	ol2217545 ol2217545
Тест начат	понедельник, 14 Февраль 2022, 10:07
Состояние	Завершено
Завершен	понедельник, 14 Февраль 2022, 13:59
Прошло времени	3 час. 52 мин.
Оценка	**55,00** из 100,00

Вопрос
Инфо

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 5 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

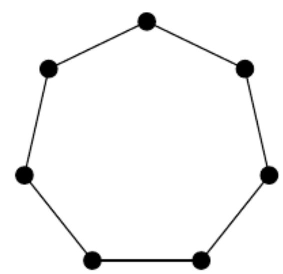
Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос **1**

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Настя выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа так, чтобы для всех этих чисел выполнялось свойство:
если числа a и b не соединены отрезком, то разность $a - b$ должна быть взаимно проста с n, а если соединены, то числа $a - b$ и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1.
При каком наименьшем n существует такая расстановка?



1. Ясно, что n не может быть 1, т.к. у любого числа с единицей общий натуральный делитель - только 1, больше быть не может.

2. Ещё n не может быть степенью простого числа p. Действительно, в таком случае любой общий с n натуральный делитель, больший 1, должен делиться на p. Тогда a-b делится на p, значит, a и b имеют одинаковые остатки от деления на p. Возьмём три подряд стоящих числа a,b,c. a и b имеют одинаковые остатки по модулю p, b и c тоже, тогда по транзитивности a и c тоже имеют одинаковые остатки, тогда их разность кратна p и не взаимно проста с n, хотя эти числа не стоят рядом. Противоречие.

3. Также n не может делиться на 2. Если делится, то разность любых не соседних чисел должна быть нечётна, чтобы не иметь с n общий делитель 2. Пронумеруем числа по кругу от 1 до 7 и возьмём следующие пары: 1 и 3 имеют разную чётность, т.к. они не соседи, 1 и 6 тоже. Тогда 3 и 6 одной чётности, их разность чётна и имеет общий делитель с n - 2, но они не соседи. Противоречие.

4. Наконец, n не может содержать в себе только 2 различных простых делителя. Если это так, то рассмотрим все числа по кругу и будем записывать между двумя соседними наименьший общий делитель их разности и n, больший 1 (очевидно, он будет простой, значит, мы можем записывать всего 2 значения). Поскольку чисел нечётное кол-во, промежутков между ними тоже, а два числа не могут чередоваться по кругу, если элементов нечётное кол-во. Значит, где-то рядом найдутся два одинаковых значения, что означает, что две соседние разности делятся на одно и то же простое число. Это противоречит условию по соображениям из пункта 2.

5. К тому же, n не может быть кратно 3. По модулю 3 всего 3 остатка, причём одинаковые остатки могут давать не больше двух чисел в круге (если хотя бы 3, то найдутся два несоседних с одинаковыми остатками, и их разность и n будут иметь общий делитель 3). Но у нас 7 чисел, по принципу Дирихле найдётся 3 с одинаковыми остатками. Противоречие.

5. Итак, n содержит в себе хотя бы 3 различных простых множителя, не равных 2 и 3, из чего минимальное n - это 5*7*11=385. Пример: 1,6,17,42,14,19,8 по кругу.

Ответ: 385.

Комментарий:

Вопрос **2**

Нет ответа

Балл: 20,00

При $x, y \in (0, 1]$ найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{(x^2 - y)\sqrt{y + x^3 - xy} + (y^2 - x)\sqrt{x + y^3 - xy} + 1}{(x - y)^2 + 1}.$$

Вопрос **3**

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

На стороне AB остроугольного треугольника ABC отмечена точка M. Внутри треугольника выбрана точка D. Окружности ω_A и ω_B описаны вокруг треугольников AMD и BMD соответственно. Сторона AC вторично пересекает окружность ω_A в точке P, а сторона BC вторично пересекает окружность ω_B в точке Q. Луч PD вторично пересекает окружность ω_B в точке R, а луч QD вторично пересекает окружность ω_A в точке S. Найдите отношение площадей треугольников ACR и BCS.

Угол XYZ=наименьший угол между прямыми XY и YZ.

1. Пусть угол AMD=x. Тогда смежный с ним угол DMB=180-x.

