	ol2201944 ol2201944
Тест начат	понедельник, 14 Февраль 2022, 10:05
Состояние	Завершено
Завершен	понедельник, 14 Февраль 2022, 14:05
Прошло времени	3 час. 59 мин.
Оценка	**65,00** из 100,00

Вопрос
Инфо

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 5 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

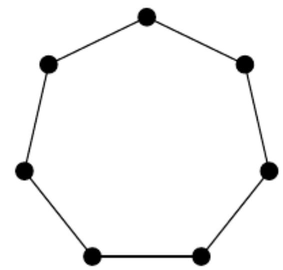
Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос **1**

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Настя выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа так, чтобы для всех этих чисел выполнялось свойство:
если числа a и b не соединены отрезком, то разность $a - b$ должна быть взаимно проста с n, а если соединены, то числа $a - b$ и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1.
При каком наименьшем n существует такая расстановка?



Кружочки будем называть вершинами. Будем рассматривать минимальный натуральный общий делитель a-b и n, отличный от 1 (для 2 соседних по отрезку чисел) и писать его на отрезке, соединяющем эти числа. Заметим, что на 2 отрезках, выходящих из одной вершины, не может быть написаны одинаковые числа. Т.к. если это так, то пусть в этих 3 вершины стоят a, b, c, а d написано на отрезках. Тогда a-b делится на d, b-c делится на d, значит и их сумма a-c делится на d, d>1 и d - делитель n. Значит a-c и n не взаимнопросты, а должны быть. Значит, у числа n хотя бы 2 простых различных делителя.

Если их ровно 2, то они должны чередоваться на отрезках, но на нашей картинке отрезков нечетное количество, значит из какой-то вершины будут выходить 2 отрезка с равными числами, а такого не должно быть. Занчит у n хотя бы 3 простых делителя. Покажем, что эти простые делители не могут быть 2 и 3. Занумеруем вершины на картинке от 1 до 7 по часовой стрелке.

1. Если один из делителей n 2. Тогда все числа в 3, 4, 5, 6 вершинах должны иметь четность, отличную от четности числа в 1 вершине, иначе их разность будет делится на 2. Но тогда разность чисел в 3 и 5 вершинах делится на 2, а не должна. Значит среди делителей n нет 2.

2. Если есть 3. Тогда есть 2 соединенных отрезком вершины, имеющих разные олстатки по модулю 3, если их нет, то все разности делятся на 3, значит на каждом отрезке написано 3, а этого не модет быть. Пусть разные остатки у вершин 1 и 2. Но тогда у вершин 4, 5 и 6 должны быть остатки, отличные от остатков вершин 1 и 2 при делении на 3. Но различных остатков всего 3, значит у вершин 4, 5, 6 они совпадают, значит разность чисел в вершинах 4 и 6 делится на 3, а этого не долдно быть. Значит n не делится на 3.

С учетом этого можно сказать, что n>=5*7*11 = 385. Т.к. у n хотя бы 3 различныз простыз делителя, которые не 2 и не 3. Пример для n = 385. Пусть в вершинах последовательно записаны числа 1, 6, 13, 24, 49, 5, 12. несложно заметить, что при таких числах условия выполняются.

Ответ: n >= 385

Комментарий:

Вопрос **2**

Выполнен

Баллов: 5,00 из 20,00

При $x, y \in (0, 1]$ найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{(x^2 - y)\sqrt{y + x^3 - xy} + (y^2 - x)\sqrt{x + y^3 - xy} + 1}{(x - y)^2 + 1}.$$

Максимальное значение A есть 1, достигается при x=y=1. Теперь докажем, что A<=1.

Рассмотрим несколько случаев.

1. x=y. Тогда в числителе 1+2*x(x-1)*(x+x^3-x^2)^0.5, но при 0<x<=1, x(x-1)<=0, значит числитель <= 1, знаменатель равен 1, значит A<=1.

