	ol2210260 ol2210260
Тест начат	понедельник, 14 Февраль 2022, 10:06
Состояние	Завершено
Завершен	понедельник, 14 Февраль 2022, 13:18
Прошло времени	3 час. 12 мин.
Баллы	65/120
Оценка	**54** из 100

Вопрос **Инфо**

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 6 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос **1**

Выполнен

Баллов: 20 из 20

Петя и Вася одновременно выехали на самокатах навстречу друг другу. Ровно посредине между ними расположен мост. Дорога от Пети до моста асфальтированная, а от Васи до моста — грунтовая. Известно, что по грунтовой дороге они едут с одинаковыми скоростями, а по асфальту Петя движется в 3 раза быстрее, чем по грунтовке. Петя за час добрался до моста и, не останавливаясь, продолжил движение. Через какое время после выезда он встретит Васю?

Пусть скорость движения по грунтовой дороге - x единиц/час, тогда скорость движения по асфальтированной дороге - 3x единиц/час. Тогда длины дорог от Пети до моста и от Васи

до моста равны 3x единиц (т.к. Петя проехал до моста за 1 час). В таком случае, когда Петя начал движение по грунтовой дороге, расстояние между ним и Васей было равно 2x единиц (т.к. Вася уже проехал x единиц за первый час). Скорость сближения Пети и Васи в таком случае равна x + x = 2x единиц/час, т.е. они сократят расстояние в 2x единиц между собой за 1 час. Прибавляем к этому времени то время, что Петя ехал по асфальтированной дороге и получим, что Петя встретит Васю через 2 часа после выезда.

Комментарий:

Вопрос **2**

Выполнен

Баллов: 20 из 20

Дан квадратный трехчлен $2x^2 - x - 36$. Найдите все целые x, при которых значения этого трехчлена равны квадрату простого числа.

2x^2 - x - 36 = (x + 4)(2x - 9) = p^2. Т.к. по условию x - целое число, то оба множителя тоже могут принимать только целые значения. Заметим, что если p - простое число, то p^2 делится только на 1, p и p^2. Значит, оба множителя в левой части не делятся на что-то, кроме 1 и p, а поскольку оба числа целые (т.е. не могут принимать значения в интервалах (-1; 0) и (0; 1)), то степень простого делителя p в обоих множителях не превосходит 2 (если какой-то из множителей равен p^n, где n > 2, то другой равен p^(2-n), если оба числа целые, то 2 - n >= 0).

Значит, либо какой-то множитель из (x + 4)(2x - 9) равен 1/-1 (тогда второй равен p^2/-p^2), либо оба равны p/-p (других вариантов быть не может). Поскольку оба множителя монотонно возрастают, единственное значение x, при котором они равны: x=13 (13 + 4 = 26 - 9 = 17 -> p^2 = 17^2), это будет одним из искомых x. Теперь рассмотрим все x, при которых какой-то из множителей равен 1/-1.

(x + 4) = -1: x=-5 -> 2x - 9 = -19. 19 не является квадратом простого числа.

(x + 4) = 1: x=-3 -> 2x - 9 = -15. -15 не является квадратом простого числа.

(2x - 9) = -1: x=4 -> x + 4 = 8. -8 не является квадратом простого числа.

(2x - 9) = 1: x=5 -> x + 4 = 9. 9 является квадратом простого числа 3.

Искомые значения x: 5 и 13.

Комментарий:

Вопрос 3

Выполнен

Баллов: 0 из 20

Положительные числа a, b и c удовлетворяют условию $abc(a+b+c) = ab+bc+ca$.
Докажите неравенство $5(a+b+c) \geqslant 7+8abc$.

Случай, когда все числа a, b, c равны 1 тривиален, для него неравенство выполняется (5 * 3 >= 7 + 8) (в дальнейшем не будем рассматривать этот случай).

Сократив первое выражение, получим a + b + c = 1/a + 1/b + 1/c. Это значит, что среди чисел a, b, c точно есть хотя бы одно число, меньшее единицы (иначе левая часть больше правой). Аналогично, среди чисел a, b, c есть хотя бы одно число, большее 1 (иначе правая часть больше левой).

Пусть a <= b <= c, тогда число a всегда < 1, число c всегда > 1, число b может быть как больше, так и меньше 1.

Комментарий:
Решение не завершено, неравенство не доказано.

Вопрос **4**

Выполнен

Баллов: 10 из 20

У Маши есть 1000 бусинок 50 различных цветов, по 20 бусинок каждого цвета. При каком наименьшем n для любого способа собрать из всех бусинок ожерелье можно выбрать n последовательных бусинок, среди которых есть бусинки 25 разных цветов?

Всегда достаточно взять хотя бы 462 бусинки подряд.

461 бусинку подряд будет взять недостаточно, если все бусинки одного цвета расположены рядом в ожерелье (т.е. сначала идут 20 бусинок одного цвета, потом 20 бусинок другого цевта etc.).

Комментарий:
Не доказано, что n=462 подходит для любого способа сбора бус.