2. AMDP вписан в окружность Wa, поэтому сумма противоположных углов равна 180, тогда если угол AMD=x, то противоположный угол DPA=180-x, а смежный с ним угол CPD=x. ASDP вписан в ту же окружность, поэтому сумма противоположных углов равна 180, тогда если угол DPA=180-x, то противоположный угол ASD=x.

3. Аналогично BQDM вписан в окружность Wb, поэтому сумма противоположных углов равна 180, тогда если угол DMB=180-x, то противоположный угол BQD=x. BRDM вписан в ту же окружность, поэтому сумма противоположных углов равна 180, тогда если угол DMB=180-x, то противоположный угол BRD=x.

4. Посмотрим на прямые AC и BR и секущую PR. Угол CPD=угол BRD=x, значит, прямые AC и BR параллельны.

Аналогично возьмём прямые BC и AS и секущую QS. Угол BQD=угол ASD, значит, прямые BC и AS параллельны.

5. Можно "перетянуть" треугольник ARC в треугольник ABC с сохранением площади, т.к. основание и прямая, по которой перетягиваем вершину, параллельны.

Аналогично можно "перетянуть" треугольник BSC в треугольник ABC с сохранением площади.

Таким образом, искомые площади равны, их отношение 1.

Ответ: 1.

Комментарий:

Вопрос **4**

Выполнен

Баллов: 10,00 из 20,00

В системе счисления с основанием r ($r \leqslant 100$) натуральное число x является двузначным с одинаковыми цифрами. Оказалось, что r-ичная запись числа x^2 четырехзначная, причем крайние цифры одинаковы, а средние равны нулю. При каких r такое возможно?

Пусть в r-ичной записи числа x оказались цифры a, x^2 - b, 1<=a,b<=r-1. Тогда x=a+a*r, x^2=b+b*r^3.

x^2=(a+a*r)^2=b+b*r^3

a^2*(r+1)^2=b*(r+1)*(r^2-r+1) | :(r+1)>0

a^2*(r+1)=b*(r^2-r+1)   (*)

Найдём НОД(r+1, r^2-r+1)=(r+1, r^2-r+1-(r+1)*(r-1))=(r+1, -r+2)=(r+1, 3). Таким образом, НОД(r+1, r^2-r+1) равен 1 или 3.

Если он равен 1, то в выражении (*), поскольку правая часть равна левой, правая часть делится на r+1. Если НОД=1, то из множителей правой части b должно делиться на r+1. Противоречие, т.к. b>0 и b<r+1. Значит, НОД(r+1, r^2-r+1)=3, r mod 3 = 2, а x mod 3 = 0. Тогда x^2 mod 9 = 0.

Посмотрим на все числа вида b00b в r-ичной системе. Все они равны r^3+1, умноженное на какое-то число от 1 до r-1. Если в r^3+1 содержится простой множитель >=r в нечётной степени, то ничего не получится, мы не найдём среди чисел такого вида полного квадрата.

r=2 подходит: a = b = 1.

Комментарий:
Найдены не все значения r.

Вопрос **5**

Выполнен

Баллов: 5,00 из 20,00

У параллелепипеда $a \times b \times c$ грани разбиты на единичные клетки. Имеется также большое количество трехклеточных полосок, которые можно перегибать по границам клеток. При каких a, b и c три грани параллелепипеда, имеющие общую вершину, можно полностью обклеить полосками без наложений и зазоров так, чтобы клетки граней и полосок совпадали?

Количество клеток в сумме на этих гранях должно делиться на 3. Посмотрим на все возможные наборы остатков a,b,c по модулю 3 (порядок не важен) и соответствующий остаток количества клеток на гранях ab+ac+bc.

a b c	ab+ac+bc
0 0 0	0
1 1 1	0
2 2 2	0
0 0 1	0
0 0 2	0
1 1 0	1
1 1 2	2
2 2 0	1
2 2 1	2
0 1 2	2

Последние 5 вариантов не подходят из-за делимости. В случаях, где хотя бы два остатка 0, очевидно можно обклеить: у каждой грани хотя бы одна сторона кратна 3, то есть каждую линию, параллельную этому направлению, можно разбить на полоски, значит, и всё можно даже без перегибаний по рёбрам.

Остаются случаи 1 1 1 и 2 2 2.

Комментарий:
Решение не завершено, вывод не сделан.

« ПРЕДЫДУЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 24

СЛЕДУЮЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 25 »