	ol2251938 ol2251938
Тест начат	понедельник, 14 Февраль 2022, 10:06
Состояние	Завершено
Завершен	понедельник, 14 Февраль 2022, 14:05
Прошло времени	3 час. 58 мин.
Оценка	**55** из 100

Вопрос **Инфо**

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 5 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

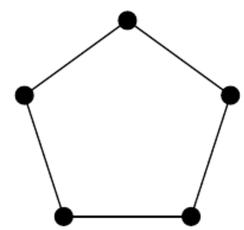
Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос **1**

Выполнен

Баллов: 15 из 20

На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Таня выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа так, чтобы для всех этих чисел выполнялось свойство:
если числа a и b не соединены отрезком, то сумма a^2+b^2 должна быть взаимно проста с n, а если соединены, то числа a^2+b^2 и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1.
При каком наименьшем n существует такая расстановка?



у нас есть пятиугольник обозначим квадраты чисел в его вершинах по часовой стрелке: A B C D E смотрим на стороны этого пятиугольника : на каждой стороне будем записывать простое число на которое делится сумма квадратов чисел в вершинах этой стороны и на которое делиться n . Если везде одно и тоже простое число то a+b b+c c+d делиться на p отсюда следует что a сравнимо с c по модулю p тогда если c+d делиться на p то и a+d делиться на p и n делиться на p противоречие. Тогда есть хотя бы 2 простых числа : поймем что это не 2 так как если на ребре есть 2 то 2 числа либо оба четные либо оба нечетные тогда оставшиеся 3 числа противоположной четности тогда среди этих 3 чисел есть 2 не соединеные ребром но в сумме они делятся на 2. Поймем что 3,7,11 если есть то только одно ребро так как сумма двух квадратов делиться на простое число вида 4k+3 только если оба числа деляться на это простое число (теорема Жирара) тогда если есть какое то ребро с p 4k+3 то в вершинах по модулю p стоят два 0 и больше нулей нет иначе противоречие с условием значит для чисел вида 4k+3 максимум 1 ребро а для чисел p 4k+1 максимум 3 иначе хотя бы 4 тоесть это 4 последоавтельных тогда по аналогичным рассуждениям в начале задачи приходим к противоречию. Тогда для чисел 3 7 11 ... по 1 ребру а для чисел 5 13 ... не больше чем по 3

тогда либо мы берем 2 числа 4к+1 и это хотя бы 2 наименьших 5 и 13 тоесть n хотя бы 65 либо мы не берем 2 числа вида 4к+1 тогда надо взять хотя бы 2 числа вида 4к+3 и это хотябы 3*7*5 больше 65 а если все числа 4к+3 то это хотя бы 3*7*11 что больше 65Пример на 65 тогда расставмим числа 27 26 65 40 31 по часовой стрелке теперь смотрим с чем сравнимы квадраты по модулю 5: 4 1 0 0 1 соответсвенно тогда на 5 деляться суммы у только соседних чисел а по модулю 13 квадраты сравнимы 1 0 0 1 -1 условие работает

Комментарий:

решение недостаточно подробное (утверждение не имеет доказательства)

Вопрос **2**

Выполнен

Баллов: 20 из 20

При $x, y, z \geqslant 1$ найдите минимальное значение выражения

$$A = \frac{\sqrt{3x^4+y}+\sqrt{3y^4+z}+\sqrt{3z^4+x}-3}{xy+yz+zx}.$$

корень из (3x^4+y)>=корень из(3x^4+1) (так как все переменные хотя бы 1) это хотя бы x^2+1 докажем это возведя обе части в квадрат получим что 3x^4 + 1 хотя бы x^4 +1 +2x^2 это равносильно тому что 2*x^4 хотя бы 2* x^2 это равносильно тому что x^2 хотя бы 1 это так ведь x y z хотя бы 1 по аналогии докажем для других корней тогда числитель нашей дроби хотя бы сумма квадратов x^2 +y^2+z^2 + 3-3 покажем что это хотя бы знаменатель равносильно x^2 +y^2 +z^2 хотя бы xy +yz +zx перенесем все в левую часть тогда выражение должно быть хотя бы 0 это так ведь x^2 +y^2 +z^2 -xy -yz -zx = ((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2)/2 и сумма квадратов хотя бы ноль тогда мы доказали что наша дробь хотя бы 1 пример когда x=y=z=1

