	ol2229505 ol2229505
Тест начат	понедельник, 14 Февраль 2022, 10:08
Состояние	Завершено
Завершен	понедельник, 14 Февраль 2022, 14:05
Прошло времени	3 час. 56 мин.
Оценка	**60,00** из 100,00

Вопрос
Инфо

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 5 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

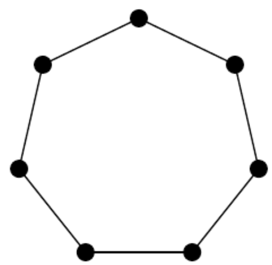
Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос **1**

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Саша выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа так, чтобы для всех этих чисел выполнялось свойство:
если числа a и b не соединены отрезком, то сумма $a + b$ должна быть взаимно проста с n, а если соединены, то числа $a + b$ и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1.
При каком наименьшем n существует такая расстановка?



Ясно, что все 7 чисел попарно различны, иначе оба соседа одного из двух равных чисел должны быть соединены со вторым, но общий сосед у двух кружков может быть только один - противоречие!
Рассмотрим на какие простые числа может делится n.

n - не может делится на 2 т.к. как бы мы не расставляли 7 чисел по кругу: найдутся 2 не соседствующих числа одной чётности, а их сумма будет не взаимно проста с n.

Пусть n делится на 3; рассмотрим остатки чисел стоящих по кругу при делении на 3. Заметим, что чисел кратных трём может быть не более двух, при этом они должны соседствовать. Остальные (от пяти до семи) чисел имеют остаток 1 или 2, заметим, что числа имеющие разные остатки обязательно должны соседствовать т.к. 1 + 2 = 3, но тогда все числа кроме делящихся на 3 имеют одинаковый остаток при делении на 3, иначе будут соединены некоторые два не соседствующих кружка. Таким образом, если n делится на 3: остаётся не менее 6 сумм чисел не делящихся на 3, но не взаимно простых с n.

Заметим, что не может быть более двух подряд идущих отрезков, нарисованных благодаря делимости сумм чисел на один и тот же простой делитель - p. Для любого простого делителя n может быть не более 2 чисел делящихся на него, при чём они должны стоять рядом. Пусть число имеет остаток t не = 0 при делении на p, тогда его сосед должен иметь остаток p-t. Пусть второй сосед числа с остатком p - t тоже имеет остаток p. Так и только так могут быть образованы 2 подряд идущих отрезка благодаря делимости сумм чисел на один и тот же простой делитель - p, но заметим, что мы никак не можем продлить данную цепочку не образовав связи между не соседствующими вершинами.

1)Таким образом, если n делится на 3: остаётся не менее 6 сумм чисел не делящихся на 3, но не взаимно простых с n.

2)Заметим, что не может быть более двух подряд идущих отрезков, нарисованных благодаря делимости сумм чисел на один и тот же простой делитель - p.

Из этих двух утверждений следует, что если n делится на 3, то оно также делится хотя бы на 2 других простых числа (т.к. остаётся 6 подряд идущих отрезков)

Также из второго утверждения следует, что n делится хотя бы на 2 простых числа.

Из вышесказанного в купе с тем, что n не делится на 2 следует, что n >= 5*7 = 35 (наименьшие простые числа после 2 и 3)

Числа: 35 - 15 - 62 - 18 - 31 - 9 - 21 расставленные по кругу удовлетворяют n = 35

ОТВЕТ: 35

Комментарий:

Вопрос 2

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

При $x, y, z \in (0, 2]$ найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{(x^3-6)\sqrt[3]{x+6} + (y^3-6)\sqrt[3]{y+6} + (z^3-6)\sqrt[3]{z+6}}{x^2+y^2+z^2}.$$

Заметим, что при x из $(0; 6^{1/3}]$: $x^2 > 0 >= (x^3 - 6)(x + 6)^{1/3}$

При x из $(6^{1/3}; 2)$: обе части больше нуля, рассмотрим их отношение (правая часть/x^2) = $(x - 6/x^2)(x + 6)^{1/3}$. На $(0; +\infty)$: $6/x^2$ убывает, значит первая скобка возрастает как сумма возрастающих, при подстановке x = 2 в $(x - 6/x^2)$ получаем ½, следовательно на $(6^{1/3}; 2)$: левая скобка < ½, правая же скобка < 2 т.к. $(x + 6)^{1/3}$ возрастает на всём множестве вещественных чисел, а при подстановке x = 2: получаем 2. Тогда произведение меньше 1.