Вопрос **5**

Нет ответа

Балл: 20

Точки A_1 и B_1 — середины сторон BC и AC остроугольного треугольника ABC, точка M — середина отрезка A_1B_1. Точка H — основание высоты, опущенной из вершины C на сторону AB. Через точку M проведены окружности, касающиеся сторон BC и AC соответственно в точках A_1 и B_1. Обозначим вторую точку пересечения окружностей через N. Докажите, что точки H, M и N лежат на одной прямой.

Вопрос **6**

Выполнен

Баллов: 15 из 20

У натурального числа n нет ни одного делителя d, удовлетворяющего неравенству $n^2 \leq d^4 \leq n^3$. Докажите, что n имеет простой делитель, четвертая степень которого больше, чем n^3.

Свойство делителей: если n делится на d, то n делится также и на n/d.

Степенью вхождения простого делителя p в число x будем называть такое d, что x делится на p^d, но не делится на p^(d+1).

Случай, когда n = 1, не рассматривается, поскольку 1 не является ни простым, ни составным числом.

Если число n - простое, то очевидно, что n является простым делителем самого себя -> условие выполняется.

Если число n имеет только один простой делитель - p, то n = p^x, где x > 1 -> если x - чётное, то число p^(x/2) = n^(1/2) является делителем числа n - противоречие, аналогично для нечётных x >= 3, будет делитель, равный n^((x-1)/2x), число (x-1)/2x для любых нечётных x >= 3 лежит в интервале [1/4; 3/4] (при x=3: 1/3 = 1/2-1/6, при увеличении x число (x-1)/2x будет приближаться к 1/2, т.к. (x-1)/2x = 1/2 - 1/2x) -> противоречие.

Заметим, что если для n нет таких делителей d, что n^2 <= d^4 <= n^3 -> n не имеет делителей в интервале [n^(1/2); n^(3/4)].

Из свойства делителей получим, что у n также нет делителей n/d, которые могли бы находится в интервале [n/(n^(3/4)) = n^(1/4); n/(n^(1/2))=n^(1/2)], т.е. n не имеет делителей в интервале [n^(1/4); n^(3/4)].

Осталось доказать, что в интервале (n^(3/4); n] найдётся простой делитель.

В составном числе всегда найдётся хотя бы один простой делитель <= n^(1/2) (если это не так, то поскольку составное число имеет хотя бы два различных простых делителя x1 и x2 (случай, когда простой делитель всего один, рассмотрен выше), их произведение также должно быть делителем n, однако если x1, x2 > n^(1/2), то x1 * x2 > n, противоречие).

Значит, для числа n найдётся хотя бы один простой делитель, меньший n^(1/4) (т.к. ни один делитель не должен лежать в интервале [n^(1/4); n^(3/4)]).

Рассмотрим каждый простой делитель < n^(1/4) в степени вхождения этого делителя в n. Произведение всех этих чисел обозначим как P, P должно быть < n^(1/4) (иначе оно либо лежит в интервале [n^(1/4); n^(3/4)] (что приводит к противоречию), либо больше n^(3/4), но тогда поскольку каждый простой делитель P < n^(1/4), а само P > n^(3/4), то удаляя каждый раз по одному простому делителю из разложения P, мы будем уменьшать его не более, чем в n^(1/4) раз, однако такими действиями мы можем сделать P < n^(1/4) (оставить в разложении какой-то простой множитель в степени 1) -> всегда можно убрать несколько множителей из разложения P/уменьшить степень вхождения некоторых множителей в разложение P так, что получившееся число будет находиться в интервале [n^(1/4); n^(3/4)], а поскольку все делители P являются делителями n, отсюда будет следовать, что у n есть делитель в интервале [n^(1/4); n^(3/4)], противоречие).

Если бы число n не имело других простых делителей, помимо тех, что меньше n^(1/4), то P = n (поскольку число x равно произведению всех простых делителей x в их степенях вхождения, это следует из основной теоремы арифметики). Однако, это приводит к противоречию -> существует ещё хотя бы один простой делитель d, который не нарушает свойства числа n, и который не находится в интервале (1; n^(1/4)). Значит, d находится в интервале (n^(3/4), n) -> d^4 > n^3. Что и требовалось доказать.

Комментарий:
Решение недостаточно подробное.

« ПРЕДЫДУЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 12

СЛЕДУЮЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 22 »

УТВЕРЖДАЮ:
Ответственный секретарь Оргкомитета ОШ СПбГУ
Хуршудян А.Л. (_______________)

ПРОТОКОЛ
рассмотрения апелляции участника Олимпиады школьников
Санкт-Петербургского государственного университета

г. Санкт-Петербург № МАТ-26 *«31» марта 2022 г.*

Апелляционная комиссия в составе:

1. Дементьев Андрей Викторович,
2. Алимова Ольга Викторовна,
3. Каратаева Гульнара Мирсатовна.

рассмотрела апелляционное заявление участника Олимпиады школьников СПбГУ:

ФИО: ***Туревич Артём Александрович***

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады: ***Математика***

Количество набранных баллов до апелляции: ***65***

По результатам рассмотрения апелляционного заявления участника Олимпиады, Апелляционная комиссия приняла следующее решение: ***повысить оценку за работу до 70 баллов***.

Задача 6.
Решение считать верным, поднять оценку за задачу до 20 баллов.

Количество набранных баллов после апелляции: 70