	ol2213678 ol2213678
Тест начат	понедельник, 14 Февраль 2022, 10:08
Состояние	Завершено
Завершен	понедельник, 14 Февраль 2022, 14:05
Прошло времени	3 час. 56 мин.
Оценка	**57** из 100

Вопрос **Инфо**

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 5 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

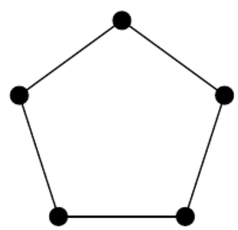
Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос **1**

Выполнен

Баллов: 10 из 20

На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Таня выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа так, чтобы для всех этих чисел выполнялось свойство:
если числа a и b не соединены отрезком, то сумма a^2+b^2 должна быть взаимно проста с n, а если соединены, то числа a^2+b^2 и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1.
При каком наименьшем n существует такая расстановка?



Число n имеет в разложении на простые хотя бы два различных, так как иначе сумма квадратов кратна p, потому что a_1^2 тождественно равно a_3^2 тождественно равно a_5^2 т.р. a_2^2 т.р. a_4^2 т.р. a_1^2 (Т.Р. = тождественно равно)

Где a1...a5 числа по кругу. Тогда сумма не соседних кратна p, противоречие.

Тогда есть хотя бы два простых числа. Двойки быть не может, так как среди пяти чисел хотя бы три одной четности и два из них не рядом. Тогда если 3 простых, то n >= 3*5*7=105. Если простых 2 заметим, что простые вида 4k+3 по рождественской теореме Фирма делят сумму квадратов только если оба квадрата кратны этому числу. Тогда простые 3, 7, 11 смогут поделить максимум одну пару, тогда второе делит 4-е остальные, пусть a_1-a_2 a_2-a_3 a_3-a_4 a_4-a_5, тогда пару a_1-a_4 тоже делит, значит этих простых нет в разложении. Тогда число n хотя бы 5*13=65.

ol2213678_1.png

Комментарий: решение содержит недоказанное утверждение (о числах вида 4k+3), не приведена реализация

Вопрос **2**

Выполнен

Баллов: 15 из 20

При $x, y, z \geqslant 1$ найдите минимальное значение выражения

$$A = \frac{\sqrt{3x^4 + y} + \sqrt{3y^4 + z} + \sqrt{3z^4 + x} - 3}{xy + yz + zx}.$$

ol2213678_2.png

Комментарий:
Не ясно, как участник планировал доказать, что sqrt(3x^4+x)+sqrt(3y^4+y)+sqrt(3z^4+z)<sqrt(3x^4+y)+sqrt(3y^4+z)+sqrt(3z^4+x), используя приведенное вспомогательное неравенство.
Этот переход не очевиден, и должен был быть написан полностью.

Вопрос **3**

Выполнен

Баллов: 17 из 20

Дан вписанный четырехугольник $ABCD$ с перпендикулярными диагоналями. На описанной вокруг него окружности отмечена точка E, диаметрально противоположная D, причем отрезки AB и DE не пересекаются. Найдите отношение площадей треугольника BCD и четырехугольника $ABED$.

№3

Обозначим точку M как пересечение AC и BD

a=AM, b=BM, c=CM, d=OM.

Угол DBE = 90 градусов, так как опирается на диаметр, следовательно так как AC перпендикулярно BD, BE перпендикулярно BD, то BE параллельно AC.

ABEC – равнобедренная трапеция, так как BE параллельно AC и она вписана в окружность. Следовательно BE=MC-MA=b-a

S_{bcd}=(b*(c+d))/2=(b*c+b*d)/2

S_{abed}=(a*(c+d))/2+((c+d)*(b-a))/2=((c+d)(b-a+a))/2=S_{bcd} следовательно (S_{abed})/(S_{bcd})=1

Комментарий: Путаница в обозначениях. Не записаны явно выражения для площади.

Вопрос **4**

Выполнен

Баллов: 0 из 20

На доске написано число $x = 9999$ в системе счисления с четным основанием r. Вася выяснил, что r-ичная запись x^2 представляет собой восьмизначный палиндром, у которого сумма второй и третьей цифр равна 24. (Палиндромом называется число, которое читается одинаково слева направо и справа налево). При каких r такое возможно?

9999^2 < 10^8 если r= >14, то 10^8 > 14^7 = 2^7*7^7=43904*2401>1032*10^5 >10^8

значит r <=12, но сумма двух цифр равна 24, следовательно основание системы хотя бы равно 13.

таких r не существует.

