	ol2206867 ol2206867
Тест начат	понедельник, 14 Февраль 2022, 10:08
Состояние	Завершено
Завершен	понедельник, 14 Февраль 2022, 14:05
Прошло времени	3 час. 56 мин.
Оценка	**55,00** из 100,00

Вопрос
Инфо

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 5 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

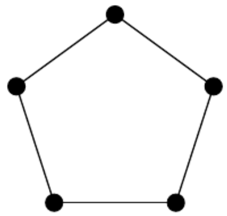
Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос **1**

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Костя выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа так, чтобы для всех этих чисел выполнялось свойство:
если числа a и b не соединены отрезком, то сумма $a + b$ должна быть взаимно проста с n, а если соединены, то числа $a + b$ и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1.
При каком наименьшем n существует такая расстановка?



1. Очевидно, n != 1, ведь иначе любая пара чисел должна была бы быть соединена ребром, что не выполнено на приведенном рисунке.
2. Покажем, что n не может быть четным: Пусть на какой-то вершине мы написали нечетное число. Тогда те 2 вершины, которые не соединены ребром с выбранной нами, обязательно содержат четные числа (потому что иначе между сумма нашей вершины и какой-то из этих была бы четным числом). Занумеруем ребра по часовой стрелке, скажем, что мы поставили нечетное число в вершину номер 1, тогда эти две вершины с четными числами имеют номера 3 и 4. Тогда вершина 2 тоже обязательно содержит нечетное число, так как она не соединена с вершиной 4, в которой, как мы доказали, должно обязательно стоять четное число. Аналогично, вершина 5 тоже обятазельно содержит нечетное число, ведь она не соединена с вершиной 3, в которой тоже четное число. Итого, вершины 1, 2 и 5 содержат нечетные числа, а 3 и 4 -- четные. Но тогда получается, что сумма вершин 2 и 5 есть четное число как сумма двух нечетных, поэтому между ними обязательно должно быть ребро, а ребра нет. Противоречие. Также мы не может поставить в абсолютно все вершина только четные числа, потому что тогда любая пара вершин не взаимнопроста с четным n, то есть граф должен был бы быть полным. Поэтому n обязательно нечетное.
3. Покажем, что n не может быть простым числом. Предположим, что это не так: Пусть n = p, где p -- простое. Тогда, поскольку p -- простое, сумма каких-то двух различных натуральные чисел может иметь общие делители с p тогда и только тогда, когда она равна p*k, где k -- натуральное (то есть когда сама сумма просто делится на p). Опять занумерием вершины по часовой стрелке. Пусть в вершине 1 стоит число, которое дает остаток X (x < p) по модулю p. Как мы выяснили, вершина рядом с ней (вершины 5 и 2) должны иметь остаток (p - X) по модулю p, чтобы сумма каждой из этих вершин с вершиной 1 была кратна p. А раз вершина 2 равна (p - X) по модулю p, то оба ее соседа (1 и 3) должны быть равны X по модулю p, то есть вершина 3 равна вершине 1 и равна X по модулю p. Тогда, применяя аналогичное рассуждение для вершины 3, получаем, что вершины (2 и 4) равны (p - X) по модулю p. Но тогда сумма вершин 1 и 4, которые равны соответственно x и (p -x) по модулю p обязательно делится на p, ведь (x + (p-x) = p = 0 по модулю p. Это значит, что вершины 1 и 4 обязательно должны быть соединены ребром, а ребра нет. Противоречие. Значит, n -- составное число.
4. Итого, n не может быть 1 (по п.1), 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 (как четным числам), 3, 5, 7, 11, 13 (как простым числам).

5. Отметим также, что n не может равняться квадрату простого числа, ведь в этом случае работает те же утверждения, что и в пункте 3, ибо по остатку числа в какой-то вершине мы будем однозначно понимать остатки у соседей. Таким образом, n не может равняться 9 как квадрату простого числа.
6. Значит, n не может равняться никакому натуральному число, меньшему 15
7. Построим пример для $n = 15$: запишем в вершины в указанному порядке по часовой стрелке числа 1, 2, 3, 21, 59. При такой комбинации чисел требуемое условие достагается
8. Ответ: 15

Комментарий:

Вопрос **2**

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

При $x, y, z \in (0, 1]$ найдите минимальное значение выражения

$$A = \frac{(x+2y)\sqrt{x+y-xy} + (y+2z)\sqrt{y+z-yz} + (z+2x)\sqrt{z+x-zx}}{xy+yz+zx}.$$

