Олимпиада школьников СПбГУ по математике.
Заключительный этап. 2020/2021 учебный год. 10 – 11 классы.

1. При каких натуральных n клетчатую доску $n \times n$ можно разрезать на прямоугольники 1×1 и 2×3 так, что прямоугольников разных размеров будет поровну?

2. Положительные числа a, b, c таковы, что $a^2b + b^2c + c^2a = 3$. Найдите минимальное значение выражения

$$A = \frac{\sqrt{a^6 + b^4c^6}}{b} + \frac{\sqrt{b^6 + c^4a^6}}{c} + \frac{\sqrt{c^6 + a^4b^6}}{a}.$$

3. Вокруг остроугольного треугольника ABC описана окружность. Точка K — середина меньшей дуги AC этой окружности, а точка L — середина меньшей дуги AK этой окружности. Отрезки BK и AC пересекаются в точке P. Найдите угол между прямыми BC и LP, если известно, что $BK = BC$.

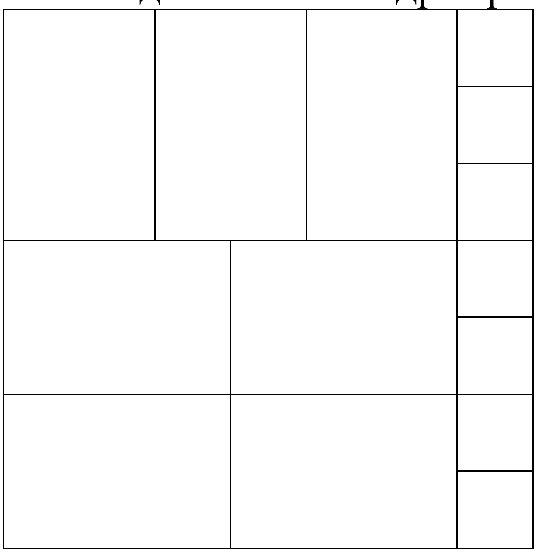
4. Петя написал на доске подряд в убывающем порядке n последовательных двузначных чисел, последнее из которых не содержит цифру 7. Вася подумал, что это десятичная запись натурального числа x, и разложил x на простые множители. Оказалось, что их всего два и они различаются на 4. Что написано на доске?

5. В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством 2^n, $2^{n-1} \cdot 3$, $2^{n-2} \cdot 3^2$, $2^{n-3} \cdot 3^3$, $\ldots$, $2 \cdot 3^{n-1}$, 3^n пиастров, где n — натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?

1	2	3	4	5	Сумма
20	20	10	5	20	75

Задание 1

Заметим, что если прямоугольников $2 * 3$ и $1 * 1$ одинаковое количество, то суммарная их площадь делится на $2 * 3 + 1 * 1 = 7$, значит и n^2 делится на 7, значит n делится на 7 (так как 7 – простое). Докажем теперь, что для любого $n = 7k, k \in \mathbb{N}$, разбиение существует. Разделим исходный квадрат на k квадратов $7 * 7$ и каждый такой квадрат разделим таким способом:



В каждом квадрате $7 * 7$ равное количество прямоугольников $2 * 3$ и $1 * 1$, значит и во всём квадрате их тоже равное количество. Пример доказан.

Ответ: для любого $n = 7k, k \in \mathbb{N}$.

Задание 2

$$A = \frac{\sqrt{a^6 + b^4c^6}}{b} + \frac{\sqrt{b^6 + c^4a^6}}{c} + \frac{\sqrt{c^6 + a^4b^6}}{a}$$

Оценим каждое слагаемое при помощи неравенства между средним квадратическим и средним арифметическим:

$$\frac{\sqrt{a^6 + b^4c^6}}{b} = \sqrt{\frac{a^6}{b^2} + b^2c^6} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{\frac{a^6}{b^2} + b^2c^6}{2}} \geq \sqrt{2} * \frac{\frac{a^3}{b} + bc^3}{2}$$

Оценив так каждое слагаемое, получим:

$$A \geq \sqrt{2} * \left(\frac{\frac{a^3}{b} + bc^3}{2} + \frac{\frac{b^3}{c} + ca^3}{2} + \frac{\frac{c^3}{a} + ab^3}{2} \right)$$

$$= \sqrt{2} * \left(\frac{\frac{a^3}{b} + ab^3}{2} + \frac{\frac{b^3}{c} + bc^3}{2} + \frac{\frac{c^3}{a} + ca^3}{2} \right)$$

