	ol2225579 ol2225579
Тест начат	понедельник, 14 Февраль 2022, 10:12
Состояние	Завершено
Завершен	понедельник, 14 Февраль 2022, 14:10
Прошло времени	3 час. 57 мин.
Оценка	**65** из 100

Вопрос
Инфо

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 4 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос **1**

Выполнен

Баллов: 10 из 10

Некоторый треугольник разрезали на пять маленьких треугольников так, как показано на рис. 1. Могли ли при этом все пять маленьких треугольников оказаться равными?

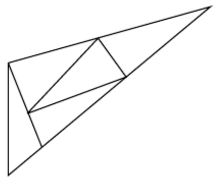
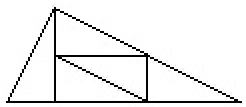


Рис. 1

Ответ: да, могли.



В данном примере углы, которые кажутся, что по 90 градусов, по 90 градусов. При этом у всех треугольников здесь один катет больше другого в 2 раза. Очевидно, что то, что показано и рассказано выше, можно начертить.

Комментарий:

Вопрос **2**

Выполнен

Баллов: 35 из 50

На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Костя выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа, не превосходящие n, так, чтобы для всех поставленных им чисел выполнялось свойство: *если числа a и b соединены отрезком, то разность $a - b$ должна быть взаимно проста с n, а если не соединены, то числа $a - b$ и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1.* Например, для картинки на рис. 2 Костя взял $n = 45$ и подобрал подходящую расстановку — она показана на рис. 3.

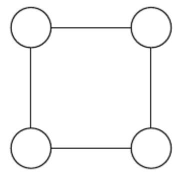


Рис. 2

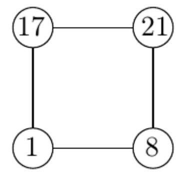


Рис. 3

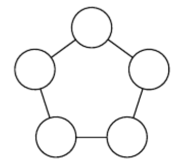


Рис. 4

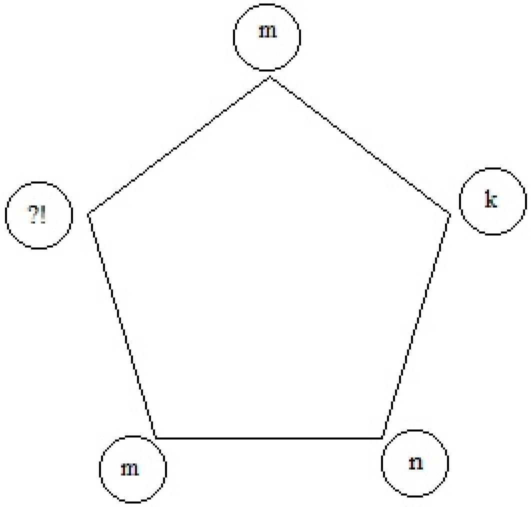
а) При каком наименьшем n существует требуемая расстановка чисел на рис. 2?
б) Можно ли расставить числа в кружочках на рис. 4 при $n = 25$?
в) Можно ли расставить числа в кружочках на рис. 4 при $n = 39$?
г) При каком наименьшем n существует расстановка чисел в кружочках на рис. 4?

А) Заметим, что n > или = 4, так как числа различные, а кружочков 4. Пример на n=4: выставим по кругу по порядку числа от 1 до 4. Тогда разность между соединёнными кружочками всегда равна или 1, или 3, а 1 и 3 взаимно просто с 4. А не соединённые кружочки имеют разность 2, а НОД(2,4)=2. Пример подходит.

Б) Ответ: нет. От противного. Давайте посмотрим на наименьшее число в кружочках. Пусть это x. Тогда несмежные с ним кружочки

равны x+k и x+m. Заметим, что тогда к и м равны 5, 10, 15, 20. Заметим, что тогда разность смежных друг с другом чисел x+k и x+m равна |m-k|. Но это число делится на 5, как и 25, а следовательно имеет с ним общий множитель больше 1. Противоречие.
В) От противного. Для начала докажем, что ровно 1 из несмежных с кружочком кружочек имеет точно такой же остаток при делении на 3. Смотрим на любое число. Пусть это Ъ. Тогда несмежные с ним числа должны быть вида Ъ+3Ь или Ъ+13Й при возможных отрицательных значениях Ь и Й. Но если несмежные кружочки одинакового вида, то их разность делится на 13 или 3 и не взаимно просто с 39. Значит против числа обязательно стоят 2 числа разных видов, и, очевидно, ровно 1 из них имеет такой же остаток. Тогда пусть есть число с остатком m по модулю 3 (далее всегда по модулю 3). Тогда напротив него стоят числа с остатками m и n. А напротив другого числа с остатком m уже стоит число с остатком m, а ,следовательно, и