Комментарий:
решение неверное, результат неверный

Вопрос **5**

Выполнен

Баллов: 15 из 20

Дана квадратная таблица 2021×2021. Каждая ее клетка окрашена в один из n цветов. Известно, что для любых четырех клеток одного цвета, расположенных в одном столбце, справа от верхней из них и слева от нижней из них нет клеток того же цвета. При каком наименьшем n такое возможно?

№5. Пусть клеток кого-то цветы хотя бы 4*2021. Заметим, что любая пара клеток в одном столбце, между которыми есть хотя бы две другие того же цвета «блокирует» ровно 2020 других клеток от попадания в них этого же цвета, так как по условию справа от верхней и слева от нижней их нет. Заметим, что каждая такая пара «блокирует» уникальные 2020 клеток, так как иначе в одной строке будут две клетки, которые блокируют все справа или слева, но одна из них находиться правее или левее соответственно.

Если в столбце K одноцветных клеток, то в нем хотя бы max(0, K-3) пар, это те, что образованы с самой верхней клеткой.

Тогда всего пар >= чем $(K_1-3)+(K_2-3)+(K_3-3)+...+(K_{2021}-3)$ = S-3*2021. Если клеток хотя бы 4*2021 то S-3*2021 >=2021. Но тогда клеток, которые блокируются +, те в который клетки, хотя бы 2021*2020 + 4*2021 > 2021* 2021 противоречие. Следовательно клеток каждого цвета меньше 4*2021 следовательно, всего цветов хотя бы дробь

(2021*2021)/(4*2021) >505. следовательно хотя бы 506.

Пример на 506.

Один цвет особенный, пусть красный, остальные пусть синие разных оттенков от 1 до 505. Красим в красный верхнюю строку. Заметим, что оставшийся прямоугольник 2021*2020 можно разделить на 2021 последовательность из вертикальных прямоугольников 4*1. Каждая из них описывается так: на три клетки выше от предыдущего и на одну клетку правее рисуется новый прямоугольник, и если какие-то его клетки вышли за пределы изначального 2020*2021, то они записываются в соответсвующие клетки, если бы этот прямоугольник был тором.

3 из этих последовательностей заполним так: прямоугольник (3*3) первого оттенка и под нижнем правым углом вертикальный (3*1) красный потом нацепляем такую же конструкцию на првый угол сверху, но со

вторым оттенком и так

далее для всех синих

Потом для каждой последовательности их прямоугольников 4*1, которые остались красим прямоугольник в оттенок синего с которым у него 3 общих стороны. Таким образом мы заполняем весь прямоугольник 2020*2021. Заметим, что условия выполняется, так как красных не более одной в стороне, за исключением первой стороны, а синие клетки расположены так, что правее верхней или левее нижней ничего нет из таких цветов.

ol2213678_5..png

Комментарий: Пример сформулирован не ясно. Имеются разночтения в указании размерности прямоугольника. Не понятно, как выбирается цвет ("красим прямоугольник в оттенок синего с которым у него 3 общих стороны") и почему нужно именно 506 красок.

«
ПРЕДЫДУЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Заключительный этап - Математика 10-11 21/22 (скрытый)

СЛЕДУЮЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 11
»

№1

Число n имеет в разложении на простые хотя бы два различных, так как иначе сумма квадратов кратна p, потому что a_1^2 тождественно равно a_3^2 тождественно равно a_5^2 т.р. a_2^2 т.р. a_4^2 т.р. a_1^2 (Т.Р. = тождественно равно)

Где a1…a5 числа по кругу. Тогда сумма не соседних кратна p, противоречие.

Тогда есть хотя бы два простых числа. Двойки быть не может, так как среди пяти чисел хотя бы три одной четности и два из них не рядом. Тогда если 3 простых, то n >= 3*5*7=105. Если простых 2 заметим, что простые вида 4k+3 по рождественской теореме Фирма делят сумму квадратов только если оба квадрата кратны этому числу. Тогда простые 3, 7, 11 смогут поделить максимум одну пару, тогда второе делит 4-е остальные, пусть a_1-a_2 a_2-a_3 a_3-a_4 a_4-a_5, тогда пару a_1-a_4 тоже делит, значит этих простых нет в разложении. Тогда число n хотя бы 5*13=65.

№2

Пусть выражение меньше одного. Тогда:

Дробь из условия меньше одного

При $x, y, z \geqslant 1$ найдите минимальное значение выражения

$$A = \frac{\sqrt{3x^4+y}+\sqrt{3y^4+z}+\sqrt{3z^4+x}-3}{xy+yz+zx}.$$

Следовательно весь числитель данной дроби меньше, чем знаменатель данной дроби.

