	ol2220203 ol2220203
Тест начат	понедельник, 14 Февраль 2022, 10:05
Состояние	Завершено
Завершен	понедельник, 14 Февраль 2022, 14:02
Прошло времени	3 час. 56 мин.
Оценка	**80** из 100

Вопрос
Инфо

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 4 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос **1**

Выполнен

Баллов: 10 из 10

Некоторый треугольник разрезали на пять маленьких треугольников так, как показано на рис. 1. Могли ли при этом все пять маленьких треугольников оказаться равными?

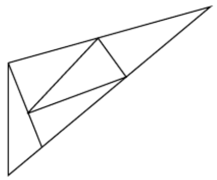


Рис. 1

ol2220203_1.pdf

Комментарий:

На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Костя выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа, не превосходящие n, так, чтобы для всех поставленных им чисел выполнялось свойство: *если числа a и b соединены отрезком, то разность $a-b$ должна быть взаимно проста с n, а если не соединены, то числа $a-b$ и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1.* Например, для картинки на рис. 2 Костя взял $n = 45$ и подобрал подходящую расстановку — она показана на рис. 3.

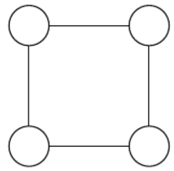


Рис. 2

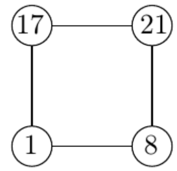


Рис. 3

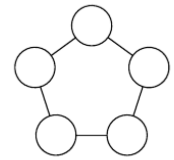


Рис. 4

а) При каком наименьшем n существует требуемая расстановка чисел на рис. 2?
б) Можно ли расставить числа в кружочках на рис. 4 при $n = 25$?
в) Можно ли расставить числа в кружочках на рис. 4 при $n = 39$?
г) При каком наименьшем n существует расстановка чисел в кружочках на рис. 4?

ol2220203_2.pdf

Комментарий:

Вопрос 3

Выполнен

Баллов: 10 из 10

На доске написано 2021 минусов. Петя и Вася играют в такую игру. Ход состоит в том, что можно один минус заменить на плюс, либо стереть один плюс и один минус, либо два минуса заменить на три плюса. Ходят по очереди, первым ходит Петя, проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

ol2220203_3.pdf

Комментарий:

Вопрос **4**

Выполнен

Баллов: 10 из 30

а) Имеется большая компания людей — больше 100 человек, в которой некоторые люди дружат. Верно ли, что каждую такую компанию можно разбить на две группы «дружественным способом», т. е. так, чтобы у каждого человека друзей в своей группе было больше либо равно, чем друзей в противоположной группе?

б) Докажите, что каждую компанию, в которую входит 2022 человека, можно разбить на 15 групп «недружественным способом», т. е. так, чтобы у каждого человека количество друзей в своей группе составляло не более $1/15$ от общего числа его друзей.

