	ol2245784 ol2245784
Тест начат	понедельник, 14 Февраль 2022, 10:16
Состояние	Завершено
Завершен	понедельник, 14 Февраль 2022, 14:05
Прошло времени	3 час. 49 мин.
Оценка	**75** из 100

Вопрос
Инфо

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 -вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 5 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

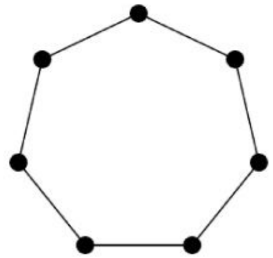
б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!
Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос **1**
Выполнен
Баллов: 20 из 20

На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Саша выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа так, чтобы для всех этих чисел выполнялось свойство:
если числа a и b не соединены отрезком, то сумма $a+b$ должна быть взаимно проста с n, а если соединены, то числа $a+b$ и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1.
При каком наименьшем n существует такая расстановка?



Заметим, что число n не должно делится на 2, иначе:

Точно будет хотя бы одно нечетное (если нет, то все четные, и тогда сумма не связанных ребром чисел будет четна!!!), значит все те, что не связаны с этим нечетным, должны быть четными, но тогда среди этих 4-ч чисел найдется пара, не связанных ребром, и при этом оба четные!!!

Число n не делится на 3, иначе:

Если есть хотя бы одно число делящееся на 3, то тогда те 4 вершины, что не связаны с этим числом, не делятся на 3, значит имеют остатки по модулю 3: 1 или 2. Тогда, чтобы выполнялось условие необходимо, чтобы все эти остатки были одинаковые(все 1 или все 2). Тогда, оставшиеся 2 числа, являющиеся соседями делящегося на 3, одно из них должно делится на 3, а другое должно давать тот же остаток, что и те 4 числа. Это обеспечивает выполнение условия, но тогда всего одна пара вершин, соединённая ребром (та, где оба остатка 0 по модулю 3) дает нам выполнение условия на соединенные ребром вершины. Всего одна пара вершин это мало(дальше поймём это)

Аналогично если число n это степень тройки, то рассмотрев всё те же остатки по модулю 3, становится ясно, что мы сможем выполнить условие на соединённые ребром вершины только для одной пары.

Заметим, что число n не может быть простым числом, так как если n простое, то тогда если есть какой-то ненулевой остаток r среди всех чисел, то тогда соседи этого остатка это n - r, а их соседи это r и в конце получится пара r и r,а их сумма не делится на n (а если есть один нулевой остаток, то все остатки нулевые чего быть не может)

Исходя из всех этих условий, до 35 есть следующие кандидаты:

3 - не подходит, так как единственный подходящий под первое условие случай описан выше, но тогда не проходит 2 условие.
9 - аналогично с 3
15
21
25
27 - аналогично с 3 и 9
33
35

15: с 3 все понятно как мы её расставим и будет всего одна связь (выполнение второго условия для пары вершин)

с 5 надо разобраться: нам необходимо расстановкой остатков по модулю 5 получить 6 новых связей, но у 5 всего 5 различных остатков, и учитывая, что необходимо выполнять первое условие, нетрудно понять, что больше 5 новых связей мы получить не сможем.

Значит 15 не подходит

21: аналогично, 3 рассмотрено, а вот с 7 всё аналогично с 5, а именно, чтобы получать новые связи надо ставить остатки r и 7-r рядом, но максимум подряд таким образом можно поставить 3 числа, получив две новые связи, и таких цепочек из 3-х чисел можно поставить максимум 2, следовательно сделать всего 4 новые связи, значит 21 не подходит и по такой же причине этими же рассуждениями не подходит 33.

25: это 5^2 и по той же причине, что нельзя получить простым числом, нельзя и его степенью, то есть 25 не походит.

35 - подходит: пример:

Следующие числа просто расставить по кругу именно в таком порядке:

36 9 31 32 33 57 195

Ответ: 35.

Комментарий:

Вопрос **2**
Выполнен
Баллов: 5
из 20

При $x, y, z \in (0, 2]$ найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{(x^3 - 6)\sqrt[3]{x+6} + (y^3 - 6)\sqrt[3]{y+6} + (z^3 - 6)\sqrt[3]{z+6}}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

При фиксированных x;y A(z) - возрастающая функция на (0;2]. Аналогично при фиксированных y;z A(z) - возрастающая функция. При фиксированных x;z A(y) - возрастающая функция => Максимальное значение A(x;y;z) будет достигаться в точке x=2

y=2

z=2

A=4+4+4/4+4+4=1

Комментарий:
Равенство переменных не обосновано.

