	ol2202563 ol2202563
Тест начат	понедельник, 14 Февраль 2022, 10:02
Состояние	Завершено
Завершен	понедельник, 14 Февраль 2022, 14:04
Прошло времени	4 час. 1 мин.
Оценка	**55,00** из 100,00

Вопрос
Инфо

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 5 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

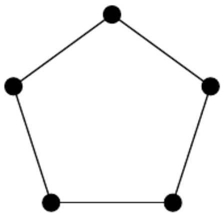
Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос **1**

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Костя выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа так, чтобы для всех этих чисел выполнялось свойство:
если числа a и b не соединены отрезком, то сумма $a+b$ должна быть взаимно проста с n, а если соединены, то числа $a+b$ и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1.
При каком наименьшем n существует такая расстановка?



Докажем, что в разложении не может участвовать двойка. Допустим она участвует в разложении. Пронумеруем элементы в кружочках 1...5 по часовой стрелке. Тогда будем обозначать 1 за элемент в 1 кружочке и т.д. 1+3 и 1+4 не делится на 2, а значит такое возможно только если у 3 и 4 одинаковые остатки при делении на 2, 2 + 4 и 2 + 5 не делится на 2, а значит у 4 и 5 одинаковые остатки. И т.д мы так проделываем и получаем что у всех одинаковые остатки при делении на 2. Но тогда 1+3 будет делиться на 2 а значит такого невозможно. Теперь докажем что в разложении числа n более 1 простого множителя. Допустим это не так и число имеет вид p^n. Тогда соседние элементы обязаны делиться на p а не соседние не должны делиться на p. Но тогда если у 1 остаток при делении на p - x, то у 2 p-x, у 3 - x, а у 4 p-x, но тогда 1+4 делится на p, чего не должно быть, а значит в разложении n более двух простых множителей ни 1 из которых не равен 2. Ну такой минимальный n это n = 3*5 = 15. Пример для 15 - числа 2 10 11 9 3 расположенные по кругу в таком порядке.
Ответ:15

Комментарий:

Вопрос **2**

Выполнен

Баллов: 15,00 из 20,00

При $x, y, z \in (0, 1]$ найдите минимальное значение выражения

$$A = \frac{(x+2y)\sqrt{x+y-xy} + (y+2z)\sqrt{y+z-yz} + (z+2x)\sqrt{z+x-zx}}{xy+yz+zx}.$$

sqrt(x+y-xy) оценим. По неравенству о средних x+y >= 2sqrt(xy) Т.к все меньше или равно 1 то sqrt(xy) >= xy, тогда корень больше чем (xy)^(1/4)

Теперь оценим x+2y. Оно больше, чем x+y+xy По неравенству о средних это больше чем 3*(x^2y^2)^(1/3) тогда общее произведение больше или равно чем 3*xy^(11/12) но т.к xy <=1 то и xy<=xy^(11/12), аналогично мы проделываем с остальными частями в числителе и получаем что все больше или равно чем 3(xy+yz+zx), тогда общая дробь не меньше чем 3

равенство достигается при x = 1 y = 1 z =1

Ответ: 3

Комментарий:
Оценка 3*xy^(11/12) не получится.

Вопрос 3

Выполнен

Баллов: 0,00 из 20,00

На сторонах BC и AD вписанного четырехугольника $ABCD$ отмечены точки K и M соответственно, причем $BK : KC = AM : MD$. На отрезке KM выбрана такая точка L, что $KL : LM = BC : AD$. Найдите отношение площадей треугольников ACL и BDL, если известно, что $AC = p$ и $BD = q$.

Комментарий:

Вопрос **4**

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

Натуральное число x в системе счисления с основанием r $(r > 3)$ имеет вид $\overline{ppqq}$, причем $q = 2p$. Оказалось, что r-ичная запись числа x^2 представляет собой семизначный палиндром с тремя одинаковыми средними цифрами. (Палиндромом называется число, которое читается одинаково слева направо и справа налево). При каких r такое возможно?

Представим число x в системе r. оно имеет вид p(2+2r+r^2+r^3)=p(2+r^2)(1+r)

Возведем в квадрат, получим p^2(4+8r+8r^2+8r^3+5r^4+2r^5+r^6). Тогда p^2 обязано быть меньше r^6 иначе число будет 8 значным или более. Тогда в палиндроме на 1 месте стоит p^2, а на последнем 4p^2-kr = p^2 из этого следует т.к r > p^2 и k - целое то k = 1 и r = 3p^2

Также возможен случай, когда k = 2 r = 1,5p^2 рассмотрим его тогда на 6 мест стоит 8p^2 + 2 то есть 0,5p^2 + 2, дальше 0,5p^2 + 5, дальше 0,5p^2+5, дальше 0.5p^2 + 5 дальше 0,5p^2+3 дальше p^2+1. Но тогда первая цифра p^2 а последня p^2+1 чего не может быть, значит такой вариант не реализуем.

Тогда вернемся к k = 1 и r = 3p^2 на 6 месте 8p^2+1, то есть 2p^2+1, дальше 2p^2+2, дальше 2p^2+2 и дальше 2p^2+2, дальше 2p^2+1 и последняя p^2 Таким образом мы и получили нужный палиндром, причем получается он всегда. А значит если 2p^2 + 2 < 3p^2 то такое подойдет для любого r = 3p^2

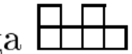
Ответ: r = 3p^2 при любом p натуральном больше 1.

Комментарий:

Вопрос **5**

Выполнен

Баллов: 0,00 из 20,00

Доска $m \times n$ $(m, n > 5)$ разрезана на фигурки из шести единичных квадратиков вида  (фигурки можно поворачивать и переворачивать). При каких m и n такое возможно?

Комментарий:

« ПРЕДЫДУЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 27

СЛЕДУЮЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ »
Вариант 17