	ol2250180 ol2250180
Тест начат	понедельник, 14 Февраль 2022, 10:05
Состояние	Завершено
Завершен	понедельник, 14 Февраль 2022, 14:10
Прошло времени	4 час. 5 мин.
Оценка	**75** из 100

Вопрос
Инфо

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 5 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

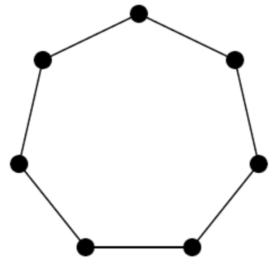
Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос **1**

Выполнен

Баллов: 20 из 20

На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Саша выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа так, чтобы для всех этих чисел выполнялось свойство:
если числа a и b не соединены отрезком, то сумма $a+b$ должна быть взаимно проста с n, а если соединены, то числа $a+b$ и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1.
При каком наименьшем n существует такая расстановка?



35.

Пример:

1 4 3 7 35 5 9 надо поставить по порядку.

Оценка:

Заметим что n не может делится ни на 2 ни на 3.

Пусть n делится на 2. Тогда заметим что есть 4 числа одной четности и какие-то два из них тогда не соединены так как чисел 7 => n не может делится на 2. Пусть н делится на 3. Тогда n=3*5 или n=3*7, иначе n>35. Рассмотрим какое-нибудь число. Пусть оно дает остаток 1 при делении на 3. Тогда среди оставшихся 6 чисел еще хотя бы 4 единицы. (Аналогично если рассматриваем двойку) Ведь иначе есть хотя б три 0 => два не соединены => ?! Осталось еще хотя б 5 последовательных кругов и сумма любых двух соседних должна делится именно на 5 или 7.

(Зависит от того чему равно n 15 или 21) Тогда среди этих минимум 5 чисел должны соответственно чередоваться остатки по модулю 5 или 7. Но тогда это X y x Y ... И тогда есть пара не соседних не взаимнопростая с n. Значит n хотя б 35.

Комментарий:

Вопрос 2

Выполнен

Баллов: 20 из 20

При $x, y, z \in (0, 2]$ найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{(x^3-6)\sqrt[3]{x+6} + (y^3-6)\sqrt[3]{y+6} + (z^3-6)\sqrt[3]{z+6}}{x^2+y^2+z^2}.$$

Проверим что (x^3-6)*(x+6)^1/3<=x^2 Если мы это проверим то максимум будет 1 и он как раз достигается при x=y=z=2.

Рассмотрим:

((x^3-6)*(x+6)^1/3)'=3x^2*(x+6)^1/3+1/3(x+6)^-2/3*(x^3-6)

Нас интересует отрезок от 6^1/3 до 2, иначе просто (x^3-6)*(x+6)^1/3<0<x^2.

2x-(3x^2*(x+6)^1/3+1/3(x+6)^-2/3*(x^3-6))=0

6x*(x+6)^2/3-(9x^2*(x+6)+x^3-6)=0

3x(x+6)^2/3-(5x^3+27x^2-3)=0

Покажем что на рассматриваемом отрезке это всегда меньше 0. Тогда минимум x^2-((x^3-6)*(x+6)^1/3) или в 2 или в 6^1/3 но и там и там он больше 0. Тогда победа.

3x(x+6)^2/3+3<5x^3+27x^2

3x(x+6)^2/3+3<3x*(x+6)+3=3x^2+18x+3<3x^3+18x^2+3x^2<5x^3+27x^2 так как x>1.

Тогда действительно (x^3-6)*(x+6)^1/3<=x^2.

Сложим еще два аналогичных, получим что дробь меньше либо равна 1.

Комментарий:

Вопрос 3

Выполнен

Баллов: 20 из 20

Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Внутри треугольника AOB выбрана такая точка K, что прямая KO является биссектрисой угла CKD. Луч DK вторично пересекает описанную окружность треугольника COK в точке L, а луч CK вторично пересекает описанную окружность треугольника DOK в точке M. Найдите отношение площадей треугольников ALO и BMO.

Заметим: S(ALO)/S(LOC)=AO/OC, так как общая высота.

S(LOC)/S(MOD)=CO*CO/DO*DO, так как треугольник LOC подобен треугольнику MOD по двум углам: KOL=LKC=MKD=MOD и DMO=DKO=OKC=OLC.

S(MOD)/S(MOB)=OD/OB, так как общая высота.

Перемножим эти три равенства:

S(ALO)/S(MOB)=AO*CO/BO*DO=1, так как AO*CO это степень O относительно описанной окружности ABCD как и

BO*DO поэтому они равны.

Комментарий:

Вопрос **4**

Выполнен

Баллов: 0 из 20

Натуральное число x в системе счисления с основанием r ($r \leqslant 36$) имеет вид $\overline{ppqq}$, причем $2q = 5p$. Оказалось, что r-ичная запись числа x^2 представляет собой семизначный палиндром с нулевой средней цифрой. (Палиндромом называется число, которое читается одинаково слева направо и справа налево). Найдите сумму r-ичных цифр числа x^2.

Комментарий:

Вопрос **5**

Выполнен

Баллов: 15 из 20

При каких n клетчатую доску $n \times n$ можно разбить по клеточкам на один квадрат 2×2 и некоторое количество полосок из пяти клеток так, что квадрат будет примыкать к стороне доски?

Ответ: дающие остаток 2 при делении на 5.

Пример: Пусть n=5k+2. Выделим квадрат 5k x 5k в котором лежит левая нижняя клетка квадрата. Он разбивается на полоски из пяти клеток. Так же вырежем угловой квадратик 2 x 2 пересекающийся с квадратом 5k x 5k только по вершине. Две остальные полоски 2 x 5к тоже разрежем на полоски 1 x 5.

Оценка:

Очевидно, что n дает или остаток 2 или 3 при делении на 5, потому что площадь с одной стороны это n*n, а с другой 5L+4. Что же делать, если n дает 3 при делении на 5(n=5k+3)? Выделим каемку ширины 2. В ней 40k+8 клеток. Оставшееся от доски количество клеток делится на 5. Посмотрим как занята каемка. в ней есть квадрат 2 x 2. Это 4 клетки. Еще есть u полосок которые полностью в ней лежат. Это еще 5u клеток. Еще есть v полосок которые выступают на w клеток суммарно. Это еще 5v-w клеток. Но так как середина делится на 5 то раз в нее влезает w клеток то столько же и вылезает. А это w клеток. Тогда 40k+8=4+5v+5u-w+w=4+5r ?!

Комментарий:
Непонятно, с чем противоречие.

« ПРЕДЫДУЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 13

СЛЕДУЮЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ »
Вариант 21