Олимпиада школьников СПбГУ по математике.
Заключительный этап. 2020/2021 учебный год. 10 – 11 классы.

1. Натуральные числа от 1 до 2021 записаны в ряд в некотором порядке. Оказалось, что у любого числа его левый и его правый сосед имеют разную четность. Какое число может быть на первом месте?

2. При $a, b, c > 0$ найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{(a+b+c)^3 - 26abc}.$$

3. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B, а окружность с центром в точке O охватывает окружности ω_1 и ω_2, касаясь их в точках C и D соответственно. Оказалось, что точки A, C и D лежат на одной прямой. Найдите угол ABO.

4. Петя написал на доске подряд n двузначных восьмеричных чисел ($n \geq 2$), образующих арифметическую прогрессию с разностью -8. Вася подумал, что это восьмеричная запись натурального числа x, и разложил x на простые множители. Оказалось, что их всего два, и они различаются на 6. Что написано на доске?

5. В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством $3n-1$, $6n+1$, $6n+4$ и $6n+7$ пиастров, где n — натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?

1	2	3	4	5	Сумма
20	20	20	0	10	70

Номер 1.

Ответ: любое нечетное число.

Почему четное не может быть первым.

Разобьем числа на две группы 1 - те что стоят на нечетных местах, 2 – те что стоя на четных местах.

В первой группе 1011 чисел, во второй 1010. Назовем места числа из одной группы соседними если номера их мест отличаются на 2. Тогда в каждой из групп четные и нечетные числа чередуются. Тогда во второй группе 505 нечетных чисел.

Заметим, всего нечетных чисел < 2022 ровно 1011. Тогда в первой группе 506 нечетных чисел. Тогда нечетные числа должны занимать нечетные позиции первой группы(1, 5, 9.. 2021).

Поэтому на первом месте нечетное число.

Пример для любого нечетного числа:

Поставим нужное нам число на первое место. Оставшиееся 1010 нечетных чисел поставим как угодно на места вида 4к + 1 и 4к. А четные на оставшиеся. Пример верен в силу своей очевидности(а еще потому, что он построен из оценки).

Номер 2

Ответ: 3.

Пример: Он достигается при а=б=с=1.

Осталось доказать почему:

a^3+b^3+c^3 <= 3((a+b+c)^3 – 26abc)

0 <= 2(a^3+b^3+c^3) + 3(3(aab+aac+bba+bbc+cca+ccb) – 20abc)

60abc <= 2(a^3+b^3+c^3) + 9((aab+aac+bba+bbc+cca+ccb))   ?

(a^3+b^3+c^3)/3 >= abc   (неравенство о средних)

2(a^3+b^3+c^3) >= 6абс   !

(aab+aac+bba+bbc+cca+ccb)/6 >= abc

9(aab+aac+bba+bbc+cca+ccb) >= 54abc   !

Из неравенств справа от которых ! очевидно следует то у которого справа ?

Тогда задача решена.

Номер 3

Даны окружноти w1 w2 и р. Переименуем w1 и w2 в к1 и к2. Точку D переименуем в Д.

Продлим СВ за В до пересечения с р в точке Х. Продлим ДВ за В до пересечения с р в У.

Сделаем гомотетию в точке С переводящую к1 в р. А перейдет в Д, В в Х. Тогда ДХ параллельно АВ.

Сделаем гомотетию в точке Д переводящую к2 в р. А перейдет в С, В в У. Тогда СУ параллельно АВ.

Тогда СУХВ – трапеция вписанная в окружность р, следовательно она равнобокая и О лежит на Общем серпере к СУ и ДХ, прохоящем через В. Тогда ОВ перепендекулярно СУ.

АВ параллельно СУ. Тогда АВ перепендикулярно ОВ. Искомый угол равен 90 градусам.

Ответ: 90 градусов.

Задача 5:

Заметим если мы хотим уметь сдавать любую сумму >= какой то, то мы должны научиться набирать все остатки по модулю 3н-1. Заметим числа 6н+1 6н+4 и 6н+7 это остатки 3 6 и 9 по модулю 3н-1 при н больших 3.

Разберем случаи 1 2 3 отдельно

Н = 1, даны числа 1 7 10 17. Любое число большее 5 набирается или как 2 * к или как 2*к+7. 5 очевидно не набирается.

