	ol2215200 ol2215200
Тест начат	понедельник, 14 Февраль 2022, 10:03
Состояние	Завершено
Завершен	понедельник, 14 Февраль 2022, 14:02
Прошло времени	3 час. 58 мин.
Баллы	105/120
Оценка	**88** из 100

Вопрос
Инфо

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 6 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос 1

Выполнен

Баллов: 20 из 20

Коля поехал на электросамокате в магазин в соседнюю деревню со скоростью 10~км/ч. Проехав ровно треть всего пути, он понял, что при движении с прежней скоростью успеет точно к закрытию магазина, и увеличил скорость вдвое. Но когда он проехал ровно 2/3 всего пути, самокат сломался, и оставшуюся часть пути Коля прошел пешком. С какой скоростью он шел, если успел точно к закрытию магазина?

Пусть S - все расстояние до магазина. Тогда S / 10 км/ч - время до закрытия магазина. На первые две трети пути Коля потратил S/(3*10 км/ч) + S(3*20 км/ч) = S / 20 км / ч . Значит, чтобы успеть точно к закрытию, ему нужно идти со скоростью

(S/3) / (S / 10 км/ч - S / 20 км / ч) = (S/3) / S / 20 км / ч = 20/3 км / ч.

Ответ : 20/3 км/ ч.

Комментарий:

Вопрос **2**

Выполнен

Баллов: 20 из 20

Найдите все целые a, для которых квадратный трехчлен $x^2 + ax + 2a$ имеет два различных целых корня.

Поймем, что если корни целые , то дискриминант - квадрат целого числа. D = a^2 - 8*a , также мы знаем , что a^2 - 8*a = (a-4)*(a-4) - 16. Давайте искать такие целые неотрицательные x, что x*x - 16 = y*y , где y - натуральное число. Так как 16 - четное , то y<=x-2 (понятно , что y < x и при этом x != y-1 , так как y и x одной четности). x*x - 16 <= (x-2) * (x-2) = x*x + 4 - 4*x .
Тогда 4 * x < = 20 , тогда x <= 5. Также поймем, что x>= 4 (x*x >= 16 и x >=0), тогда поймем, что x = 5 нам подходит , x = 4 - нет, потому что если x=4, y = 0 а у нас должно быть два корня. Мы поняли , что a-4 равно по модулю 5, тогда a=9 или a = -1.
Теперь докажем что эти a нам подойдут. Корнями x*x + 9*x + 18 являются -3 и -6, а x*x - x -2 являются числа 2 и -1.

Ответ : a = 9 и a = -1.

Комментарий:

Вопрос 3

Выполнен

Баллов: 20 из 20

Положительные числа a, b и c удовлетворяют условию $abc(a+b+c)=3$. Докажите неравенство $(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8$.

(a+b)*(b+c)*(c+a) = a*a*b + b*b*a + b*b*c + c*c*b + 2*a*b*c + c*c*a + a*a*c = a*b*(a+b+c) + b*c*(a+b+c) + c*c*a + a*a*c = 3/c + 3/a + c*c*a + a*a*c (из условия a*b*c*(a+b+c)=3 следует что a*b*(a+b+c)=3/c и b*c*(a+b+c) = 3/a
Давайте поделим обе части неравенства на 8

(1/c +1/c +1/c + 1/a + 1/a + 1/a + c*c*a + a*a*c) / 8 >= корень восьмой степени из (1/c)*(1/c)*(1/c)*(1/a)*(1/a)*(1/a)*(c*c*a)*(a*a*c) = 1 (по неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим, по неравенству КАШИ)

Что и требовалось доказать.

Комментарий:
очень красивое доказательство.

Фамилия великого французского математика Коши.

Вопрос **4**

Выполнен

Баллов: 5 из 20

Какое наименьшее количество фишек можно расставить в клетках таблицы 99×99 так, чтобы в каждом квадрате 4×4 было не менее восьми фишек?

Ответ: 49*99

Пример :

Давайте пронумеруем строки от одного до 99 по порядку и поставим на строки с четным номером фишки (мы ставим фишки на всю строку). Тогда мы потратим 49*99 фишек и понятно что в каждом 4*4 будет по 8 фишек.

Комментарий:
найденное количество не является наименьшим.

Вопрос **5**

Выполнен

Баллов: 20 из 20

Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Диагональ AC — биссектриса угла $\angle BAD$, точка M — середина стороны BC, а точка N — середина отрезка DO. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является вписанным тогда и только тогда, когда четырехугольник $ABMN$ является вписанным.

