	ol2213072 ol2213072
Тест начат	понедельник, 14 Февраль 2022, 10:06
Состояние	Завершено
Завершен	понедельник, 14 Февраль 2022, 13:57
Прошло времени	3 час. 50 мин.
Оценка	**85,00** из 100,00

Вопрос
Инфо

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 5 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

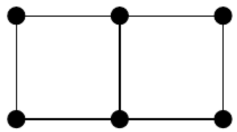
Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос 1

Выполнен

Баллов: 15,00 из 20,00

На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Таня выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа так, чтобы для всех этих чисел выполнялось свойство:
если числа a и b не соединены отрезком, то сумма $a^2 + b^2$ должна быть взаимно проста с n, а если соединены, то числа $a^2 + b^2$ и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1.
При каком наименьшем n существует такая расстановка?



Пронумеруем числа в табличке
2-4-6
| | |

1-3-5

Заметим что если простой делитель в числе n имеет степень большую 1 то тогда эту степень можно сократить до 1 т.к если число имеет общий делитель с P^k то и с P оно будет иметь общий делитель. И наоборот если число с P^k не имеет общих делителей. То и с p оно делителей общих иметь не может.
Значит n имеет вид n = p1 * p2 * p3... * pm.

Теперь заметим что n не может делится на 2 т.к если посмотреть на 1 и 4 число мы поймем что они разной четности т.к тогда бы сумма их квадратов делилась бы на 2. Аналогично 4 5 числа тоже разной четности. Значит 1 и 5 одной четности => сумма их квадратов делится на 2. Но между ними нет ребра. Значит n не делится на 2.

Также n имеет больше 1 простого делителя т.к пусть это так.
Тогда пусть 1 число в квадрате сравнимо с x тогда 2 число в квадрате сравнимо с -x по модулю n.
Тогда 4 число в квадрате сравнимо с x, 6 число в квадрате сравнимо с -x. Но тогда сумма квадратов 1 и 6 чисел делится на n, а по условию не делится.

Тогда мы получили что n имеет хотя бы 2 простых различных делителя не равных 2.

Пример на n = 5 * 13 = 65.

2 4 25

1 3 50

Можно убедится что он подходит.

Если n имеет хотя бы 3 простых делителя то n хотя бы 3 * 5 * 7 что больше 5 * 13.

Если же n имеет 2 простых делителя то заметим что если оба эти простых делителя имеют вид 4k + 1 то n хотя бы 5 * 13 что является моим ответом.

Иначе хотя бы один из простых делителей имеет вид $4k + 3$ то тогда заметим что единственный возможный вариант когда сумма квадратов двух чисел делится на это простое число это когда оба этих числа делятся на это простое число изначально.
a^2 + b^2 делятся на $p = 4k + 3$.

a^2 = -b^2 по модулю p

a^2 ^((p - 1) / 2) = (-b^2)^((p-1)/2)

a^(p-1) = -b^(p-1) т.к (p - 1) / 2 - нечетно но по малой теореме ферма x^(p-1) сравнимо либо с 0 если $x = 0$ либо с 1 в других случаях.
Тогда если a и b не равны 0 то 1 = -1 что неправда т.к p не равно 2.

Тогда какие то 2 соседних числа будут делится на p причем никакие оставшиеся числа не будут т.к тогда найдется пара чисел не соединенных ребром которые делятся на p(это правда т.к у двух соседних чисел нет ни одного общего соседа). Но тогда заметим что у нас просто не используется одно ребро и тогда опять можно выбрать четверку чисел для которых будет происходить противоречие как в доказательстве когда n имеет один простой делитель. (можно выбрать одну из четверок вида 1 - 2 - 4 - 6 или 6 - 5 - 3 - 1 т.к ребра у этих четверок не пересекаются)

Ответ 65.

Комментарий:
Пример неверный

Вопрос **2**

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

При $x, y, z \in (0, 1]$ найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{\sqrt{8x^4 + y} + \sqrt{8y^4 + z} + \sqrt{8z^4 + x} - 3}{x + y + z}.$$

Докажем что sqrt(8z^4 + x) <= 2z + 1 <=> 8z^4 + x <= 4z^2 + 4z + 1 ну а так как 0 < z,x <= 1, то x <= 1 и 4z^4 <= 4z^2 и 4z^4 <= 4z.

Аналогично получаем что sqrt(8x^4 + y) <= 2x + 1 и sqrt(8y^4 + z) <= 2y + 1
Значит (sqrt(8x^4 + y) + sqrt(8y^4 + z) + sqrt(8z^4 + x) - 3) / (x + y + z) <= (2x + 1 + 2y + 1 + 2z + 1 - 3) / (x + y + z) = 2(x + y + z) / (x + y + z) = 2.

Значит максимум данного выражения не больше 2. Ну а при x = y = z = 1 выражение достигает этого максимума.
Следовательно ответ 2

Комментарий:

Вопрос 3

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

Диагональ AC вписанного четырехугольника $ABCD$ является диаметром описанной вокруг него окружности ω. Из точки D провели прямую, перпендикулярную отрезку BC, она вторично пересекла окружность ω в точке E. Найдите отношение площадей треугольника BCD и четырехугольника $ABEC$.

