	ol2203544 ol2203544
Тест начат	понедельник, 14 Февраль 2022, 10:04
Состояние	Завершено
Завершен	понедельник, 14 Февраль 2022, 14:05
Прошло времени	4 час. 1 мин.
Оценка	**60,00** из 100,00

Вопрос
Инфо

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 5 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

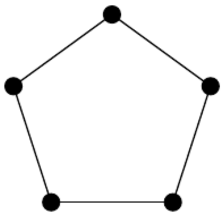
Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос **1**

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Костя выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа так, чтобы для всех этих чисел выполнялось свойство:
если числа a и b не соединены отрезком, то сумма $a+b$ должна быть взаимно проста с n, а если соединены, то числа $a+b$ и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1.
При каком наименьшем n существует такая расстановка?



Ответ: 15

Пример для n = 15:

7, 8, 12, 9, 11

Почему нельзя меньше:

Обозначим числа по часовой стрелке a1 a2 a3 a4 a5

Если n делится на 2, то a1 != a3 mod 2, a3 != a5 mod 2 следовательно a1 = a5 mod 2. a2 != a5 mod 2 => a2 != a1 mod 2, но a4 != a1 mod 2, следовательно a2 = a4 mod 2, но их сумма должна быть взаимно проста с n, противоречие.

n не может быть простым числом или натуральной степенью простого числа. Пусть это не так, тогда обозначим это простое число за p. Поскольку других делителей у числа n нет, сумма любых двух соседних чисел делится на p. Пусть a1 = x mod p тогда a2 = p - x mod p, a3 = x mod p, a4 = p - x mod p, что уже не возможно т.к. a1 + a4 не должно делится на p.

Таким образом просто рассмотрим все числа < 15:

1 любое число взаимно просто с 1

2 делится на 2

3 простое

4 делится на 2

5 простое

6 делится на 2

7 простое

8 делится на 2

9 степень простого

10 делится на 2

11 простое

12 делится на 2

13 простое

14 делится на 2

Комментарий:

Вопрос 2

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

При $x, y, z \in (0, 1]$ найдите минимальное значение выражения

$$A = \frac{(x+2y)\sqrt{x+y-xy} + (y+2z)\sqrt{y+z-yz} + (z+2x)\sqrt{z+x-zx}}{xy+yz+zx}.$$

Посмотрим что произойдет если все числа x, y, z, одновременно увеличить в n раз, где n > 1.

Нижняя часть увеличится в n^2 раз, а в верхняя менее чем в n^2 раз т.к. для каждого из слагаемых в верхней части верно что:

(a * n + 2b * n) * ((a * n + b * n - a * n * b * n) ^ 0.5) < (a * n + 2b * n) * ((a * n * n + b * n * n - a * n * b * n) ^ 0.5) = n * n * (a + 2b) * ((a + b - ab) ^ 0.5)

Следовательно после этого действия A уменьшилось.

Пусть A максимально, тогда это означает, что мы не можем сделать это действие, следовательно одно из чисел = 1. Поскольку выражение циклическое можно сказать что это x.

Подставим x = 1

A = ((1 + 2y) * 1 + (y + 2z) * ((y + z - yz) ^ 0.5) + (z + 2) * 1) / (y + yz + z)

A = 3 / (y + yz + z) + (2y + z) / (y + yz + z) + (y + 2z) * ((y + z - yz) ^ 0.5) / (y + yz + z)

Рассмотрим каждое из слагаемых по отдельности

3 / (y + yz + z) >= 1 т.к. y <= 1, yz <= 1, z <= 1 следовательно (y + yz + z) <= 3

(2y + z) / (y + yz + z) >= ((1 + z)y + z) / (y + yz + z) т.к. z <= 1

((1 + z)y + z) / (y + yz + z) = 1

(y + 2z) * ((y + z - yz) ^ 0.5) / (y + yz + z) >= (y + (y + z)z) * ((y + z - yz) ^ 0.5) / (y + yz + z) т.к. y <= 1

(y + 2z) * ((y + z - yz) ^ 0.5) / (y + yz + z) >= (y + z - yz) ^ 0.5 >= (y + z - z) ^ 0.5 т.к. y <= 1

y ^ 0.5 <= 1 т.к. y <= 1

следовательно каждое из слагаемых <= 1 и значит их сумма <= 3, а это значение достигается, когда все числа это 1.

Комментарий:

Вопрос 3

Выполнен

Баллов: 0,00 из 20,00

На сторонах BC и AD вписанного четырехугольника $ABCD$ отмечены точки K и M соответственно, причем $BK : KC = AM : MD$. На отрезке KM выбрана такая точка L, что $KL : LM = BC : AD$. Найдите отношение площадей треугольников ACL и BDL, если известно, что $AC = p$ и $BD = q$.

Комментарий:

Вопрос **4**

Выполнен

Баллов: 0,00 из 20,00

Натуральное число x в системе счисления с основанием r $(r > 3)$ имеет вид $\overline{ppqq}$, причем $q = 2p$. Оказалось, что r-ичная запись числа x^2 представляет собой семизначный палиндром с тремя одинаковыми средними цифрами. (Палиндромом называется число, которое читается одинаково слева направо и справа налево). При каких r такое возможно?