ol2220203_4.pdf

Комментарий:
а) 10

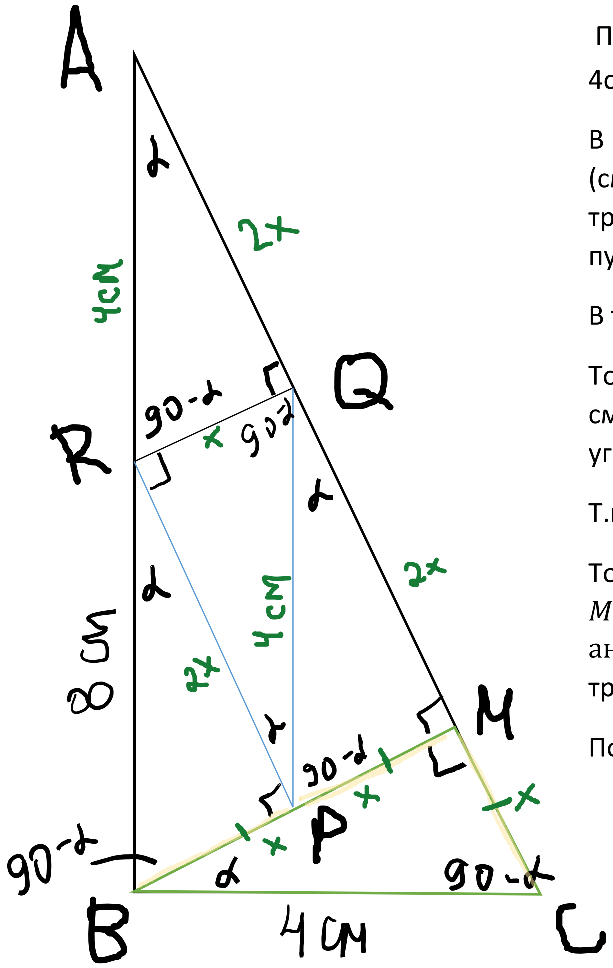
б) 0

ПРЕДЫДУЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Заключительный этап - Математика 6-7 21/22 (скрытый)

СЛЕДУЮЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 21

Задача 1:

Да, такой треугольник существует. Давайте, приведем пример и докажем, что он работает:



Построим прямоугольный треугольник со сторонами 8 см, 4см и $\sqrt{8^2+4^2}$.

В полученном треугольнике проведем из точки B высоту на AC (см.рисунок). Получим, что треугольник BMC подобен треугольнику ABC, соответственно, отношение BM к MC = 2 : 1, пусть MC, для наглядности = X.

В треугольнике ABM проведем средние линии PQ. QP, RP.

Тогда, т.к PR параллельно AM, причем угол AMB = 90° (как смежный с 90), тогда угол RPM = 90, как параллельные, тогда угол PRQ = 90, аналогично, т.к RQ параллельно PM.

Т.к PM = MC ,тогда QM = BM, угол PQM = $\alpha =$ углу MBC.

Тогда угол RPQ = $\alpha = \mathrm{PQM}$, значит PQR = 90 - α, т. к $PQ = MC$, значит треугольник $PQR = BMC$, аналогично с треугольником QPM = BMC (по катету = x и трем углам)

Поймем, что треугольник BRP = треугольник BMC:

- BR = BC (т.к BR = ½ AB, BC = ½ AC)
- Угол RPB = 180 – угол RPM = 180 – 90 = 90
- Угол RBP = 90 – MBC = 90 – α = BCM
- Тогда треугольник PBP = треугольник MBC(по катету и прилежащему углу)

Поймем, что ARQ = BMC:

AR = ½ FB = BC

Угол AQR = BMQ = 90 (как соответственные при параллельных прямых и секущей)

Угол ARQ = 180 – угол QRP – угол BRP = 180 – 90 - α = 90 – α

Тогда треугольник ARQ = треугольник BMQ (по катету и прилежащему углу)

Т.е у нас все треугольник будут равны BMC, т.е мы привели пример, когда все треугольники равны и доказали, что он работает

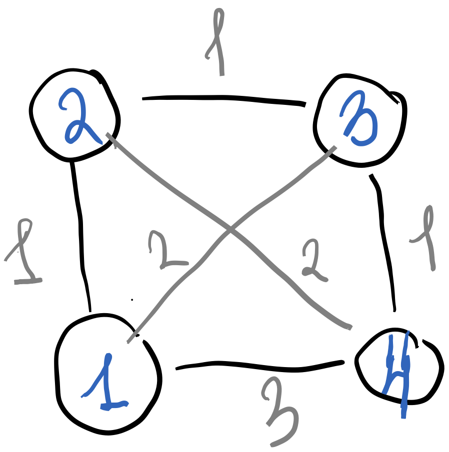
Ответ: да, могло быть

Задача 2

А) При n = 4.

