	ol2228148 ol2228148
Тест начат	понедельник, 14 Февраль 2022, 10:10
Состояние	Завершено
Завершен	понедельник, 14 Февраль 2022, 14:05
Прошло времени	3 час. 54 мин.
Оценка	**75** из 100

Вопрос
Инфо

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 4 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос **1**

Выполнен

Баллов: 10 из 10

Некоторый треугольник разрезали на пять маленьких треугольников так, как показано на рис. 1. Могли ли при этом все пять маленьких треугольников оказаться равными?

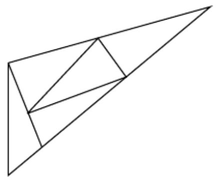


Рис. 1

Ответ: да.

Скан_20220214 (4).pdf

Комментарий:

Вопрос **2**

Выполнен

Баллов: 45 из 50

На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Костя выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа, не превосходящие n, так, чтобы для всех поставленных им чисел выполнялось свойство: *если числа a и b соединены отрезком, то разность $a-b$ должна быть взаимно проста с n, а если не соединены, то числа $a-b$ и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1.* Например, для картинки на рис. 2 Костя взял $n = 45$ и подобрал подходящую расстановку — она показана на рис. 3.

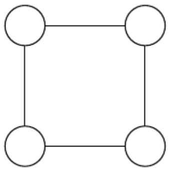


Рис. 2

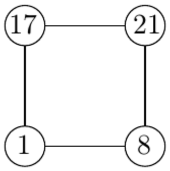


Рис. 3

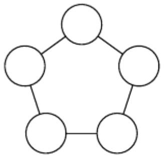


Рис. 4

а) При каком наименьшем n существует требуемая расстановка чисел на рис. 2?
б) Можно ли расставить числа в кружочках на рис. 4 при $n = 25$?
в) Можно ли расставить числа в кружочках на рис. 4 при $n = 39$?
г) При каком наименьшем n существует расстановка чисел в кружочках на рис. 4?

Ответ:

а) 4

б) нет

в) нет

г) 105

Скан_20220214_merged (1).pdf

Комментарий:
а) 10

б) 10

в) 10

г) 15 неверный пример

Вопрос **3**

Выполнен

Баллов: 10 из 10

На доске написано 2021 минусов. Петя и Вася играют в такую игру. Ход состоит в том, что можно один минус заменить на плюс, либо стереть один плюс и один минус, либо два минуса заменить на три плюса. Ходят по очереди, первым ходит Петя, проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

Выигрывает Петя.

Первый ход: Петя заменяет 2 «-» на 3 +. Далее ост. 2019 «-».

Проигрывает тот, кто не может сделать ход, а это когда нет «-», тк в любом ходе мы убераем «-»

Тактика: после первого хода Петя должен, в зависимости, от хода Васи должен убрать 1 или 2 «-» (если Вася убрал 1 «-» , то Петя после него убирает 2 «-», если Вася убрал 2 «-», то Петя после него убирает 1 «-» (то есть Петя должен ходить так, что бы каждую пару ходов Вася-Петя убиралось 3 «-»))

Тк 2019 кратно 3, то кол-во ходов у всех одинаковое (не считая первого хода) и последний ход Петин => он выигрывает.

Единственное что может пойти не так, то что закончатся «+» когда по тактике Петя должен его убрать, и тактика собьётся, но единственный ход, когда надо убирать «+», это когда убир. 1 «-» и убир. 1 «+», но по нашей тактики с минусами этот ход равносилен ходу, где «-» замен. на «+», следовательно даже если + закончатся тактика не собьётся.

Ответ: Петя.

Комментарий:

Вопрос **4**

Выполнен

Баллов: 10 из 30

а) Имеется большая компания людей — больше 100 человек, в которой некоторые люди дружат. Верно ли, что каждую такую компанию можно разбить на две группы «дружественным способом», т. е. так, чтобы у каждого человека друзей в своей группе было больше либо равно, чем друзей в противоположной группе?