Комментарий:

Вопрос **3**

Выполнен

Баллов: 20 из 20

Дан вписанный четырехугольник $ABCD$ с перпендикулярными диагоналями. На описанной вокруг него окружности отмечена точка E, диаметрально противоположная D, причем отрезки AB и DE не пересекаются. Найдите отношение площадей треугольника BCD и четырехугольника $ABED$.

пусть ас и бд пересекаются в точке х тогда раз де диаметр то угол ебд =90 и угол бхс =90 тогда be паралельно ас так как они обе перпендикулярны бд тогда проведем ес абес вписанная трапеция значит это равносильно что она равнобокая тоесть ес = аб также опусти перпендикуляр из е на ас пусть он падает в точку у тогда угол еух равен 90 тогда в beyx три угла по 90 градусов отсюда следует что беух прямоугольник тогда отсюда следует что его противоположные стороны равн тоесть bx ey равны тогда треугольник abx = треугольнику cey так как они прямоугольные и по доказоному их гипотенузы равны аб ес и катеты равны бх еу тогда ах = су в этих треугольниках равные катеты тогда площадь abed = площади abd + bed = ax*bd/2 + be*bd/2 = (ax+be)* bd/2 = (cy+be)*bd/2=(cy+yx)*bd/2=cx*bd /2 = площади треугольника bcd занчит отношение равно 1

Комментарий:

Вопрос **4**

Выполнен

Баллов: 0 из 20

На доске написано число $x = 9999$ в системе счисления с четным основанием r. Вася выяснил, что r-ичная запись x^2 представляет собой восьмизначный палиндром, у которого сумма второй и третьей цифр равна 24. (Палиндромом называется число, которое читается одинаково слева направо и справа налево). При каких r такое возможно?

ответ при r =80 rx означает r в степени x тогда 9999 в системе исчисления будет равно 9*(r3+r2+r1+1)

а наше второе число пусть будет a*r7+b*r6+c*r5+d*r4+d*r3+d*r2+b*r+a тогда квадрат первого числа равен 81(r6+2*r5+3*r4+4*r3+3*r2+2*r+1) = a*r7+b*r6+c*r5+d*r4+d*r3+d*r2+b*r+a тогда по модулю r эти числа сравнимы но справа число по модулю r сравнимо с a а слеваа число сравнимо с 81 значит 81-a делиться на r тогда r не больше 81 и хотябы 12 раз 2 его цифры в сумме 24 то одна из них хотя бы 12 значит r хотя бы 12 с другой стороны оценим 81(r6+2*r5+3*r4+4*r3+3*r2+2*r+1) не больше 81 (r6 +(r6)/(6) +(r6)/(4r^1) + (r6)/(3r^2)+(r6)/(4r^3) + (r6)/(6*r^4) +1) не больше 81(r^6) *8/6 тогда это хотя бы a*r7+b*r6+c*r5+d*r4+d*r3+d*r2+b*r+a хотя бы a *r7 тогда 108 хотя бы a * r тогда a пробегает значения от до 9 тогда подставляем значения от 1 до 9 в 81- иищем все четные делители и причем если a хотябы 2 то r не больше 54 поэтому

a = 1 то r может быть равно 80 40 20 16 12

если a =2 то 79 простое r нет таких

если a =3 то четные делители больше 50

если a = 4 то нет четных делителей

если a =5 то то

Комментарий:
решение не завершено, результат не получен

Вопрос **5**

Нет ответа

Балл: 20

Дана квадратная таблица 2021×2021. Каждая ее клетка окрашена в один из n цветов. Известно, что для любых четырех клеток одного цвета, расположенных в одном столбце, справа от верхней из них и слева от нижней из них нет клеток того же цвета. При каком наименьшем n такое возможно?