	ol2219470 ol2219470
Тест начат	понедельник, 14 Февраль 2022, 10:04
Состояние	Завершено
Завершен	понедельник, 14 Февраль 2022, 14:01
Прошло времени	3 час. 56 мин.
Баллы	56/120
Оценка	**47** из 100

Вопрос **Инфо**

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 6 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос **1**

Выполнен

Баллов: 19 из 20

Коля поехал на электросамокате в магазин в соседнюю деревню со скоростью 10~км/ч. Проехав ровно треть всего пути, он понял, что при движении с прежней скоростью успеет точно к закрытию магазина, и увеличил скорость вдвое. Но когда он проехал ровно 2/3 всего пути, самокат сломался, и оставшуюся часть пути Коля прошел пешком. С какой скоростью он шел, если успел точно к закрытию магазина?

Пусть весь путь это S, тогда первую треть пути Коля ехал со скоростью 10 км/ч, вторую треть со скоростью 20 км/ч, а оставшийся путь (т.е. ещё треть) со скоростью x. Пусть на первую треть пути он затратил время $t1 = (S/3)/10$, на вторую $t2 = (S/3)/20$, а на третью $t3 = (S/3)/x$, причём если бы Коля весь путь ехал со скоростью 10 км/ч, он бы затратил бы столько же времени, как и на эту поездку. Значит
$t1+t2+t3 = S/10$
$(S/3)/10 + (S/3)/20 + (S/3)/x = S/10$

$(S/3)/x = S/10 - (2S/3)/20 - (S/3)/20$

$(S/3)/x = 2S/20 - S/20$

$(S/3)x = S/20$

$20S/3 = S*x$

$20/3 = x$

Значит скорость на третьем промежутки была $20/3 = 6.66$ км/ч

Ответ: со скоростью 6.66 км/ч.

Комментарий:
правильный ответ 20/3 км/ч

6.66км/ч - приближенное значение

Вопрос **2**

Выполнен

Баллов: 15 из 20

Найдите все целые a, для которых квадратный трехчлен $x^2 + ax + 2a$ имеет два различных целых корня.

Формула корней квадратного трёхчлена (-b+-D^0.5)/2a, в нашем случае (-a+-(a^2-8a)^0.5)/2. Чтоб корни были целыми дискриминант должен быть квадратом и -a+-(a^2-8a)^0.5 быть чётной, заметим, что -a и корень из дискриминанта одной чётности, а значит их сумма (разность) будет чётной. Из этого можно сделать вывод, что нам подходят все a при которых a^2-8a является квадратом.
a^2-8a = a(a-8) , заметим что 0<=a<=8 нам не подходят, ведь дискриминант должен быть положителен. Произведение двух целых чисел является полным квадратом если:

1)оба множителя квадраты (либо противоположны квадратам)

разность двух квадратов равна 8, только если это 9 и 1, либо обратные -9 и -1, т.е. при a = 9 и a = 1, дискриминант является квадратом

2)(будем рассматривать случай с положительными a, случай с отрицательными аналогичен (вынеся два минуса за скобки и заменив a на a-8, a a-8 на a, т.к. при отрицательных a по модулю больше a-8)) множители квадратами не являются, а при разложении на простые множители этих множителей, все одинаковые простые входят в них в одинаковых по чётности степенях.

Заметим, что 8 по всем нечётным модулям не сравнимо с 0, а значит если a делится на какое-то простое в нечётной степени, то a-8 никогда не будет делиться на это число, а значит их произведение не будет квадратом (аналогично и в обратную сторону, если a-8 делиться на какое-то простое в нечётной степени, то a никогда на него делиться не будет), причём нечётные простые в разложении a и a-8 обязаны быть различны.

Из этого можно сделать вывод, что при разложении и a, и a-8 все нечётные простые входят в чётных степенях. Но 2 обязана быть в разложении и быть в нечётной степени (иначе число будет квадратом, но случай с квадратами был разобран ранее). Если степень вхождения 2 в a 3 и более, то степень вхождения в a-8 в точности 3, если степень вхождения 2 в a равна 1, то и в a-8 она равна 1.

В 1 случае a = 8 * 2^2x * нечёт1^2 (где x не отрицательное число), a-8 = 8 * нечёт2^2 (как было написано ранее нечётное число входящее в a и нечётное входящее в a-8 не имеют общих делителей), тогда:

8 * 2^2x * нечёт1^2 = 8 * нечёт2^2 + 8

2^2x * нечёт.^2 = нечёт2^2 + 1

если x = 0, то левая часть нечётная, а правая чётная - противоречие, а если x>0, то левая часть делится на 4, а правая нет, т.к. квадрат нечётного по модулю 4 сравним с 1. Значит в a 2 не может входить в 3 и более степенях.

Во 2 случае a = 2 * нечёт1^2 , a-8 = 2 * нечёт2^2, тогда:

2 * нечёт1^2 = 2 * нечёт2^2 + 8

нечёт1^2 = нечёт2^2 + 4

но заметим, что квадраты двух нечётных чисел нечётных чисел не могут отличаться на 4 (они отличаются минимум на 8, при 1 и 9). Значит в разложение a вообще не может входить 2.

