	ol2202260 ol2202260
Тест начат	понедельник, 14 Февраль 2022, 10:03
Состояние	Завершено
Завершен	понедельник, 14 Февраль 2022, 14:04
Прошло времени	4 час.
Оценка	**55,00** из 100,00

Вопрос
Инфо

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 5 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

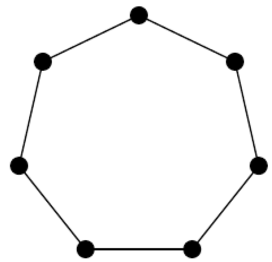
Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос **1**

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Саша выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа так, чтобы для всех этих чисел выполнялось свойство:
если числа a и b не соединены отрезком, то сумма $a+b$ должна быть взаимно проста с n, а если соединены, то числа $a+b$ и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1.
При каком наименьшем n существует такая расстановка?



Сразу можно понять, что чётное n не подходит, так как если n четное, то 2 вершины(вершины=кружки), не являющиеся соседними для друг друга не могут быть чётными, значит у нас на рисунке должна быть только 2 чётных цифры(n и соседняя с ней), тогда все остальные числа -нечётные и существует пара вершин, не являющихся соседними, которые в сумме дают чётное число (сумма 2 неч. чисел чётна), а это противоречит условию задачи.

1. Также, понятно, что n не может быть простым числом в какой-то степени(пусть это число равно p), так как если n- простое числом в какой-то степени, то рассмотрим вершины:

a1, a2, a3, a4, располагающиеся вот так a1-a2-a3-a4, a1+a2 делится на p, a2+a3 делится на p , значит a1 и a3 имеют одинаковый остаток при делении на p, но тогда a1+a4 делится на p (так как a3,a4- соседние, их сумма кратна p, а значит и a1+a4 делится на p), но a1 и a4- не соседние, а это противоречит условию.

Значит n- произведение хотя бы 2 различных простых чисел, поэтому n>=15 и может равняться только либо 15, либо 21, либо 33, либо 35 и так далее.

2. Докажу, что n не может быть равно 15,21,33.

Очевидно, больше 2 чисел, кратных 3 в вершинах быть не может. Остаётся 5 цифр. Все они должны давать одинаковый остаток при делении на 3, пусть он равен 2, если кроме чисел с остатком 2 существуют числа с остатком 1, то тогда найдутся 2 не соседних числа, сумма которых кратна 3, а это противоречит условию.

Так как все 5 чисел имеют одинаковый остаток при делении на 3, то сумма любых соседних не кратна 3, значит любые соседние должны быть кратны другому простому числу(в случае 15- 5, в случае 21-7, в случае 33-11), но такое невозможно, так как можно аналогично 1 пункту рассмотреть a1, a2, a3, a4 и получить противоречие с условием(сумма не соседних не взимнопроста с n).

Значит минимальное подходящее n- 35.

Пример:

a1, a2, a3, a4, a5, a6, a7 - вершины , расстановка выглядит так :

5-23-7-13-1-4-10, где a1=5, a2= 23 и так далее , a1- соседняя с a2 и a7, a2- с a1 и a3 и так далее. Все условия выполняются.

Ответ: $n=35$

Комментарий:

Вопрос **2**

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

При $x, y, z \in (0, 2]$ найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{(x^3-6)\sqrt[3]{x+6} + (y^3-6)\sqrt[3]{y+6} + (z^3-6)\sqrt[3]{z+6}}{x^2+y^2+z^2}.$$

Докажу, что при 0<x<=2 выполняется неравенство:

(x^3-6)*(x+6)^(1/3)<=x^2

При x < 6^(1/3) левая часть нер-ва меньше 0, а правая больше 0, поэтому нер-во очевидно.

Пусть x >= 6^(1/3), тогда выполняется нер-во:

(x^3-6)*(x+6)^(1/3)<= 2(x^3-6)

Перенесу 2(x^3-6) в левую часть и получу:

(x^3-6)((x+6)^(1/3)-2)<= 0

(x^3-6) - эта скобка по очевидным соображениям >= 0, а (x+6)^(1/3)-2 <= 0, так как (x+6)^(1/3)- возрастающая функция при 0<x<=2, а равенство 2 достигается в точке x=2

Значит произведение (x^3-6)((x+6)^(1/3)-2) <= 0.