б) Докажите, что каждую компанию, в которую входит 2022 человека, можно разбить на 15 групп «недружественным способом», т. е. так, чтобы у каждого человека количество друзей в своей группе составляло не более $1/15$ от общего числа его друзей.

а)

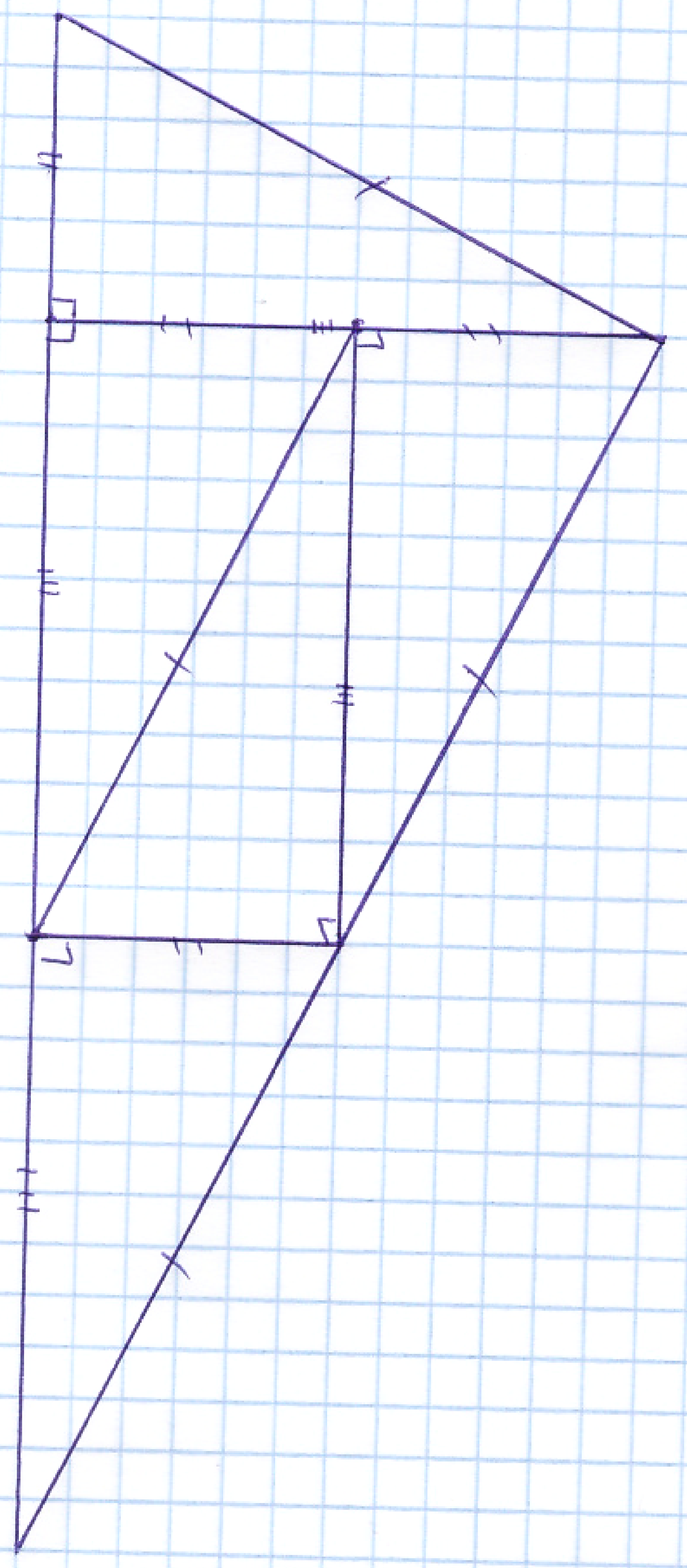
Ответ: нет.