Н = 2, даны числа 5 13 16 19. Научимся набирать все остатки при делении на 5: 0 – 5, 1-16, 2-16+16, 3-13, 4-19. Тогда любое число >=28 мы можем сделать взяв нужный остаток и дополнив 5. 27 же нельзя набрать. И вправду если в наборе есть 19 то 8 очевидно не набрать. Если в наборе есть 16 то оставшиееся 11 не набрать. Если в наборе есть 13, то оставшиеся 14 точно не набрать.

Н = 3, даны числа 8, 19, 22, 25. Научимся набирать остатки при делении на 8: 0-8, 1-25, 2-25+25, 3-19, 4-19+25, 5-25+25+19=69, 6-22, 7-22+25. Тогда все числа >=69-8 мы можем набрать взяв нужный остаток и и дополнив 8. Число 61 нельзя набрать, и вправду, если взять число 25 1 раз, то оставшиеся 36 только 8 не набрать, если взять число 25 2 раза то 11 никак не набрать, если взять 25 1 раз и 22 1 раз то оставшиеся 14 не набрать, если взять 25 1 раз и 19 1 раз то 17 никак не набрать. Значит 25 не берем. Если взять 22 1 раз то 39 только 8 не набрать, если взять 22 2 раза то 17 не набрать, если взять если взять 22 1 раз и 19 и раз то 20 не набрать, значит 22 не берем. Если взять 19 2 раза, 1раз или 0 раз то остальное только 8 не набрать.

Продолжим решение для н > 3.

Заметим что нам надо набрать 3 6 и 9 любой остаток по модулю 3н-1. Давайте расставим остатки по кругу так что-бы соседние отличались на 3(по модулю 3н-1). Порядок в кругу выглядит так: 0 3 6… 3н-3 1 4… 3н-2 2 5 … 3н-4 Тогда набирание любого остатка это шагание по круг в определенную сторону шажками длиной 3 6 или 9(длина шажка – остаток по модулю 3н-1 равный по модулю разнице между числами между которыми шаг совершили). Тогда что бы набрать остаток 3н-4 надо сделать шажки с суммарной длинной 3(3н-2)=9н-6=9(н-1)+3 Тогда что бы набрать такую длинну шажков за минимальное их количество надо сделать н-1 шажок на 9 и 1 шаг на 3. Тогда минимальное число с остатком 3н-4 которое мы можем получить это (6н+7)*(н-1) + 6н+1(то что минимальное число получается при минимальном кол-ве шажков очевидно так как н больше 3).

Следовательно число $(6н+7)(н-1) + 3н+2$ мы получить не можем. Все числа большие него мы можем получить, так как если остаток $3н-4$ первый раз достигается при числах больших чем для любого другого отстатка(что верно потому что до него дальше всего шагать), то и последний раз он не достигается тоже позже чем последний раз не достигается любой другой остаток. Следовательно последнее недостижение любого другого отсатка было до $(6н+7)(н-1) + 3н+2$ и все числа после достигаются как взятие нужного остатка и дополнение сколькими то купюрами по $3н-1$.

Задача 4:

Пусть эти простые числа это п и п+6. Тогда они оба нечетные. Тогда по модулю 8 их произведение

$1 * 7 = 7$

$3 * 1 = 3$

$5 * 3 = 7$

$7 * 5 = 3$

Или 3 или 7.

Рассмотрим нашу последовательность. Пусть первое число это ав, тогда следующее (а-1)в, следущее(если есть) (а-2)в и т. д. Заметим что число сложенное из нее это 8*(что то) + в(64^н-1)/63 где 8*(что то) это значения от четных(с конца) разрядов, а остальное – значения от нечетных разрядов. Заметим 8*(что то)+в(64^н-1)/63 сравнимо по модулю 8 с в. Значит в или 3 или 7.

Распишим более подробно число х:

в(64^н-1)/63 + 8а(64^н-1)/63 – 8(1*64^(н-2)+2*64^(н-3)+…+(н-1)*64^0)=

= в(64^н-1)/63 + 8а(64^н-1)/63 – 8((64^(н-1)-1)/63 + (64^(н-2)-1)/63 + … + (64^(1)-1)/63)=

=(в+8а) (64^н-1)/63 – 8 ((64^н-1)/63) – н)/63=

=(в + 8а - 8/63)((64^н-1)/63) + 8н/63=п(п+6)

(63в+8*63а-8) ((64^н-1)/63) + 8н = п(п+6)*63

А лежит в пределах от 2 до 7, а >= н, н лежит в пределах от 2 до 7.