Рассмотрим r >= 9

ppqq = 1122 * p(в той же системе счисления)

ppqq ^ 2 = 1122^2 * p^2 = 1258884 * p^2

Поскольку должно получится 7-значное число p^2 < r, но поскольку палиндром последняя цифра равна первой, следовательно 4 * p^2 >= r

рассмотрим 2 варианта: 2 * p * p >= r и 2 * p * p < r:

если 2 * p * p >= r:

Поскольку p*p < r   2 * p * p < 2r

Посмотрим на первую и последнюю цифру:

p^2 + 1 = 4 p * p - 3r или p^2 + 1 = 4 p * p - 2r

Если p^2 + 1 = 4 p * p - 3r то 3 * p * p = 3 * r + 1 что нельзя т.к. левая часть делится на 3, а правая нет.

если 2 * p * p < r

p * p = 4 * p * p - r => 3 * p * p = r

подставим и все получится

1258884 * p* p = p*p , 2*p*p + 1, 2*p*p + 2, 2*p*p + 2, 2*p*p + 2, 2*p*p + 1, p*p

Если r < 9:

r = 4 нельзя т.к. последняя цифра в 1122^2 * p^2 будет 0, что невозможно

r = 5

p это 1 или 2 т.к. 2p это одна цифра, если 1 то ppqq ^ 2 = 1314434 не подходит, если 2, то тоже нет т.к. 8 цифр r = 6

p это 1 или 2 т.к. 2p это одна цифра, если 1 то ppqq ^ 2 = 1303324 не подходит если 2, то тоже нет т.к. 8 цифр

r = 7

p это 1 или 2 или 3 т.к. 2p это одна цифра, если 1 то ppqq ^ 2 = 1262214 не подходит если 2, средние цифры не равны, если 3 тоже

r = 8

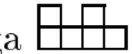
p это 1 или 2 или 3 т.к. 2p это одна цифра, если 1 то ppqq ^ 2 = 1262214 не подходит если 2, средние цифры не равны, если 3 тоже

Комментарий:
Перебором эта задача не решается.

Вопрос **5**

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

Доска $m \times n$ $(m, n > 5)$ разрезана на фигурки из шести единичных квадратиков вида  (фигурки можно поворачивать и переворачивать). При каких m и n такое возможно?

Раскрасим нашу фигуру в шахматную раскраску и поймем, что в ней одного цвета на 2 больше чем другого, следовательно таких фигур в итоге должно быть четное количество т.к. всего клеток четно(т.к. в каждой фигуре четно) и следовательно черных столько же, сколько белых.

Значит площадь доски делится на 6 * 2 = 12.

Если одна из сторон делится на 3 а другая на 4, то мы сразу выиграли т.к. мы можем сделать прямоугольник 3 на 4 из двух фигур:

2222

1212

1111

(номер это к какой фигуре относится)

очевидно, что мы можем им замостить такую доску.

Еще есть 2 варианта: одна сторона делится на 12, а другая произвольная, и одна сторона делится на 6(но не на 12) а другая на 2(но не на 4(иначе вариант 3 4)).

Других вариантов нет т.к. сторона которая делится на 3 должна делится либо на 2^0 или 2^1 или 2^(>=2).

Рассмотрим вариант 6 2:

Раскрасим всю доску в шахматную раскраску с размером клетки 2 на 2. Поскольку каждая сторона это нечетное число * 2, таких клеток всего будет нечетное число, но рассмотрим каждую фигуру в отдельности, пронумеруем клетки следующим образом:

1 6

2345

если 1 это левая верхняя в большой клетке, то 2 и 3 того же цвета, что и 1, а 4 5 6 нет.

если 1 это правая верхняя, то 1 2 5 одного 3 4 6 другого если 1 это левая нижняя, то 1 4 5 одного 2 3 6 другого

если 1 это правая нижняя, то 1 3 4 одного, 2 5 6 другого

в каждом варианте 3 белые и 3 черные, следовательно в каждой фигуре равное количество черных и белых, а значит и во всей фигуре тоже, противоречие.

Рассмотрим вариант 12 1:

Мы можем получить полоску размера 12 * 3 положив 3 прямоугольника 3 на 4 вертикально и мы можем получить полоску размера 12 * 4 положив 4 прямоугольника 3 на 4 горизонтально, следовательно мы можем получить полоску 12 на (3 + 3), 12 на (3 + 4) и 12 на (4 + 4) и все следующие просто из полоски 12 на (n - 3) добавлением полоски 12 на 3. Следовательно мы можем получить любую полоску толщиной 12 и произвольной длиной кроме 1, 2, 5 и следовательно мы можем замостить доску у которой одно сторона делится на 12 такими полосками.

Почему нельзя для 1, 2, 5:

Просто рассмотрим самый низ такой доски(сторона 1, 2, 5 горизонтальна) и поймем, что нельзя.

Комментарий:

УТВЕРЖДАЮ:
Ответственный секретарь Оргкомитета ОШ СПбГУ
Хуршудян А.Л. (__________)

ПРОТОКОЛ
рассмотрения апелляции участника Олимпиады школьников Санкт-Петербургского государственного университета

г. Санкт-Петербург — № МАТ-5 — *«31» марта 2022 г.*

Апелляционная комиссия в составе:

1. Евдокимова Татьяна Олеговна,
2. Белкова Анастасия Леонидовна,
3. Савельев Алексей Сергеевич.

рассмотрела апелляционное заявление участника Олимпиады школьников СПбГУ:

ФИО: ***Иванов Илья Егорович***

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады: ***Математика***

Количество набранных баллов до апелляции: ***60***

По результатам рассмотрения апелляционного заявления участника Олимпиады, Апелляционная комиссия приняла следующее решение: ***повысить оценку за работу на 5 баллов***.

Задача 4. Посмотреть на первую цифру нельзя, она зависит от переносов, полученных при умножении на p^2. Анализа этих переносов в работе нет.

Количество набранных баллов после апелляции: 65