	ol2220304 ol2220304
Тест начат	понедельник, 14 Февраль 2022, 10:03
Состояние	Завершено
Завершен	понедельник, 14 Февраль 2022, 14:05
Прошло времени	4 час. 1 мин.
Оценка	**75** из 100

Вопрос
Инфо

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 4 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос 1

Выполнен

Баллов: 10 из 10

Некоторый треугольник разрезали на пять маленьких треугольников так, как показано на рис. 1. Могли ли при этом все пять маленьких треугольников оказаться равными?

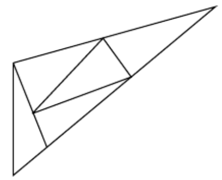

Рис. 1

ol2220304_1.png

Комментарий:

Вопрос **2**

Выполнен

Баллов: 46 из 50

На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Костя выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа, не превосходящие n, так, чтобы для всех поставленных им чисел выполнялось свойство: *если числа a и b соединены отрезком, то разность $a - b$ должна быть взаимно проста с n, а если не соединены, то числа $a - b$ и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1.* Например, для картинки на рис. 2 Костя взял $n = 45$ и подобрал подходящую расстановку — она показана на рис. 3.

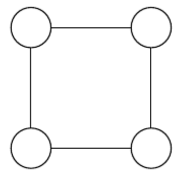

Рис. 2

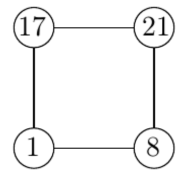

Рис. 3

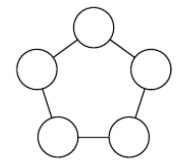

Рис. 4

а) При каком наименьшем n существует требуемая расстановка чисел на рис. 2?
б) Можно ли расставить числа в кружочках на рис. 4 при $n = 25$?
в) Можно ли расставить числа в кружочках на рис. 4 при $n = 39$?
г) При каком наименьшем n существует расстановка чисел в кружочках на рис. 4?

а) Давайте заметим, что любое простое число не может быть числом n (так как у числа n должен быть хотя бы один делитель отличный от 1 и самого числа n). Тогда давайте начнём перебор с 4 (первое составное число), но n=4 нам не подходит, так как количество чисел меньше 4 равно 3 (3,2,1). Следующее составное число - 6. Рассмотрим числа меньше 6 и числа, которые могут быть соединенны с ними: 5-(4); 4-(5;3); 3-(4;2); 2-(3;1); 1-(2). Числа 5 и 1 мы использовать не можем, так как они могут стоять рядом только с одним другим числом, а числа соединенны ровно с двумя другими. Рассмотрим следующее после 6 составное число - 8. Рассмотрим числа меньше 8 и числа, которые могут быть соединенны с ними: 7-(6;4;2); 6-(7;5;3;1); 5-(6;4;2); 4-(7;5;3;1); 3-(6;4;2); 2-(7;5;3;1); 1-(6;4;2). Из этих чисел мы уже можем составить требуемую расстановку.

7 - 6 | 7-6=1; 6-5=1; 5-4=1; 1 и 8 взаимно просты; 7-4=3; 3 и 8 взаимно просты;

| | | 6-4=7-5=2; число 2 и 8 не взаимно просты(общий делитель - 2);

4 - 5 |

б) Нельзя. Рассмотрим делители числа 25, он только один и равен 5. Рассмотрим верхний кружочек и два нижних, разность верхнего с любым нижним должна делиться на 5, следовательно числа в верхнем кружочке и в нижних имеют одинаковый остаток от деления на 5. следовательно разность двух нижних кружочков тоже делится на 5, следовательно расставить числа в кружочки нельзя.

в) Нельзя. Рассмотрим делители числа 39, их два и они равны 13 и 3. Рассмотрим разности чисел в кружочках, не соединённых между собой. От каждого кружочка исходит две таких связи, причём такие, что в одной связи разность кратна 3, а в другой 13 (иначе повторится ситуация из пункта б)). Рассмотрим эту расстановку. Обозначим числа расставленные в кружочках за a, b, c, d, e (числа расстановлены по кругу по алфавиту), и рассмотрим не соединённые между собой кружочки и разности чисел в них.

Предположим, что $a-c$ кратна 3, тогда $a-d$ кратна 13, следовательно $d-b$ кратна 3, $b-e$ кратна 13, а $c-e$ кратна 3. Но тогда у нас получается, что числа a, c, e дают одинаковый остаток при делении на 3, и разность $a-e$ кратна 3, что противоречит условию, следовательно при $n=39$ нельзя расставить числа.

г) Давайте поймём, что у числа n должно быть не менее трёх различных простых делителя, иначе будут повторятся ситуации из пунктов б) и в). Тогда мы должны выбрать три минимальных простых числа, чтобы получить минимальное n. Эти числа 2, 3, 5, а их произведение равно 30, но давайте поймём, что разностей кратных какому-нибудь из этих чисел не может быть больше двух (иначе повторяется ситуация из пункта б)). Тогда у нас будет хотя бы одна пара чисел, не соединённых между собой, разность которых кратна 2. Рассмотрим случай, когда такая пара только одна. Тогда числа не соединённые с этой парой чисел отрезком имеют одинаковую чётность, а сами эти числа соединены отрезком, следовательно их разность кратна 2, следовательно они не взаимно просты с 30. Рассмотрим случай когда таких пар две. Заметим, что в парах нет одинаковых чисел, иначе повторяется ситуация из пункта б), а также числа в разных парах имеют разную чётность, иначе мы приходим к противоречию с высказыванием, что разностей кратных какому-нибудь из этих чисел не может быть больше двух. Тогда рассмотрим последнее пятое число. Чтобы разность этого числа с его соседями не была кратна двум, оно должно быть одновременно и чётным и нечётным, а такого не может быть. следовательно число n не должно быть кратно двум. Тогда минимальное число n равно произведению тройки простых чисел 3, 5, 7, следовательно минимальное $n = 105$. Расставим числа 10, 21, 20, 16, 14 в кружку в том порядке, в котором они перечислены.

