	ol2200285 ol2200285
Тест начат	понедельник, 14 Февраль 2022, 10:04
Состояние	Завершено
Завершен	понедельник, 14 Февраль 2022, 14:05
Прошло времени	4 час.
Оценка	**55,00** из 100,00

Вопрос
Инфо

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 5 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

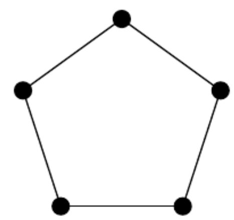
Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос 1

Выполнен

Баллов: 15,00 из 20,00

На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Костя выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа так, чтобы для всех этих чисел выполнялось свойство:
если числа a и b не соединены отрезком, то сумма $a+b$ должна быть взаимно проста с n, а если соединены, то числа $a+b$ и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1.
При каком наименьшем n существует такая расстановка?



Оценка: При n = 1, очевидно, расстановки не существует, тк у 1 нет других делителей больше 1 => n всегда взаимно проста со всеми суммами, а значит рёбер быть не должно. Докажем, что если n = k ^ m, где k > 1, m > 0, то такой расстановки не существует:

Заметим, что при таком n, если сумма чисел в вершинах делится на k, то они должны быть соединены, иначе не должны быть. Поставим в какую-то вершину число с остатком a при делении на k. Если двигаться по ребрам по часовой стрелке, то в следующей вершине должно стоять число с таким остатком b при делении на k, что a + b = 0 (mod k). Существует лишь 1 такой остаток b, тк если бы их было 2: c, d, то c + a = 0 = d + a(mod k) => c = d(mod k) - противоречие. Значит в следующей вершине стоит число с остатком b. Тогда в следующей за этой вершиной стоит число с остатком a, а за ней опять с остатком b. Но заметим, что 4 вершина по обходу содержит число с остатком b, а первая с остатком a и они не соединены - противоречие. Получается, что при таком n, не бывает расстановки.

Докажем, что если n кратно 2, то расстановки не существует:

Заметим, что при таком n, если две вершины одинаковой чётности, то между ними проведено ребро, иначе не проведено. Каждая вершина соединена с двумя соседними и не соединена с двумя противолежащими => чётность этой вершины должна быть такой же, как у соседних => у всех вершин одинаковая четность, но так быть не может, тк не все вершины соединены друг с другом - противоречие. Получается, что при таком n, не бывает расстановки.

Заметим, что все натуральные числа меньше 15 либо чётные, либо имеют вид n = k ^ m, где k > 1, m > 0, либо единица => при n < 15 расстановки не существует.

Пример: При n = 15:

Двигаясь по ребрам по часовой стрелке в вершинах числа: 6, 3, 7, 5, 4.

15 делится на 3 и 5. 6 + 3 кратно 3, 3 + 7 кратно 5, 7 + 5 кратно 3, 5 + 4 кратно 3, 4 + 6 кратно 5. 6 + 7 = 13 - простое, 5 + 6 = 11 - простое, 3 + 5 = 8 - кратно лишь 2, 3 + 4 = 7 - простое, 7 + 4 = 11 - простое.

Ответ: При n = 15.

Комментарий:
В случае n = k ^ m число k должно быть простым.

Вопрос 2

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

При $x, y, z \in (0, 1]$ найдите минимальное значение выражения

$$A = \frac{(x+2y)\sqrt{x+y-xy} + (y+2z)\sqrt{y+z-yz} + (z+2x)\sqrt{z+x-zx}}{xy+yz+zx}.$$

A >= ((x + 2y)(x + y - xy) + (y + 2z)(y + z - yz) + (z + 2x)(z + x - zx))/(xy + yz + zx), тк при 0 < a, b <= 1: 0< (a + b - ab) = (a + b(1 - a)) <= 1.

A >= ((x^2 + 2y^2 - x^2y - 2xy^2) + 3xy + (z^2 + 2x^2 - xz^2 - 2zx^2) + 3zx + (y^2 - zy^2 + 2z^2 - 2yz^2)+ 3zy)/ (xy + yz + zx) >= 3(xy + yz + zx) / (xy + yz + zx) = 3(при 0 < a, b <= 1: (a^2 + 2b^2 - ba^2 - 2ab^2) >= 0, тк a^2 - a^2b >= 0, тк 0 < b <= 1 и 2b^2 - 2b^2a >= 0, тк 0 < a <= 1) => A >= 3.