Докажу, что 2(x^3-6)<= x^2 при 0<x<=2:

Перенесу x^2 в правую часть и разложу разность, как :

(x-2)(2x^2+3x+6)<=0, (x-2)<= 0 при 0<x<=2, а (2x^2+3x+6)>= 0 при любых x, так как у этого квадратного трех. дискриминант <0

Значит произведение (x-2)(2x^2+3x+6)<=0 при 0<x<=2, а значит (x^3-6)*(x+6)^(1/3)<= 2(x^3-6)<=x^2 при 0<x<=2, при этом равенство достигается в при x= 2

Поэтому увеличу числитель, заменив (x^3-6)*(x+6)^(1/3) на x^2, (y^3-6)*(y+6)^(1/3) на y^2, (z^3-6)*(z+6)^(1/3) на z^2, получу :

A<=(x^2+y^2+z^2)/(x^2+y^2+z^2)=1, при этом равенство достигается при x=y=z=2.

Ответ: 1

Комментарий:

Вопрос 3

Выполнен

Баллов: 0,00 из 20,00

Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Внутри треугольника AOB выбрана такая точка K, что прямая KO является биссектрисой угла CKD. Луч DK вторично пересекает описанную окружность треугольника COK в точке L, а луч CK вторично пересекает описанную окружность треугольника DOK в точке M. Найдите отношение площадей треугольников ALO и BMO.

Комментарий:

Вопрос **4**

Выполнен

Баллов: 0,00 из 20,00

Натуральное число x в системе счисления с основанием r $(r \leqslant 36)$ имеет вид $\overline{ppqq}$, причем $2q = 5p$. Оказалось, что r-ичная запись числа x^2 представляет собой семизначный палиндром с нулевой средней цифрой. (Палиндромом называется число, которое читается одинаково слева направо и справа налево). Найдите сумму r-ичных цифр числа x^2.

Комментарий:

Вопрос **5**

Выполнен

Баллов: 15,00 из 20,00

При каких n клетчатую доску $n \times n$ можно разбить по клеточкам на один квадрат 2×2 и некоторое количество полосок из пяти клеток так, что квадрат будет примыкать к стороне доски?

Так как доску n*n надо замощать квадратом 2*2 и полосками 1*5, то можно выразить его площадь:

n^2= 4+ 5k, где k- количество полосок.

Отсюда можно понять, что n не может иметь остатки 1,2,4 при делении на 5:

n= 5t+1, n^2=25t^2+10+1=5*(5t^2+2)+1 , не возможно, ведь n^2= 4+ 5k, по условию, аналогично для n, которые дают 2 и 4 при делении на 5. (k, t, z, h - натуральные числа)

Значит:

1.Пусть n =5z+2, для такого случая существуте пример:

Поставим квадрат 2*2 в угол таблицы, далее идут прямоугольники 5*1 и 1*5 на два уровня в высоту и в ширину, ну и затем остается разбить квадрат, стороны которого кратны 5, а его можно покрыть с помощью полосок.Такое n нам подходит.

2. Пусть n =5h+3, докажу, что такое n нам не подходит:

Покрашу доску 8*8 в 5 различных цветов(1,2,3,4,5) 2 способами вот так:

Пусть каждая клетка имеет координаты: (1,1), (2,1)(по вертикали и горизонтали) и так далее.

Тогда пусть в клетке (1,1)-1 цвет, в клетках (1,2) и (2,1)- 2 цвет, в клетках (1,3), (2,2), (3,1) - 3 цвет и так далее чередуя цвета с циклом 5, то есть уголком.

Вторая раскраска аналогично только начинаем с клетки (8,1).

Тогда можно понять, что у нас есть 12 единиц и пятёрок (цветов), 14 троек, а отсальных цветов по 13.

И на 1 расскраске и на 2 полоски 1*5 занимают все числа от 1 до 5, значит квадрат должен занимать цвета 2,3,3,4 для уравнения.

Посмотрим, где они могут стоять, расскраски переекаются(совпадают) только по центру, значит центральная клетка 2*2 и будет наш квадрат, то есть в ней он должен стоять, но по условию он должен примыкать к стороне?! Противоречие. Аналогично и для доски n*n.

Значит n =5h+3 не подходит.

Ответ: n=5z+2, z- натуральное.

Комментарий:
Алгоритм раскраски нечетко описан, а рассуждения недостаточно обоснованы.

« ПРЕДЫДУЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 11

СЛЕДУЮЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 23 »