Пример компании:

102 человека и все они дружат между собой. То есть каждый человек дружит с 101 человеком. Если пытаться разместить их в 2 группы, то тк человек дружит со 101 человеком в его группе должно быть мин 51 его друг по условию тогда в какой-то группе мин 52 чел, следовательно в др группе макс 50 чел. Значит у человека в др группе макс 50-1=49 друзей в своей группе => в др мин 101-49=52 52>49=> несходится.

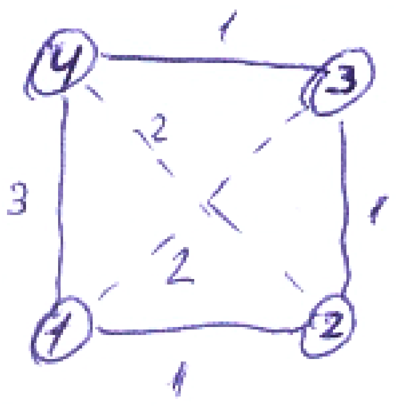
Комментарий:
а) 10

б) 0



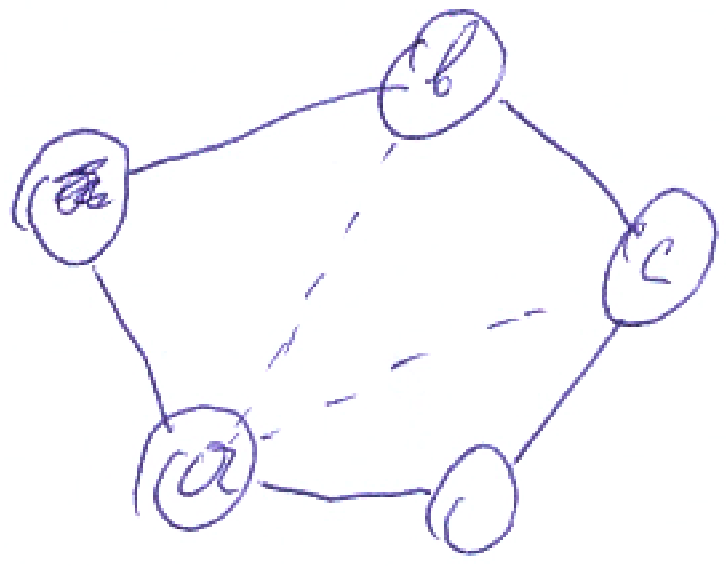
№2

а) Ответ: $n \geq 4$, т.к. всего 4 числа, а все числа различн. $\Rightarrow \min n = 4$ Пример на $n = 4$:



числа на линиях показ. разность 2 чисел. как видно всё верно.

б) делители 25, больше 1 это 25 и 5, но ~~25~~ если 2 числа несоед., то общим дел с n (т.е. 25) не может яв. 25, т.к. оба этих числа ≤ 25 и > 0 $\Rightarrow$

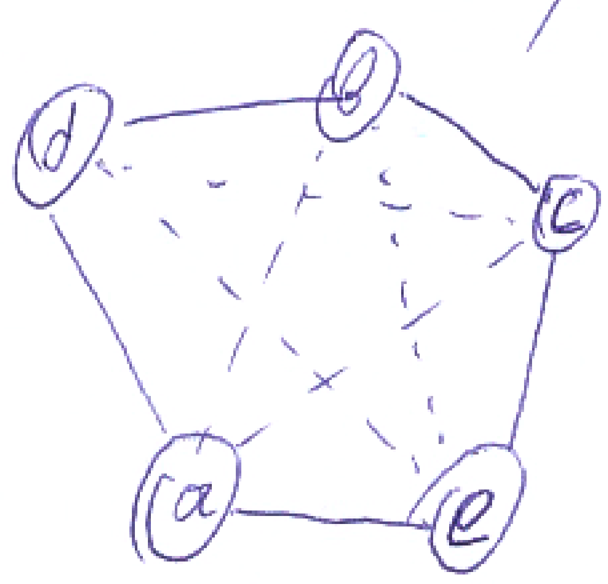


$(a-b) \vdots 5$ и $(a-c) \vdots 5$

$\Rightarrow ((a-b)-(a-c)) \vdots 5$, но

это $(c-b) \vdots 5$, а по условию соедин. числа взаимопросты с n, а $25 \vdots 5$ и $(c-b) \vdots 5 \Rightarrow$ нет.

