	ol2215490 ol2215490
Тест начат	понедельник, 14 Февраль 2022, 10:06
Состояние	Завершено
Завершен	понедельник, 14 Февраль 2022, 13:05
Прошло времени	2 час. 58 мин.
Оценка	**75** из 100

Вопрос
Инфо

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 4 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос **1**

Выполнен

Баллов: 10 из 10

Некоторый треугольник разрезали на пять маленьких треугольников так, как показано на рис. 1. Могли ли при этом все пять маленьких треугольников оказаться равными?

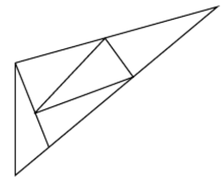

Рис. 1

Ответ: Да
Пример: каждый треугольник это прямоугольный треугольник со катетами 1, 2 и гипотенузой равной корень из 5.

Сначала делаем из 4 маленьких треугольников подобный со сторонами 2, 4, корень из 20 и потом к стороне длиной 2 приставляем пятый треугольник стороной длиной 2 и получаем то что у нас изображено на картинке. Пример рабочий.

Комментарий:

Вопрос **2**

Выполнен

Баллов: 45 из 50

На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Костя выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа, не превосходящие n, так, чтобы для всех поставленных им чисел выполнялось свойство: *если числа a и b соединены отрезком, то разность $a-b$ должна быть взаимно проста с n, а если не соединены, то числа $a-b$ и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1.* Например, для картинки на рис. 2 Костя взял $n = 45$ и подобрал подходящую расстановку — она показана на рис. 3.

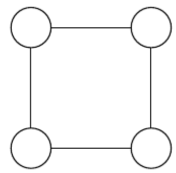

Рис. 2

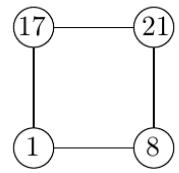

Рис. 3

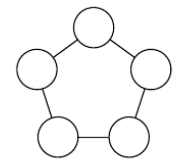

Рис. 4

а) При каком наименьшем n существует требуемая расстановка чисел на рис. 2?
б) Можно ли расставить числа в кружочках на рис. 4 при $n = 25$?
в) Можно ли расставить числа в кружочках на рис. 4 при $n = 39$?
г) При каком наименьшем n существует расстановка чисел в кружочках на рис. 4?

а) n >= 5 т.к. если n =< 4 то у нас меньше 4 натуральных чисел можно поставить в кружки чего не может быть т.к. нам нужно хотя бы 4 натуральных числа. n не равно 5 и 7 т.к. разница меньших чисел не может давать 5 и 7 а это наименьший делитель не равный 1. если 6 замети что единственная разница которая не имеет один общий натуральный делитель это 1 значит они идут по возрастанию т.е. 2 варианта: либо 1,2,3,4 но тогда 4-1 = 3 чего не должно быть, либо 2,3,4,4 но тогда 5 - 2 =3 чего не должно быть. Значит n не равно 6 осталось минимальное это n = 8, Пример на n = 8: 1,4,3,6. Пример рабочий значит Ответ: n = 8

б) Ответ: Нет

Доказательство: Заметим что 25 = 5^2 теперь докажем в общем виде для x^y где x это простое число что нельзя расставить. Единственные делители не равные 1 и которые имеют общий делитель с x^y у разницы меньших чисел это x, x^2 и т.д. => возьмем один кружочек и поймем что он равен по модулю x двум другим кружочкам напротив него, но эти кружочки соединены => их разница делится на x и >0 => противоречие т.к. их разница не взаимная проста с x^2 => Примера нету

в)
Ответ: нет
Доказательство: Заметим что 39 = 13 *3 теперь докажем это в общем виде для x^a * y^b где x и y это простые числа. Как мы доказали в пункте б) нам не важно в какой степени простой делитель и поэтому мы будем смотреть на остатки по модулю x и y. Пронумеруем кружочки по порядку: 1,2,3,4,5