Оценка: Не сложно понять, что при n < 4, у нас не найдется 4 различных чисел, чтобы заполнить ими фигуру, т.е n >= 4

Пример:



Поймем, что пример верный:

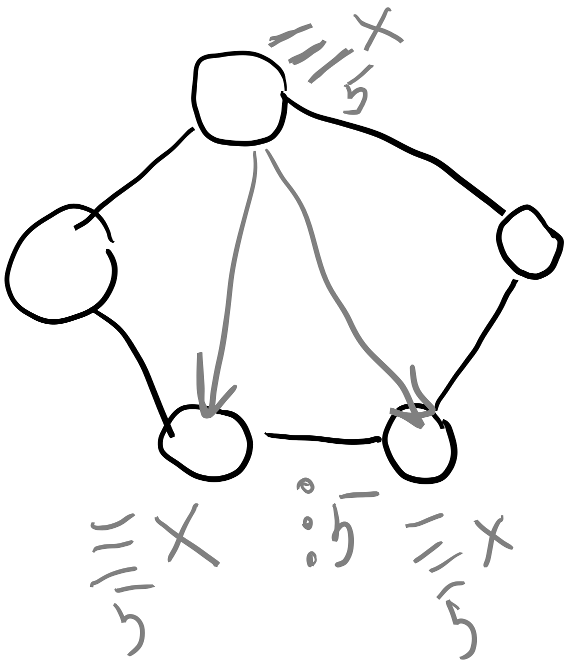
3 – 2 = 1 , 2 – 1 = 1 , 4 – 3 = 1, 4 – 1 = 3 (и 1 и 3 взаимнопросто с 4)

4 – 2 = 2, 3 – 1 = 2 (НОД 2 и 4 = 2)

Т.е пример верный, и минимальное n

Ответ: при n = 4 и мы это доказали

Б) Поймем, что 25 = 5 * 5



Предположим, что такое возможно и мы нашли какой-то пример, т.е при n = 25 расставить можно:

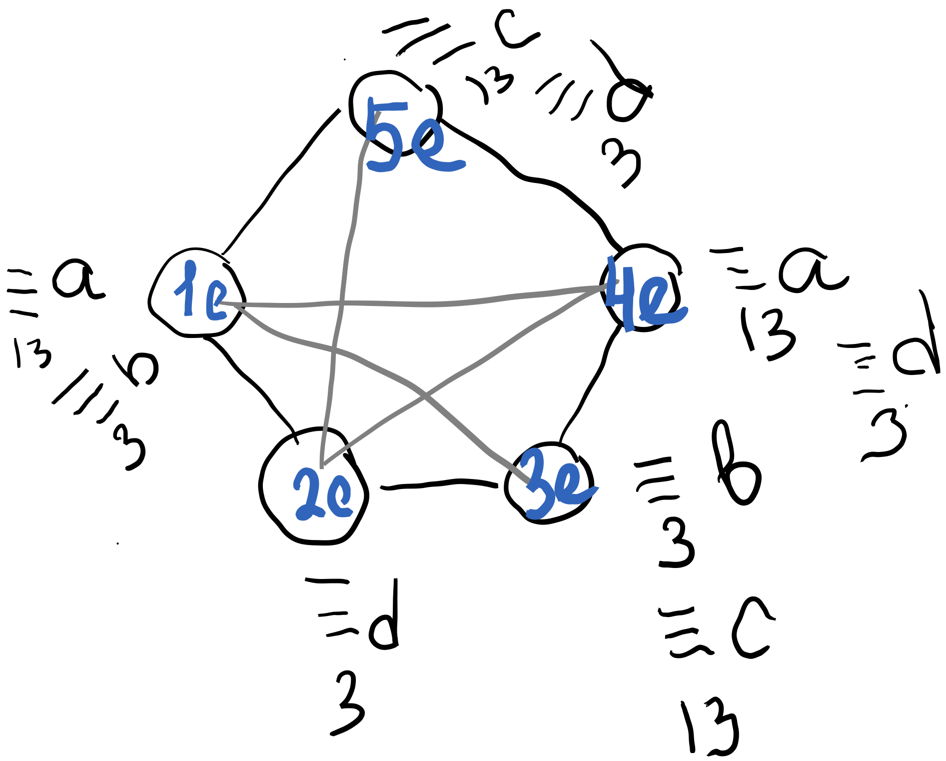
Посмотрим на одно из чисел, пусть оно $\equiv X(mod\ 5)$, тогда посмотрим на числа, с которыми оно не связано (с двумя противолежащими), тогда их разность должна быть кратна 5 (у нашего числа и у каждого из других, несвязанных с нашим), т.к 25 = 5 * 5, то единственные варианты подходящих чисел – 5, 25, но наше число >= 1, тогда если разность >= 25 * 1, то второе число будет > 25, но у нас все числа <= n.

