	ol2216423 ol2216423
Тест начат	понедельник, 14 Февраль 2022, 10:04
Состояние	Завершено
Завершен	понедельник, 14 Февраль 2022, 14:05
Прошло времени	4 час.
Оценка	**60,00** из 100,00

Вопрос
Инфо

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 5 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

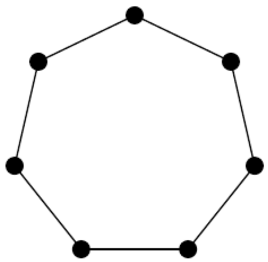
Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос **1**

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Саша выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа так, чтобы для всех этих чисел выполнялось свойство:
если числа a и b не соединены отрезком, то сумма $a+b$ должна быть взаимно проста с n, а если соединены, то числа $a+b$ и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1.
При каком наименьшем n существует такая расстановка?



35.

Оценка: пронумеруем кружки по часовой стрелке начиная с самого верхнего. Докажем что n не делится на 2. Пусть нет, тогда рассмотрим 1 3 и 5 кружки. Два из них одной четности, а значит должны быть соединены, хотя это не так.

Докажем, что n не простое. Пусть нет, тогда первое число + второе делится на это простое. и второе + третье тоже делится на это простое. Тогда первое и третье сравнимы по модулю этого простого. Но тогда 4 и 1 должны быть соединены, так как первое + четвертое сравнимо с третье + четвертое сравнимо с 0. Но они не соединены.

Докажем что n делится на хотя бы 2 простых не равных 3. Пусть нет, тогда n либо простое либо простое умножить на 3. Но что n составное я доказал. Осталось доказать что n не равно простому на 3. Пусть среди кружков нет пары а и в таких что а+в делится на 3, тогда аналогично доказательству что эн - составное такого не может быть. (рассматриваем 4 кружочка подряд). Значит существуют такие а и в что их сумма делится я на 3. НУО это 1 и 2 кружки. Тогда есть два варианта. В 1 и втором стоят 0 по модулю 3 либо в одном 1, во втором 2 по модулю 3. Пусть стоят нули, тогда Все остальные числа гранимы с 1 или 2 по модулю 3. Но Среди оставшихся 4 пар 3,4 4,5 5,6 6,7 должна быть еще одна пара с и к, такая что с+к делится на 3, так как по аналогичным доказательству составности числа эн все эти пары не могут быть соединены лишь по модулю одного простого. Значит среди 3,4,5,6,7 кружков найдется 1 и 2 по модулю 3. Но тогда найдутся пара 1 и 2 по модулю 3 на расстоянии хотяб 2 пары. Так как пусть нет, тогда 3 и 7 одинаковые по модулю 3, 4 и 5 такие же как 7, а 6 как 1, значит они все совпадают по модулю 3, что неправда (так как я доказал что найдется 1 и 2 по модулю 3).

Если же пара а и в это пара 1 и 2 по модулю 3. Тогда всего не больше одного нуля по модулю 3 выписано (если 2 и они рядом, то мы разобрали, если не рядом, то они должны быть соединены) тогда 6 подряд чисел только 1 и 2 по модулю 3, при этом и 1 и 2 по модулю 3 есть, тогда аналогично доказанному ранее, такого быть не может.

Значит n делится хотя бы на 2 простых не равных тройке, тогда n >= 5*7=35

Пример: числа к кружочках - 1,9,11,3,2,8,20. Тогда по модулю 5 это 1,4,1,3,2,3,0 => никакие лишние не соединены по модулю 5. По модулю 7 - это 1,2,4,3,2,1,6 никакие лишние не соединены по модулю 7.

И при этом легко заметить, что все соседние соединены. Т.о. такой пример подходит

Комментарий:

Вопрос 2

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

При $x, y, z \in (0, 2]$ найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{(x^3 - 6)\,\sqrt[3]{x+6} + (y^3 - 6)\,\sqrt[3]{y+6} + (z^3 - 6)\,\sqrt[3]{z+6}}{x^2 + y^2 + z^2}\,.$$

Докажем, что А не больше 1

Для этого докажем (x^3-6)(x+6)^(1/3)<=x^2 при x в условии

Если (x^3-6)<=0, то неравенство верное (в силу неотрицательности x^2), докажем его при (x^3-6) > 0

x+6<=8 следовательно при положительном (x^3-6) (x^3-6)(x+6)^(1/3)<=2(x^3-6)

Докажем 2(x^3-6)<=x^2. 2x^3-12-x^2=(x-2)(2x^2+3x+6) x положительный, значит (2x^2+3x+6) больше 0, значит при x<2 2x^3-12-x^2<=0 значит (x^3-6)(x+6)^(1/3)<=x^2 доказано. Тогда пусть существует такая тройка x,y, z лежащие в том же интервале что и в условии, что А больше 1. Но тогда числитель больше знаменателя, однако применяя (x^3-6)(x+6)^(1/3)<=x^2 для всех трех переменных мы получаем противоречие. Таким образом А не больше 1. И 1 достигается при всех переменных равных 2

Комментарий:

Вопрос 3

Выполнен

Баллов: 0,00 из 20,00

Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Внутри треугольника AOB выбрана такая точка K, что прямая KO является биссектрисой угла CKD. Луч DK вторично пересекает описанную окружность треугольника COK в точке L, а луч CK вторично пересекает описанную окружность треугольника DOK в точке M. Найдите отношение площадей треугольников ALO и BMO.

