	ol2242115 ol2242115
Тест начат	понедельник, 14 Февраль 2022, 10:06
Состояние	Завершено
Завершен	понедельник, 14 Февраль 2022, 14:10
Прошло времени	4 час. 3 мин.
Баллы	80/120
Оценка	**67** из 100

Вопрос
Инфо

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 6 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос 1

Выполнен

Баллов: 20 из 20

Коля поехал на электросамокате в магазин в соседнюю деревню со скоростью 10~км/ч. Проехав ровно треть всего пути, он понял, что при движении с прежней скоростью успеет точно к закрытию магазина, и увеличил скорость вдвое. Но когда он проехал ровно 2/3 всего пути, самокат сломался, и оставшуюся часть пути Коля прошел пешком. С какой скоростью он шел, если успел точно к закрытию магазина?

Пусть x - скорость Коли пешком, S - общее расстояние (x, S > 0). Тогда, время, через которое магазин закроется, считая от начала пути коли, равно S / 10 (ч), т.к. успевает он в магазин в притык, двигаясь с первоначальной скоростью 10 км/ч. Тогда, время, за которое он проедет треть пути с этой скоростью = S / 10 / 3 = S / 30 (ч). Вторую треть пути он двигался со скоростью, в 2 раза больше изначальной, т.е. 20 км/ч. Тогда, время, за которое он проехал вторую треть пути = S / 20 /3 = S / 60 (ч). Последнюю треть пути он пройдёт со скоростью x, значит, пройдёт он её за S / x / 3 = S / 3x (ч). Время до закрытия изначально было равно S / 10 (ч), а новыми способами добраться до него он приходит впритык, значит, суммарное время S / 30 + S / 60 + S / 3x = S / 10 (ч). Разделим обе части на S (S > 0):

1/30 + 1/60 + 1/3x = 1/10. Теперь, решение уравнения:

1/3x = 1/10 - 1/30 - 1/60 = 6/60 - 2/60 - 1/60 = 3/60 = 1/20

20 = 3x

x = 20/3 или 6 + 2/3 (км/ч)

Ответ: 20/3 или 6 + 2/3 км/ч.

Комментарий:

Вопрос **2**

Выполнен

Баллов: 20 из 20

Найдите все целые a, для которых квадратный трехчлен $x^2 + ax + 2a$ имеет два различных целых корня.

Чтобы разложить данный многочлен на множители, нужно решить уравнение $x^2 + ax + 2a = 0$ => чтобы было два различных корня должно выполняться $D = a^2 - 8a = a(a - 8) > 0$. Методом интервалов при $a > 8$ $D > 0$, при $8 > a > 0$ $D < 0$, при $a < 0$ $D > 0$ (при $a = 0$ или $a = 8$ $D = 0$) => либо $a > 8$, либо $a < 0$. Тогда, $x_1 = (-a + (a^2 - 8a)^{0.5}) / 2$, $x_2 = (-a - (a^2 - 8a)^{0.5}) / 2$. Т.к. a и (a - 8) имеют одинаковую чётность (8 кратно 2), если корень из D натуральный, то он имеет такую же чётность, как и a (при взятии корня новые множители = 2 точно не появятся, а старые все разом не пропадут, только половина). Значит, $D^{0.5} - a$ и $-D^{0.5} - a$ всегда чётно, если $D^{0.5}$ является натуральным числом, значит x1 и x2 являются целыми, если $D^{0.5}$ является натуральным числом. (В противном случае $D^{0.5} - a$ и $-D^{0.5} - a$ не будет целым, т.к. a всегда целое, а сумма целого и нецелого даёт нецелое, а при делении на 2 (целое число) оно, очевидно, целым так и не станет). Получается, нужно найти все a, при которых $(a^2 - 8a)^{0.5}$ является натуральным числом, значит, $a(a - 8) = a^2 - 8a = n^2$, где n натуральное число. Т.е. $a^2 - 8a - n^2 = 0$. Очевидно, что $4n^2$ всегда >= 0, значит, $a_1 = (8 - (64 + 4n^2)^{0.5}) / 2 = (8 - 2 * (16 + n^2)^{0.5}) / 2 = 4 - (16 + n^2)^{0.5}$, $a_2 = 4 + (16 + n^2)^{0.5}$. Получается, $(16 + n^2)^{0.5}$ должно быть целым, т.к. 4 и a целые. Получается, $16 + n^2 = m^2$. Тогда, $m^2 - n^2 = (m - n)(m + n) = 16$. Т. к. m и n натуральные, то $m - n < m + n$ ($0 < 2n$), а значит может принимать только следующие значения {1, 2}. Т.к. 16 содержит в множителях только 2^5, то никаким числам, кроме степеней 2, m - n равняться не может (m + n натуральное число > 0, значит, раз произведение неизвестного числа на положительное равно положительному, то и неизвестное - положительное). Быть m - n равному или более 4 не может, т.к. в противном случае 16 / 4 >= m + n > m - n, получаем противоречие. При m - n = 1 m + n = 16 / 1 = 16, значит 2m = 17, значит m нецелое, что не подходит. Получаем, что возможно только m - n = 2 и m + n = 16 / 2 = 8. Значит, m = 5, n = 3. Значит, $a_1 = 4 - 5 = -1$, $a_2 = 4 + 5 = 9$. Это подходит под ограничения $a > 8$ или $a < 0$. При $a = -1$ $x^2 + ax + 2a = x^2 - x - 2$, корни -1 и 2 по следствию теоремы Виета, аналогично при $a = 9$ $x^2 + ax + 2a = x^2 + 9x + 18$, корни -6 и -3.

