	ol2231685 ol2231685
Тест начат	понедельник, 14 Февраль 2022, 10:04
Состояние	Завершено
Завершен	понедельник, 14 Февраль 2022, 13:56
Прошло времени	3 час. 51 мин.
Оценка	**100,00** из 100,00

Вопрос
Инфо

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 5 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

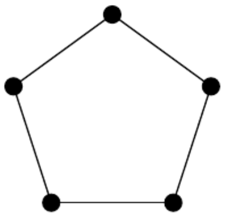
Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос **1**

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Костя выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа так, чтобы для всех этих чисел выполнялось свойство:
если числа a и b не соединены отрезком, то сумма $a + b$ должна быть взаимно проста с n, а если соединены, то числа $a + b$ и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1.
При каком наименьшем n существует такая расстановка?



1) Пронумеруем числа в вершинах пятиугольника по порядку a1, a2, a3, a4, a5. Предположим, n четно. Предположим, что в a1 стоит четное число. Тогда, поскольку a3 и a4 не соединены с a1, а значит a1+a3 и a1+a4 взаимно просты с n, а значит a1+a3 и a1+a4 нечетны, а значит a3 и a4 нечетны. Поскольку a2 не соединено с a4, a2+a4 взаимно просто с n, значит a2+a4 нечетно, значит a2 четно. Поскольку a5 не соединено с a2, a2+a5 взаимно просто с n, а значит нечетно, то есть a5 нечетно. Поскольку a3 не соединено с a5, a3+a5 взаимно просто с n, а значит нечетно, то есть a5 четно.

Противоречие, значит n - нечетно.

Если же нет ни одного четного числа, значит все нечетные, а значит сумма любых двух не соединенных четна, то есть не взаимно проста с n - противоречие.

2) Предположим, n - простое. Пусть a1 имеет остаток p1 от деления на n. Тогда a1+a2 и a1+a5 имеют общий делитель с n поскольку они соединены с a1, а т.к. n - простое, они делятся на n, значит остатки a2 и a5 от деления на n равны n-p1. Поскольку a3 соединено с a2, a2+a3 также делится на n, а значит остаток a3 от деления на n равен n-(n-p1)=p1. Но тогда остаток от деления на n числа a3+a5 равен p1+(n-p1)=0, значит a3+a5 делится на n, но эти числа не соединены ребром. Противоречие. Значит n - не простое.

3) Первые составные нечетные числа - 9, 15, 21, ...

Если n=9, можно провести рассуждения аналогичные предыдущему пункту, поскольку 9=3*3, то есть 3 - единственный простой множитель, а значит число, не взаимно простое с 9 должно делиться на 3. Пусть a1 имеет остаток p1 от деления на 3. Тогда a1+a2 и a1+a5 делятся на 3, значит остатки a2 и a5 от деления на 3 равны 3-p1. Поскольку a3 соединено с a2, a2+a3 также делится на 3, а значит остаток a3 от деления на n равен 3-(3-p1)=p1. Но тогда остаток от деления на n числа a3+a5 равен p1+(3-p1)=0, значит a3+a5 делится на 3, но эти числа не соединены ребром. Противоречие. Значит n=9 не подойдет.

4) при n=15 есть пример: 7; 5; 30; 27; 23, расставленные по кругу в таком порядке. 15=3*5.

7+5=12, делится на 3

5+30=35, делится на 5

30+27=57, делится на 3

27+23=50, делится на 5

23+7=30, делится на 5

7+30=37 - не делится на 3 и 5

7+27=34 - не делится на 3 и 5

5+27=32 - не делится на 3 и 5

5+23=28 - не делится на 3 и 5

30+23=53 - не делится на 3 и 5

Подходит

Ответ: n=15.