Получается на (0;2]: $x^2 >= (x^3 - 6)(x + 6)^{1/3}$. Равенство достигается при x = 2 (легко убедиться)

Теперь рассмотрим всю дробь:

- Числитель <= знаменателя
- Знаменатель > 0

Следовательно значение дроби не превышает 1, при x = y = z = 2 это значение достигается (легко убедиться).
ОТВЕТ: 1

Комментарий:

Вопрос 3

Выполнен

Баллов: 0,00 из 20,00

Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Внутри треугольника AOB выбрана такая точка K, что прямая KO является биссектрисой угла CKD. Луч DK вторично пересекает описанную окружность треугольника COK в точке L, а луч CK вторично пересекает описанную окружность треугольника DOK в точке M. Найдите отношение площадей треугольников ALO и BMO.

Комментарий:

Вопрос **4**

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

Натуральное число x в системе счисления с основанием r ($r \leqslant 36$) имеет вид $\overline{ppqq}$, причем $2q = 5p$. Оказалось, что r-ичная запись числа x^2 представляет собой семизначный палиндром с нулевой средней цифрой. (Палиндромом называется число, которое читается одинаково слева направо и справа налево). Найдите сумму r-ичных цифр числа x^2.

Если p^2 >= r, то x^2 в r - ичной системе счисления восьмизначное число => p^2 < r <=36 => p <= 5
Из соотношения 2q = 5p ясно, что p - чётно, следовательно p - либо 2, либо 4 (0 быть не может т.к. число начинается с p)

1) Если p = 2, то q = 5.

Т.к. число - палиндром: первая цифра = последней => 4 ≡ 25 mod r => r - либо 7, либо 21.

В 7-ричной системе) $(2255)^2$ = 5525344 не подходит

В 21-ричной системе) $(2255)^2$ = 4950594 подходит, сумма цифр = 36

Стоит также рассмотреть случаи, когда 4 + 1 ≡ 25 mod r => r - либо 10, либо 20. (назовём такое перескоком через 1)

В 10-ричной системе) $(2255)^2$ = 5085025 не подходит

В 20-ричной системе) $(2255)^2$ = 4|9|6|2|7|11|5 не подходит

Случай перескока через 2 рассматривать нет необходимости т.к. он будет происходить при r < 7 (т.к. при r = 7: перескок идёт только через 1)

25 ≡ 1 mod 6 не подходит

r <= 5 не подходит т.к. r > q

2) Если p = 4, то q = 10.

Т.к. число - палиндром: первая цифра = последней => 16 ≡ 100 mod r => r - либо 21, либо 28.

В 28-ричной системе) $(4|4|10|10)^2$ = 17|7|17|26|19|7|16 не подходит

В 21-ричной системе) $(4|4|10|10)^2$ = 17|14|19|1|0|15|16 не подходит

Перескок через 1 не осуществим т.к. 17 ≡ 100 только по модулю 83 (простое число > 43)

Перескок через 2 означает, что в первом разряде - 18 => основание системы счисления хотя бы 19, но

В 19-ричной системе) $(4|4|10|10)^2$ = 17|18|9|18|0|15|5 перескок только через 1.

Следовательно рассмотрены все случаи.
ОТВЕТ: 36

Перескоком через n мы обозначали ситуацию, когда первая r-ричная цифра числа - не p^2, а p^2+n заметим, что в рассматриваемых условиях:
(1) Если при каком то r = k наблюдается перескок через n, то при r < k также будет перескок хотя бы через n. Пусть нет, пусть в k-ричной системе счисления есть перескок через n, а при t < k перескок < чем через n, тогда

Число в k-ричной системе > $(p^2+n)*k^7$ > $(p^2+n)*t^7$ > Число в t-ричной системе, но числа в разных систе

(2) Если при каком то r = k наблюдается перескок через n, то при r > k будет перескок не более чем через n (для n = 0 тоже верно). Пусть нет, пусть в k-ричной системе счисления есть перескок через n, а при t > k перескок > чем через n, тогда

Число в k-ричной системе $< (p^2+n+1)*k^7 < (p^2+n+1)*t^7 <$ Число в t-ричной системе

Комментарий:

Вопрос **5**

Выполнен

Баллов: 0,00 из 20,00

При каких n клетчатую доску $n \times n$ можно разбить по клеточкам на один квадрат 2×2 и некоторое количество полосок из пяти клеток так, что квадрат будет примыкать к стороне доски?

Комментарий:

« ПРЕДЫДУЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 11

СЛЕДУЮЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 23 »