Откуда получаем, что нам подходят только a = 9 и a = 1

Ответ: 9 и 1.

Комментарий:
опечатка. правильно "при a = 9 и a = -1".

неверно утверждать "Но 2 обязана быть в разложении и быть в нечётной степени (иначе число будет квадратом..."

Вопрос **3**

Выполнен

Баллов: 2 из 20

Положительные числа a, b и c удовлетворяют условию $abc(a+b+c)=3$. Докажите неравенство $(a+b)(b+c)(c+a)\geqslant 8$.

И условия можно вывести, что a+b+c = 3/abc, значит (a+b)(b+c)(c+a) = (3/abc - c)(3/abc - a)(3/abc - b) = 27/(abc)^3 - 9(a+b+c)/abc + 3(ab+ac+bc)/(abc)^2 - abc = (27-9abc(a+b+c)+3(abc)^2*(ab+bc+ca) - (abc)^4)/(abc)^3 , заметим что 27 = 9abc(a+b+c),
ведь abc(a+b+c)=3, а значит это всё равно (3(abc)^2*(ab+bc+ca) - (abc)^4)/(abc)^3 = 3(ab+bc+ca)-(abc)^2/abc , что мы должны сравнить с 8.
Надо доказать, что 3(ab+bc+ca) > abc(8+abc)

Комментарий:
ошибка: написано

$27/(abc)^3 - 9(a+b+c)/abc + 3(ab+ac+bc)/(abc)^2 - abc = (27-9abc(a+b+c)+3(abc)^2*(ab+bc+ca) - (abc)^4)/(abc)^3$

надо

$27/(abc)^3 - 9(a+b+c)/abc + 3(ab+ac+bc)/(abc)^2 - abc = (27-9abc^2*(a+b+c)+3(abc)(ab+bc+ca) - (abc)^4)/(abc)^3$

Вопрос **4**

Выполнен

Баллов: 20 из 20

Какое наименьшее количество фишек можно расставить в клетках таблицы 99×99 так, чтобы в каждом квадрате 4×4 было не менее восьми фишек?

Начиная с верхнего левого угла разрежем таблицу на квадраты 4*4, заметим, что так всю таблицу разрезать не получиться (у нас останется по три строки снизу и по три столбца справа). Тогда разрежем оставшуюся часть на прямоугольники 4*3 снизу и на прямоугольники 3*4 справа, после чего у нас останется в правом нижнем углу квадратик 3*3. По итогу мы получили 576 квадратов 4*4, 24 прямоугольника 3*4, 24 прямоугольника 4*3 и квадратик 3*3.

Заметим, что в каждый квадрат 4*4 у нас должно уйти минимум по 8 фишек (576*8 = 4608), на прямоугольники 3*4 и 4*3 у нас должно уйти минимум по 4 фишки (если дополнить эти прямоугольники до квадрата 4 на 4 и в дополненной части во все клетки поставлены фишки, 48*4 = 192). И в квадратике 3*3 должна стоять хотя бы одна фишка (если дополнить его до квадрата 4*4 и в дополненной части во всех 7 клетках стоят фишки). Значит наша оценка - 4608 + 192 + 1 = 4801

Пример:

Полностью закрасим все столбцы и все строки номер, которых отсчитывая с левого верхнего угла делиться на 4(левая верхняя клетка находиться в 1 столбце и в первой строке, а нижняя правая в 99 столбце и 99 строке). После этого в отмеченных ранее квадратах 4*4 у нас поставлены фишки на всю нижнюю и правую стороны (всего 7), в прямоугольниках поставлены по 3 фишки на всю меньшую сторону, а в квадратик 3*3 пока не поставили не одной фишки. Оставшиеся фишки поставим в клетки у которых номер столбца и строки по модулю 4 сравним с 3 (для квадратов 4*4 это будет угловая клетка между закрашенными сторонами, в прямоугольниках это будет угловая клетка между краем доски и закрашенной стороной, для квадратика 3*3 это будет нижняя правая клетка доски).

По итогу мы расставили в точности 4801 фишку, причём в любом квадрате 4*4 стоит ровно по 8 фишек.

Ответ: 4801 фишка.

Комментарий:

Вопрос **5**

Выполнен

Баллов: 0 из 20

Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Диагональ AC — биссектриса угла $\angle BAD$, точка M — середина стороны BC, а точка N — середина отрезка DO. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является вписанным тогда и только тогда, когда четырехугольник $ABMN$ является вписанным.

Если ABMN вписанный, то углы ABM и ANM в сумме дают 180 градусов, а если ABCD вписанный, то углы ABM и ADC в сумме дают 180 градусов, значит если угол ANM равен углу ADC, то нужное нам доказано.

Комментарий:
доказательство отсутствует

Вопрос **6**

Нет ответа

Балл: 20

Докажите, что у каждого из чисел $n!+1$, $n!+2$, \dots, $n!+n$ можно выбрать простой делитель, на который не делится ни одно из остальных.