Олимпиада школьников СПбГУ по математике.

Заключительный этап. 2020/2021 учебный год. 10 – 11 классы.

1. В некоторых клетках полоски 1×2021 поставлено по одной фишке. В каждую из пустых клеток записывается число, равное модулю разности количества фишек слева и справа от этой клетки. Известно, что все записанные числа различны и отличны от нуля. Какое наименьшее количество фишек может быть расставлено в клетках?

2. Положительные числа a, b, c таковы, что $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Найдите минимальное значение выражения

$$A = \frac{a^4 + b^4}{c^2 + 4ab} + \frac{b^4 + c^4}{a^2 + 4bc} + \frac{c^4 + a^4}{b^2 + 4ca}.$$

3. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием BC. На продолжении стороны AC за точку C отмечена точка K, и в треугольник ABK вписана окружность с центром в точке I. Через точки B и I проведена окружность, касающаяся прямой AB в точке B. Эта окружность вторично пересекает отрезок BK в точке L. Найдите угол между прямыми IK и CL.

4. На доске написано число 1200. Петя приписал к нему справа $10n + 2$ пятерок, где n — неотрицательное целое число. Вася подумал, что это шестеричная запись натурального числа x, и разложил x на простые множители. Оказалось, что среди них ровно два различных. При каких n это возможно?

5. В стране Лимонии в обращении используются монеты достоинством $6n + 1$, $6n + 3$, $6n + 5$ и $6n + 7$ пиастров, где n — натуральное число. Житель страны зашел в банк, не имея при себе наличных денег. Какую наибольшую сумму ему не смогут выдать в банке?

1	2	3	4	5	Сумма
20	17.5	0	2.5	15	55

Задание 1

Пусть на полоске k фишек и $2021 - k$ пустых клеток. Пусть значение в первой пустой клетке (пусть она существует, так как $k = 1$ может подходить условию, а $k = 0$ не максимально) равно $a = \left|a_{\text{спр}} - a_{\text{сл}}\right|$. Тогда в следующей от неё справа пустой клетке значение $b = \left|\left(a_{\text{спр}} - z\right) - -\left(a_{\text{сл}} - z\right)\right| = |a - 2z|$, где z – количество занятых клеток, которые мы прошли, пока переходили от первой до второй. Как можно заметить, а $\equiv \equiv b \ (mod\ 2)$, аналогично получаем, что либо все значения чётные, либо нечётные. Равных между собой и нулю нет, а значит, что максимальное значение не меньше $(2021 - k)$-го нечётного натурального числа, то есть, $(2021 - k) * 2 - 1 = 4041 - 2k$. Очевидно из определения значений, что максимальное значение не больше k:

$$4041 - 2k \leq k$$

$$k \geq 1347$$

Пример на 1347: заняты – Х, свободны – О:

ОХОХОХ…ОХОХХХХХХ…ХХХ, в первой О – 1347, во второй – 1345, в 674й – 1, так как перед ней стоит 673 Х, а после – 674; всего в этой полоске 2021 клетка, т.к. 674+1347 = 2021.

Задание 2

Преобразуем выражение: $A = a^2, B = b^2, C = c^2, A + B + C = 3$:

$$\frac{A^2 + B^2}{3 - A - B + 4\sqrt{AB}} + \frac{B^2 + C^2}{3 - B - C + 4\sqrt{BC}} + \frac{A^2 + C^2}{3 - A - C + 4\sqrt{AC}}$$

Зафиксируем C, тогда у нас зафиксирована сумма $A + B = 3 - C = k.$ Посмотрим на первое слагаемое:

$$\frac{A^2 + B^2}{3 - A - B + 4\sqrt{AB}} = \frac{k^2 - 2AB}{3 - k + 4\sqrt{AB}}$$

Если $A = B$, то числитель минимален, а знаменатель максимален (поскольку AB максимально), а значит, дробь минимальна и равна $\frac{\mathrm{k}^2}{2(k+3)}$. Исходное выражение не меньше:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{k_1^2}{k_1+3} + \frac{k_2^2}{k_2+3} + \frac{k_3^2}{k_3+3}\right) = \frac{1}{2}\left(k_1 - 3 + \frac{9}{k_1+3} + k_2 - 3 + \frac{9}{k_2+3} + k_3 - 3 + \frac{9}{k_3+3}\right) = \frac{1}{2}\left(-3 + \frac{9}{k_1+3} + \frac{9}{k_2+3} + \frac{9}{k_3+3}\right),$$

Где $k_1 = A + B, k_2 = A + C, k_3 = A + B, k_1 + k_2 + k_3 = 2(A + B + C) = 6.$

Найдём минимальное значение $\frac{1}{k_1+1}+\frac{1}{k_2+1}+\frac{1}{k_3+1} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{k_1+3}*\frac{1}{k_2+3}*\frac{1}{k_3+3}}$, оно достигается мри максимальном $(k_1+3)(k_2+3)(k_3+3)$, при фиксированной сумме в 15 произведение максимально при равных сомножителях, т.е. $k_1+3=k_2+3=k_3+3=5 \Rightarrow k_1=k_2=k_3=2$. Тогда исходное выражение не меньше $\frac{6}{5}$. Пример на $\frac{6}{5}$: $a=b=c=1$.

Задание 4.

$$A = 1200555\dots555_6, A+1 = 1201000\dots000_6$$
$$= 6^{10n+2} + 2*6^{10n+4} + 6^{10n+5}$$

$$A = 289*6^{10n+2} - 1 = (17*6^{5n+1}-1)(17*6^{5n+1}+1)$$

НОД множителей не больше 2, но они оба нечётны, тогда НОД = 1, оба множителя > 1, тогда $17*6^{5n+1}-1 = p^a, 17*6^{5n+1}+1 = q^b$.

Задание 5.

Заметим, что множество чисел вида $6n+1$ включает в себя множество чисел вида $6n+7$, а объединение всех четырёх множеств тогда: 7, 9, 11, 13, 15, … То есть любое нечётное число больше 6 представимо в виде $6n + \text{нечётный остаток}$. Тогда все нечётные числа больше 5 представимы в виде одной монеты, а меньше 5 – не представимы вообще. Чётное число пиастров выдаётся хотя бы двумя монетами, то есть оно должно быть больше 12, при этом каждое чётное число больше двенадцати представимо в виде $7+(n-7)$, то есть двух нечётных монет. Ответ: 12.

Если в условии имеется в виду только одно конкретное значение n, то:

Рассмотрим, какие числа мы можем набрать. С помощью k монет мы можем набрать $6kn+k, \dots\ 6kn+7k$, а с помощью k+2 монет (k + 1 другой чётности) мы можем набрать от $6kn+12n+k+2$. Нам нужно, чтобы кусочки наслаивались: $6kn+7k+2 \geq 6kn+12n+k+2$, $6k \geq 12n$, $k >= 2n$. Тогда мы можем набрать любое чётное число с количеством монет от $2n$, то есть, $2n(6n+1)$, а нечётное – любое с количеством монет от $2n+1$, то есть, $(2n+1)(6n+1)$. Ответ: $(2n+1)(6n+1)-2$.