Заметим, что значения квадратного корня всегда положительны. Но значения (x^2-y) и (y^2-x) не могут быть положительными одновременно. Потому что пусть это не так, тогда x^2>y, x<y^2. Домножив первое нер-во на y>0 получим x^2*y>y*y>x, т.е. x*y>1, что невозможно при ограничениях задачи. Значит, не более одной скобочки (x^2-y) и (y^2-x) положительно, значит, в сумме числителя 1 или 2 отрицательных слагаемых.

2. Если оба эти слагаемых числителя, зависящие от переменных, неположительны, т.е. x^2<=y, y^2<=x. Тогда числитель меньше или равен 1, а знаменатель не меньше 1, т.к. квадрат разности всегда неотрицателен, значит A не больше 1.

3. Одно слагаемое из тех 2 положительное. Пусть это первое (выражение симметрично относительно x и y, поэтому можем не умаляя общности такое предполагать). Тогда x^2>y, x>=y^2. Заметим, что подкоренные выражения с учетом неравенств этого случая x^3+y(1-x)<x^2, x(1-y) + y^3 >= y^2. Тогда числитель <= x(x^2-y) - y(x-y^2) + 1 = x^3 + y^3 - 2xy + 1 <= x^2+y^2-2xy+1, т.к. x^3<=x^2 при x<=1 (аналогично y^3<=y^2 при y<=1). Но т.к. x^2+y^2-2xy+1 - знаменатель, можно сделать вывод, что A<=1.

Тк. при любых из значениях x и y выполняется какой-то из случаев, значит A<=1.

Ответ. 1

Комментарий:
Пример верный.
" Заметим, что подкоренные выражения с учетом неравенств этого случая $x^3+y(1-x)<x^2$, $x(1-y) + y^3 \geq y^2$." - неравенства не очевидны. Оценка не обоснована.

Вопрос 3

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

На стороне AB остроугольного треугольника ABC отмечена точка M. Внутри треугольника выбрана точка D. Окружности ω_A и ω_B описаны вокруг треугольников AMD и BMD соответственно. Сторона AC вторично пересекает окружность ω_A в точке P, а сторона BC вторично пересекает окружность ω_B в точке Q. Луч PD вторично пересекает окружность ω_B в точке R, а луч QD вторично пересекает окружность ω_A в точке S. Найдите отношение площадей треугольников ACR и BCS.

Лемма Фусса. Пусть 2 окружности Г1 и Г2 пересекаются в точках А и В, прямая через А пересекает Г1 в точке С, Г2 в точке Д, прямая через В пересекает Г1 в точке Е, а Г2 в точке К. Тогда СЕ || ДК.

Док-во. Если эти 2 прямые пересекаются вне окружностей, то угол СЕВ = углу ДАВ = 180 - угол ДКВ => прямые параллельны.

Если они перескаются в окружностях, то пусть внутри Г1. Тогда СЕВ = углу САВ = ДКВ => прямые параллельны. (равенства углов следуют из вписанности четырехугольников и смежности некоторых углов).

Воспользуемся леммой Фусса для окружностей w_a и w_b и секущих DR и MB. Тогда BR || AP, т.е. BR || AC, значит высоты из B и R на AC равны, следовательно площади треугольников ARC и ABC равны.

Воспользуемся леммой Фусса для окружностей w_a и w_b и секущих DQ и MB. Тогда BQ || AS, т.е. BC || AS, значит высоты из S и A на BC равны, следовательно площади треугольников BSC и ABC равны.

Из этого понятно, что площади треугольников BSC и ARC равны, т.е. их площади относятся как 1:1

Ответ. 1:1

Комментарий:

Вопрос 4

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

В системе счисления с основанием r ($r \leqslant 100$) натуральное число x является двузначным с одинаковыми цифрами. Оказалось, что r-ичная запись числа x^2 четырехзначная, причем крайние цифры одинаковы, а средние равны нулю. При каких r такое возможно?

В системе счисления r: x = aa, x^2 = b00b

Далее все в десятичной.

r-1>=a,b >=1 (a, b натуральные).

Тогда в десятичной записи x = a*(1+r), => x^2 = a^2*(1+r)^2, x^2 = b(r*r*r+1) = b*(1+r)(r*r-r+1) => a*a*(1+r) = b*(r*r-r+1).

Заметим, что НОД(1+r,r*r-r+1) = НОД(3, 1+r).