Комментарий:

Вопрос **2**

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

При $x, y, z \in (0, 1]$ найдите минимальное значение выражения

$$A = \frac{(x+2y)\sqrt{x+y-xy} + (y+2z)\sqrt{y+z-yz} + (z+2x)\sqrt{z+x-zx}}{xy+yz+zx}.$$

Докажем, что (x+2y)*sqrt(x+y-xy)>=3xy при 0<x<=1, 0<y<=1:

(x+2y)*sqrt(x+y-xy)>=3xy <=> ((x+2y)^2)*(x+y-xy)>=9*(x^2)*(y^2) <=>

<=> x^3+5*(x^2)*y-(x^3)*y+8x*y^2+4y^3-4x*y^3-13*(x^2)*(y^2)>=0 <=>

<=> (x^3)*(1-y)+5*(x^2)*y*(1-y)+8x*(y^2)*(1-x)+4*(y^3)*(1-x)>=0 - верно, т.к. каждое слагаемое >=0.

Значит (x+2y)*sqrt(x+y-xy)>=3xy. Аналогично (y+2z)*sqrt(y+z-yz)>=3yz и (z+2x)*sqrt(z+x-zx)>=3zx.

Тогда A>=(3xy+3yz+3zx)/(xy+yz+zx)=3

Равенство достигается при x=y=z=1.

Ответ: 3.

Комментарий:

Вопрос 3

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

На сторонах BC и AD вписанного четырехугольника $ABCD$ отмечены точки K и M соответственно, причем $BK : KC = AM : MD$. На отрезке KM выбрана такая точка L, что $KL : LM = BC : AD$. Найдите отношение площадей треугольников ACL и BDL, если известно, что $AC = p$ и $BD = q$.

Пусть a, b, c, d, k, l, m - комплексные координаты точек A, B, C, D, K, L, M соответственно. Пусть BK:BC=AM:AD=x. Тогда k=x*c+(1-x)*b, m=x*d+(1-x)*a, l=(m*BC+k*AD)/(AD+BC)=((x*d+(1-x)*a)*BC+(x*c+(1-

-x)*b)*AD)/(AD+BC) - линейная функция вида l(x)=Ax+B, то есть l находится на фиксированной прямой. При x=0: k=b, m=a, l(0)=(a*BC+b*AD)/(AD+BC), пусть L0 имеет координату l(0), а L1 - l(1). При x=1 k=c, m=d, l(1)=(c*BC+d*AD)/(AD+BC) => l(0) и l(1) на AB и CD соответственно. Значит, L лежит на L0L1. BL0:L0A=CL1:L1D=BC:AD. Рассмотрим отношения площадей треугольников ACL0 и BDL0, а также ACL1 и BDL1. Через p(X, YZ) обозначим расстояние от точки X до прямой YZ.

p(L0, AC)=p(B, AC); AL0:AB=p(B, AC)*AD:(AD+BC)

p(L0, BD)=p(A, BD)*BL0:AB=p(A, BD)*BC:(AD+BC).

Пусть N - точка пересечения AC и BD, а f - угол между диагоналями.

p(B, AC)=NB*sin(f) (или NB*sin=(180-f), что равнозначно)

p(A, BD)=NA*sin(f)

p(L0, AC):p(L0, BD)=p(B, AC)*AD/(p(A, BD)*BC)=(NB*AD)/(NA*BC)

Треугольники BNC и AND подобны по двум углам (<BNC=<AND как вертикальные, <NBC=<NAD как вписанные, опирающиеся на одну дугу CD)

Значит NB:NA=BC:AD и p(L0, AC):p(L0, BD)=(BC:AD)*(AD:BC)=1

Аналогично p(L1, AC):p(L1, BD)=1, то есть в крайних точках L0 и L1 отрезка L0L1 расстояния до AC и BD равны (даже ориентированные расстояния , если принять их от L0 до AC и BD положительными, то от L1 до AC и BD ориентированные расстояния равны и отрицательны). Так как ориентированное расстояние от точки до прямой меняется линейно (то есть ориентированные расстояния от l(x) до AC и BD зависят линейно от x) и в начале и в конце ориентированные расстояния от l(x) до AC и BD равны => равны обычные расстояния как их модули.

Значит S(ALC):S(BLD)=AC:BD=p:q.

Ответ: p:q.

