Санкт-Петербургский государственный университет
Олимпиада школьников по математике 2020–2021
Заключительный этап
8–9 классы

1. Найдите все такие значения a, для которых квадратные трехчлены x^2+2x+a и $x^2+ax+2=0$ имеют по два корня, причем сумма квадратов корней первого трехчлена равна сумме квадратов корней второго трехчлена.

2. Каждый из островитян либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт (и те, и другие на острове есть). Каждый житель острова про каждого знает рыцарь он или лжец. Часть жителей острова заявила, что на острове проживает четное число рыцарей, а все оставшиеся жители заявили, что на острове проживает нечетное число лжецов. Может ли на острове быть ровно 2021 житель?

3. Для произвольных вещественных чисел a и b $(b \neq 0)$ найдите наименьшее значение выражения $a^2+b^2+\dfrac{a}{b}+\dfrac{1}{b^2}$.

4. Точки B_1 и C_1 — середины сторон AC и AB треугольника ABC. На сторонах AB и AC как на диаметрах построены окружности ω_1 и ω_2. Обозначим за D точку пересечения прямой B_1C_1 с окружностью ω_1, лежащую по другую сторону от C относительно прямой AB. Обозначим за E точку пересечения прямой B_1C_1 с окружностью ω_2, лежащую по другую сторону от B относительно прямой AC. Прямые BD и CE пересекаются в точке K. Докажите, что прямая BC проходит через точку пересечения высот треугольника KDE.

5. На центральной клетке доски 11×11 стоит фишка. Петя и Вася играют в следующую игру. Каждым своим ходом Петя передвигает фишку на одну клетку по вертикали или горизонтали. Каждый своим ходом Вася возводит стенку с одной из сторон любой из клеток. Двигать фишку через стенку Петя не может. Игроки ходят по очереди, начинает Петя. Петя выигрывает, если сможет фишкой уйти с доски. Может ли он обеспечить себе победу вне зависимости от действий соперника?

6. Докажите, что существует бесконечно много таких натуральных чисел n, что количество различных нечетных простых делителей числа $n(n+3)$ кратно трем.

1	2	3	4	5	6	Сумма
20	20	0	0	20	0	60

1. Найдите все такие значения a, для которых квадратные трехчлены x^2+2x+a и x^2 + ax + 2 = 0 имеют по два корня, причем сумма квадратов корней первого трехчлена равна сумме квадратов корней второго трехчлена.

Пусть корни уравнения $x^2 + 2x + a = 0$ это x_1 и x_2. Аналогично x_3 и x_4 для второго.

Запишем Теорему Виета для первого уравнения и найдем его сумму квадратов:

$x_1 + x_2 = -2, \quad x_1 * x_2 = a. \; x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2 * x_1 * x_2 =$

$= 4 - 2a$

Аналогично для второго: $x_3^2 + x_4^2 = a^2 - 4$

Так как суммы квадратов равны, приравняем эти два выражения и найдем а.

$a^2 - 4 = 4 - 2a$

$a^2 + 2a - 8 = 0$

$(a+4)(a-2) = 0$

$a = 2$ или -4.

При $а = -4$ в двух уравнениях 2 корня, условие соблюдается. А вот при $а = 2$

в двух уравнениях дискриминант $< 0 -$ противоречие условию

Ответ: a =-4.

2. Каждый из островитян либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт (и те, и другие на острове есть). Каждый житель острова про каждого знает рыцарь он или лжец. Часть жителей острова заявила, что на острове проживает четное число рыцарей, а все оставшиеся жители заявили, что на острове проживает нечетное число лжецов. Может ли на острове быть ровно 2021 житель?

Выделим утверждение А - Четное число рыцарей и В - нечетное число лжецов. Пусть на острове действительно 2021 человек. Тогда так как 2021 - нечетно, то если верно хотя бы одно из утверждений, то верно и второе и наоборот. Так как на острове есть хотя бы 1 рыцарь, он скажет одну из фраз А и В => она верна. Значит обе фразы правдивы. Но на острове найдется еще хотя бы 1 лжец, который скажет одну из фраз А и В, которые обе являются правдой - противоречие.

Ответ: нет.

5. На центральной клетке доски 11 × 11 стоит фишка. Петя и Вася играют в следующую игру. Каждым своим ходом Петя передвигает фишку на одну клетку по вертикали или горизонтали. Каждый своим ходом Вася возводит стенку с одной из сторон любой из клеток. Двигать фишку через стенку Петя не может. Игроки ходят по очереди, начинает Петя. Петя выигрывает, если сможет фишкой уйти с доски. Может ли он обеспечить себе победу вне зависимости от действий соперника?

Ответ:нет

Приведем пример выигрышной стратегии за Васю.

Представим доску 11*11. Пусть Петя ходит в 1 из 4 возможных сторон.

у										у
					П					
у										у

Проигрышная для нас позиция, когда Петя находится в незакрытом углу, то есть угловая клетка у которой нет ни одной стенки. Так как после нашего хода Петя точно сможет уйти с доски. Иначе: пусть Петя в какой-то боковой клетке доски, при этом у всех углов доски уже есть хоть по одной стенке. То есть на следующий ход может выйти. Если стенка, с той стороны в которую он может выйти не стоит, то ставим ее. То есть на следующий ход он уже не может сразу выйти. (Это также касается отдельно угловых клеток, так как из них выход в 2 стороны. Но так как одна сторона закрыта, по предположению, то вторую сможем закрыть в тот момент, когда Петя будет края доски). Таким образом, если мы поставим хоть по одной стенке в угловых клетках, то мы выиграем.

У нас 4 угловые клетки. Внезависимости от ходов Пети, наши первые 4 хода сделаем по углам: На каждую из угловых клеток поставим по одной стенке. Тогда заметим, что к нашему следующему ходу, Петя еще точно не выше с доски. Так как сделано не более 5 ходов Пети в одну и ту же сторону, а минимальное расстояние с центра до выхода = 6 ходам.Таким образом, все последующие ходы ходтим произвольно, а если Петя подходит к боковой клетке, закрываем ему выход из этой клетки с самой доски(если он еще не был закрыт)

4. Точки B1 и C1 — середины сторон AC и AB треугольника ABC. На сторонах AB и AC как на диаметрах построены окружности ω1 и ω2. Обозначим за D точку пересечения прямой B1C1 с окружностью ω1, лежащую по другую сторону от C относительно прямой AB. Обозначим за E точку пересечения прямой B1C1 с окружностью ω2, лежащую по другую сторону от B относительно прямой AC. Прямые BD и CE пересекаются в точке K. Докажите, что прямая BC проходит через точку пересечения высот треугольника KDE.

Итак, проведем высоту треугольника KDE из K. Заметим, что она перпендикулярна линии центров наших окружностей, а значит проходит через точки их пересечения.(назовем их x и y, и y лежит с противоположной стороны от de относительно K. Тогда проведем прямую из d через точку пересечения вс и ка. Если докажем, что она перпендикулярна ке, задача решена.

6. Докажите, что существует бесконечно много таких натуральных чисел n, что количество различных нечетных простых делителей числа n(n + 3) кратно трем.

Давайте будем брать n - как произведение 3k последовательных нечетных простых множителей