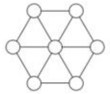
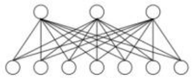
ВОПРОС 1: ЭССЕ

25 из 25 баллов

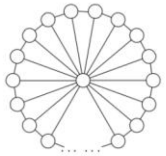
1. На картинке нарисовано n кружочков, некоторые кружочки соединены отрезками. Требуется расставить в кружочках числа от 1 до n (без повторений) так, чтобы выполнялось свойство: если кружочки соединены отрезками, то стоящие в них числа должны быть взаимно просты (то есть не иметь общих натуральных делителей, отличных от 1). Можно ли это сделать в каждом из следующих случаев? Если можно — опишите расстановку чисел, если нет — объясните, почему нельзя.



а) $n = 7$



б) $n = 10$



в) $n = 2022$: по кругу стоят 2021 кружочков, и еще один в центре

Данный ответ:

Пункт а

Ответ:да можно.

В центре семерка(она соеденина со всеми,но и взаимно проста со всеми,так как она простая и больше всех остальных чисел),правее неё 6,снизу от 6 5(она простая,значит взаимнопроста с 6),а сверху от 6 1(у них тоже нету общих делителей),далее от 1 против часовой,2(она тоже не имеет общих делителей с 1),далее по часовой от 2 идет 3(она тоже взаимнопроста с 2),а после нее 4(которая граничет с 3 и 5,но посколько она четная ,она с ними взаимнопроста).

То есть расстановка такова:в центре 7 справа от нее 6,далее против часовой 1 2 3 4 5.

Пункт б

Ответ нет,верхние 3 кружка должны быть соеденены со всеми остальными кроми их самих.То есть должны быть 3 числа взаимно простые со всеми кроме 2.Зметим,что четные не подходят,так как их 5 и если какое-то будет наверху,хотя бы 2 будут среди нижних кружков и будут не взаимнопросты.Тогда нечетные.5 не подходит так как оно не взаимнопросто с 10,а десять будет внизу(оно четное).9 и 3 тоже не подходят так как они не взаимнопросты с 6,а оно будет внизу,так как оно четное.Тогда остается только 1 и 7,но это 2 числа,а верхних кружков 3.

Пункт с

Заметим,что в центре не может стоять четное,так как среди 2021 стоящих по кругу точно есть четное, и оно будет не взаимно просто с стоящим в центре.Значит в центре стоит нечетное.Тогда по кругу распологается 2021 кружков,1011 из которых четны,так как при n=2020 кол-во четных и нечетных равно,а 1 нечетное мы убрали в центер.Значит среди 2021 числа стоящего по кругу 1011 четных(это больше половины),значит 2 каких то четных числа будут стоять рядом,но они соеденены ребром,хоть 2 четных числа и не взаимнопросты.Противоречие.Ответ :нет.

ВОПРОС 2: ЭССЕ

15 из 30 баллов

2. Назовем *каскадом, порожденным числом* r, набор из 12 натуральных чисел: $r, 2r, \ldots, 12r$.

а) Может ли какая-то пара чисел (a, b) содержаться в шести различных каскадах? Если да — приведите пример таких чисел, если нет — объясните, почему не может.

б) Верно ли, что множество натуральных чисел можно раскрасить в 12 цветов так, что в каждом каскаде все элементы будут разного цвета?

Данный ответ: Пункт а

Ответ да может.

пример a=2*3*4*5*6=720 b=2*3*4*5*6*2=720*2=1440

Тогда эти числа состоят в каскадах r=2*3*4*5*6 r=2*4*5*6 r=2*3*5*6 r=2*3*4*6 r=2*3*4*5 r=3*4*5*6

Пункт б

ВОПРОС 3: ЭССЕ

10 из 20 баллов

3. В треугольнике ABC точка D — середина стороны AB, E — середина стороны AC, F — середина биссектрисы AL, причем $DF = 1$, $EF = 2$. На плоскости изображены точки D, E, F так, что прямая DF горизонтальна, а остальные элементы чертежа стерты. Можно ли восстановить положение хотя бы одной из вершин треугольника, если известно, что вершина A находилась сверху от прямой DF?

Данный ответ:

Заметим,что раз f середина al,а e середина ac ,то ef-средняя линия треугольника alc,то есть она параллельна cl.

Заметим,что раз f середина al,а d середина ab ,то fd-средняя линия треугольника abl,то есть она параллельна lb.

Значит отрезки ef и fd параллельны и имеют общуюю точку,значит efd одна прямая.

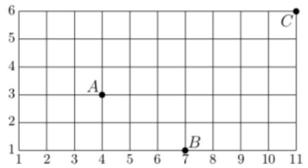
То есть у нас есть только 1 прямая ,которая делится точкой в отношении 2 к 1,заметим,что над этой прямой можно выбрать сколько угодно вершин,таких,что биссектриса угла a будет проходить через точку e.То есть мы сможем построить сколько угодно таких треугольников,причем если вершина a не совпадает ,то и др вершины тоже не совпадают,то есть треугольники будут разными, и их вершины тоже.

ВОПРОС 4: ЭССЕ 16 из 25 баллов

4. Город имеет форму клетчатого прямоугольника 5×10 клеток: линии — улицы, клетки — жилые кварталы. Расстояние между перекрестками измеряется как длина самого короткого пути по улицам города, проходящего от одного перекрестка до другого. Например, для перекрестков A, B и C на картинке $AB = 5$, $AC = 10$, $BC = 9$. Можно ли отметить в этом городе k перекрестков так, чтобы все расстояния между этими перекрестками оказались различными числами? Если да — укажите эти перекрестки (например, перекресток C находится на пересечении 11-й вертикальной и 6-й горизонтальной улицы), если нет — объясните, почему нельзя.

Решите задачу для

а) $k = 5$; б) $k = 6$; в) $k = 7$.



Данный ответ:

Пункт а

Можно

Пример (А находится на пересечении 1 вертик и 1 гориз линии)(В находится на пересечении 1 гориз и 4 вертик улицы)(С находится на пересечении 1 гориз и 6 вертик)(Д находится на пересечении 6 гориз и 11 вертик)(Е находится на пересечении 5 горизонтальной и 11 вертикальной).

Пункт с

Ответ:нет нельзя,так как максимальное растояние между 2 перекрестками 15(всего 10 вертик клеток и 5 горизотальных 10+5=15),так как при кратчайшем растоянии ходов назад не делается.Заметим ,что при 7 перекрестах растояний 7*6/2=21,а 21 больше 15 ,значит растояния будут повторятся.

Пункт b

Ответ нет нельзя

всего путей будет 6*5/2=15 штук

,а всего возможныз их различных длин тоже 15(максимальная 15)от 1 до 15. То есть если нету повторений,не должно быть повторов длин.

Значит,что есть все длины от 1 до 15.

Значит есть длина 15,то есть есть 2 перекрестка в углах,напротив друг друга.

Посчитаем сумарную длину растояний от всех точек,до этих 2.

Между ними 15,если между 1 из ни до другого перекрестка растояние=х, то до 2 углового перекрестка растояние будет 15-х.

То есть,так как точек 4(не считая угловые), растояние до угловых будет 15*4+15=75

Сумма всех растояний = 1+2+3+5+....+15=15*8=120

120-75=45 это сумма растояний между 4 не угловыми перекрестками.

45 - нечетное число и это сумма растояний между 4 вершинами,причему растояния не повторяются!значит такая сумма четная.противоречие.