в) $39 = 3 \cdot 13 \Rightarrow$ общий делитель у разности несоед. чисел и n должен быт 3 или 13 (почему не 39 см. пов а))



разности соединённых чисел с 1 несоединённым ни с 1 из первых (такие как $a-b$ и $a-e$) не могут иметь один и тоже общ дел с 39, т.к. иначе соед. числа будут иметь с 39 общ. дел. $\Rightarrow$ не умоляя общности рассуждений можем взять $(a-b) \vdots 3$, тогда $(a-c) \vdots 13$

тогда, раз в Δ aed $(a-e) \vdots 13$, то $(e-d) \vdots 3$

т.к. $(a-b) \vdots 3$, то в Δ abe $(b-e) \vdots 13$, а т.к. $(b-e) \vdots 13$, то в Δ bed $(d-e) \vdots 3$, но в Δ cde $(c-d) \vdots 3$ и $(d-e) \vdots 3 \Rightarrow (c-e) \vdots 3$, и $39 \vdots 3 \Rightarrow$ ✗ $\Rightarrow$ нет.

2) $n \geq 5$ (см. а)), но если $n=5$, ~~то~~ дел. большие 1 числа 5 это только 5, а т.к. все числа ≤ 5 и >0, то их разности $<5 \Rightarrow$ разности 2 несосед. чисел не будут иметь общих дел. с 5 ~~во~~ т.к. $a \neq b$ (точное же рассуждение можно применить к люб. прост. n, т.к. у него не будет дел. меньше себя, но >1) } 1 пров.

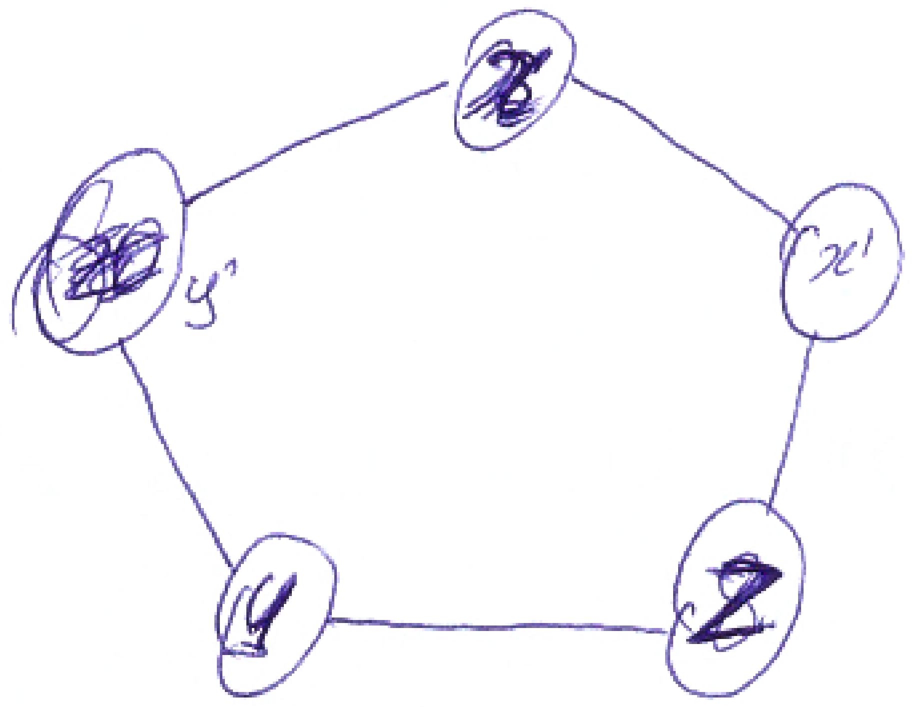
Также нам не подходят n, у кот ~~только~~ среди дел. $<n$, но >1 нельзя выделить 3 дел. или больше, попарн. взаимно простых, т.к. разберёмся сначала если у числа всего 2 дел $<n$, но >1, пусть это будут a и b, тогда можно посмотр. на в) и просто заменить 3 на a, 13 на b и доказ. Если добавл. еще дел, не имеющ общий дел с a или b, то это не поможет, т.к. если в задаче (в) замен. какую-нибудь разн. несосед. (a или b) на этот дел. (пусть будет. c), то если замен взаимно прост. с ним на c, то в треуг. 1 разн. дел на c, а др. на дел, имеющ. с ним общ. дел., тогда 2 разности будут. дел на 1 число, на кот дел. $n \Rightarrow$ ✗, если замен. непрост. с ним на c, то ничего не изм., просто в итоге получим, что 2 ребра в 1 Δ явл. c, ~~а~~ а др. дел., у кот. с c общ. дел. и опять не получ.