Отметим точку X как пересечение DE и BC. Опустим перпендикуляр из точки A на DE отметим эту точку за Y.
Теперь заметим что угол ADC = углу ABC = 90 тк опираются на диаметр.
Заметим что площадь треугольника BCD = BC * DX / 2.
А площадь четырехугольника ABEC равна площади треугольника ABC + площади треугольника BCE = AB * BC / 2 + BC * EX / 2(т.к AB высота в треугольнике ABC и EX высота в треугольнике BEC.
Тогда по задаче мы хотим узнать отношение площадей BCD и ABEC что равно DX * BC / 2 к (AB + EX) * BC / 2 = DX к AB + EX.
Заметим что ABXY - параллелограмм тк угол ABX = BXY = YAB = 90градусов => AB = XY.
Также заметим что угол BDE = 90 - угол XBD = углу ABD.
И так как AB параллельно DC (угол ABX = углу BXD = 90) и дуги напротив углов BDE и ABD равны то DABE - равнобокая трапеция.
Из этого следует что отрезки EX и DY равны => DX = DY + YX = EX + AB. Значит искомое отношение площадей равно 1.
Ответ 1.

ol2213072_3.pdf

Комментарий:

Вопрос **4**

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

На доске написано число 5555 в системе счисления с четным основанием r $(r \geqslant 18)$. Петя выяснил, что r-ичная запись x^2 представляет собой восьмизначный палиндром, у которого разность четвертой и третьей цифр равна 2. (Палиндромом называется число, которое читается одинаково слева направо и справа налево). При каких r такое возможно?

Заметим что число x = 5 * (1 + r + r^2 + r^3) тогда x^2 = 25 * (1 + r + r^2 + r^3) ^ 2 = 25 * (1 + 2r + 3r^2 + 4r^3 + 3r^4 + 2r^5 + r^6).

Теперь пусть x^2 имеет вид ABCDDCBA в системе счисления r(так как оно палиндром). Посмотрим на A. Заметим что т.к A стоит на последнем месте то A = 25 % r. так как вся часть числа x^2 кроме 25 * 1 делится на r => не влияет на последний разряд. Но также A является 1 разрядом числа x^2.
Заметим что т.к r >= 18 то 25 * (1 + 2r + 3r^2 + 4r^3 + 3r^4 + 2r^5 + r^6) <= 25 * (13r^4 + 2r^5 + r^6) < 25 * (3r^5 + r^6) = 75r^5 + 25r^6 < 5r^6 + 25r^6 = 30r^6 < 2r^7.
Из этого следует что A < 2 => A = 1 но так как A = 25 % r и r >= 18 то единственный подходящий r это 24.
Теперь осталось проверить что r = 24 подходит

x^2 = 25 * (1 + 2r + 3r^2 + 4r^3 + 3r^4 + 2r^5 + r^6) = (r + 1) * (1 + 2r + 3r^2 + 4r^3 + 3r^4 + 2r^5 + r^6) = 1 + 3r + 5r^2 + 7r^3 + 7r^4 + 5r^5 + 3r^6 + r^7 что является палиндромом у которого разность 4 и 3 цифры равна 2.

Ответ 24.

Комментарий:

Вопрос **5**

Выполнен

Баллов: 10,00 из 20,00

Дана квадратная таблица 2023×2023. Каждая ее клетка окрашена в один из n цветов. Известно, что для любых шести клеток одного цвета, расположенных в одной строке, сверху от самой левой из них и снизу от самой правой из них нет клеток того же цвета. При каком наименьшем n такое возможно?

Заметим что всего клеток в таблице 2023 * 2023 = 4092529.

Давайте оценим сколько максимум клеток одного цвета может быть в таблице.
Для этого клетки в каждой строчке разобьем на пары 1 слева - 1 справа 2 слева - 2 справа и т.д. Заметим что клетки в паре запрещают находится клеткам того же цвета ровно в 2022 клетках x сверху над левой и 2023 - 1 - x снизу от правой из пары. (ну если в строчке хотя бы 6 клеток). Также заметим что каждую клетку могут

запретить только 1 раз так как тогда у нас было 2 клетки в одном столбце которые либо обе запрещают все клетки сверху либо 2 клетки из которых одна запрещает все клетки сверху и клетка которая выше нее и запрещает все клетки снизу. Оба таких варианта невозможны из - за условия задачи. Тогда всего клеток

которые заняты или закрыты равно 2022 * (max(5,ai) - 5) + ai где ai это кол-во клеток в каждой строчке. заметим что если ai < 5 то ai можно увеличить и это напрямую увеличит кол-во клеток.

Тогда всего клеток равно 2023 * 2023 ну а с другой стороны их не больше чем сумма по всем рядам - 2022 * (max(5,ai) - 5) + ai

Обозначим за S сумму всех ai.