Комментарий:

Вопрос **4**

Выполнен

Баллов: 0,00 из 20,00

Натуральное число x в системе счисления с основанием r ($r \leqslant 36$) имеет вид $\overline{ppqq}$, причем $2q = 5p$. Оказалось, что r-ичная запись числа x^2 представляет собой семизначный палиндром с нулевой средней цифрой. (Палиндромом называется число, которое читается одинаково слева направо и справа налево). Найдите сумму r-ичных цифр числа x^2.

Пусть х квадрат это авс0авс. тогда авс0авс равно a(r^6+1)+rb(r^4+1)+cr^2(r^2+1)   ppqq = (r+1)(r^2p+9)

abc0abc делится на (r+1)^2. r^6+1=(r^2+1)((r^2+1)^2-3r^2) = -2r*r^2 (mod (r+1)^2)

r^4+1=(r^2+1)^2-2r^2 = 2r^2 (mod (r+1)^2)

r^2 + 1 = -2r (mod (r+1)^2)

значит х квадрат по (mod (r+1)^2) равен   -2ar^3+2r^3b-2cr^3=0

(r,r+1)=0 => 2a+2c-2b=0 (mod (r+1)^2)

4|a+c-b| < 4r <= 2r + (r^2+1) => a+c=b

Значит искомая сумма равна 2в

Найдем в

a(r^6+1)+rb(r^4+1)+cr^2(r^2+1) = rb(r^4+1) (mod r^2+1) = -2r^3b (mod (r+1)^2)

ppqq^2 = (r+1)^2(r^2p+q)^2 = -2r(q-p)^2 (mod (r+1)^2)

(r,r^2+1) = 1 => 2r^2b=2(q-p)^2 (mod (r+1)^2)

-2b=2(q-p)^2(mod (r+1)^2)

-2b=4,5 p^2

r^2+1-2b = 4,5p^2 (mod (r+1)^2)

r^2+1>2b

Комментарий:
авс0авс — не палиндром.

Вопрос **5**

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

При каких n клетчатую доску $n \times n$ можно разбить по клеточкам на один квадрат 2×2 и некоторое количество полосок из пяти клеток так, что квадрат будет примыкать к стороне доски?

При n сравнимых с 2 по модулю 5. (n - натуральное)

Оценка: Заметим, что колитов всех клеток должно быть сравнимо с 4 по модулю 5, иначе мы не сможем разрезать доску на любые фигуры из 5 клеток, в том числе и полоски. Значит n^2-4 делится на , значит либо n -2 делится на 5, либо n-3 делится на 5. Осталось доказать, что возможен только первый вариант. Пусть существует такая доска с длиной стороны сравнимой с 3 по модулю 5, что она с вырезанным квадратом 2 на 2 так что квадрат примыкает к сторонам доски разбивается на полоски из пяти клеток. НУО этот квадрат примыкает к верхнему краю. Тогда пронумеруем строки 1,2,...,n сверху вниз.

Утв.: любую строку кроме первой и второй пересекают количество вертикальных полосок 1 на 5 сравнимое с 3 по модулю 5.

Д-во: Пусть нет, тогда рассмотрим строку где это не так, в ней сравнимое а вертикальных и в горизонтальных полосок. тогда а + 5в - 3 делится на пять, значит а -3 делится на 5.

Т.о. в частности 6, 11, 16, 21,... строки пересекает тоже сравнимое с 3 по модулю 5 вертикальных полосок. Будем говорить что полоска начинается на строке а, если верхняя клетка полоски на строке а (с текущего момента мы рассматриваем только вертикальные полоски). Тогда на строке 1 начинаются сравнимое с единицей по модулю 5 вертикальных полосок. Значит на 5 строке заканчиваются сравнимое с 1 число полосок. Но это означает что количество полосок начинающихся на 6 строке должно быть сравнимо с 1 по модулю 5, иначе количество полосок на 7 строке не будет сравнимо с 3 по модулю 5. Аналогично на 11,16,21,... начинаются сравнимое с 1 по модулю 5 число полосок. Значит и на n-2 в том числе. Но такие полоски должны выходить за пределы доски - противоречие. Таким образом n-3 не делится на 5.

Осталось привести пример для n-2 делящегося на 5

Ставим квадрат в левый верхний угол. 1 и 2 строку полностью замощаем горизонтальными полосами по (n-2)/5 в каждой и 1 и 2 слева столбец вертикальными по (n-2)/5 в каждом. Остается замостить квадрат со стороной делящейся на 5 примыкающим к правому нижнему углу. Его мы полностью замещаем (n-2)^2/5 горизонтальными полосками по (n-2)/5 в каждой строке. Таким образом мы замостим весь квадрат.

Комментарий:

« ПРЕДЫДУЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 11

СЛЕДУЮЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ »
Вариант 23