	ol2202309 ol2202309
Тест начат	понедельник, 14 Февраль 2022, 10:06
Состояние	Завершено
Завершен	понедельник, 14 Февраль 2022, 13:32
Прошло времени	3 час. 26 мин.
Оценка	**55,00** из 100,00

Вопрос
Инфо

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 5 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос 1

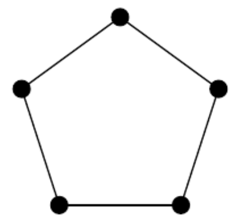
Выполнен

Баллов: 18,00 из 20,00

На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Таня выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа так, чтобы для всех этих чисел выполнялось свойство:

если числа a и b не соединены отрезком, то сумма a^2+b^2 должна быть взаимно проста с n, а если соединены, то числа a^2+b^2 и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1.

При каком наименьшем n существует такая расстановка?



_ol2202309_1.pdf

Комментарий: не обоснован п.5 решения

Вопрос **2**

Выполнен

Баллов: 2,00 из 20,00

При $x, y, z \geqslant 1$ найдите минимальное значение выражения

$$A = \frac{\sqrt{3x^4 + y} + \sqrt{3y^4 + z} + \sqrt{3z^4 + x} - 3}{xy + yz + zx}.$$

При x=y=z=1 А принимает значение 1

При достаточно больших x,y,z А устремляется к корню из 3.

Комментарий: Обоснование отсутствует, ответ не сформулирован.

Вопрос 3

Выполнен

Баллов: 15,00 из 20,00

Дан вписанный четырехугольник $ABCD$ с перпендикулярными диагоналями. На описанной вокруг него окружности отмечена точка E, диаметрально противоположная D, причем отрезки AB и DE не пересекаются. Найдите отношение площадей треугольника BCD и четырехугольника $ABED$.

ol2202309_3.pdf

Комментарий:
Решение недостаточно подробное.

Вопрос **4**

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

На доске написано число $x = 9999$ в системе счисления с четным основанием r. Вася выяснил, что r-ичная запись x^2 представляет собой восьмизначный палиндром, у которого сумма второй и третьей цифр равна 24. (Палиндромом называется число, которое читается одинаково слева направо и справа налево). При каких r такое возможно?

ol2202309_4.pdf

Комментарий:
Проверка r=26 не полная.

Вопрос **5**

Выполнен

Баллов: 0,00 из 20,00

Дана квадратная таблица 2021×2021. Каждая ее клетка окрашена в один из n цветов. Известно, что для любых четырех клеток одного цвета, расположенных в одном столбце, справа от верхней из них и слева от нижней из них нет клеток того же цвета. При каком наименьшем n такое возможно?

[2021/4+1]+[log2([2021/4+1])+1]

Комментарий:
Решения нет.

« ПРЕДЫДУЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 21

СЛЕДУЮЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 14 »

№1.

1. n>1
2. n не является простым числом. В противном случае только n может быть общим множителем соседних квадратов чисел, т.е. $a^2 \equiv -b^2 \equiv c^2 \equiv -d^2 \pmod n$ и a^2+d^2 делится на n, противоречие условию.
3. Минимальное n не делится на степень простого числа. Действительно, если сумма квадратов и n имеют НОД, кратный степени p, НОД кратен и просто числу p, а если сумма квадратов и n взаимно просты, то сумма не делится на p, отсюда мы можем уменьшить n, заменив степень простого числа на простое число.

Далее рассуждения для минимального n.
4. n не делится на 2. В противном случае получаем, что в «звездочке» из вершин числа на соседних ребрах имеют разную четность. Но ребер 5, откуда следует, что, пройдясь по ребрам, мы получим, что числа a и a имеют разную четность, противоречие.
5. Заметим, что сумма квадратов двух чисел делится на 3\7\11 только тогда, когда и сами числа делятся на 3\7\11 (это легко проверить).
6. Предположим, что n – произведение двух простых чисел. Заметим, что n не делится на s=3\7\11. Если s не участвует в НОДах сумм квадратов и n, мы можем разделить n на s, в противном случае без ограничения общности $a^2 \equiv -e^2 \pmod s$. Отсюда a и e делятся на s, значит больше никакое из чисел не делится на s и остальные суммы квадратов соседних чисел имеют НОД с n равный n/s. Но тогда $a^2 \equiv -b^2 \equiv c^2 \equiv -d^2 \pmod{n/s}$ и a^2+d^2 делится на n/s как и n, противоречие условию.