Т.е каждое из двух противолежащих чисел кратно 5, но тогда их разность тоже кратна 5, но тогда она будет не взаимнопроста с 5.

Противоречие, т.е изначальное предположение неверно и такого не могло быть

Ответ: Нет, при n = 25 примера не существует.

В) Поймем, что 39 = 3 * 13. Т.е подходящие остатки только 3, 13 (39 – слишком много ,т.к тогда хотя-б одно из чисел будет больше 39, но такого быть не может). Предположим, что n = 39 возможно и мы нашли пример:



Посмотрим на наши числа, давайте их пронумеруем, как показано на рисунке

Пусть 1е число $\equiv a \ (mod\ 13), \equiv \mathrm{b}(\mathrm{mod}\ 3)$. Тогда посмотрим на 4е и 3е числа: не нарушая общности, можем утвржать, что 4е $\equiv a \ (mod\ 13), 3\mathrm{e} \ \equiv \mathrm{b}\ (\mathrm{mod}\ 3)$. Иначе сделаем симметрию круга и числа перейдут в противоположные. (т.е просто переобозачим нумерацию)

Пусть 3е $\equiv c \ (mod\ 13)$, причем c ≠ a, т.к тогда 4е – 3е кратно 3 ,но (3, 39) = 3

Посмотрим на 5е число:

Оно не может быть ≡ 3им (mod 3), т.к тогда 1е ≡ $5\mathrm{e}\ (\mathrm{mod}\ 3)$, т. е их разность кратна 13, но $(13, 39) = 13$

Причем тогда 5е $\equiv 2\mathrm{e}\ (mod\ 13)$, т. к оно не может быть $\equiv$ одновременно с двумя соседними числами по модулю 3, т. к тогда их разность кратна 3

А значит 5е $\equiv 3\mathrm{e}\ (mod\ 13)$, т. е 5е $\ \equiv \mathrm{d}\ \equiv 2\mathrm{e}\ (mod\ 3), 5e\ \equiv \mathrm{c}\ \equiv 3\mathrm{e}\ (\mathrm{mod}\ 13)$

Теперь посмотрим на 4е исло:

Оно $\equiv$ с 1ым по модул 13 , значит не может быть $\equiv$ с 2ым по модулю 13, т. к тогда разность соседних кратна 13, т. е 4е $\ \equiv 2\mathrm{e}\ \equiv d\ (mod\ 3)$, т.к у 4е и 2го должен быть общий остаток не по модулю 13, значит по модулю 3.

Но тогда 5е и 4е сравнимы по модулю 3, значит из разность кратна 3.

Т.е мы нашли противоречие, значит изначальное предположение неверно, а значит ответ нет

Ответ: Нет , не может быть

Г) Давайте воспользуемся предыдущим пунктом, только в общем виде:

Пусть наше n имеет максимум два простых различных делителя, тогда $n = p_1 \circ p_2$, где p_1, p_2 – простые, возможно равные, или же $n = p_1^3$, тогда будет два делителя p1 * p1 и p1

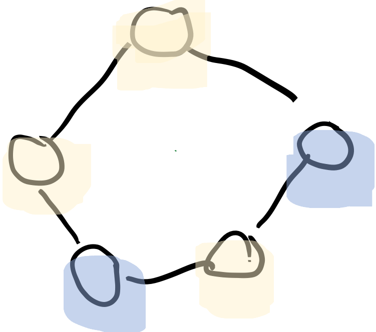
Тогда заменим 13 на p_1, а 3 на p_2, причем если они совпадают, то подходит только 1 делитель, и тогда можно воспользоваться рассуждениями, аналогичные которым были произведены в пункте б), только 5 заменим на p_1.