1. 1+r не делится на 3. Значит (r*r-r+1) не делится на 1+r, значит b делится на 1+r,т.е. b >= 1+r, но b<=r-1. такие r не возмодны

2. 1+r делится на 3. Тогда (r*r-r+1)/3 не делится на (1+r)/3, значит b делится на (1+r)/3 => b = (1+r)/3 or b = 2*(1+r)/3, в противном случае b>r-1. Значит a*a = (r*r-r+1)/3 or a*a = 2*(r*r-r+1)/3.

A) Если a*a = (r*r-r+1)/3, то r*r-r+1-3*a*a = 0, D = 1 - 4 + 12*a*a = 3*(2a-1)*(2a+1)
D должен быть квадратом, значит одна из скобок (2a-1), (2a+1) это 3*x*x, а другая y*y где x, y натуральные. Но Из сравнений по модулю 8 видим, что (r*r-r+1) модет быть 1,3,7,5, а 3*a*a - 0, 3 и 4, значит равенство только когда a*a = 1 (mod 8) =>
Заметим, что (2a-1) и (2a+1) нечетные, значит x, y нечетные, значит 3x*x = 3 mod 8, y*y = 1 mod 8 =>

a)Если 2a-1 =3*x*x = 3 (mod 8) and 2a+1 = y*y = 1 (mod 8) => 2a = 4 (mod8) and 2a=2(mod 8) - такого не бывает

b) Если 2a+1 =3*x*x = 3 (mod 8) and 2a-1 = y*y = 1 (mod 8) => 2+y*y=3*x*x (1)
f(x) = 2+x*x -парабола ветвями вверх с вершиной на оси ОУ; g(x) = 3*x*x - парабола ветвями вверх в вершиной (0,0). Такие 2 графика имеют не более 2 общих точек. Значит уравнение 1 имеет не более 2 решений. Это решения x=y=1; x=3, y=5.

Тогда это a=1, r = 2 или a=13, r = 23.

B) Если a*a = 2*(r*r-r+1)/3, то r*r-r+1-1,5*a*a = 0. Т.к. 3*a*a/2 = (r*r-r+1) - натуральное, то a*a делится на 2 => делится на 4 => 3*a*a/2 делится на 6, т.е. r*r-r+1 делится на 6, но такое невозможно.

Значит может быть только 2 ответа - a=1, r = 2 или a=13, r = 23.

Ответ: r=2 или r=23

Комментарий:

Вопрос **5**

Нет ответа

Балл: 20,00

У параллелепипеда $a \times b \times c$ грани разбиты на единичные клетки. Имеется также большое количество трехклеточных полосок, которые можно перегибать по границам клеток. При каких a, b и c три грани параллелепипеда, имеющие общую вершину, можно полностью обклеить полосками без наложений и зазоров так, чтобы клетки граней и полосок совпадали?

« ПРЕДЫДУЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 24

СЛЕДУЮЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 25 »

УТВЕРЖДАЮ:
Ответственный секретарь Оргкомитета ОШ СПбГУ
Хуршудян А.Л. (____________)

ПРОТОКОЛ
рассмотрения апелляции участника Олимпиады школьников Санкт-Петербургского государственного университета

г. Санкт-Петербург № МАТ-8 *«31» марта 2022 г.*

Апелляционная комиссия в составе:

1. Савельева Анастасия Глебовна,
2. Погожев Сергей Владимирович,
3. Флоринский Александр Алексеевич.

рассмотрела апелляционное заявление участника Олимпиады школьников СПбГУ:

ФИО: ***Коган Анна Алексеевна***

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады: ***математика***

Количество набранных баллов до апелляции: ***65***

По результатам рассмотрения апелляционного заявления участника Олимпиады, Апелляционная комиссия приняла следующее решение: ***повысить оценку за работу на 10 баллов, признать участницу победителем Заключительного этапа Олимпиады школьников СПбГУ по математике.***

В задаче №2 доказательство представлено недостаточно подробно (последний пункт оставлен без объяснений), однако оценку можно повысить с 5 до 15 баллов.

Количество набранных баллов после апелляции: 75