$\Rightarrow$ если мы будем добав. не взаимно прост. дел., то не изм., 2 пров. а если a и b - не взаимно прост., то в люб. Δ 2 разности будут дел. на 1 число, и $n \vdots$ ему; тоже самое если в числе только 1 дел. >1, но $<n$.

Из-за этого убер. $n = 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; \ldots$ и т.д., у кого меньше 3 видов прост дел., т.к. от их кол-ва

Заведем кол-во взаимо прост. дел., а min число, у кот. 3 прост. дел. — это число с мин. прост. дел. — $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$

$\Rightarrow \min n = 30$ ~~пример:~~, но, так оно четное, надо, чтобы разность соед. была неч.



$\Rightarrow (x' - x) \equiv_2 1$

$(z - x') \equiv_2 1$

$\Rightarrow (x - z) \equiv_2 0 \Rightarrow x$ и z - од. четн.

$(x - y') \equiv_2 1$

$(y - y') \equiv_2 1$

$(x - y) \equiv_2 0 \Rightarrow x$ и y - одн. чет.

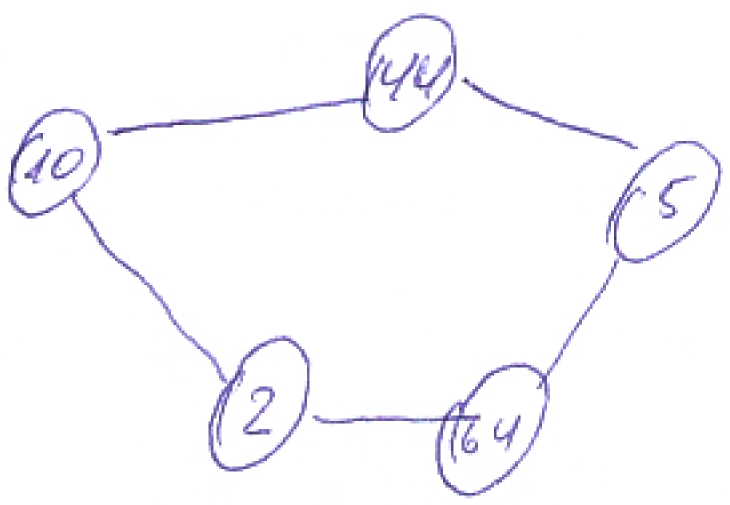
$\Rightarrow y$ и z - одн. чет., но

$(y - z) \vdots 2$ и нечет. $\vdots 2 \Rightarrow \times$

min n, состоящ. из 3 видов прост. дел. и не чет —

$3 \cdot 5 \cdot 7$ (это min не чёт. прост. дел.) $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$

пример на $n = 105$:



Ответ: $\min n = 105$.