Переставив слагаемые, оценим получившиеся дроби по неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим:

$$\frac{\frac{a^3}{b} + ab^3}{2} \geq \sqrt{\frac{a^3}{b} * ab^3} = \sqrt{a^4b^2} = a^2b$$

$$A \geq \sqrt{2} * (a^2b + b^2c + c^2a) = 3\sqrt{2}$$

Значит минимальное значение A равно $3\sqrt{2}$. Оно достигается при $a = b = c = 1$ ($A = \frac{\sqrt{a^6+b^4c^6}}{b} + \frac{\sqrt{b^6+c^4a^6}}{c} + \frac{\sqrt{c^6+a^4b^6}}{a} = \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$) и такие 3 числа подходят под условие $a^2b + b^2c + c^2a = 3$

Ответ: $3\sqrt{2}$

Задание 3

1) Пусть O – центр описанной окружности $\Delta ABC, \Delta BLC, \Delta BKC$.
2) Так как $BC = BK \Rightarrow \angle KBO = \angle CBO$ (В силу симметрии равнобедренного треугольника BO – направление на высоту, медиану, биссектрису и на центр описанной окружности).
3) $\angle KBL = \angle ABL$ (L – середина дуги AK)
4) $\angle ABK = \angle KBC$ (K – середина дуги AC)
5) Из 2) 3) и 4) следует, что $\angle KBO = \angle CBO = \angle KBL = \angle ABL$.
6) Заметим, что тогда BL и BO – изогонали относительно угла $\angle ABC$ ($\angle CBO = \angle ABL$), BO – направление на центр описанной окружности ΔABC, значит BL – высота в ΔABC ($CA \perp BL$).
7) Заметим, что тогда BP и BO – изогонали относительно угла $\angle LBC$ ($\angle CBO = \angle KBL$), BO – направление на центр описанной окружности LBC, значит BP – высота в ΔLBC ($BK \perp CL$).
8) Тогда из 6) и 7) следует, что $CA \perp BL, BK \perp CL, CA \cap BA = P \Rightarrow P$ – ортоцентр ΔBLC, значит $LP \perp BC$

Ответ: $\angle(LP, BC) = 90°$

Задание 4

1) Заметим, что если исходное число – это произведение 2х простых чисел, разница между которыми равна 4.
2) Если среди этих 2х простых чисел есть 2, то должно быть еще число $2 + 4 = 6$, что не является простым, значит исходное число не делится на 2, значит заканчивается на нечётную цифру
3) Если среди этих 2х простых чисел есть 5, то должно быть еще число $5 + 4 = 9$, или $5 - 4 = 1$. Ни одно из них не является простым, значит исходное число не делится на 5, значит заканчивается на 5.
4) По условию последнее двузначное число не содержит 7, значит возможные последние цифры в числе это $1, 3$ или 9
5) Пусть одно из простых чисел это $k + 2$, а второе $k - 2$. Тогда число на доске это $(k + 2) * (k - 2) = k^2 - 4$.
6) Рассмотрим все возможные остатки $k^2 - 4$ по модулю 10:
$$(10t)^2 - 4 \equiv 6 \ (mod\ 10)$$
$$(10t + 1)^2 - 4 \equiv 7 \ (mod\ 10)$$
$$(10t + 2)^2 - 4 \equiv 0 \ (mod\ 10)$$
$$(10t + 3)^2 - 4 \equiv 5 \ (mod\ 10)$$
$$(10t + 4)^2 - 4 \equiv 2 \ (mod\ 10)$$
$$(10t + 5)^2 - 4 \equiv 1 \ (mod\ 10)$$
$$(10t + 6)^2 - 4 \equiv 2 \ (mod\ 10)$$
$$(10t + 7)^2 - 4 \equiv 5 \ (mod\ 10)$$
$$(10t + 8)^2 - 4 \equiv 0 \ (mod\ 10)$$
$$(10t + 9)^2 - 4 \equiv 7 \ (mod\ 10)$$
7) Эти остатки, это возможные последние цифры исходного числа, которые по пункту 4 обязательно $1, 3$ или 9. Значит $k = 10t + 5$, тогда
$$k^2 - 4 \equiv (10t + 5)^2 - 4 \equiv 100t^2 + 100t + 25 - 4 \ \equiv 21 \ (mod\ 100)$$
Значит последнее записанное двузначное число обязательно 21.
8) Допустим у нас на доске больше одного двузначного числа. Тогда последние 4 цифры это 2221. Значит
$$k^2 - 4 \equiv (10t + 5)^2 \equiv 100(t^2 + t) + 21 \ \equiv 2221 \ (mod\ 10000)$$
$$100(t^2 + t) \equiv 2200 \ (mod\ 10000)$$
$$t^2 + t \equiv 22 \ (mod\ 100)$$
9) Заметим, что, сравнение имеет решение (например при t = 33) поэтому что делать дальше, не понятно.
Ответ: 21

