Вопрос **Инфо**

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 6 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос **1**

Выполнен

Баллов: 20 из 20

Коля поехал на электросамокате в магазин в соседнюю деревню со скоростью 10~км/ч. Проехав ровно треть всего пути, он понял, что при движении с прежней скоростью успеет точно к закрытию магазина, и увеличил скорость вдвое. Но когда он проехал ровно 2/3 всего пути, самокат сломался, и оставшуюся часть пути Коля прошел пешком. С какой скоростью он шел, если успел точно к закрытию магазина?

Раз Коля успел точно к закрытию магазина, то время, за которое он проезжает 2/3 пути на самокате со скоростью 10 км/ч (как он планировал), равно времени, за которое он проезжает 1/3 пути со скоростью 20 км/ч и 1/3 пути идёт пешком.

Пусть 3S - длина всего пути, V - искомая скорость пешком. Тогда это условие записывается следующим образом:

2S/10 = S/20 + S/V

Сокращаем S, получаем 1/V = 1/5 - 1/20; V = 20/3

Ответ: 20/3

Комментарий:

Вопрос **2**

Выполнен

Баллов: 15 из 20

Найдите все целые a, для которых квадратный трехчлен $x^2 + ax + 2a$ имеет два различных целых корня.

ol2203800_2.pdf

Комментарий:
равенство $a = 2^k \cdot n^2$ означает, что Вы рассмотрели только $a>0$

Вопрос 3

Нет ответа

Балл: 20

Положительные числа a, b и c удовлетворяют условию $abc(a+b+c)=3$. Докажите неравенство $(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8$.

Вопрос **4**

Нет ответа

Балл: 20

Какое наименьшее количество фишек можно расставить в клетках таблицы 99×99 так, чтобы в каждом квадрате 4×4 было не менее восьми фишек?

Вопрос **5**

Выполнен

Баллов: 20 из 20

Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Диагональ AC — биссектриса угла $\angle BAD$, точка M — середина стороны BC, а точка N — середина отрезка DO. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является вписанным тогда и только тогда, когда четырехугольник $ABMN$ является вписанным.

ol2203800_5.pdf

Комментарий:

Вопрос **6**

Нет ответа

Балл: 20

Докажите, что у каждого из чисел $n!+1$, $n!+2$, \dots, $n!+n$ можно выбрать простой делитель, на который не делится ни одно из остальных.

« ПРЕДЫДУЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 21

СЛЕДУЮЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 13 »

Дискриминант этого трёхчлена равен $a(a-8)$. Для целочисленности обоих корней необходимо, чтобы дискриминант был квадратом натурального числа. Заметим, что

$$\text{НОД}(a, a-8) = \text{НОД}(a, 8) = \text{НОД}\,(a-8, 8)$$

Из этого следует, что если a делится на некоторое p, отличное от 2, то a-8 не делится на это p. В произведении a(a-8), как в квадрате, степени всех простых должны быть чётны, поэтому все простые кроме 2, входящие в a, должны иметь чётную степень. Тогда a можно представить в виде

$$a = 2^k \cdot n^2$$

Где n – нечётное число.

Если k = 0, то имеем

$$t^2 = a(a-8) = n^2(n^2-8)$$

Тогда (n^2-8) должно являться квадратом. Несложно убедиться, что это возможно только при n = 3, a = 9.

Если k = 1, то

$$t^2 = a(a-8) = 4n^2(n^2-4)$$

Тогда n^2-4 должно являться квадратом. Это возможно только при n = 2, но этот случай нас не устраивает, потому что тогда дискриминант равен нулю и корни не могут быть различны.

Если k = 2, то

$$t^2 = a(a-8) = 16n^2(n^2-2)$$

В этом случае (n^2-2) должно являться квадратом, что невозможно.

Если $k \geq 3$, то можно записать

$$t^2 = a(a-8) = 2^k n^2(2^k n^2 - 8) = 2^{k+3} n^2 (2^{k-3} n^2 - 1)$$

Если положить в этом равенстве k = 3, то получим, что величина n^2-1 должна являться квадратом, что возможно только при n = 1, но тогда снова получаем дискриминант равный нулю, что нас не устраивает.

Если же $k > 3$, то в скобках стоит нечётное число. Так как n у нас нечётно, что двойка в это произведение входит в степени k+3, откуда k является нечётным числом (чтобы степень вхождения 2 в квадрат была чётной). Тогда величина $2^{k-3}n^2$ является квадратом, большим 1, то есть величина в скобках квадратом не является. При этом перед скобками стоит квадрат, значит, всё выражение не является квадратом.

