	ol2232095 ol2232095
Тест начат	понедельник, 14 Февраль 2022, 10:04
Состояние	Завершено
Завершен	понедельник, 14 Февраль 2022, 14:05
Прошло времени	4 час.
Оценка	**60,00** из 100,00

Вопрос
Инфо

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 5 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

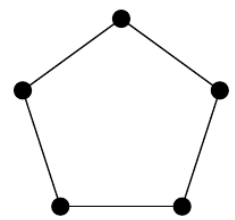
Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос **1**

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Костя выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа так, чтобы для всех этих чисел выполнялось свойство:
если числа a и b не соединены отрезком, то сумма $a+b$ должна быть взаимно проста с n, а если соединены, то числа $a+b$ и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1.
При каком наименьшем n существует такая расстановка?



Очевидно, что n>1.

1)Пусть n делится на 2, тогда найдётся хотя бы одно нечетное число среди написанных в кружочках, иначе все 10 пар чисел будут иметь с n ОД >= 2 (ОД - общий делитель), что нам не нужно. Обозначим номером 1 какой-нибудь кружок с нечетным числом, далее номер 2,...,5 по часовой стрелке. Тогда в кружочках под номерами 3 и 4 будет четные числа (иначе вместе с ними число в 1-м кружке будет иметь ОД>=2), следовательно, в кружочках с номером 2 и 5 - нечетные числа (иначе числа во 2-м и 4-м, 3-м и 5-м кружках имели бы ОД>=2), но тогда a(2)+a(5) делится на 2, т.е. вместе они имеют ОД>1 (a(i) - число в i-ом кружке). Значит, n нечетное. (рис. 1)

2)Пусть n = p^k (p - простое число, p > 1, k - натуральный показатель степени), тогда если a(1) mod p = a (что означает, что a(1) дает остаток a при делении на p), то a(2) mod p = p - a (так как a(1) + a(2) должно делиться хотя бы на p, чтобы их ОД>1), a(3) mod p = a, a(4) mod p = p - a => a(1) + a(4) делится на p, что нам не надо. (рис. 2)

Значит, беря во внимание 2 вышеописанных пункта, получаем, что n>=15. Расклад при n = 15 таков может быть: a(1) = 1, a(2) = 2, a(3) = 3, a(4) = 6, a(5) = 14. (рис. 3)

Ответ: при n = 15.

ol2232095_1.pdf

Комментарий:

Вопрос **2**

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

При $x, y, z \in (0, 1]$ найдите минимальное значение выражения

$$A = \frac{(x+2y)\sqrt{x+y-xy} + (y+2z)\sqrt{y+z-yz} + (z+2x)\sqrt{z+x-zx}}{xy+yz+zx}.$$

Докажем, что (x + 2y)*((x + y - xy)^0.5) >= 3xy (аналогичным образом доказывается утверждения о том, что (y + 2z)*((y + z - yz)^0.5) >= 3yz, (z + 2x)*((z + x - zx)^0.5) >= 3zx, а, следовательно, и то, что A = ((x + 2y)*((x + y - xy)^0.5) + (y + 2z)*((y + z - yz)^0.5) + + (z + 2x)*((z + x - zx)^0.5))/(xy + yz + xz)>=3):

0 < x,y <= 1 => (x + y - xy)^0.5 = (x + y(1 - x))^0.5 >= x^0.5 >= x, (x + y - xy)^0.5 = (y + x(1 - y))^0.5 >= y^0.5 >= y => (x + 2y)*((x + y - xy)^0.5) >= x*y + 2y*x = 3xy, что и требовалось доказать.

Значит, A >= 3. Пример, когда A = 3: x = y = z = 1.

Ответ: A = 3.

Комментарий:

Вопрос 3

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

На сторонах BC и AD вписанного четырехугольника $ABCD$ отмечены точки K и M соответственно, причем $BK : KC = AM : MD$. На отрезке KM выбрана такая точка L, что $KL : LM = BC : AD$. Найдите отношение площадей треугольников ACL и BDL, если известно, что $AC = p$ и $BD = q$.