Комментарий:

Вопрос **4**

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

Натуральное число x в системе счисления с основанием r $(r > 3)$ имеет вид $\overline{ppqq}$, причем $q = 2p$. Оказалось, что r-ичная запись числа x^2 представляет собой семизначный палиндром с тремя одинаковыми средними цифрами. (Палиндромом называется число, которое читается одинаково слева направо и справа налево). При каких r такое возможно?

x=p*r^3+p*r^2+2p*r+2p; 2p<r =>x^2=(p^2)*(r^6)+2*(p^2)*(r^5)+5*(p^2)*(r^4)+8*(p^2)*(r^3)+8*(p^2)*(r^2)+8*(p^2)*r+4p^2.

Так как x^2 - семизначное, то очевидно p^2<r, так как это старший разряд числа => 2p^2<2r. Значит или нет переноса в старший разряд, или туда переносится 1, или туда переносится 2 в случае переноса в предпоследний разряд из младших. Если его нет, то 2p^2<r; 4p^2 сравнимо по модулю r с p^2 (так как x^2 - палиндром) => 3p^2 делится на r, 2p^2<r => 3p^2<2r, p<>0 => 3p^2>0 =>3p^2 =r. Будем рассматривать разряды последовательно:

2-й: 8p^2+1-6p^2= 2p^2+1. Если есть еще перенос, то 2p^2+1>=3p^2 => p^2<=1 =>p=1, r=3 - противоречит условию. Значит, больше переноса нет, переносится только 2.

3-й: 8p^2+2-6p^2=2p^2+2. Если есть еще перенос, то 2p^2+2>=3p^2 => p^2<=2 => p=1, r=3 - противоречие, значит, больше переноса нет.

4-й: аналогично 3-му

5-й: 5p^2+2-3p^2=2p^2+2. Аналогично 3-му, но переносится 1.

6-й: 2p^2+1 - равен 2-му, переноса нет.

7-й: p^2 - равен первому, переноса нет.

То есть при r=3p^2 такое возможно.

Если в старший разряд переносится 1, то есть 2p^2>=r.

Тогда в 7-м разряде p^2+1, значит, и в 1-м должно быть p^2+1. Значит 4p^2-(p^2+1)=3p^2-1 делится на r. 3p^2-1>2p^2>=r; 3p^2-1<3p^2<3r => 3p^2-1=2r => r=1.5p^2-0.5.

Заметим, что p нечетное. Будем последовательно рассматривать разряды.

2-й: 8p^2+2-2.5*(3p^2-1)=0.5p^2+4.5. Если 0.5p^2+4.5>=r => p^2+9>=3p^2-1 => 2p^2<=10 => p=1, r=1 - противоречие, значит переноса больше нет, он равен 5.

3-й: 8p^2+5-2.5*(3p^2-1)=0.5p^2+7.5 если 0.5p^2+7.5>=r => p^2+15>=3p^2-1 => 2p^2<=16 =>p^2<=8 => p<3 => p=1 - аналогичное противоречие, переноса больше нет, итоговый 5.

4-й: аналогично 3-му.

5-й 5p^2+5-1.5*(3p^2-1)=0.5p^2+6.5. По условию это должно быть равно 3-му и 4-му разрядам. Так как они отличаются на 1, это возможно только при r=1, что противоречит условию. Значит таких r, при которых выполнялось бы искомое условие не существует.

Если в старший разряд переносится 2, то есть 2p^2>=r.

Тогда в 7-м разряде p^2+2, значит и в первом должно быть p^2+2. Значит 4p^2-(p^2+2)=3p^2-2 делится на r. 3p^2-2>2p^2>=r для любого p>1. Если p=1, то r=1 - противоречие. 3p^2-2<3p^2<3r => 3p^2-2=2r => r=1.5p^2-1 => p - четное.

Будем последовательно рассматривать разряды.

2-й: 8p^2+2-2.5*(3p^2-2)=0.5p^2+7. Если 0.5p^2+7>=r => p^2+14>=3p^2-2 => 2p^2<=16 => p=2, r=5- единственный случай, иначе переноса больше нет, он равен 5.

3-й: 8p^2+5-2.5*(3p^2-2)=0.5p^2+10 если 0.5p^2+10>=r => p^2+20>=3p^2-2 => 2p^2<=22 =>p^2<=11 => p<3 => p=2 - аналогично r=5, иначе переноса больше нет, итоговый 5.

4-й: аналогично 3-му.