Если наши числа различные, тогда производим замену описанную в прошлом абзаце, применяем алгоритм из п.В) , причем там мы пользовались только различностью чисел, которая сохранилась. Получаем что в таком случае возникает проблема в том, что два соседних числа будут кратны одному и тому же числу, которому кратно n, т.е такого быть не могло.

Т.е наше n имеет хотя-бы два различных простых делителя или является хотя-бы четвертой степенью простого числа.

Поймем, почему n не может быть четным:

Пусть n – четное.



Тогда четность соседних чисел должна чередоваться, иначе разность каких-то двух соседних будет кратна 2 ,т.е не будет взаимнопроста с n.

Но тогда Если мы начнем по порядку чередовать четность чисел, то соседнее с стартом число (последнее) будет такой-же четности, потому что чисел 5.

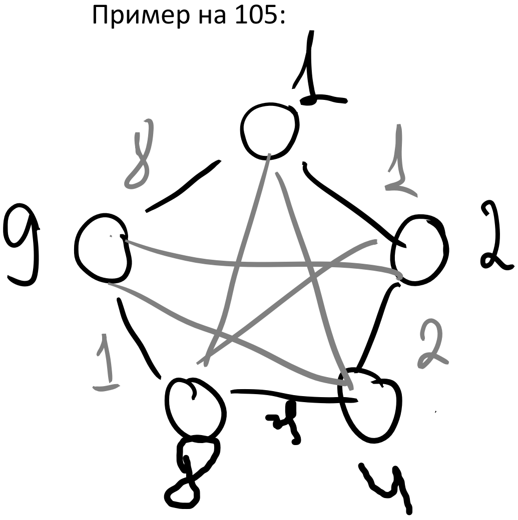
Тогда будет два соседних числа одной четности.

Противоречие. Т.е n не может быть четным.

Т.е n – нечетное имеющее в своем составе или хотя-бы 3 различных простых делителя, хотя-бы два из которых различны (минимум 3 * 7 * 5 = 105), т.е минимальное n = 105.

Мы доказали оценку на n = 105.

Пример на 105:



Посмотрим на разности на примере, показанном слева:

Получим что разности будут такие:

2 - 1= 1, 4 – 2 = 2, 8 – 4 = 4, 9 – 8 = 1, 9 – 1 = 8

Все взаимнопросты с 105

(разности соседних)

Несложно убедиться, что остальные разности не взаимнопросты.

Ответ: 105

Задача 3

Давайте смотреть на выигрышные проигрышные позиции, в зависимости от числа –

Для начала, поймем что считается проигрышем:

Когда закончились все минусы и остались одни плюсы, то игрок не сможет сходить, т.к для любого хода нужны минусы.

Т.е позиция 0 минусов – проигрышная.

P.S.: Выигрышной позицией считаем ту позицию, из которой можно сходить в проигрышную, а проигрыщной позицией считаем позицию, из которой можем сходить только в выигрушную. Самая первая проигрышная позиция – 0 минусов

0 – проигр.
1 – выигр.
2 – выигр
3 – проигр.
4 – выигрыш
5 – выигрыш
6 – проигрыш
...
2019 – проигр.
2020 – выигр.
2021 – выигр.

Для начала, поймем, что каждым ходом мы можем или уменьшить число минусов на 1, или уменьшить на 2:

1) - → + , число минусов уменьшилось на 1
2) - + → пустота, число минусов уменьшилось на 1
3) - - → +++, число минусов уменьшилось на 2

Тогда 1 – выигрышная позиция, т.к из нее путем замены минуса на плюс попадем в 0, т.е проигрышную

Тогда 2 – выигрыщная позиция, т.к путем замены двух – на 3 плюса попадем в 0, т.е проигрышную.