При x=y=z=1: A = 3 => Мин. знач. выражения = 3.

Ответ:3 - мин. знач. выражения

Комментарий:

Вопрос 3

Выполнен

Баллов: 0,00 из 20,00

На сторонах BC и AD вписанного четырехугольника $ABCD$ отмечены точки K и M соответственно, причем $BK : KC = AM : MD$. На отрезке KM выбрана такая точка L, что $KL : LM = BC : AD$. Найдите отношение площадей треугольников ACL и BDL, если известно, что $AC = p$ и $BD = q$.

Ответ: p/q.

Комментарий:

Вопрос 4

Выполнен

Баллов: 0,00 из 20,00

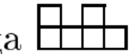
Натуральное число x в системе счисления с основанием r $(r > 3)$ имеет вид $\overline{ppqq}$, причем $q = 2p$. Оказалось, что r-ичная запись числа x^2 представляет собой семизначный палиндром с тремя одинаковыми средними цифрами. (Палиндромом называется число, которое читается одинаково слева направо и справа налево). При каких r такое возможно?

Комментарий:

Вопрос **5**

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

Доска $m \times n$ $(m, n > 5)$ разрезана на фигурки из шести единичных квадратиков вида  (фигурки можно поворачивать и переворачивать). При каких m и n такое возможно?

Раскрасим доску в шахматную раскраску. Замети, что наша фигурка при такой раскраске всегда имеет 2 клетки одного цвета и четыре второго. Заметим, что раз доска разбивается на фигурки размера 6, то её площадь делится на 6 => чёрных и белых клеток при шахматной раскраске поровну => количество фигурок при разбиении делится на 2, тк иначе клеток какого то цвета больше. Получается, что площадь доски делится на 12. Раскрасим доску через каждый ряд в чёрный и через каждый столбец в чёрный, начиная с верхнего стобца и левого ряда. Заметим, что при такой раскраске наша фигурка либо вся черная, либо содержит 2 белых клетки. Тогда белых клеток должно быть чётное число. Если обе стороны чётные, то белых клеток чётное число, если одна из сторон делится на 4. Исходя из всех этих рассуждений стороны у доски могут быть такими: одна делится на 12, другая любая; одна делится на 4, другая на 3. По площади кажется, что ещё может быть, что одна сторона делится на 6, а другая на 2, но этого недостаточно, тк по последнему рассуждению если обе стороны чётные, то одна из них делится на 4.
Приведём пример разрезания доски, когда одна сторона делится на 12, а вторая любая:

Составим из наших фигурок прямоугольники 3 * 4. Докажем по индукции, что любое нечётное число больше 5 можно представить в виде суммы троек и четверок: База: 6 = 3 + 3, 7 = 3 + 4, 8 = 4 + 4. Инд. переход: пусть мы умеем разбивать любое число больше 5, но меньше n > 8 на сумму троек и четверок. Докажем, что мы умеем разбивать и число n на сумму троек и четверок. Мы умеем разбивать n - 3 на сумму троек и четверок. прибавим к этому разбиению 3 и получим n, чтд.

Пусть число столбцов в доске не кратно 12, а строк кратно(аналогично, если число столбцов кратно 12, а строк не кратно). Теперь доску надо разбить на столбцы по 3 и по 4 клетки(что мы научились делать, ведь n, m > 5) и заполнить весь столбец прямоугольниками, что возможно, тк количество строк делится на 12.(а 12 кратно 3 и 4).

Приведём пример разрезания доски, когда одна сторона делится на 4, а вторая на 3:

Пусть число столбцов кратно 3, а строк кратно 4(аналогично, если число строк кратно 3, а столбцов 4). Тогда разрежем доску на столбцы ширины 3, а эти столбцы разделим на строки ширины 4. Получим искомое разбиение.

Ответ: при m кратно 12, n любое; при n кратно 12, m любое; при n кратно 3, m кратно 4; при m кратно 3, n кратно 4.

Комментарий:

«
ПРЕДЫДУЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 48

СЛЕДУЮЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 37
»