число с остатком k. k не равно n, иначе их разность делится на 3, и всё плохо. Тогда напротив числа с остатком n уже стоит число с другим остатком, а значит оставшееся имеет остаток n. Аналогично число напротив k имеет остаток k, но это то же с



самое число! Противоречие.

Г) Заметим, что простые числа на роль числа n не подойдут, так как все разности противоположных чисел должны быть равны этому простому числу, а максимальная возможная разность равна это простое минус 1, что меньше простого числа. Заметим, что минимальное возможное число равно 5, так как числа не повторяются, а кружков у нас 5. Но 5 простое, на него примера нет. Следующее число 6. На него примера так же нет. Сейчас докажем. Заметим, что 6 в кружках быть не может. Потому что рядом с ним однозначно стоят числа 1 и 5(очевидно). А рядом с 1 только 2, а с 5 только 4, но тогда разность между 2 и 4 не взаимно проста с 6. Противоречие. Тогда есть все числа от 1 до 5, но тогда с 1 может стоять только одна 2. Противоречие. Дальше простая 7. Выше доказано, что нельзя. Дальше 8 (также разбор верен для всех чётных n), но тогда рядом с числами 1 чётности (либо чётные, либо нечётные, всё равно) стоят числа второй чётности, а напротив чисел первой чётности стоят числа 2 чётности, но тогда для соседних с этим числом это не выполняется. Значит для 8 не работает. Дальше 9, но для 9 случай аналогичен 25 (см. выше). Дальше 10, 11, 12, 13, 14, 15. На 215 есть пример.

Комментарий:
а) 10

б) 10

в) 10

г) 5

доказано, что n нечетное и имеет хотя бы два простых делителя

Вопрос **3**

Выполнен

Баллов: 10 из 10

На доске написано 2021 минусов. Петя и Вася играют в такую игру. Ход состоит в том, что можно один минус заменить на плюс, либо стереть один плюс и один минус, либо два минуса заменить на три плюса. Ходят по очереди, первым ходит Петя, проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

Заметим, что проиграть можно, только если больше не осталось ни одного минуса. Тогда давайте посмотрим, сколько минусов забирает каждый вариант хода. 1. -1; 2. -1; 3. -2. Заметим, что 2021 сравнимо с 2 по модулю 3. Тогда предложим стратегию за Петю. Пусть он сначала возьмёт и 2 минуса сделает 3 плюсами. А потом, если противник уничтожает 1 минус, он уничтожает 2. Этот ход всегда можно сделать, так как он не зависит от плюсов. Если же Вася уничтожает 2 минуса, Петя один минус делает плюсом. Этот ход также всегда можно сделать, так как он также не зависит от плюсов. Такими действиями Васе достанется 0 минусов, и он по очевидным причинам не может сделать ход. Ответ: Петя.

Комментарий:

Вопрос **4**

Выполнен

Баллов: 10 из 30

а) Имеется большая компания людей — больше 100 человек, в которой некоторые люди дружат. Верно ли, что каждую такую компанию можно разбить на две группы «дружественным способом», т. е. так, чтобы у каждого человека друзей в своей группе было больше либо равно, чем друзей в противоположной группе?

б) Докажите, что каждую компанию, в которую входит 2022 человека, можно разбить на 15 групп «недружественным способом», т. е. так, чтобы у каждого человека количество друзей в своей группе составляло не более $1/15$ от общего числа его друзей.

А) Ответ: нет, неверно. Пример, когда это не выполняется. Есть 101 человек, при этом каждый человек дружит с каждым. Тогда их нельзя разделить на равные группы, так как их нечётное количество, и в какой-то из групп людей будет меньше хотя бы на 1, и в ней-то и будет человек, у которого в этой группе меньше друзей, чем в другой.

Б)

Комментарий:

« ПРЕДЫДУЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 11

СЛЕДУЮЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Заключительный этап - Математика 6-7 21/22 (скрытый) »