	ol2221066 ol2221066
Тест начат	понедельник, 14 Февраль 2022, 10:05
Состояние	Завершено
Завершен	понедельник, 14 Февраль 2022, 14:05
Прошло времени	3 час. 59 мин.
Оценка	**67,00** из 100,00

Вопрос
Инфо

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 5 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

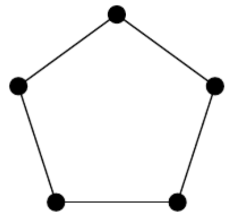
Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос 1

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Костя выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа так, чтобы для всех этих чисел выполнялось свойство:
если числа a и b не соединены отрезком, то сумма $a + b$ должна быть взаимно проста с n, а если соединены, то числа $a + b$ и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1.
При каком наименьшем n существует такая расстановка?



Ответ: n=15.

Оценка:
Ясно, что числа соединены отрезком тогда и только тогда, когда их сумма не взаимнопроста с n.

Пусть a - число в верхней вершине, b, c, d, e - числа, в вершинах, следующих за верхней по часовой стрелке.
Ясно, что n=1 не подходит, так как тогда любая сумма взаимнопроста с n и не должно быть проведено ни одного ребра.

Докажем, что простые n не подходят. Если n - простое не быть взаимнопростым с n - это в точности делиться на n. Тогда b=-a(mod n), c=-b=a(mod n), d=-c=-a(mod n) и e=-b=a(mod n). Так как есть ребро ea, то 0=a+e=2a mod(n). Но a+c=2a (mod n). То есть должно быть ребро ac, но его нет. Противоречие.
Аналогично, n не может быть степенью простого числа. Действительно, если n=p^t, то не быть взаимнопростым с n - это в точности делиться на p. Значит, снова a=-b=c=-d=e mod(p) и, т.к. ребро ae - проведено, 0=a+e=2a=a+c mod(p). То есть a+c не взаимнопросто с n и должно быть проведено ребро ac. Противоречие.

Докажем, что четные n не подходят. Пусть n четно. Заметим, что среди чисел a, b, c, d, e есть хотя бы три одной четности (так как, если чисел каждой четности не более двух, всего чисел не более четырех). Между числами одной четности обязаны быть проведены отрезки, так как их сумма - четна и n - четно, то есть у n и этой суммы есть общий делитель - 2. Значит, на нашей картинке должен найтись треугольник из проведенных отрезков с вершинами в существующих, по доказанному ранее, трех вершинах одной четности. Но треугольников нет. Противоречие.

И так, мы понимаем, что так как число n - не простое и не степень простого, оно делится хотя бы на два различных простых числа p и q. При этом, ни одно из этих простых не равно 2. Значит n>=3*5 = 15.

Пример на n = 15:
a=4, b=11, c=10, d=15, e=6.

Проверим, что проведены нужные ребра:
a+b=15, b+c=21, c+d=25, d+e=21, e+a=10. Все эти числа имеют с 15 общий делитель, больший единицы.

Проверим, что не проведены лишние ребра:
a+c=14, a+d=19, b+d=26, b+e=17, c+e=16. Каждое из этих чисел взаимнопросто с 15.

Так как всего пар вершин 5*4/2 = 10, мы перебрали все пары.

Комментарий:

Вопрос **2**

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

При $x, y, z \in (0, 1]$ найдите минимальное значение выражения

$$A = \frac{(x+2y)\sqrt{x+y-xy} + (y+2z)\sqrt{y+z-yz} + (z+2x)\sqrt{z+x-zx}}{xy+yz+zx}.$$

sqrt(p) - корень квадратный из p,
cbrt(p) - кубический корень из p,
p^t - p в степени t.

Ответ: 3.

Докажем, что (числитель) >= 3*(знаменатель). Имеем право так делать, так как все числа положительны.

Так как x<=1, y>=xy, то есть y-xy>=0, а x+y-xy>=x. Значит, sqrt(x+y-xy)>=sqrt(x). Аналогично получаем, что sqrt(x+y-xy)>=sqrt(y).
Тогда (x+2y) * sqrt(x+y-xy) = x*sqrt(x+y-xy) + 2y*sqrt(x+y-xy) >= x*sqrt(y) + 2y*sqrt(x).