Значит, дискриминант является ненулевым квадратом только в случае $a = 9$. Проверим, что при этом действительно получаются целые различные корни:

$$x^2 + 9x + 18 = 0$$

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 4 \cdot 18}}{2}$$

$$x = \frac{-9 \pm 3}{2}$$

$$x \in \{-6;\ -3\}$$

Значит, это единственное подходящее значение a.

Ответ: 9.

Пусть четырёхугольник ABCD вписанный.

Тогда $\angle BCA = \angle ODA$, так как они опираются на одну дугу.

Кроме того, по условию AC – биссектриса $\angle BAD$, поэтому

$$\angle BAC = \angle OAD$$

Тогда треугольники ΔBAC и ΔOAD подобны по двум углам. В них отрезки AM и AN являются медианами, поэтому $\angle ONA = \angle BMA$ как соответственные углы подобных треугольников. Из этого равенства и следует вписанность четырёхугольника ABMN.

Пусть теперь четырёхугольник ABMN вписанный. Тогда $\angle ONA = \angle BMA$, потому что они опираются на одну дугу. Кроме того, по-прежнему

$$\angle BAC = \angle OAD$$

Потому что по условию AC – биссектриса $\angle BAD$.

Значит, в треугольниках ΔBAC и ΔOAD равны два соответственных угла и два соответственных угла между медианой и стороной, к которой она проведена. Если мы докажем, что этих условий достаточно для подобия этих треугольников, то задача будет решена, так как тогда из подобия мы получим $\angle BCA = \angle ODA$, из чего моментально будет следовать вписанность четырёхугольника ABCD.

Докажем, что этих условий достаточно для подобия.

Лемма. Пусть даны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, в которых проведены медианы AM и A_1M_1. Тогда, если $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$ и $\angle AMC = \angle A_1M_1C_1$, то два исходных треугольника подобны.

Доказательство:

Поскольку имеет место равенство $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$, то можно совместить углы A и A_1, прямые AC и A_1C_1, прямые AB и A_1B_1.

Теперь у нас есть угол А, точки B и B_1 на одной его стороне, точки С и C_1 на другой.

Проведём через точку С прямую, параллельную B_1C_1. Пусть она пересекает прямую AB в точке B'. Тогда треугольники $AB'C$ и $A_1B_1C_1$ подобны. Докажем, что $B' = B$, тогда лемма будет доказана.

Не умаляя общности считаем, что точки на прямой AB расположены в таком порядке $A — B — B'$. Пусть M' - середина $B'C$. Тогда из подобия треугольников $AB'C$ и $A_1B_1C_1$ имеем $\angle AM'C = \angle A_1M_1C_1$, но нам дано

$\angle AMC = \angle A_1M_1C_1$, поэтому $\angle AM'C = \angle AMC$. Тогда точки A, M, M', C лежат на одной окружности.

Пусть точки B и B' не совпадают, тогда не совпадают и M, M'. Так как точки лежат на одной окружности, М не может быть внутри треугольника $AM'C$. Пусть К – точка пересечения AM' и ВС. Тогда по теореме Менелая

$$\frac{BM'}{M'C} \cdot \frac{CK}{KB} \cdot \frac{BA}{AB'} = 1$$

Так как M' - середина $B'C$, первое отношение равно 1, так как точки на прямой АВ расположены в таком порядке $A — B — B'$, то второе отношение меньше 1, значит, третье больше 1.

Тогда отрезок СК больше отрезка КВ, то есть СК явно больше, чем $\frac{BC}{2}$, то есть больше, чем СМ. А это означает, что М лежит на отрезке СК, то есть внутри треугольника $CM'A$. Получено противоречие! Значит, предположение о том, что точки B и B' не совпадают, было неверным и тогда они совпадают.

Тогда треугольники ABC и $AB'C$ равны, но так как $AB'C$ и $A_1B_1C_1$ подобны, то и треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны, лемма доказана.

По этой лемме смело утверждаем, что треугольники ΔBAC и ΔOAD подобны, то есть $\angle BCA = \angle ODA$ и четырёхугольник ABCD вписанный.

Так как мы показали, что из вписанности ABCD следует вписанность ABMN и из вписанности ABMN следует вписанность ABCD, задача решена.