Докажем сначала, что если ABCD вписанный то и ABMN вписанный. Угол BDA = углу BCA и угол CBD = углу CAD (ABCD - вписанный, оба угла опираются на BA, оба угла опираются на CD). Тогда треугольники ABC и AOD подобные (из условия угол BAC = углу OAD , также мы знаем что угол BDA = углу BCA , а значит треугольники подобны по двум углам). Еще мы понимаем , что тогда угол MAC = углу NAD (так как это углы между сторонами и медианами в подобных треугольниках) . Заметим , что угол MAN = угол MAO + угол OAN , так как угол MAC = углу NAD мы понимаем , что гол MAN =угол NAD + угол OAN = углу CAD = углу BAC. Тогда можно сделать вывод что ABMN - вписанный (угол MBN = углу CAD = углу BAC = углу MAN , углы опирающиеся на MN равны .а значит четырехугольник - вписанный) , что и требовалось доказать.
Теперь будем доказывать в другую сторону. Пусть ABCD не вписанный, тогда давайте опишем вокруг ABC окружность и пересечем ее с BO (понятно , что окружность пересекает BO в двух точках , так как B лежит на окружности , а O внутри), обозначим вторую точку пересечения BO с окружностью как E. Пусть F - середина OE, тогда из доказанного выше мы понимаем , что ABMF - вписанный (это мы доказывали в первом абзаце решения). Но при этом мы знаем , что ABMN вписанный, но тогда окружность описанная вокруг ABC пересекает прямую BN в трех точках , значит F совпала с N, а значит D совпала с E (понятно что точки D и E находятся на луче OD),а значит ABCD - вписанный , что и требовалось доказать.

Комментарий:

Вопрос **6**

Выполнен

Баллов: 20 из 20

Докажите, что у каждого из чисел $n!+1$, $n!+2$, \dots, $n!+n$ можно выбрать простой делитель, на который не делится ни одно из остальных.

Поймем, что НОД любых двух чисел из этих < n (пусть l > k , НОД (n! + k ; n! + l) = НОД (n! + k ; l - k , а l-k <= n -1 < n).
Давайте тогда искать и каждого из этих чисел n! + k (где k - не простое или же 2*k <= n) простое >= n , тогда понятно , что на это простое не будут делится другие (иначе НОД будет >= n).

1) Если k - непростое .

Давайте докажем что у числа n! + k (где k > 0 и k < = n и k - не простое) есть простой делитель >= n. Пусть нет, тогда наше n! + k делится только на простые меньшие или равные n. Посмотрим на любое P, делящее k, давайте докажем , что степень вхождение P в n! больше чем в k. Так как k - составное, то среди первых n чисел есть число k и еще хотя бы одно число кратное P (если такого нет , то p > n/2 , а значит k > n/2 * 2 , но k <=n) , тогда степень вхождения P в n! ,больше чем степень вхождения в k. Еще поймем, что n! + k делится лишь на те простые <n , на которые делится k (пусть нет, тогда n! - делится,

n! + k делится, а значит и k делится, противоречие) , еще мы знаем что степень вхождения всех простых из k меньше чем в n! , а значит наше число делится на простые <n , только в тех степенях в которых содержится в k , но по нашему предположению мы делимся исключительно на простые меньшие n , значит n! + k = k , чего быть не может так как n! > 0 . Значит есть простой делитель >= n.

2) Если 2*k <= n

Мы уже знаем , что все простые меньшие n , на которые делятся n! + k , содержатся в k. Так как 2*k <= n ,то среди первых n чисел есть числа k и 2*k. Пусть n! + k не делится на простые >=n, тогда n! + k может лишь делится на k (так как степень вхождения всех простых из k в n! больше чем в k и n! + k делится только на те простые меньшие n , на которые делится k)

Но опять же n! >0.

у нас остались лишь k - простые > n/2. Тогда заметим , что число n! + k тогда является единственным числом среди остальных кратным k. (n! делится на k и только одно из чисел от 1 до n делится на k). Будем сопоставлять таким числам простое k. Давайте поймем почему у нас получился пример подходящий под условие. Те числа у которых есть простой делитель >= n как мы поняли нам подходят, остается понять что нам не мешают числа из последней разобранной нами группы (такие у которых k - простое >= n/2) , но как мы уже поняли ранее они являются единственными числами кратными простому которому мы их сопоставили (для n! + k мы выбрали k), а значит они нам тоже не мешают.

Комментарий:

« ПРЕДЫДУЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 11

СЛЕДУЮЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 21 »