Докажем, что x*sqrt(y) + 2y*sqrt(x) >= 3xy.
По неравенству о средних для набора (x*sqrt(y); y*sqrt(x); y*sqrt(x)), x*sqrt(y) + 2y*sqrt(x) >= 3cbrt(x*sqrt(y) * y*sqrt(x) * y*sqrt(x)) = 3 * x^(2/3) * y^(5/6) >= 3*x*y, так как x^(2/3)>=x и y^(5/6)>=y (Число, лежащее от нуля до единицы при возведении в степень, меньшую единицы, не уменьшается).

То есть мы доказали, что (x+2y) * sqrt(x+y-xy) >= x*sqrt(y) + 2y*sqrt(x) >= 3xy.
Проделав аналогичное доказательство, получаем, что (y+2z) * sqrt(y+z-yz) >= 3yz и (z+2x) * sqrt(z+x-zx) >= 3zx.
Суммируя все эти три неравенства, получаем, что числитель >= 3*(знаменатель), что и требовалось.

Равенство достигается, например, при x=y=z=1.

Комментарий:

Вопрос 3

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

На сторонах BC и AD вписанного четырехугольника $ABCD$ отмечены точки K и M соответственно, причем $BK : KC = AM : MD$. На отрезке KM выбрана такая точка L, что $KL : LM = BC : AD$. Найдите отношение площадей треугольников ACL и BDL, если известно, что $AC = p$ и $BD = q$.

ol2221066_3.pdf

Комментарий:

Вопрос **4**

Выполнен

Баллов: 5,00 из 20,00

Натуральное число x в системе счисления с основанием r $(r > 3)$ имеет вид $\overline{ppqq}$, причем $q = 2p$. Оказалось, что r-ичная запись числа x^2 представляет собой семизначный палиндром с тремя одинаковыми средними цифрами. (Палиндромом называется число, которое читается одинаково слева направо и справа налево). При каких r такое возможно?

Заметим, что так как q=2p, p<=(p-1)/2
x=p*(r^3+r^2) + 2p*(r+1) = p(r+1)(2+r^2). Тогда x^2=p^2(r^6+2r^5+3r^4+4r^3+6r^2+8r+4). Значит, p^2<=r-1. (Иначе, число x^2 имеет хотя бы 8 знаков в r-ичной системе). Значит, первая цифра в r-ичной записи x^2 - это p^2.

Пусть x^2=abcccba (a, b, c - цифры в r-ичной системе).
x^2=a(1+r^6)+br(1+r^4)+cr^2(1+r+r^2).
a = p^2 по доказанному выше. Заметим, что т.к. a - последняя цифра, то a=q^2(mod r), то есть p^2=4p^2(mod r) и 3p^2=0(mod r).

Так как p^2<=r-1, 0<3p^2<= 3r-3<3r. Так как 3p^2 делится на r, 3p^2 - это r или 2r. В каждом из случаев получаем, что r делится на 3.

Если r=3, то так как 0<p<=(r-1)/2, p=1, q=2.

x = 4*11, x^2=16*121=1936 > 3^7. Значит, x^2 имеет хотя бы 8 знаков.
Значит, r>3 и делится на 3. r>=6

Пусть r=3t

0 = x^2 = 2a-2b+c mod(1+r)
Заметим, что -(1+r)<4-r<=2a-2b+c<=3(r-1)<3(r+1)
Значит, 2a-2b+c - это 0, 1+r или 2*(1+r).

Рассмотрим два случая.
1) 3p^2=r. t=p^2

Посмотрим на правые две цифры в записи x^2.
a+br = 4p^2+8rp^2 mod (r^2)
p^2+b*3t = 4p^2 + 24tp^2 mod(9t^2)
t+3bt = 4t+24t^2 mod(9t^2)
b=1+2t mod(3t).
При этом b<=r-1 = 3t-1.

Значит, b = 2t+1.

