	ol2224745 ol2224745
Тест начат	понедельник, 14 Февраль 2022, 10:04
Состояние	Завершено
Завершен	понедельник, 14 Февраль 2022, 14:05
Прошло времени	4 час.
Баллы	68/120
Оценка	**57** из 100

Вопрос
Инфо

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 6 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос 1

Выполнен

Баллов: 20 из 20

Коля поехал на электросамокате в магазин в соседнюю деревню со скоростью 10~км/ч. Проехав ровно треть всего пути, он понял, что при движении с прежней скоростью успеет точно к закрытию магазина, и увеличил скорость вдвое. Но когда он проехал ровно 2/3 всего пути, самокат сломался, и оставшуюся часть пути Коля прошел пешком. С какой скоростью он шел, если успел точно к закрытию магазина?

Пусть длина пути S. Тогда с начала пути до закрытия магазина остается S/10 часов. Первую треть пути Коля проехал за (S/3)/10 часов, вторую треть за (S/2)/(10*2) часов. Пусть x - скорость Коли пешком. Тогда последнюю треть пути он прошел за S/3x часов. Он пришел ровно к закрытию магазина, поэтому S/30 + S/60 + S/x = S/10, 1/30 + 1/60 + 1/x = 1/10, отсюда 3x = 1/(1/10 - 1/30 - 1/60) = 20 км/ч. x = 20/3 = 6,(6) км/ч

Ответ: скорость Коли 6,(6) км/ч

Комментарий:

Вопрос **2**

Выполнен

Баллов: 8 из 20

Найдите все целые a, для которых квадратный трехчлен $x^2 + ax + 2a$ имеет два различных целых корня.

x^2 + ax + 2a должен иметь 2 различных целых корня. D = a^2 - 8a, это должно быть больше 0. x1,2 = (-a + (a(a - 8))^(1/2))/2. Это должно быть целым. Тогда и (a(a - 8))^(1/2) - целое. Значит а(а - 8) является точным квадратом, пусть это y^2. Тогда 8a = (a + y)(a - y). Значит (a + y) или (a - y) делится на a. Но в обоих скобках одно слагаемое (a) делится на a. Значит и второе делится на a. То есть y = к*a, где к - целое. Тогда 8a = (a + ак)(a - ак), 8 = (к + 1)(a - ак), 8 = (1 - к^2)a. Тогда a - делитель 8. То есть a может быть равно (-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8). Также a(a - 8) больше 0, поэтому a = 1, 2, 4, 8 - не подходят. к^2 = 1 - 8/a. Подставим возможные a. k^2 = 1 - 8/(-1) = 9. k^2 = 1 - 8/(-2) = 5. k^2 = 1 - 8/(-4) = 3. k^2 = 1 - 8(-8) = 2. То есть при a = -2, -4, -8 к не является целым, что противоречит условию выбора к. То есть подходит только a = -1. При a = -1, x1 = 2, x2 = -1. Это целые числа

Ответ: a = -1

Комментарий:
Из $8a = (a + y)(a - y)$ не следует, что $(a + y)$ или $(a - y)$ делится на a.

Вопрос **3**

Выполнен

Баллов: 20 из 20

Положительные числа a, b и c удовлетворяют условию $abc(a+b+c)=3$. Докажите неравенство $(a+b)(b+c)(c+a)\geqslant 8$.

(во всех переходах > подразумевает больше либо равно)

$(a + b)(b + c)(c + a) = a^2b + ab^2 + 2abc + ac^2 + a^2c + bc^2 + b^2c = bc(a + b + c) + ac(a + b + c) + ab(a + b + c) -abc = (ab + bc + ac)(a + b + c) - abc$. Надо доказать, что это больше 8:

$(ab + bc + ac)(a + b + c) > abc + 8$.

По неравенст$(a + b + c)/3 > (abc)^{(1/3)}$, $abc(a + b + c) = 3 > 3abc(abc)^{(1/3)}$. Возведем в куб, сократим на 27

$(abc)^4 < 1$, $abc < 1$.

Тогда $abc + 8 < 9$

Значит надо доказать, что $(ab + bc + ac)(a + b + c) > 9$

$a + b + c = 3/abc$

Значит надо доказать $(ab + bc + ac) > 3abc$

По неравенству о средних: $(ab + bc + ac) > 3(a^2b^2c^2)^{(1/3)}$

Значит надо доказать, что $3(a^2b^2c^2)^{(1/3)} > 3abc$

$(a^2b^2c^2)^{(1/3)} > abc$

Возведем в куб: $(a^2b^2c^2) > a^3b^3c^3$

Это верно, так как $abc < 1$, то есть и изначальное неравенство верно

Комментарий:

Вопрос **4**

Выполнен

Баллов: 20 из 20

Какое наименьшее количество фишек можно расставить в клетках таблицы 99×99 так, чтобы в каждом квадрате 4×4 было не менее восьми фишек?

Оценка: разделим квадрат на части: левый верхний квадрат 96*96, прямоугольники в нижнем ряду 3*4 (их 96/4), прямоугольники в правом ряду 4*3 (их 96/4) и правый нижний квадрат 3*3. квадрат 96*96 можно разбить на (96/4)^2 квадратов 4*4, которые не пересекаются. Тогда в них будет хотя бы 96*96/2 фишек. в прямоугольниках 3*4 хотя бы по 4 фишки (т. к. если дополнить их до квадрата 4*4 добавится 4 клетки). в квадрате 3*3 хотя бы 1 фишка (если дополнить его до квадрата 4*4 добавится 7 клеток, то есть не более 7 фишек). Тогда всего фишек не менее чем 96*96/2 + 2*96 + 1

Пример. Фишки стоят на 4ой, 8ой ... 96ой горизонталях и вертикалях (нумерация слева направо, сверху вниз). И в каждой клетке, справа снизу от которой пересечение горизонтали и вертикали с фишками, и в правой нижней клетке. (В каждом квадрате 4*4 фишки будут стоять на одной из горизонталей, на одной из вертикалей (поскольку фишки стоят на каждой 4ой) и еще в одной клетке, левой верхней от точки пересечения этой горизонтали и вертикали, или в правой нижней клетке квадрата). Всего фишек: в квадрате 96*96 ровно 96*96/2, + по 4 фишки в прямоугольниках 4*3, то есть + 4*96/4*2 = 2*96, +1 фишка в правой нижней клетке. = 96*96/2 + 2*96+1

Ответ: 96*96/2 + 2*96+1

Комментарий:

Вопрос **5**

Нет ответа

Балл: 20

Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Диагональ AC — биссектриса угла $\angle BAD$, точка M — середина стороны BC, а точка N — середина отрезка DO. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является вписанным тогда и только тогда, когда четырехугольник $ABMN$ является вписанным.

Вопрос **6**

Нет ответа

Балл: 20

Докажите, что у каждого из чисел $n!+1$, $n!+2$, \dots, $n!+n$ можно выбрать простой делитель, на который не делится ни одно из остальных.

« ПРЕДЫДУЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 21

СЛЕДУЮЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 13 »