| | |
|---|---|
| | ol2212878 ol2212878 |
| **Тест начат** | понедельник, 14 Февраль 2022, 10:09 |
| **Состояние** | Завершено |
| **Завершен** | понедельник, 14 Февраль 2022, 14:05 |
| **Прошло времени** | 3 час. 55 мин. |
| **Баллы** | 75/120 |
| **Оценка** | **63** из 100 |

Вопрос
**Инфо**

**Уважаемый участник Олимпиады!**

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

**Вариант заключительного этапа состоит из 6 задач**. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос 1

Выполнен

Баллов: 20 из 20

Коля поехал на электросамокате в магазин в соседнюю деревню со скоростью 10~км/ч. Проехав ровно треть всего пути, он понял, что при движении с прежней скоростью успеет точно к закрытию магазина, и увеличил скорость вдвое. Но когда он проехал ровно 2/3 всего пути, самокат сломался, и оставшуюся часть пути Коля прошел пешком. С какой скоростью он шел, если успел точно к закрытию магазина?

Треть пути Коля ехал со скоростью 10км/ч, треть пути - со скоростью 20км/ч и ещё треть пути - с неизвестной скоростью, обозначим её за v. Пусть расстояние, пройденное и проеханное Колей, было равно S. Тогда первую треть пути он проехал за (1/3xS)/10=1/30xS ч, вторую - за (1/3xS)/20=1/60xS ч, третью - за (1/3xS)/v=(1/3v)xS ч. А поскольку Коля понял, что при движении со скоростью 10км/ч он успеет точно к закрытию магазина и в реальности он тоже успел точно к закрытию магазина, то время, которое было бы затрачено им на поездку, если бы он ехал всю дорогу со скоростью 10км/ч, равно времени, которое он затратил на поездку в реальности. А значит:
S/10=S/30+S/60+S/3v | сокращаем всё на S (S не равно 0) и переносим 1/30 и 1/60 в другую сторону с обратным знаком

1/3v=1/10-1/30-1/60

1/3v=(6-2-1)/60

1/3v=1/20

3v=20

v=20/3=6 2/3км/ч (шесть целых две третьих километра в час).

Ответ: 6 2/3 км/ч.

Комментарий:

Вопрос **2**

Выполнен

Баллов: 15 из 20

Найдите все целые $a$, для которых квадратный трехчлен $x^2 + ax + 2a$ имеет два различных целых корня.

Дискриминант трёхчлена равен $a^2-8a>0$ (т.к. трёхчлен имеет 2 различных целых корня). Поскольку корни целые, то $a^2-8a=(a-8)a$ - точный квадрат. Под такое свойство подходят a=9 и a=-1.
Ответ: 9 и -1.

Комментарий:
Верно, что "Под такое свойство подходят $a=9$ и $a=-1$."

Необходимо доказывать, что нет других.

Вопрос 3

Нет ответа

Балл: 20

Положительные числа $a$, $b$ и $c$ удовлетворяют условию $abc(a+b+c)=3$ . Докажите неравенство $(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8$ .

Вопрос **4**

Выполнен

Баллов: 20 из 20

Какое наименьшее количество фишек можно расставить в клетках таблицы $99 \times 99$ так, чтобы в каждом квадрате $4 \times 4$ было не менее восьми фишек?

Для начала пронумеруем строки таблицы натуральными числами от 1 до 99 (слева) и столбцы также натуральными числами от 1 до 99 (снизу).

Оценка:

Разобьём таблицу на $24^2$ квадратов 4x4 (каждый квадрат лежит между строками 4x+1 и 4x+4 включительно и столбцами 4y+1 и 4y+4 включительно; x и y - любые числа (может быть и различные) от 0 до 23 включительно, потому и квадратов всего $24\text{x}24=24^2$). В каждом квадрате не менее 8 фишек. Рассмотрим теперь квадрат, лежащий между строками 96 и 99 включительно и столбцами 4y+1 и 4y+4 включительно (y от 0 до 23 включительно). В четырёх клетках нижней строки рассмотренного квадрата не более четырёх фишек, следовательно, в оставшихся клетках фишек не менее 4. Заметим, что эти "оставшиеся клетки" не входят ни в один квадрат, на которые мы разбили таблицу. Таких прямоугольников, лежащих между строками 97 и 99 включительно и столбцами 4y+1 и 4y+4 включительно ровно 24 (y от 0 до 23 включительно). Также (доказывается аналогично) не менее 4 клеток входят в каждый из прямоугольников, лежащих между столбцами 97 и 99 включительно и строками 4x+1 и 4x+4 включительно, их (прямоугольников) тоже ровно 24 (x от 0 до 23 включительно). А теперь рассмотрим оставшиеся нерассмотренные клетки. Это квадрат 3x3, который лежит между строками 97 и 99 включительно и столбцами 97 и 99 включительно. В клетках, входящих в квадрат 4x4, расположенный между строками 96 и 99 включительно и столбцами 96 и 99 включительно, но не входящих в рассмотренный ранее квадрат 3x3, может стоять не более 7 фишек (т.к. таких клеток $4^2-3^2=7$). Следовательно, в рассмотренном квадрате 3x3 стоит не менее 1 фишки. Итак, во всей таблице стоит не менее:

$8\text{x}24^2+4\text{x}24+4\text{x}24+1=8\text{x}24^2+8\text{x}24+1=8\text{x}24\text{x}(24+1)+1=8\text{x}24\text{x}25+1=200\text{x}24+1=4800+1=4801$ фишки.

