	ol2223098 ol2223098
Тест начат	понедельник, 14 Февраль 2022, 10:05
Состояние	Завершено
Завершен	понедельник, 14 Февраль 2022, 14:05
Прошло времени	3 час. 59 мин.
Баллы	90/120
Оценка	**75** из 100

Вопрос
Инфо

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 6 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос 1

Выполнен

Баллов: 20 из 20

Коля поехал на электросамокате в магазин в соседнюю деревню со скоростью 10~км/ч. Проехав ровно треть всего пути, он понял, что при движении с прежней скоростью успеет точно к закрытию магазина, и увеличил скорость вдвое. Но когда он проехал ровно 2/3 всего пути, самокат сломался, и оставшуюся часть пути Коля прошел пешком. С какой скоростью он шел, если успел точно к закрытию магазина?

Пусть весь путь - 3s км, а Колина последняя скорость - x км/ч. Тогда изначально до закрытия магазина осталось 3s/10 ч, так как Коля понял, что при движении с начальной скоростью 10 км/ч он успеет точно к закрытию магазина. На первую треть пути, то есть на первые s км, Коля потратил s/10 ч. Затем он увеличил скорость вдвое, то есть его новая скорость 20 км/ч. На вторые s км Коля потратил s/20 ч. На третьи s км он потратил s/x ч. При этом суммарно он потратил 3s/10 ч, так как он успел точно к закрытию магазина. Имеем уравнение:

$3s/10=s/10+s/20+s/x;$

$3/10=1/10+1/20+1/x;$

$4/20=1/20+1/x;$

$3/20=1/x;$

$x=20/3.$

Итак, Коля шёл со скоростью 20/3 или же 6 целых 2/3 км/ч.

Комментарий:

Вопрос 2

Нет ответа

Балл: 20

Найдите все целые a, для которых квадратный трехчлен $x^2 + ax + 2a$ имеет два различных целых корня.

Вопрос 3

Выполнен

Баллов: 20 из 20

Положительные числа a, b и c удовлетворяют условию $abc(a+b+c)=3$. Докажите неравенство $(a+b)(b+c)(c+a)\geqslant 8$.

ol2223098_3.pdf

Комментарий:

Вопрос **4**

Выполнен

Баллов: 20 из 20

Какое наименьшее количество фишек можно расставить в клетках таблицы 99×99 так, чтобы в каждом квадрате 4×4 было не менее восьми фишек?

ol2223098_4.pdf

Комментарий:

Вопрос **5**

Выполнен

Баллов: 18 из 20

Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Диагональ AC — биссектриса угла $\angle BAD$, точка M — середина стороны BC, а точка N — середина отрезка DO. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является вписанным тогда и только тогда, когда четырехугольник $ABMN$ является вписанным.

ol2223098_5.pdf

Комментарий:
написано "угол OAC = угол CAD" вместо "угол BAC = угол CAD"

Вопрос **6**

Выполнен

Баллов: 12 из 20

Докажите, что у каждого из чисел $n!+1$, $n!+2$, \dots, $n!+n$ можно выбрать простой делитель, на который не делится ни одно из остальных.

ol2223098_6.pdf

Комментарий:
Неаккуратное изложение. Сначала утверждается, что всегда есть простой делитель, больший n, потом получается, что бывают случаи, когда это не так. Как действовать в этом случае явно не написано, приходится догадываться из контекста. Но просто выбрать k в этом случае нельзя (на k может делиться еще одно из чисел), например, у n!+2 нельзя брать двойку, поскольку n!+4 также делится на 2. Тут надо действовать аккуратнее.

По условию задачи $abc(a+b+c)=3=ac(ab+b^2+bc)$

$(a+b)(b+c)(a+c)=(b^2+ab+ac+bc)(a+c)=\left(\frac{3}{ac}+ac\right)(a+c)=$

$\frac{3}{c}+\frac{3}{a}+a^2c+ac^2=\frac{1}{c}+\frac{1}{c}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+a^2c+ac^2\geq 8\sqrt[8]{\frac{a^2cac^2}{aaaccc}}=8$ по неравенству о средник для положительных чисел $\frac{1}{a},\frac{1}{c},a^2c,ac^2$ (числа a,b,c положительные по условию задачи. Ни a, ни c не могут равняться 0, поэтому могут находиться в знаменателях дробей.