1. По неравенству о средних: (xy + yz + zx) <= x^2 + y^2 + z^2
2. Значит, данное нам выражение больше или равно дроби с тем же числителем и знаменателем, равным, (x^2 + y^2 + z^2)
3. В оказанных ограничениях на x, y и z верно, что (x + 2y) >= (x + y - xy), так как y >= -xy
4. Тогда и искомое выражение >= такого выражение, которое получится подстановкой вместо (x+2y) выражение sqrt(x + y - xy) и аналогично для двух остальных слагаемых числителя.
5. Тогда выражение, меньше или равно данному, имеет вид: (sqrt(x + y - xy)^2 + sqrt(y + z - yx)^2 + sqrt(z + x - zx)^2) / (x^2 + y^2 + z^2). Оценим данное выражение, раскроем квадрат квадратного корня
6. Тогда в числителе получим: (x + y - xy + y + z - yx + z + x - zx) = (2x + 2y + 2x - yx - yz - xz)
7. Поскольку в знаменателе начального выражения было xy + yz + xz, то вынесем из дроби -(yx-yz-zx)/(xy+yz+xz)
8. Получим 2 * (x + y + z) / (xy + yz + xz) - 1
9. Поскольку каждое из чисел xy, yz, xz <= каждому из чисел x, y, z (ведь при умножении положительного числа на другое положительное число, меньшее 1, результат меньше исходного числа), то дробь (x + y + z) / (xy + yz + xz) >= 1
10. Значит, 2 * (x + y + z) / (xy + yz + xz) >= 2
11. Тогда 2 * (x + y + z) / (xy + yz + xz) - 1 >= 1
12. Получаем оценку снизу исходного выражения, равную 1.
13. Ответ: 1

Комментарий:

Вопрос 3

Выполнен

Баллов: 0,00 из 20,00

На сторонах BC и AD вписанного четырехугольника $ABCD$ отмечены точки K и M соответственно, причем $BK : KC = AM : MD$. На отрезке KM выбрана такая точка L, что $KL : LM = BC : AD$. Найдите отношение площадей треугольников ACL и BDL, если известно, что $AC = p$ и $BD = q$.

Комментарий:

Вопрос 4

Выполнен

Баллов: 0,00 из 20,00

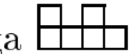
Натуральное число x в системе счисления с основанием r $(r > 3)$ имеет вид $\overline{ppqq}$, причем $q = 2p$. Оказалось, что r-ичная запись числа x^2 представляет собой семизначный палиндром с тремя одинаковыми средними цифрами. (Палиндромом называется число, которое читается одинаково слева направо и справа налево). При каких r такое возможно?

Комментарий:

Вопрос **5**

Выполнен

Баллов: 15,00 из 20,00

Доска $m \times n$ $(m, n > 5)$ разрезана на фигурки из шести единичных квадратиков вида  (фигурки можно поворачивать и переворачивать). При каких m и n такое возможно?

1. Поскольку площадь фигурки равна 6, то n*m должно быть кратно 6, иначе просто остается обрубок доски площадью < 6
2. Заметим, что у досок n*m и m*n будет одинаковое замощение с точностью до поворота
3. Рассмотрим несколько случаев делимости n и m на 3 и 4
4. Заметим. что из двух фигурок можно получить прямоугольник 3 на 4, если одну перевернуть и "вставить" в другую.
5. Если n кратно 3, а m кратно 4 (или наоборот), то такая пара всегда подходит, ведь можно разбить всю доску на прямоугольники 3на4, и по кратной 4 стороне ставить прямоугольники стороной длиной 4, а по кратной трем стороне -- стороной длиной 3.
6. Заметим, что если одна из сторон кратна 12 (НОК(3, 4)), то такая пара тоже подходит, ведь можно взять другую (не кратную 12) сторону, и получить ее длину (пусть она имеет длину k) как решение в диофантового уравнения 4*a + 3*b = k, где a и и -- сколько нужно будет прямоугольник 3на4 приложить раз большей стороной и меньшей стороной соответственно. Данное диофантово уравнения всегда имеет решения при k >= 6. Так как вторая сторона кратна 12 и больше 5, то она >= 12. Давайте разобъем ее на блоки по 12 и замостим каждый блок отдельно. Пусть у нас остался блок 12 на k. Как описано ранее, мы взяли сколько-то блоков 3на4 и сколько-то блоков 4на 3 и прислолили к правой границе блок, так, чтобы получить эту длину k. Тогда давайте прямоугольники, которые мы прислоили стороной 3, положим в количестве еще двух штук слева от того, которые мы уже поставили, получим горизональную полоску 12*3. А прямоугольники, которые мы прислоили стороной 4, продублируем слева 3 раза, получим горизонтальную полоску 12*4. У нас это получится сделать, потому что НОК(3, 4) как раз таки 12. Таким образом мы сможем запостить блок 12*k, а затем и всю доску.
7. Заметим, что нам не подойдет случай, когда одна из сторон кратна 6, а вторая кратна 2 (хоть в таком случае площадь и кратна 12), поскольку мы не всегда сможем достроить блоки шириною 12, то есть не сможем использовать линуйную комбинацию блоков сторона 3 и 4,
8. Заметим, что нам не подойдут никакие другие комбинации n и m, потому что такие комбинации не получится замостить прямоугольниками 3на4, а любую доску, которые можно замостить хоть как-то исходными фигурками, можон замостить и прямоугольникми 3на4.
9. Ответ: либо одно из чисел n, m кратно 3, а другое кратно четырем, либо же минимум одно из этих чисел кратно 12.

Комментарий:
Пункт 7 не обоснован.

« ПРЕДЫДУЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 27

СЛЕДУЮЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ »
Вариант 17