Докажем, что L лежит на биссектрисе угла BOA (O - точка пересечения BD и AC):

Пусть LM:KL = AD:BC = a:b, тогда AM:BK = a:b (так как AM:MD = BK:KC), AO:OB = a:b (так как ABCD вписанный, из-за чего треугольники AOD и BOC подобны, поэтому AO:OB = AD:BC = a:b), углы MAO и KBO равны из-за вписанности ABCD => треугольники MAO и KBO подобны => MO:OK = AO:OB = a:b = LM:KL, углы MOA и BOK равны

MO:OK = LM:KL => углы MOL и LOK равны по свойству биссектрисы

углы MOL и LOK равны, углы MOA и BOK равны => углы AOL и BOL равны =>OL - биссектриса угла BOA

OL - биссектриса угла BOA => если LH1 и LH2 - высоты треугольников ACL и BDL соответственно, то LH1 = LH2 => S(ACL):S(BDL)=(AC*LH1)/(BD*LH2)=AC:BD=p:q

Ответ: S(ACL):S(BDL) = p:q

_ol2232095_3.pdf

Комментарий:

Вопрос **4**

Выполнен

Баллов: 0,00 из 20,00

Натуральное число x в системе счисления с основанием r $(r > 3)$ имеет вид $\overline{ppqq}$, причем $q = 2p$. Оказалось, что r-ичная запись числа x^2 представляет собой семизначный палиндром с тремя одинаковыми средними цифрами. (Палиндромом называется число, которое читается одинаково слева направо и справа налево). При каких r такое возможно?

Пусть x^2 = [a][b][c][c][c][b][a] в системе счисления с основанием r ([] - аналог верхнего подчеркивания), тогда

a*r^6 + b*r^5 + c*r^4 + c*r^3 + c*r^2 + b*r + a = ((r^3 + r^2 + 2r + 2)p)^2

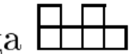
(a - p^2)*r^6 + (b - 2*p^2)*r^5 + (c - 5*p^2)*r^4 + (c - 8*p^2)*r^3 + (c - 8*p^2)*r^2 + (b - 8*p^2)*r + (a - 4*p^2) = 0

Комментарий:

Вопрос **5**

Выполнен

Баллов: 0,00 из 20,00

Доска $m \times n$ $(m, n > 5)$ разрезана на фигурки из шести единичных квадратиков вида  (фигурки можно поворачивать и переворачивать). При каких m и n такое возможно?

Комментарий:

№1

Рис. 1:

Ч - чётное число

Н - нечётное число

- - - - проблемная пара

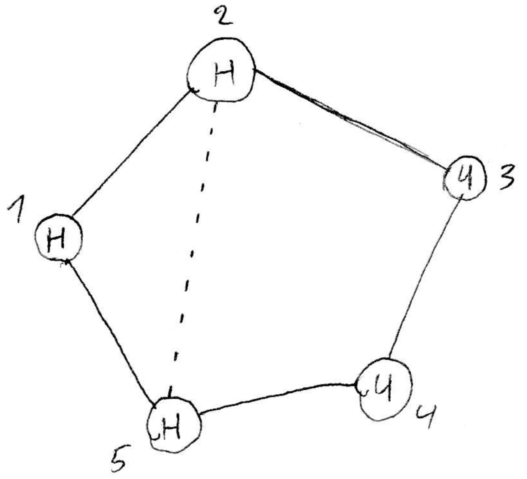


Рис. 2:

a, p-a - остатки при делении написанных в кружки чисел на p

- - - - одна из проблемных пар

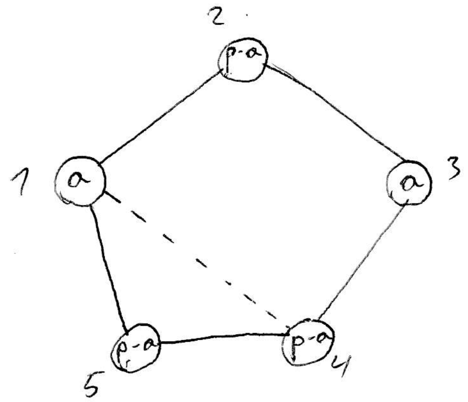
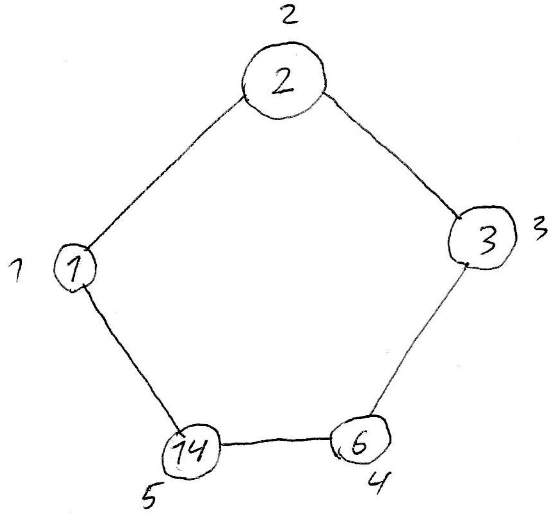


Рис. 3:



№3