Ответ: $a_1 = -1$; $a_2 = 9$.

Комментарий:

Вопрос 3

Выполнен

Баллов: 3 из 20

Положительные числа a, b и c удовлетворяют условию $abc(a+b+c)=3$. Докажите неравенство $(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8$.

Из неравенства средних: $(abc)^{1/3}$ <= (a + b + c) / 3, значит abc(a + b + c) = 3 <= ((a + b + c)^3 / 27) * (a + b + c), значит (a + b + c) >= $81^{1/4}$, значит a + b + c >= 3, значит abc <= 1.

(a + b)(b + c)(c + a) + abc = 3abc + a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2 = (ab + ac + bc)(a + b + c) >= 3(ab + ac + bc)

Комментарий:
невозможно судить о том, каким образом Вы собираетесь получить окончательный ответ

Вопрос **4**

Выполнен

Баллов: 17 из 20

Какое наименьшее количество фишек можно расставить в клетках таблицы 99×99 так, чтобы в каждом квадрате 4×4 было не менее восьми фишек?

Для начала рассмотрим поле 96*96 клеток, считая от верхнего левого угла:
разделим его на квадраты 4 на 4 так, чтобы свободных клеток не осталось. Тогда, квадраты не имеют общих клеток, а значит суммарно нужно 96 * 96 / 16 * 8 = 48 * 96 фишек. Теперь рассмотрим две полоски 3 * 96 клеток справа и снизу от поля: они могут иметь общего с уже обозначенными квадратами не более 96 клеток (на каждую), т.е. если по тому же принципу разделить их на квадраты 4 * 4, позаимствовав для каждой из этих полос 3 * 96 ещё полосочку в 96 клеток. Тогда в лучшем случае необходимо добавить ещё 96 * 2 фишек. Итого 4800 фишек. Для последнего квадрата 3 * 3 по аналогичным рассуждениям нужна ещё одна фишка (ему не достаёт 7 клеток, а фишек нужно 8). Итого 4801 фишка. Пример подобного: будем чередовать заполненные вертикальные полосы фишками с пустыми: сначала пустую, потом полную. Так мы проложим поле в 96*99 клеток, а оставшиеся 3*99 следующим образом: в первую горизонтальную полосу кладём одну фишку, потом две пустые и в четвёртую 3, после чего замыкается - так мы замостим полосу 3*96 клеток. Оставшийся квадрат 3 на 3

Комментарий:
оценка минимального количества правильная, пример построен не до конца (фраза обрывается)

Вопрос **5**

Нет ответа

Балл: 20

Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Диагональ AC — биссектриса угла $\angle BAD$, точка M — середина стороны BC, а точка N — середина отрезка DO. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является вписанным тогда и только тогда, когда четырехугольник $ABMN$ является вписанным.

Вопрос **6**

Выполнен

Баллов: 20 из 20

Докажите, что у каждого из чисел $n!+1$, $n!+2$, \dots, $n!+n$ можно выбрать простой делитель, на который не делится ни одно из остальных.

Сделаем следующее: у каждого числа, представленное суммой n! и k, где k - натуральное число от 1 до n включительно, вынесем за скобку k. Это будет возможно всегда, т.к. n! всегда кратен натуральному k <= n из определения n!, как произведение всех чисел от 1 до n включительно. Получившееся в скобках число будет равно n! / k + 1, и, т.к. n! / k будет кратен всем числам от 1 до n, кроме k, если k простое и больше n / 2 (тогда, в произведении 1 * 2 * ... * n не встретится mk, где m натуральное число > 1 и в n! будет только один простой множитель k, в этом случае возможно, что n! / k + 1 являлся бы степенью k), n! / k + 1 будет взаимно простым со всеми числами от 1 до n (не беря в расчёт k из вышесказанного). Тогда, это число будет содержать в себе какой-то множитель, которого не было в n! (не беря в расчёт k). Если такой множитель будет одинаков для нескольких k, (допустим для k_1 и k_2), то и их разница, n! + k_1 - n! - k_2 = k_1 - k_2, тоже будет содержать этот множитель. Однако, это число k_1 - k_2 <= n - 1 < n, получается, что если бы он был в k2 - k1, то он был бы меньше n, значит, был бы в n!, что уже противоречит вышесказанному. Получается, если k не будет простым числом > n / 2, то этот делитель точно найдётся. Теперь предположим, что k - простое число, > n / 2. Тогда за нужный простой делитель сойдёт сам k, т.к. если для какого-нибудь другого k_3 число будет тоже кратно простому k > n/2, то мы получим противоречие, ведь в числе k_3 * (n! / k_3 + 1) не может k_3 быть кратно k, т.к. k - простое число > n / 2 и k_3 < n, т.е. даже если k_3 будет = 2k, то оно уже будет > n, и так для любого дополнительного множителя > 1, если k_3 != k, а значит, k_3 и k взаимно простые. Получается, n! / k_3 + 1 должно быть кратно k, т.к. k - простое и состоит всего из одного простого множителя k. Но т.к. k3 и k взаимно простые, а n! кратно k, то и n! / k_3 кратно k, а значит n! / k_3 + 1 тоже не кратно k, от чего получаем, что, если k - простой множитель n!, и k > n / 2, то k является подходящим простым множителем.

Комментарий:

« ПРЕДЫДУЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 21

СЛЕДУЮЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ »
Вариант 13