Тогда 3 – проигрышная позиция, т.к из нее можм попасть только в 1 ,2 – выигрышные

Выполняя последующие операции можно заметить закономерность:

Проигрышная , затем 2 выигрышные, проигрышная, затем две выигрышные.

Это происходит потому, что в прогрышную можно попасть из позиции на 1 больше путем замены – на +. А также в проигрышную можно попасть из позиции на 2 больше – путем замены 2х минусов на 3 плюса. А из позиции на 3 больше можно попасть только в две предыдущие – выигрышные.

Таким образом, мы получим ,что все позиции кратные 3 – проигрышные. А все остальные – выигрышные.

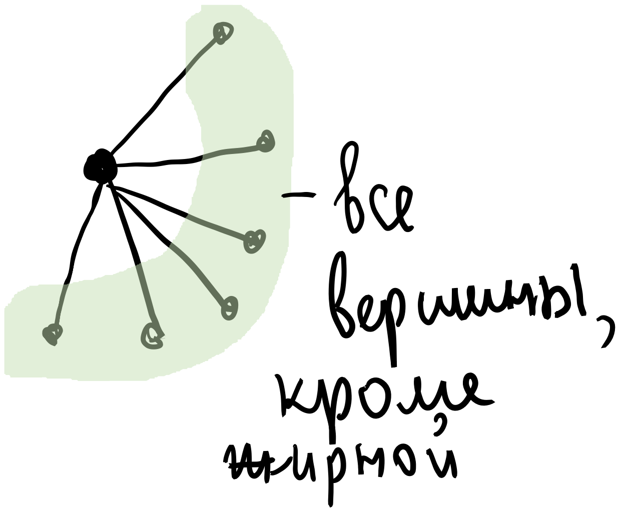
2021 – выигрышная позиция, значит первый игрок, т.е Петя, который с нее начнет и будет действовать оптимально – выиграет.

Ответ: Выиграет Петя

Задача 4

Покажем ситуацию, в которой не получится разбить людей на 2 группы:

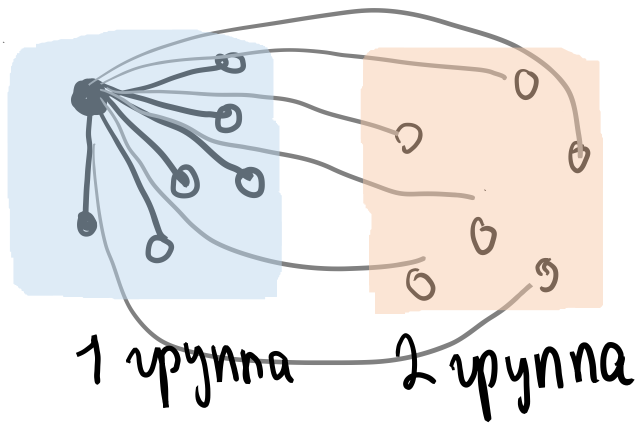
Представим все в виде графа, где ребра – знакомства, вершины – люди



Получается, что все вершины кроме главной, будут знакомы только с главной, т.е главная будет знакома со всеми вершинками.

Поймем, почему в таком случае мы не сможем разбить вершины на две группы, так чтобы у каждой вершины в ее группе было больше либо равно знакомых, чем в другой группе:

Давайте предположим, что мы смогли разбить таким образом на пары.



Посмотрим на эту ситуацию:

1 группа – содержит в себе главную вершинку и еще возможно, какие-то дополнительные вершинки.

2 группа – содержит все остальные вершинки, причем там их хотя-бы 1

Тогда во 2й группе вершинки знакомы только с главной, которая находится в другой группе, т.е в своей группе у них меньше знакомых чем в другой. Противоречие.

Значит мы нашли пример, когда у некоторых вершин знакомых в другой группе больше чем в своей.

Ответ: нет, не всегда, и мы это доказали