	ol2218352 ol2218352
Тест начат	понедельник, 14 Февраль 2022, 10:03
Состояние	Завершено
Завершен	понедельник, 14 Февраль 2022, 14:00
Прошло времени	3 час. 56 мин.
Оценка	**60,00** из 100,00

Вопрос
Инфо

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 5 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

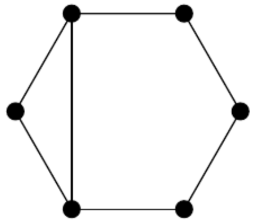
Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос **1**

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Костя выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа так, чтобы для всех этих чисел выполнялось свойство:
если числа a и b не соединены отрезком, то сумма $a+b$ должна быть взаимно проста с n, а если соединены, то числа $a+b$ и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1.
При каком наименьшем n существует такая расстановка?



ol2218352_1.pdf

Комментарий:

Вопрос **2**

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

При $x, y, z > 0$ найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{(x-y)\sqrt{x^2+y^2} + (y-z)\sqrt{y^2+z^2} + (z-x)\sqrt{z^2+x^2} + \sqrt{2}}{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 + 2}.$$

ol2218352_2.pdf

Комментарий:

На сторонах AB и CD вписанного четырехугольника $ABCD$, не являющегося трапецией, отмечены точки P и R соответственно, причем $AP : PB = CR : RD$. На отрезке PR выбрана такая точка Q, что $PQ : QR = AB : CD$. Найдите отношение площадей треугольников AQD и BQC, если известно, что $AD = x$ и $BC = y$.

ol2218352_3.pdf

Комментарий:
Треугольники AQD и BQC не подобны.

Вопрос 4

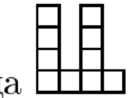
Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

Запись натурального числа x в системе счисления с основанием r ($r \leqslant 70$) получается n-кратным повторением некоторой пары цифр, где n — натуральное число. Оказалось, что r-ичная запись x^2 состоит из $4n$ единиц. Найдите все пары (r, x), при которых такое возможно.

ol2218352_4.pdf

Комментарий:

Доска $m \times n$ $(m, n > 15)$ разрезана на фигурки из десяти единичных квадратиков вида  (фигурки можно поворачивать и переворачивать). При каких m и n такое возможно?

Комментарий:

« ПРЕДЫДУЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 25

СЛЕДУЮЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ »
Вариант 27

Задача 1

В решении этой задачи будем использовать следующие обозначения:

a mod b = c – значит, что остаток от деления числа a на b равен c;

a (b) = c – значит, что число a сравнимо с числом c по модулю b;

Решение:

Обозначим вершины данного 6-угольника буквами a, b, c, d, e, f (b и f соединены дополнительным отрезком), тогда этими же буквами будем обозначать числа, которые вписывают в эти вершины: например, в вершине a – число a, в вершине b – число b и так далее.

Действие 1:

Проверим, каким является число n: четным или нечётным:

Пусть число n – четное, тогда рассмотрим вершины a, c, e: они не соединены между собой, значит не имеют общего делителя с n => (a + c) mod 2 = 1, (a + e) mod 2 = 1

(a - 1) mod 2 = c и (a – 1) mod 2 = e => (e + c) (2) = (a – 1 + a - 1) (2)= 0, но вершины c и e не соединены, поэтому (e + c) не может иметь делитель 2 => противоречие, поэтому число n – нечётное.

Действие 2:

Проверим, может ли число n быть простым или иметь вид n = p^2, где p – простое число:

Пусть это возможно, число n – простое => (a + b) mod n = 0 =>

(a + b) (n)= 0 => b (n)= - a

(b + c) (n)= 0 => c (n)= - b

(c + d) (n)= 0 => d (n)= -c

(d + e) (n)= 0 => e (n)= -d

(e + f) (n)= 0 => f (n)= -e

(a + f) (n)= 0 => f (n)= -a

Тогда a (n)= c, b (n)= d (n)= f, но b и f соединены, а вершины b и d – нет, то есть мы пришли к противоречию => n – не простое число и n <> p^2, где p – простое число.