$\sqrt{3x^4+y}+\sqrt{3y^4+z}+\sqrt{3z^4+x}-3$ +3 < $xy+yz+zx$+3

Левую часть оцениваем сверху транснеравенством $x^2+y^2+z^2+3$

Нижнюю оценим снизу этим:

$\sqrt{3\cdot x^4+x}+\sqrt{3\cdot y^4+y}+\sqrt{3\cdot z^4+z}$. это меньше, так как верно такое неравенство:

$\sqrt{a+b}+\sqrt{c+d} > \sqrt{a+c}+\sqrt{c+b}$ a > c, b<d.

$\sqrt{a+b}+\sqrt{c+d}$ сравним $\sqrt{a+d}+\sqrt{c+b}$

a+b+2*$\sqrt{(a+b)\cdot(c+d)}$ +c+d сравним a+d+2*$\sqrt{(a+d)(c+d)}$ +c+b

(a+b)(c+d) сравним (a+d)(c+b)

a*c + b*c+a*d+b*d сравним a*c+d*c+a*b+b*d

b*c+a*d > a*b+c*d

$\sqrt{3x^4+x}+\sqrt{3y^4+y}+\sqrt{3z^4+z}$ > $x^2+y^2+z^2+3$

Докажем, что $\sqrt{3\text{ч}^4+x}$ больше x^2+1

$\sqrt{3\text{ч}^4+x}$ сравним x^2+1

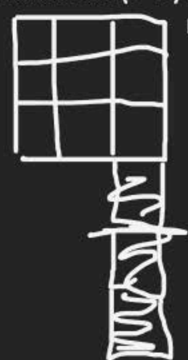
$3x^4+x$ сравним x^4+2x^2+1

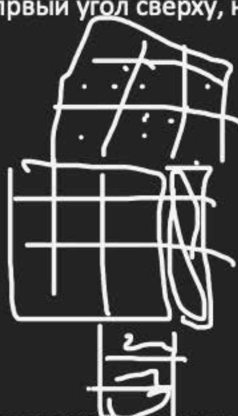
$2x^4+x$ сравним $2x^2+1$, $x >= 1$ следовательно $2x^4+x > 2x^2+1$.

АНАЛОГИЧНО С y, z следовательно суммируются неравенства, получаем другой знак, противоречие. Тогда выражение больше либо равно 1. 1 достигается при x=y=z=1.

№5. Пусть клеток кого-то цветы хотя бы 4*2021. Заметим, что любая пара клеток в одном столбце, между которыми есть хотя бы две другие того же цвета «блокирует» ровно 2020 других клеток от попадания в них этого же цвета, так как по условию справа от верхней и слева от нижней их нет. Заметим, что каждая такая пара «блокирует» уникальные 2020 клеток, так как иначе в одной строке будут две клетки, которые блокируют все справа или слева, но одна из них находиться правее или левее соответственно.
Если в столбце K одноцветных клеток, то в нем хотя бы max(0, K-3) пар, это те, что образованы с самой верхней клеткой.
Тогда всего пар >= чем $(K_1-3)+(K_2-3)+(K_3-3)+\ldots+(K_{2021}-3) = S-3*2021$. Если клеток хотя бы 4*2021 то S-3*2021 >=2021. Но тогда клеток, которые блокируются +, те в который клетки, хотя бы 2021*2020 + 4*2021 > 2021* 2021 противоречие. Следовательно клеток каждого цвета меньше 4*2021 следовательно, всего цветов хотя бы дробь (2021*2021)/(4*2021) >505.($\frac{2021\cdot 2021}{4\cdot 2021}$ > 505) следовательно хотя бы 506.

Пример на 506.
Один цвет особенный, пусть красный, отсальные пусть синие разных оттенков от 1 до 505. Красим в красный верхнюю строку. Заметим, что оставшийся прямоугольник 2021*2020 можно разделить на 2021 последоветелность из вертикальных прямоугольников 4*1. Каждая из них описывается так: на три клетки выше от предыдущего и на одну клетку правее рисуется новый прямоугольник, и если какие-то его клетки вышли за пределы изначального 2020*2021, то они записываются в соответсвующие клетки, если бы этот прямоугольник был тором.
3 из этих последовательностей заполним так: прямоуголльник (3*3) первого оттенка и под нижнем правым углом вертикальный (3*1) красный потом нацепляем такую же конструкцию на првый угол сверху, но со вторым оттенком и так далее для всех синих





Потом для каждой последовательности их прямоугольников 4*1, которые остались красим прямоугольник в оттенок синего с которым у него 3 общих стороны. Таким образом мы заполняем весь прямоугольник 2020*2021. Заметим, что условия выполняется, так как красных не более одной в стороне, за исключением первой стороны, а синие клетки расположены так, что правее верхней или левее нижней ничего нет из таких цветов.