Задание 5

1) Пусть $f(n)$ – наибольшая сумма, которую клиенту не могут выдать в банке. Заметим, что при $n = 1$, у банка есть монеты достоинством 2 и 3 и любую сумму больше 1го он сможет выдать (если сумма чётная, он выдаёт её монетами достоинством 2, а если нечётная, то одной монетой достоинством 3, а остальное монетами 2), $f(1) = 1$.

2) Решим задачу по индукции: пусть для $n = k - 1$ задача решена. Найдём $f(k)$.

3) Заметим, что если запрошенная сумма нечётная, то в ней обязательно содержится 3^k, так как все остальные монеты чётного номинала. Если же монета 3^k содержится в сумме больше одного раза, то тогда заменим 2 монеты 3^k на 3 монеты $2 * 3^{k-1}$ и сумма останется той же.

4) Предположим, что сумму $2 * f(k-1) + 3^k$ мы можем выдать. Тогда в этой сумме содержится монета 3^k ровно 1 раз (по пункту 3)) значит мы можем сделать сумму $2 * f(k-1)$ используя монеты, среди которых нет монеты 3^k.

5) Разделив номиналы всех монет и сумму на 2, получаем, что мы можем собрать сумму $f(k-1)$ монетами при $n = k - 1$, что неверно по предположению индукции. Значит $f(k) \geq 2 * f(k-1) + 3^k$, так как сумму $2 * f(k-1) + 3^k$ мы собрать не сможем.

6) Докажем, что любую сумму больше $2 * f(k-1) + 3^k$ собрать получится:

7) Предположим, что существует сумма $2 * f(k-1) + 3^k + t, t > 0$, такая, что мы не можем собрать её из наших монет.

8) Если $t -$ четное, $2 * f(k-1) + 3^k + t -$ нечетное – в сумме будет использована одна монета 3^k. Значит мы можем собрать $2 * f(k-1) + t$, не используя монеты 3^k. Разделив все номиналы на 2, получаем, что мы не можем собрать сумму $f(k-1) + \frac{t}{2}$ монетами при $n = k - 1$, что неверно, так как максимальное число, которое мы не можем получить это $f(k-1)$.

9) Если $t -$ нечетное, $2 * f(k-1) + 3^k + t -$ четное – в сумме можно вообще не использовать монету 3^k (по пункту 3)). Разделив все номиналы на 2, получаем, что мы не можем собрать сумму $f(k-1) + \frac{t+3^k}{2}$ монетами при $n = k - 1$, что неверно, так как максимальное число, которое мы не можем получить это $f(k-1)$.

10) Рассмотрев все случаи получаем противоречие с предположением в пункте 7), значит все суммы больше $2 * f(k-1) + 3^k$ собрать получится, значит $f(k) = 2 * f(k-1) + 3^k$.

11) Докажем, что $f(n) = 3^{n+1} - 2^{n+2}$

12) База: $n = 1$: $f(1) = 9 - 8 = 1$ – верно

13) Переход: если $f(n-1) = 3^n - 2^{n+1}$, то $f(n) = 2 * f(n-1) + 3^n = 2 * 3^n - 2^{n+1} * 2 + 3^n = 3^n(2+1) - 2^{n+2} = 3^{n+1} - 2^{n+2}$ – переход доказан

Ответ: $3^{n+1} - 2^{n+2}$