Пример:

Полностью заполняем фишками каждый столбец и каждую строку таблицы с номером, кратным 4. Клетки без фишек образуют группы - квадраты 3x3. В центральную клетку каждого квадрата ставим по фишке. Назовём такие фишки свободными. Таким образом, если разбить таблицу на $24^2$ квадратов 4x4 (как это делать - см. в Оценке), то в каждом квадрате будет по 8 фишек, также ровно по 4 фишки входят в каждый из прямоугольников (их 24), лежащих между столбцами 97 и 99 включительно и строками 4x+1 и 4x+4 включительно (x от 0 до 23 включительно), в каждый из прямоугольников (их тоже 24), лежащих между строками 97 и 99 включительно и столбцами 4y+1 и 4y+4 включительно (y от 0 до 23 включительно), и в квадрате 3x3, лежащем между строками 97 и 99 включительно и столбцами 97 и 99 включительно будет ровно 1 фишка. Таким образом всего фишек ровно $8\text{x}24^2+4\text{x}24+4\text{x}24+1=4801$.

Почему пример работает:

Рассмотрим любой квадрат 4x4. В нём есть полностью заполненный столбец, полностью заполненная строка и 1 свободная фишка. Столбец и строка имеют ровно 1 общую клетку, следовательно, в них суммарно 7 фишек. Но есть ещё 1 свободная фишка, значит, всего в квадрате ровно 8 фишек, что нам и нужно.

Ответ: 4801 фишку.

Комментарий:

Вопрос **5**

Нет ответа

Балл: 20

Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке $O$. Диагональ $AC$ — биссектриса угла $\angle BAD$, точка $M$ — середина стороны $BC$, а точка $N$ — середина отрезка $DO$. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является вписанным тогда и только тогда, когда четырехугольник $ABMN$ является вписанным.

Вопрос 6

Выполнен

Баллов: 20 из 20

Докажите, что у каждого из чисел $n!+1$, $n!+2$, \dots, $n!+n$ можно выбрать простой делитель, на который не делится ни одно из остальных.

Доказательство нескольких нужных теорем:

1. a-b делится на НОД(a,b).

Доказательство:

a делится на НОД(a,b) и b делится на НОД(a,b), следовательно, их разность делится на НОД(a,b), что и требовалось доказать.

2. Рассмотрим ряд натуральных чисел от 1 до n, не содержащий некоего составного a<=n. Тогда в этом ряде найдутся несколько чисел, произведение которых делится на a.

Доказательство:

Рассмотрим простой делитель p, входящий в a в какой-то степени x. Если x=1, то поскольку a составное, то до него есть само число p (для этого случая теорема доказана). Если же x>=2, то в рассмотренном ряде до a найдётся число p в степени x-1 (ведь оно меньше a) и число, в два раза большее него. Исключение составляет случай, где p=2, a=4. Но тогда n<6, ведь иначе в рассматриваемом ряду найдутся 2 числа, каждое из которых делится на 2. Следовательно, n=5, и числа из условия равны 121, 122, 123, 124 и 125. Искомый простой делитель у числа 121 - 11, у 122 - 61, у 123 - 41, у 124 - 31 и у 125 - 5. Для этого случая теорема тоже доказана (так мы можем рассмотреть все простые делители числа a и найти по указанному алгоритму все числа, произведение которых будет делиться на a).

Само решение:

Максимальный НОД двух чисел из этого ряда не превосходит максимальной разности двух чисел из этого ряда (т.к. по теореме 1 a-b делится на НОД(a,b)). А максимальная разность - это n-1. Следовательно, нам надо доказать, что у каждого из чисел n!+1, n!+2, . . . , n!+n либо можно выбрать простой делитель, не меньший n, либо выбрать какой-то другой простой делитель, на который не делится
ни одно из остальных чисел.

Рассмотрим число n!+a, a<=n. Заметим, что:

n!+a=a(1x2x. . .x(a-1)x(a+1)x. . .xn+1). Если a - составное, то, по теореме 2, на него делится произведение нескольких чисел, входящих в ряд 1, . . . , n, не содержащий a. То же самое, если a=1. Если a - простое, но не большее половины n, то на него делится число 2a, входящее в ряд 1, . . . , n, не содержащий a. Следовательно, если a=1, a составное или a - простое, не большее половины n, то 1x2x. . .x(a-1)x(a+1)x. . .xn делится на a, значит, 1x2x. . .x(a-1)x(a+1)x. . .xn+1 не делится ни на одно число из ряда 1, . . . , n и у него найдётся простой делитель, не меньший n - это искомый простой делитель.

Если же a - простое, но большее половины n, то на него не делится ни одно из чисел n!+1, n!+2, . . . , n!+a-1, n!+a+1, . . . , n!+n (т.к. n! делится на a, а ни одно из чисел ряда 1, . . . , n, не содержащего a, на него не делится). Таким образом, a - искомый простой делитель.

Итак, мы доказали, что у любого числа n!+a найдётся простой делитель, на который не делится ни одно из чисел n!+1, n!+2, . . . , n!+a-1, n!+a+1, . . . , n!+n. Что и требовалось доказать.

Комментарий:

« ПРЕДЫДУЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 21

СЛЕДУЮЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ »
Вариант 13