Следовательно 2023 * 2023 >= 2022 * S - 2022 * 5 * 2023 + S => 2023 * 2023 + 5 * 2022 * 2023 >= 2023 * S следовательно 2023 + (2022 * 5)>= S значит S <= 12133

Тогда цветов хотя бы 2023 * 2023 / 12133 = 4092529 / 12133 > 337 следовательно цветов хотя бы 338.

Пример на 338. Будем просто красить лестничкой из 6 начиная с нижней строчки сдвигаясь на 1. И переходить через край если с другой стороны туда можно поставить и так как 338 * 6 > 2023 то у нас получится.

Пример для 5 на 5 и лестницы из 3 (на 2023 на 2023 из 6 он делается аналогично)

Цифра это номер цвета.

3 2 2 2 1

2 2 2 1 1

2 2 1 1 1

2 1 1 1 2

1 1 1 2 2

Ответ 338.

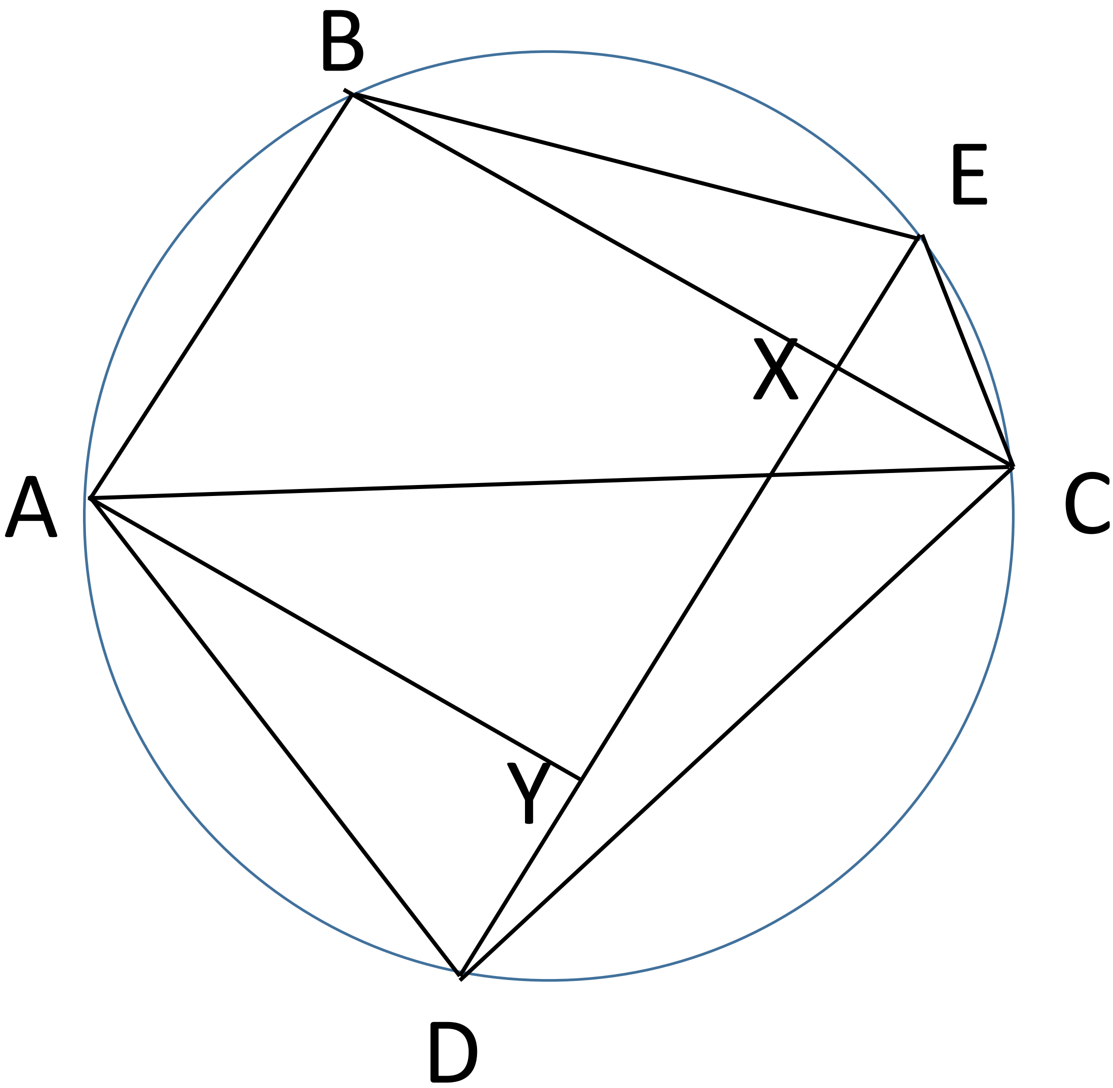
Комментарий:
Не ясно, как при суммировании от max(5,ai) перешли к S.

В тексте ("не больше") и в цепочке неравенств после текста (">=") имеется несостыковка.

Пример противоречит условию в предпоследнем столбце.

« ПРЕДЫДУЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 23

СЛЕДУЮЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 24 »


B
E
X
A
C
Y
D