# Санкт-Петербургский государственный университет
# Олимпиада школьников по математике 2020–2021
## Заключительный этап
## 8–9 классы

**1.** Докажите, что для любых вещественных чисел $a$ и $b$ уравнение

$$(a^6 - b^6)x^2 + 2(a^5 - b^5)x + (a^4 - b^4) = 0$$

имеет решение.

**2.** На острове живут лжецы и рыцари. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Каждый житель острова про каждого из остальных знает рыцарь он или лжец. Как-то раз встретились $28$ островитян. Двое из них сказали: «Ровно двое из нас лжецы», затем четверо из остальных сказали: «Ровно четверо из нас лжецы», потом восемь из оставшихся сказали: «Ровно восемь из нас лжецы», наконец, все оставшиеся $14$ сказали: «Ровно $14$ из нас лжецы». Сколько лжецов было среди встретившихся? Приведите все возможные варианты и докажите, что других нет.

**3.** Сумма неотрицательных чисел $a$, $b$ и $c$ равна $3$. Найдите наибольшее значение выражения $ab + bc + 2ca$.

**4.** Окружности $\omega_1$ и $\omega_2$ пересекаются в точках $K$ и $L$. Прямая $\ell$ пересекает окружность $\omega_1$ в точках $A$ и $C$, а окружность $\omega_2$ — в точках $B$ и $D$, причем точки идут на прямой $\ell$ в алфавитном порядке. Обозначим через $P$ и $Q$ соответственно проекции точек $B$ и $C$ на прямую $KL$. Докажите, что прямые $AP$ и $DQ$ параллельны.

**5.** Дана клетчатая доска $2021 \times 2021$. Петя и Вася играют в следующую игру. Они по очереди ставят фишки в свободные клетки доски. Выигрывает тот игрок, после хода которого в каждом прямоугольнике $3 \times 5$ и $5 \times 3$ будет стоять фишка. Начинает Петя. Кто из игроков может обеспечить себе победу вне зависимости от действий соперника?

**6.** Найдите все такие натуральные числа $n$, что число $2^n + n^2 + 25$ является кубом простого числа.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Сумма |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 15 | 20 | 5 | 0 | 15 | 5 | 60 |

Логин: ol2017698

Задача 1

$(a^6 - b^6)x^2 + 2(a^5 - b^5)x + (a^4 - b^4) = 0$

$D = b^2 - 4ac$

Следовательно, если дискриминант больше или равен 0, то уравнение имеет хотя бы один корень

$D = 4 * (a^{10} - 2a^5b^5 - b^{10}) - 4 * (a^{10} - a^6b^4 - a^4b^6 + b^{10}) = -8a^5b^5 + 4a^4b^6 + 4a^6b^4 =$

$= -8a^5b^5 + 4a^4b^4(b^2 + a^2) = 4a^4b^4(a^2 - 2ab + b^2) = 4a^4b^4(a - b)^2$

Следовательно, $4a^4b^4 >= 0$(больше или равно 0, т.к. $4 > 0$ и любое число в чётной степени неотрицательно)

$(a-b)^2 >= 0$(квадрат разности всегда больше или равен 0)

Получается, что оба множителя выражения $4a^4b^4(a - b)^2$ не меньше 0, это значит, что и всё произведение не меньше 0. Значит дискриминант всегда неотрицателен, следовательно корни (или один корень, когда дискриминант равен 0) всегда есть, а значит и решение тоже. Ч.т.д.

Задача 2

Группа 1 - Ровно двое из нас лжецы

Группа 2 - Ровно четверо из нас лжецы

Группа 3 - Ровно 8 из нас лжецы

Группа 4 - Ровно 14 из нас лжецы

Заметим, что люди из одной группы говорят одинаково. То есть, члены любой группы либо все рыцари, либо все лжецы.

Тогда можно, с уверенностью утверждать, что первые 3 группы(то есть все те, кто говорил, про 2, 4 или 8 лжецов) лгут. Докажем:

Предположим обратное, пусть хотя одна из этих групп – рыцари. Тогда, рассмотрим например 3 группу, они сказали, что всего 8 лжецов. Но тогда, получается противоречие, ведь до них высказались только 6 человек, получается, осталось еще 2 лжеца, но они не могут быть ни в одной из групп(иначе лжецы и рыцари выскажутся одинаково, что запрещено условием) – утверждение 1

Аналогичные высказывания, можно сказать и про жителей острова из 1 и 2 группы.

Поэтому первый ответ: 14

Второй вариант, что лжецы все жители острова. Это не противоречит условию, а значит это возможно. И возможно в том случае, если все группы соврали.

Следовательно второй ответ: 28

Других вариантов нет, так как рыцари либо только в 4 группе, либо их вообще нет. В других группах рыцарей быть не может(по утверждению 1)

Ответ: 14; 28

Задача 3

$ab + bc + 2ca = ab + bc + ac + ac$

Заметим, что a и c встречается в каждом слагаемом 3 раза, b – 2 раза

Поэтому a,c должны быть максимально возможными.

То есть, надо избавиться от b(сделать равным 0) и приравнять a и c($a + c = 3/2$)

Приравнять a и c надо, так как:

$(a - x)(a + x) < a * a$

$a * a - x * x < a * a$

То есть $ab + bc + 2ca$ максимально при $b = 0$ и $a = c = 1.5$

$ab + bc + 2ca = 0 + 0 + 4.5 = 4.5$

Ответ: 4.5

Задача 4

Через радикальную ось

Очевидно, что проекции точек B и C на KL будут в том же отношении, что и сами точки, а следовательно так, как эти точки были на одной прямой, и будут на одной прямой, то прямые проведённые из точек A и D будут параллельны, так как изначально они все лежали на одной прямой

Задача 5

Первым ходом Петя, должен поставить фишку в центральную клетку( координаты 1011; 1011)

А после этого, он просто должен дублировать ходы Васи зеркально, относительно главной диагонали.

Ведь тогда, на каждый ход Васи у Пети будет точно такая же ситуация, только в другой плоскости(относительно главной диагонали доски)

Следовательно, у Пети ходы не закончатся раньше, так как он может ответить на любой ход Васи таким же ходом в другой плоскости (отзеркалить)

Ответ: Петя

Задача 6

$2^n + n^2 + 25 = m^3$, где m – простое

Заметим, что $m^3$ всегда нечётное(за исключением $2^3$).
Следовательно, $m^3 - 25$ – четное

А это значит, что $n^2$ тоже четно, тогда и n – четно

То есть, мы точно знаем, что n – четное.

Также, можно заметить, что n должно быть равно (m+1) и при этом мы знаем, что из простых чисел, которые оканчиваются на 5, только само 5

Пример:

$2^6+6^2+25 = 125 = 5^3$

То есть одно из n = 6

А так как других простых, оканчивающихся на 5 не существует, то n=6 – единственное решение.

Ведь во всех остальных случаях(когда куб не оканчивается на 5) – невозможно

Ответ: 6