Действие 1 и 2 показали, что число n не кратно 2 и имеет минимум 2 различных делителя, отличных от 1 и n, наименьшее такое натуральное число n = 3*5 = 15

Приведем пример для n = 15:

В вершины расставим числа: a – число 11 , b – число 1, c – число 2, d – число 3, e – число 6 , f – число 14 (соединены дополнительным отрезком вершины b и f).

Ответ: 15.

Задача 2

В решении sqrt(a) – обозначение квадратного корня из числа a; a^n – обозначение числа a в n-ной степени, / - знак деления, * - знак умножения.

По условию

A = ((x-y)*sqrt(x^2 + y^2) + (y - z)*sqrt(y^2 + z^2) + (z - x)*sqrt(z^2 + x^2) + sqrt(2))/((x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 + 2);

Пусть не нарушая общности выражения x >= y >= z > 0;

Тогда для удобства решения рассмотрим числитель и знаменатель выражения A:

Числитель: будем уменьшать числитель, увеличивая таким образом число A

(x-y)*sqrt(x^2 + y^2) + (y - z)*sqrt(y^2 + z^2) + (z - x)*sqrt(z^2 + x^2) + sqrt(2) <=

<= (x-y)*sqrt(x^2 + x^2) + (y - z)*sqrt(y^2 + y^2) + (z - x)*sqrt(z^2 + z^2) + sqrt(2) =

= sqrt(2)*x*(x – y) + sqrt(2)*y*(y – z) + sqrt(2)*z*(z – x) + sqrt(2) =

= sqrt(2)* (x^2 – x*y + y^2 – y*z + z^2 – z*x + 1);

Пояснение:

x > y => x^2 > y^2 => x^2 + y ^2 < x^2 + x ^2;

y > z => y^2 > z^2 => y^2 + z ^2 < y^2 + y^2

z < x => (z - x) < 0, z^2 + x^2 > z^2 + z^2 => (z - x)*sqrt(z^2 + x^2) < (z - x)*sqrt(z^2 + z^2)

Знаменатель:

(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 + 2 = x^2 – 2*x*y + y^2 + y^2 – 2*y*z + z^2 + z^2 – 2*x*z + x^2 + 2 =

= 2*x^2 – 2*x*y + 2*y^2 – 2*y*z + 2*z^2 – 2*x*z + 2 = 2*(x^2 – x*y + y^2 – y*z + z^2 – z*x + 1);

То есть

A = ((x-y)*sqrt(x^2 + y^2) + (y - z)*sqrt(y^2 + z^2) + (z - x)*sqrt(z^2 + x^2) + sqrt(2))/((x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 + 2) = ((x-y)*sqrt(x^2 + y^2) + (y - z)*sqrt(y^2 + z^2) + (z - x)*sqrt(z^2 + x^2) + sqrt(2))/(x^2 – 2*x*y + y^2 + y^2 – 2*y*z + z^2 + z^2 – 2*x*z + x^2 + 2) =

= ((x-y)*sqrt(x^2 + y^2) + (y - z)*sqrt(y^2 + z^2) + (z - x)*sqrt(z^2 + x^2) + sqrt(2))/(2*x^2 – 2*x*y + 2*y^2 – 2*y*z + 2*z^2 – 2*x*z + 2) = ((x-y)*sqrt(x^2 + y^2) + (y - z)*sqrt(y^2 + z^2) + (z - x)*sqrt(z^2 + x^2) + sqrt(2))/(2*(x^2 – x*y + y^2 – y*z + z^2 – z*x + 1)) <=

<= ((x-y)*sqrt(x^2 + x^2) + (y - z)*sqrt(y^2 + y^2) + (z - x)*sqrt(z^2 + z^2) + sqrt(2))/(2*(x^2 – x*y + y^2 – y*z + z^2 – z*x + 1)) = (sqrt(2)*x*(x – y) + sqrt(2)*y*(y – z) + sqrt(2)*z*(z – x) + sqrt(2))/(2*(x^2 – x*y + y^2 – y*z + z^2 – z*x + 1)) =

= (sqrt(2)* (x^2 – x*y + y^2 – y*z + z^2 – z*x + 1))/(2*(x^2 – x*y + y^2 – y*z + z^2 – z*x + 1)) =

= sqrt(2)/2;

Ответ: sqrt(2)/2.