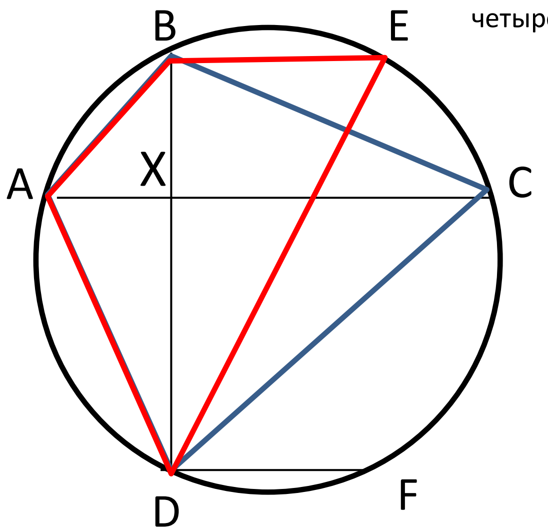
Отсюда у нас n хотя бы 5*13=65.
Пример на 65: набор чисел {1,3,4,20,5}. Легко проверить, этот набор подходит, если расставить его в этом порядке по кругу.

7. Предположим, что n – произведение хотя бы трѐх простых чисел. Тогда n не меньше, чем 3*5*7 > 65, уже не минимальное n.

Ответ: 65

№3.

Отметим точку F, диаметрально противоположную точке B. BE, DF и AC перпендикулярны BD,отсюда они параллельны. Отметим точку пересечения диагоналей как X, тогда площадь треугольника ABX равна площади AEX, а площадь ADX – площади AFX. А площадь BED = BEF из симметрии и равна EXF. Отсюда площадь четырёхугольника ABED равна площади треугольника AEF, который из симметрии равен треугольнику BCD. Отсюда отношение равно 1.



Ответ: 1

№4.

1. Из того, что сумма двух цифр – 24, r >= 12.
2. $x^2 = (9*(r^3+r^2+r+1))^2 = 81 * (r^6+2r^5+3r^4+4r^3+3r^2+2r+1)$
3. Пусть при делении a на b получается частное a//b и остаток a%b. Тогда
   Первая справа цифра – 81%r
   Вторая справа цифра – (162+81//r)%r (из предыдущего разряда перекинулось 81//r)
   Третья цифра – (243+(162+81//r)//r)%r, и т.д.
   В конечном итоге в высшем разряде записано число
   (81+(162+(243+(324+(243+(162+81//r)//r)//r)//r)//r)//r)//r
   Отсюда видно, что r<=82, иначе мы бы получили, что в верхнем разряде записано число 0 (после подсчёта всех значений), т.е. цифр в числе – 7. Но 82 не подходит, т.к. легко проверить, что в нижнем разряде – 81, а в верхнем – 1, и число не палиндром.

4. Если r=12, то в единицах записано число 7, а в высшем разряде (после подсчёта всех частных) – 9, не палиндром
   Если r=14, то в единицах записано число 5, а в высшем разряде – 6, не палиндром
   Если r=16, то в единицах записано число 1, а в высшем разряде – 5, не палиндром.
   Если r>=18 то заметим, что 81//r <= 4, (162+4)//r <= 9, (243+19)//r <= 14, (324+14)//r<=18, (243+18)//r<=14, (162+14)//r <= 9. Если не существует такого k, что kr лежит в промежутке от 81 до 90 (а такое существует только для r=42, 44 и 22), то 90//r = 81//r. Значит, ищем такое r, что 81//r = 81%r.
   Если они равны z, то 81 = z(r+1). Отсюда r=26 или 80.
   Для чисел же 42, 44 и 22 90//r = 81//r + 1 и 81//r+1 = 81%r=z
   81 = (z-1)r+z
   80=(z-1)(r+1) корней среди чисел 42, 22 и 44 нет.

5. Число x^2 – палиндром, значит сумма чисел в десятках и сотнях равна 24
   Число в десятках - (162+81//r)%r
   Число в сотнях - (243+(162+81//r)//r)%r
   Если r=80, то эти два числа равны 3 и 5, в сумме не дают 24.
   Если r=26, то эти два числа равны 9 и 15, в сумме дают 24.

Ответ: 26