Ответ: 4801

Оценка:

≥8	≥8	≥8		≥4
≥8	≥8	≥8		≥4
≥8	≥8	≥8		≥4
≥4	≥4	≥4		≥1

Рассмотрим верхний левый квадрат доски размера 96*96 и разделим его на 24*24 квадрата 4*4. В каждом из таких квадратов хотя бы 8 фишек по условию задачи. Значит, в этой части доски хотя бы 24*24*8 фишек.

У нас останется неразбитым уголок образованный пересечением правых трёх столбцов и нижних трёх строк. Разобьём прямоугольник в правом верхнем углу, состоящий из трёх столбцов и 98 строк на прямоугольника 4*3, где 4 клетки по вертикали, а 3 по горизонтали. В каждом из таких прямоугольников должно быть хотя бы 4 фишки, так как если мы рассмотрим такой прямоугольника и дополним его до квадрата 4*4, добавив слева 4 клетки, то в полученном квадрате будет хотя бы 8 фишек, максимум 4 из которых не лежат в прямоугольнике. Всего таких прямоугольников 24. Значит, в этой части доски хотя бы 24*4 фишек.

Аналогично, если мы разобьём прямоугольник в левом нижнем углу, состоящий из 3 строк и 98 строк на прямоугольники 3*4, где 3 клетки по вертикали и 4 по горизонтали, то в каждом из таких прямоугольников тоже должно будет быть хотя бы 4 фишки. Аналогично, в этой части доски хотя бы 24*4 фишек.

Остался квадрат 3*3 в правом нижнем углу. В нём должна быть хот бы одна фишка, так как если мы рассмотрим нижний правый квадрат 4*4, то в нём должно быть хотя бы 8 фишек, максимум 7 из которых не лежат в квадрате 3*3.

Итого, всего фишек хотя бы 24*24*8+2*24*4+1=24*8*(24+1)+1=24*200+1=4801.

Пример: пронумеруем строки сверху вниз от 1 до 99, столбцы – слева направо.

Поставим по одной фишке в клетки столбцов с номерами, кратными 4 и в клетки строк с номерами, кратными 4. Также поставим по фишке в клетки, и номер строки, и номер столбца которых даёт остаток 3 при делении на 4.

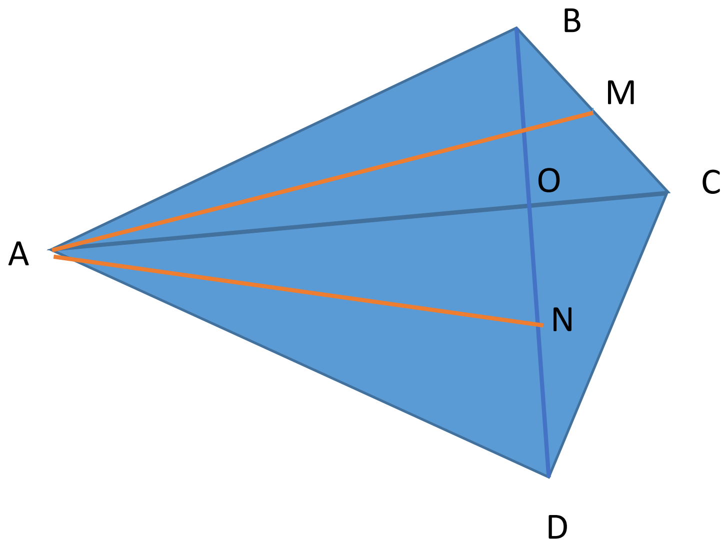
			1			
			1			
		1	1			1
1	1	1	1	1	1	1
			1			
			1			
		1	1			1

Так выглядит левый верхний квадрат 7*7 доски, 1 - фишка.