Задача 3

Пусть $AP = ka$, $PB = pa$, $CR = kb$, $RD = pb$;

Тогда $CD = RD + CR = (p + k)b$, $AB = AP + PB = (p + k)a \Rightarrow AB/CD = a/b = PQ/QR = PB/RD = AP/RC$

Тогда треугольники AQD и BQC – подобные $\Rightarrow S(AQD)/S(BQC) = (AD/BC)^2 = x^2/y^2$

Ответ: x^2/y^2.

Задача 4

Пусть число x = abababab...abab (всего $2n$ цифр)

$x^2 = 11111...1111$ ($4n$ цифр)

тогда $x = (ar + b)(r^{(2n-2)} + r(2n-4) + \ldots + r^2 + 1)$, $x^2 = r^{(4n-1)} + r^{(4n-2)} + \ldots + r + 1$ =>

$x = (ar+b)*(r^{(2n-1)})/(r^2-1)$, $x^2 = (r^{4n}-1)/(r-1)$

тогда $(ar+b)^2 * (r^{2n}-1)^2 / (r^2-1)^2 = (r^{4n}-1)*(r-1)$ =>

$(ar+b)^2 * (r^{2n}-1) = (r^{2n}+1)(r+1)^2(r-1)$

Возможны 2 случая:

1) r – четное число

Тогда

НОД$(r^{2n}-1, r^{2n}+1)$ = НОД$(r^{2n}-1, 2) = 1$

$(ar+b)^2 / (r^{2n}+1) = (r+1)^2 * (r-1) / (r^{2n}-1)$ – натуральное число =>

$(ar+b)^2 >= r^{2n}+1$, $(r+1)^2*(r-1) >= r^{2n}-1$ =>

$(r+1)(r^2-1) >= r^{2n}-1$

$r^3 + r^2 - r - 1 >= r^{2n} - 1$

$r^2 + r - 1 >= r^{(2n-1)}$

так как $r > 2$, $2r^2 > r^2 + r - 1 >= r^{(2n-1)}$ =>

$2 > r^{(2n-3)}$ => $n <= 1$ => $n = 1$ =>

$(ar+b)^2 = (r^2+1)(r+1)$

НОД$(r^2+1, r+1)$=НОД$(r^2-1+2, r+1)$=НОД$(2, r+1) = 1$ => R^2+1 и $r+1$ – полные квадраты, а это не возможно

2) нечетное r

НОД$(r^{2n}+1, r^{2n}-1)$=НОД$(r^{2n}-1, 2) = 2$ =>

$(ar+b)^2 * 2/ (r^{2n}+1) = (r+1)^2(r-1)*2(r^{2n}-1)$

Решая это так же, как в первом пункте придем к тому, что

$2r(r2 + r - 1) >= r^{2n} + 1$

1) $n >= 3$ => $r^{2n} + 1 >= r^6 + 1$, не подходит
2) $n = 2$ => $r^4 + 1 >= 2r(r^3 + r - 1)$ значит $r = 2$ => $(ar+b)^2 = 17 * 9 / 3 = 51$ – не полный квадрат не подходит
3) $n = 1$
   НОД$(r^2+1, r+1)$ = НОД$(2, r+1) = 2$ =>
   $(ar+b)^2 / 4 = (r^2+1) * (r+1) / 4$ =>
   $(R+1)/2 <= 35$ и $(r+1)/2$ – полный квадрат =>
   1) $r+1 = 2$ => $r = 1$ нет решений

2) r + 1 = 8 => r = 7 = > ar + b = 10 => b = 6 a = 2 пара (7, 20)
3) r + 1 = 18 => r = 17 => (r^2 + 1)/2 = 145 =(ar + b)^2 – не полный квадрат
4) r + 1 = 32 => r = 31 = > (r^2 + 1)/2 = 481 =(ar + b)^2 - не полный квадрат
5) r + 1 = 50 => 5 = 49 => (r^2 + 1)/2 = 1021 =(ar + b)^2 не полный квадрат

получается только одно решение (7, 20)

Ответ: (7, 20)