда:
2*2*k+1*1*k=n^2;
5k=n^2 => n^2 делится на 5 => n^2 делится на 25, так как пятерка простой делитель и войдет хотя бы во второй степени в квадрат, тогда:
5k=25*(n_1)^2, где n_1=25*n^2 => k делится на 5;
2) Теперь докажем, что для всех n=5*N, где N – натуральное число, большее единицы, мы сможем разбит квадрат n на n.
Квадрат 5*5 разбить не можем, так как должно быть 5 квадратов 2 на 2, а “влезает” их всего 4.
Для остальных квадратов:
А) Если n – четное, разбиваем доску на квадраты 2 на 2 (сделать это можно следующим образом : заполняем верхнюю строку, она будет заполнена, так как имеет четную ширину, тогда мы смогли заполнить строку размером 2 * n, так как n – четное, то мы можем заполнить таким образом еще n/2 – 1 строку квадратами 2 на 2, успех!)
Тогда в каждое разбитое место ставим квадрат 2 на 2, в оставшееся незаполненное место ставим квадраты 1 на 1.
Б) Если n – нечетное, тогда поступаем следующим образом:
Разбиваем не доску n на n, а (n-1) на (n-1) на квадраты 2 на 2 (тк n – нечетное, то n-1 – четное, разбиваем как в пункте А)).
Заметим, что в нее поместиться (n-1)*(n-1)/4 квадратов 2 на 2, а нам нужно n* n/5 (исходим из того, что 5k= n* n).
Тогда заметим, что (n-1)*(n-1)/4 >= n* n/5 , как раз таки, при n>=10. Тогда, в квадрат (n-1)* (n-1) помещаем n* n/5 квадратов 2 на 2 (при чем, еще останется свободное размеченное место) , а в оставшиеся место квадраты 1 на 1.

<u>Ответ: для всех n=5*k, где k – натуральное число, большее единицы.</u>

№2 Решение:

Заметим, что $a^7b + ab^3 \geq 2\sqrt{a^8b^4} = 2a^4b^2$;

$$b^7c + bc^3 \geq 2\sqrt{b^8c^4} = 2b^4c^2;$$

$$c^7a + ca^3 \geq 2\sqrt{c^8a^4} = 2c^4a^2;$$

Сложим и получим, что

$\underline{\text{A >=}2a^4b^2 + 2b^4c^2 + 2c^4a^2;}$

(по нер-ву о средних)

Так же:

$$\frac{(a^2b+b^2c+c^2a)}{3} \leq \sqrt{\frac{(a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2)}{3}}$$

(нер-во между средним арифм. И квадр.) $(a^2b + b^2c + c^2a) = 3$ *=>*

$$1 \leq \sqrt{\frac{(a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2)}{3}}$$

=>

$$1 \leq \sqrt{\frac{A/2}{3}};$$

$$1 \leq \frac{A}{6};$$

$$6 \leq A;$$

A=6 достигается при a=b=c=1;

<u>Ответ: А=6.</u>

№3 Решение:

1) Воспользуемся тем фактом, что если есть окружность, вписанная в угол, то биссектриса угла проходит через центр окружности (рисунок вставить не могу, потому краткое доказательство: если провести радиусы в точки касания, то получим 2 прямых угла, получили 2 прямоугольных треугольника, у них общая гипотенуза и есть равные катеты, отсюда следует, что треугольники будут равны, отсюда и равенство углов)
2) Пусть угол $\mathrm{C_1AH} = \beta$ => угол HAD$= \beta$; пусть угол DAC$= \alpha$. Тогда заметим, что угол

$\mathrm{AB_1H} = HDA(\text{как радиус в точку касания}) = 90$ => *четырехугольник* $\mathrm{AH}D\mathrm{B_1}$ *– вписанный , => угол AD*$\mathrm{B_1}$ *= HD*$\mathrm{B_1}$ $-$ HDA *= (180 -HA*$\mathrm{B_1}$*) – HAD=(180-* β*-* α*)-90=90-* β*-* α*;*

3) С другой стороны, так как С- центр ω_2, а ω_2 вписана в угол BAE, тогда AC – биссектриса этого угла => угол EAC= углу BAC =2* β+ α; Отсюда угол EAD = 2* β+ α + α =2* β+ 2α ;

Так как AD=AE(AD=AC_1, AC_1= AE, как отрезки касательных) => треугольник ADE – равнобедренный => угол ADE=AED=180-(2* β+ 2α)/2= 90- $\beta - \alpha$ => получили, что угол $\mathrm{A}DB_1$ =ADE => точки D,B_1,E лежат на одной прямой, следовательно угол развернутый.

<u>Ответ: 180^0</u>