Посмотрим на левую цифру b в x^2. 2p^2*r^5 = 2/3 r^6 < r^6, значит, она в точности равна 2p^2=2/3r = 2t
2t=2t+1. Этот случай невозможен.

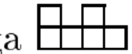
2a-2b+c<=2a+c<=2/3 * r + r-1 < 2*(r+1)
Значит, 2a-2b+c - это 0 или 1+r.

Комментарий:
Решение не завершено, ответа нет.

Вопрос **5**

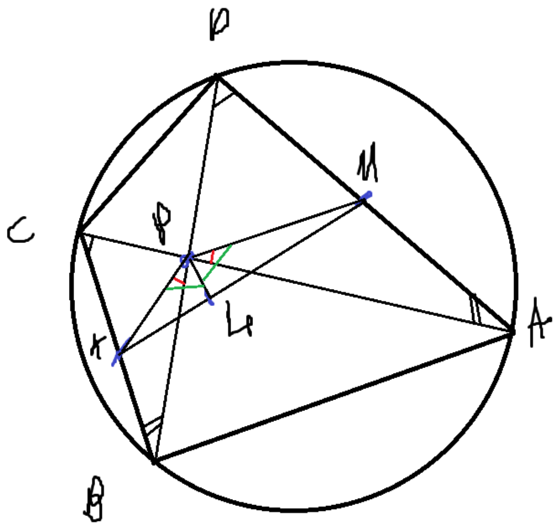
Выполнен

Баллов: 2,00 из 20,00

Доска $m \times n$ $(m, n > 5)$ разрезана на фигурки из шести единичных квадратиков вида  (фигурки можно поворачивать и переворачивать). При каких m и n такое возможно?

Ответ: при таких парах m и n, что либо m делится на 4, n делится на 3, либо m делится на 3, n делится на 4.
Из двух указанных фигурок складывается прямоугольник 3 на 4. На такие прямоугольники можно разрезать доску mxn при указанных выше m и n.

Комментарий:
Рассмотрен лишь частный случай.



Ответ: p:q.

Пусть AC и BD пересекаются в точке P, dist(L, AC) и dist(L, BD) - длины перпендикуляров, опущенных из L на AC и BD соответственно.

Тогда отношение площадей треугольников ACL и BDL равно отношению чисел p*dist(L, AC) и q*dist(L, BD). Равные углы на чертеже отмечены отрезками одного цвета.

Докажем, что dist(L, AC) = dist(L, BD), то есть что L лежит на биссектрисе угла, образованного прямыми AC и BD.

Заметим, что треугольники ADP и BCP подобны, так как угол(ADP) = угол(BCP) и угол(DAP) = угол(CBP) из вписанности четырехугольника ABCD. Коэффициент подобия - AD:BC. В треугольниках ADP и BCP сделали "одинаковые" действия: отметили точку на стороне (M на AD и K на BC), делящую эту сторону в некотором отношении (одинаковом для каждого из треугольников), считая от соответствующих вершин. Отсюда следует, что и треугольники APM и BPK тоже подобны (по двум сторонам и углу между ними: AP:BP = AM:BK (обо отношения равны AD:BC) и угол(DAP) = угол(CBP) из вписанности четырехугольника ABCD). Значит, PM:PK = AD:BC = ML:KL. Тогда, по свойству биссектрисы в треугольнике PMK, PL - биссектриса, то есть угол(KPL) = угол(MPL). Заметим, что из вышеуказанных подобий следует, что угол (APM) = угол (BPK) и что угол (DPM) = угол (CPK).

Далее, считаю, что точка L лежит в треугольнике ABP(см чертеж) (случай, когда она в треугольнике CDP абсолютно аналогичен).

Итак, угол(KPL) = угол(MPL) и (APM) = угол (BPK). Значит, угол(KPL) - (BPK) = угол(MPL) - угол (APM). То есть угол(BPL) = угол(APL). Значит, точка L действительно лежит на биссектрисе угла, образованного прямыми AC и BD, то есть равноудалена от этих двух прямых, что и требовалось доказать.