5-й 5p^2+5-1.5*(3p^2-2)=0.5p^2+8. По условию это должно быть равно 3-му и 4-му разряду, однако они отличаются на 2, что возможно только при r=1 или r=2 - противоречие.

Если p=2, r=5, то 2244*2244=11324401 - не подойдет.

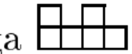
Ответ: для любого r=3p^2, где p - любое натуральное число.

Комментарий:

Вопрос **5**

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

Доска $m \times n$ $(m, n > 5)$ разрезана на фигурки из шести единичных квадратиков вида  (фигурки можно поворачивать и переворачивать). При каких m и n такое возможно?

ol2231685_5.pdf

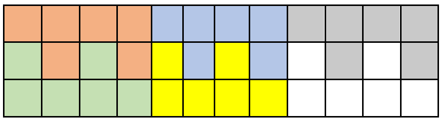
Комментарий:

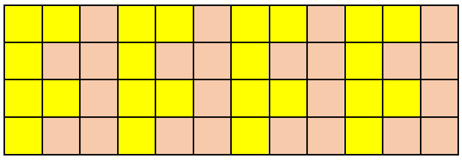
« ПРЕДЫДУЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 27

СЛЕДУЮЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 17 »

Ответ: при m или n кратном 12 или при m кратном 4, n кратном 3, или при m кратном 3, n кратном 4.

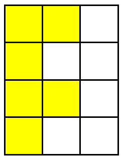
Примеры: Если m (аналогично n кратно 12), то второе число при n>5 можно разбить на 3 и 4 следующим образом: 6=3+3, 7=3+4, 8=4+4, остальные получаются добавлением необходимого числа троек к этим (поскольку у них все возможные остатки от деления на 3). Рассмотрим прямоугольники 3*12 и 4*12:





Так как одна сторона кратна 12, а другая раскладывается на 3 и 4 (их сумму), мы можем это сделать.

Если m делится на 3 и n делится на 4 (или наоборот, что аналогично).

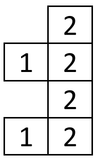


Раз можно замостить прямоугольник 4*3, то можно сделать так, поскольку m делится на 3, а n – на 4.

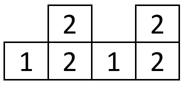
Докажем, что других вариантов нет:

Поскольку в одной фигурке 6 клеток, общее количество клеток доски четно. Не нарушая общности, предположим, что число столбцов четно.

Воспользуемся матрасной раскраской по столбцам в 2 цвета. Тогда для фигуры есть 2 варианта раскраски:



Или



В каждом из вариантов 4 клетки одного цвета и 2 другого. Пусть фигурок, в которых 4 клетки «1» x, а фигурок, где 4 клетки «2» - y. Поскольку количество столбцов четно, количество клеток этих цветов совпадает, а значит 4x+2y=4y+2x, то есть x=y.

Тогда общее число клеток доски равно 6*(x+y)=6*2x=12x, делится на 12, а значит m*n делится на 12.

Если m делится на 3, но не делится на 2, значит n делится на 4, такой пример есть.

Если m делится на 6, но не делится на 12, то n делится на 2 и не делится на 4 (если N делится на 4, такой пример есть). Аналогично, если поменять m и n.

Если m или n делится на 12, такой пример есть.

Осталось рассмотреть случай, когда m делится на 6, но не на 12, и n делится на 2, но не на 4.

Тогда $m=12k+6$ и $n=4l+2$

Раскрасим доску следующим образом:

1	2	1	2	1
3	1	3	1	3
1	2	1	2	1
3	1	3	1	3
1	2	1	2	1

И так далее.

Количество клеток второго и третьего типа будут равны $(6k+3)(2l+1)$, поскольку цвет встречается в одной из двух строк и в одном из двух столбцов. Это нечетное число, так как. Каждая из скобок нечетна. Рассмотрим, какие бывают фигурки:

	2
3	1
	2
3	1

Или

	1		1
1	2	1	2

Есть только типы: (2, 2, 2), (4, 2, 0) и (4, 0, 2).

То есть в каждой фигурке четное число клеток второго типа, а значит и общее число клеток второго типа должно быть четным, а у нас это число нечетное – противоречие, значит такого варианта не существует, а все остальные мы рассмотрели.