21-10=11; 21-20=1; 20-16=4; 16-14=2; 14-10=4; число 105 взаимно просто со всеми этими разностями.

20-10=10; 21-16=5; 20-14=6; 16-10=6; 21-14=7; число 105 имеет хотя бы один общий делитель со всеми этими разностями.

Комментарий:
а) 6

рассуждение было бы верным, если бы в условии было "меньше n"

б) 10

в) 10

г) 20

Вопрос 3

Выполнен

Баллов: 9 из 10

На доске написано 2021 минусов. Петя и Вася играют в такую игру. Ход состоит в том, что можно один минус заменить на плюс, либо стереть один плюс и один минус, либо два минуса заменить на три плюса. Ходят по очереди, первым ходит Петя, проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

Давайте введём понятие выигрышной и проигрышной позиции. Выигрышной позицией называется такое количество минусов на доске. что как бы не ходил оппонент, вы всегда выигрываете. А проигрышной - такое количество минусов, что не важно как вы будете ходить, ведь оппонент всегда выигрывает.

Пусть мы играем за первого игрока (Петю).

Тогда давайте рассмотрим выигрышные позиции.

Самая первая выигрышная позиция такая, что сейчас наш ход и остался 1 минус. Следующая в. п.- сейчас наш ход и осталось 2 минуса. Давайте рассмотрим позицию когда осталось три минуса.

Этот позиция будет проигрышной так как из неё можно сделать только выигрышную(Так как за раз можно убрать только 1 или 2 минуса), следовательно позиции, когда ход наш и осталось 4 или 5 минусов, - выигрышные, а позиция, когда ход наш и осталось 6 минусов, - проигрышная. Теперь давайте поймём. что любая позиция, в которой количество минусов не делится на 3, для нас выигрышная, а когда делится - проигрышная. Докажем, что мы всегда сможем сделать так, чтобы после нашего хода оппонент оказался в проигрышной ситуации. Мы начинаем с 2021 минуса. Мы сразу же делаем так, чтобы после нашего хода количество минусов делилось на 3.

Первым ходом мы убираем 2 минуса, оставляя тем самым количество минусов кратное трём.

Потом начинаем действовать по данной инструкции. Если оппонент убрал один минус, мы убираем два ($3x-1-2=3x-3=3(x-1)$), если оппонент убрал два минуса убираем один ($3x-2-1=3x-3=3(x-1)$).

Следовательно Петя. действую по этой инструкции выиграет.

Комментарий:
ничего не сказано про плюсы

Вопрос **4**

Выполнен

Баллов: 10 из 30

а) Имеется большая компания людей — больше 100 человек, в которой некоторые люди дружат. Верно ли, что каждую такую компанию можно разбить на две группы «дружественным способом», т. е. так, чтобы у каждого человека друзей в своей группе было больше либо равно, чем друзей в противоположной группе?

б) Докажите, что каждую компанию, в которую входит 2022 человека, можно разбить на 15 групп «недружественным способом», т. е. так, чтобы у каждого человека количество друзей в своей группе составляло не более $1/15$ от общего числа его друзей.

а) Давайте построим граф, в котором вершины это люди, а рёбра означают, что эти два человека, дружат. Тогда давайте рассмотрим случай, когда в этом графе больше одной компоненты связанности и ровна одна компонента связанности.
1 случай. Если в графе две и более компонент связанности, то мы распределяем людей по группам так, чтобы каждая компонента связанности находилась только в одной группе, и чтобы в каждой группе находилась хотя бы одна компонента связанности.

2 случай. Если в графе ровно одна компонента связанности. Рассмотрим полный граф больше чем на сто вершин. Этот граф нельзя разделить на две группы, удовлетворяющих условию, так как из каждой вершины выходит равное количество рёбер, и даже если в одной группе все вершины будут удовлетворять условию, то во второй рёбер, исходящих из вершины в ту же группу, будет меньшее количество чем во вторую, следовательно и условию эти вершины удовлетворять не будут, следовательно не все компании можно разбить на две такие группы.

Комментарий:
а) 10

б) 0

ПРЕДЫДУЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 11

СЛЕДУЮЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Заключительный этап - Математика 6-7 21/22 (скрытый)

Да, могли.

Пусть эти треугольники были прямоугольными с катетами длиной 1 и 2.

Доказательство:

Построим первый треугольник так, чтобы он стоял на катете длиной 2 и второй катет был направлен направо. Второй треугольник разместим так, чтобы вершина при меньшем угле второго треугольника совпадала с вершиной при угле 90 первого треугольника, а катет длиной 2 второго лежал на той же прямой, что и катет длиной 2 первого. Третий треугольник размести так, чтобы он дополнял до прямоугольника второй треугольник. Четвёртый треугольник размести на плоскости так чтобы его гипотенуза лежала на продолжении гипотенузы первого, а катет длиной 2 четвёртого треугольника совпадал с катетом длиной 2 третьего треугольника. Пятый треугольник построим так, чтобы его катет длиной 1 лежал на продолжении катета длиной 2 первого треугольника, а вершины при меньшем и прямом углах совпадали с вершиной при большем угле четвёртого треугольника и вершиной при прямом угле второго треугольника соответственно.