Тогда всего поставлено 2*24*99-24*24+ 25*25 фишек, так как 24*99 - общее количество клеток в столбцах с номерами, кратными 4, 24*99 - общее количество клеток в столбцах с номерами, кратными 4, 24*24 – количество клеток на их пересечениях, которые были посчитаны 2 раза, 25*25 – количество клеток и номер строки, и номер столбца которых даёт остаток 3 при делении на 4. 2*24*99-24*24+ 25*25=48*99+49=48*100+1=4801.

Кроме того, квадрат 4*4 всегда включает в себя 4 подряд идущие строки и 4 подряд идущих столбца, следовательно, среди строк и среди столбцов найдутся с номером, кратным 4, а также найдётся клетка, и строка и столбец которой дают остаток 3 при делении на 4, отличная от найденных 7 фишек в кратных 4 строках или столбцах. Значит, в каждом квадрате 4*4 будет хотя бы 8 фишек.

Сначала докажем, что если ABCD – вписанный, то и ABMN – вписанный.

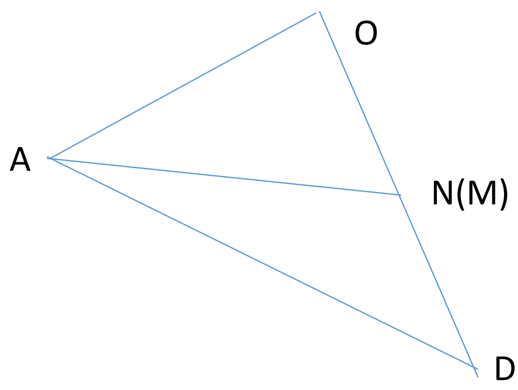


По условию задачи AC – биссектриса угла BAD, значит, угол OAC = угол CAD. ABCD – вписанный, следовательно, угол ADO = угол ACB. Тогда треугольники AOD и ABC подобны по двум углам, следовательно, угол между соответствующими медианами и сторонами в них равен: угол ANO = угол AMB, а значит, четырёхугольник ABMN – вписанный.

Теперь докажем, что если ABMN – вписанный, то и ABCD – вписанный.

угол ANO = угол AMB из-за вписанности

Совместим точку M с точкой N, точку O расположим на луче MB, точку D – на луче MC:



Так как на этой картинке OB=CD, то, проведя через точки B и C прямые параллельные AO и AD, они пересекутся на AN в точке X под углом, равным углу OAD (по теореме Фалеса $\frac{NA}{AX} = \frac{NO}{OB} = \frac{ND}{DC}$). Так как на луче NA можно выбрать единственную точку X, что угол BXC = угол BAC(с отдалением X от N угол BXC уменьшается), то треугольника BXC = треугольнику BAC. При этом угол ADO = угол XCB(из-за параллельности XC, AD) = угол ACB, откуда и следует вписанность.

Докажем, что у каждого из чисел n!+1, n!+2, … , n!+n есть простой делитель, больший n, тогда этого простого не может быть в разложении ни у одного из остальных чисел в ряду, так как разность любых двух из них не превосходит n, а в случае, когда два числа с разностью не больше n делятся на простое, большое n, их разность тоже делится на это простое и при этом разность строго меньше делителя, следовательно, их разность равна 0, и эти два числа совпадают.

Пусть число n!+k, где 1≤k≤n не делится ни на какое простое, большее n.

n!+k= ${p_1}^{a_1} * {p_2}^{a_2} * \ldots * {p_m}^{a_m}$, разложение на простые множители, где $p_1, p_2 \ldots p_m$ – все простые, не превосходящие n. p_i входит в разложение в меньшей из степеней, в которые он входит в k и n!(в случае, если эти степени неравные), так как n! делится на p_i, которое меньше n. При этом n! делится на k, поэтому p_i входит в меньшей степени в k.

Если же эти степени равны, то такое возможно только в случае, когда k – простое. И единственное возможное разложение, в котором нет ни одного простого, большего n, это n!+k=k^x, так как k делится на каждое простое, входящее в разложение, потому что n! делится на них.