Возьмем кружочек 1 пусть он равен по модулю x числу 3 кружочку и по модулю y 4 кружочку => что 5 кружочек равен по модулю y 3 кружочку и 2 кружочек равен по модулю x 4 кружочку. Теперь сравним 5 и 2 кружочек они должны быть равны по модулю x или y, но если они равны по модулю x то 5 кружочек равен по модулю x 4 кружочку а они соседи чего не может быть. Значит они равны по модулю y, но тогда 2 кружочек равен по модулю y 3 чего не может быть противоречие => если n равно x^a * y^b(39 = 13^1 * 3^1) то мы не сможем расставить.

г)Заметим что n не делится на 2 ведь если делится то в одном соединение соседних чисел будут 2 числа одной четности и значит их разница будет делится на 2 т.е. будет не взаимно проста с n. В пункте б) и в) мы доказал что у нас не может быть только 1 или только 2 простых делителей(они могут быть в любы х степенях все равно не работает) => у нас минимум 3 различных простых делителя не равных 2 это минимум равно: 3 * 5 * 7 = 105
Ответ: n = 105

Пример: 104, 82, 101, 97, 96

Комментарий:
а) 5

верный пример

оценка была бы верной, если бы числа в кружках были меньше n

неверный ответ

б) 10

в) 10

г) 20

Вопрос 3

Выполнен

Баллов: 10 из 10

На доске написано 2021 минусов. Петя и Вася играют в такую игру. Ход состоит в том, что можно один минус заменить на плюс, либо стереть один плюс и один минус, либо два минуса заменить на три плюса. Ходят по очереди, первым ходит Петя, проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

Ответ: Петя
Доказательство: Заметим что для любого хода нужны минусы и выиграет тот после ходя кого нет минусов так как другой не сможет сходить без минусов:
Если сейчас убрали 2020 минусов и твой ход то ты берешь последний минус и ты выиграл.
Если сейчас убрали 2019 минусов и твой ход то ты берешь два минуса и ты выиграл.
Если сейчас убрали 2018 минусов и твой ход то в любом случае переходишь в случай в котором ходит твой противник и он выигрывает.

И так далее если ты можешь перейти в проигрышный случай то ты в выигрышном случае и наоборот. И так будут идти случае: победа, победа, проигрыш, и мы получаем что когда убрали 0 минусов(самое начало игры) это выигрышный случай т.е. выиграет Петя и все что ему нужно чтобы после его хода всегда кол-во убранных минусов было равно по модулю 3 двум, что он всегда сможет сделать т.к. из выигрышного случая всегда можно перейти в проигрышный, а в проигрышном именно такая ситуация. Доказали.

Комментарий:

Вопрос **4**

Выполнен

Баллов: 10 из 30

а) Имеется большая компания людей — больше 100 человек, в которой некоторые люди дружат. Верно ли, что каждую такую компанию можно разбить на две группы «дружественным способом», т. е. так, чтобы у каждого человека друзей в своей группе было больше либо равно, чем друзей в противоположной группе?

б) Докажите, что каждую компанию, в которую входит 2022 человека, можно разбить на 15 групп «недружественным способом», т. е. так, чтобы у каждого человека количество друзей в своей группе составляло не более $1/15$ от общего числа его друзей.

а) Ответ: Нет

Доказательство:

Пусть все дружат со всеми тогда возьмем одного человека он дружит с 99 людьми значит в его группе должна быть половина от 99 округленная в верхнею сторону т.е. 50 т.е. в его группе минимум 51 человек(он + 50 человек которых он знает) но в другой группе тоже возьмем одного человека и он тоже всех знает, но в его группе 48 знакомых а в другой 51 знакомых противоречие. Значит не верно что всегда можно разбить на 2 дружелюбные группы.

Комментарий:
а) 10

б) 0

ПРЕДЫДУЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Заключительный этап - Математика 6-7 21/22 (скрытый)

СЛЕДУЮЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 21