Вопрос **3**
Выполнен
Баллов: 20 из 20

Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Внутри треугольника AOB выбрана такая точка K, что прямая KO является биссектрисой угла CKD. Луч DK вторично пересекает описанную окружность треугольника COK в точке L, а луч CK вторично пересекает описанную окружность треугольника DOK в точке M. Найдите отношение площадей треугольников ALO и BMO.

Обозначим углы CKO и BKO за x. Тогда угол CLO=CKO = x (т.к. COKL - вписанный четырехугольник) Угол OKD = угол OAD = x (т.к. KODA - вписанный четырехугольник). Значит, треугольники COL и DOA подобны (угол COL = угол DOA) Обозначим углы CKO и BKO за x. Тогда угол CLO=CKO = x (т.к. COKL - вписанный четырехугольник) Угол OKD = угол OAD = x (т.к. KODA - вписанный четырехугольник). Угол LKC = 180 - 2x. Угол LKC = LOC (опираются на 1 дугу). Угол LKC = MKD (вертикальные). Угол MKD = MOD (опираются на одну дугу). Значит, угол LOC = MOD. Значит, треугольники COL и DOA подобны (угол COL = угол DOM, угол CLO = DAO = x) Значит, LO/MO = CO/DO. Кроме того, CO/DO = BO/AO (т.к. ABCD - вписанный), значит LO/MO = BO/AO, значит, AO*LO = BO*MO. Угол AOL = BOM. (Т.к. угол LOA = LOM+AOM; угол BOM = LOM+BOL. Угол AOM = BOL, т.к. угол AOM = MOD - DOA BOL = LOC - BOC, а углы MOD = LOC и BOC = AOD, значит доказали, что угол AOL = BOM) Угол AOL = BOM, значит sin AOL = sin BOM, значит 1/2*sin AOL*AO*LO = 1/2 * sin BOM * BO*MO, значит площади треугольников AOL и BOM равны.

Ответ: 1

Комментарий:

Вопрос **4**
Выполнен
Баллов: 15 из 20

Натуральное число x в системе счисления с основанием r ($r \leqslant 36$) имеет вид $\overline{ppqq}$, причем $2q = 5p$. Оказалось, что r-ичная запись числа x^2 представляет собой семизначный палиндром с нулевой средней цифрой. (Палиндромом называется число, которое читается одинаково слева направо и справа налево). Найдите сумму r-ичных цифр числа x^2.

Заметим, что раз 2q=5p и p, q<36 то возможны следующие пары: p=2, q=5; p=4, q=10; p=6, q=15...; p=14, q=35, т.к. q делится на 5. Теперь заметим, что x^2=p^2*r^6+2p^2*r^5+(p^2+2pq)*r^4..., заметим что раз x^2 семизначное число, то p^2<r, т.к. иначе p^2*r^6>=r7 => x^2 восьмизначное => раз r<=36 то p<=5 => возможны следующие варианты, p=2, q=5; p=4, q=10;

Рассмотрим первый случай, в нем x^2=4r^6+8r^5+24r^4+40r^3+45r^2+50r+25. Тогда раз числа при r^6 и r^0 равны, то либо 4 mod r=25 либо 4+1 mod r=25(только +1, т.к. больше перехода через разряд от 8r^5 не может быть, т.к. r>6). В первом случае r=21 или r=7, но если 7, то был был переход через разряд от 5 степени => r=21. Тогда число записывается как 4*21^6+9*21^5+5*21^4+0*21^3+5*21^2+9*21+4=4950594 в r-ичной системе счисления, как раз то что и надо. Тогда сумма - 36.

Теперь если 5 mod r=25. Тогда или r=20 или r=5 или r=4. 5 и 4 не подходят, т.к. раз q=5, то r>=6. Если r=20, то коэф. при r^3 равен 0+2 то есть не равен 0 - противоречие с условием.

Теперь если p=4, q=10. Тогда x^2=16r^6+32r^5+96r^4+160r^3+180r^2+200r+100. Тогда либо 16 mod r = 100 либо 17 mod r=100 либо 18 mod r=100 либо 19 mod r=100, либо 20 mod r=100 больше 4 перехода не будет, т.к. r>10. Разберем эти случаи. Если 16 mod r =100, то r=21 или 28, т.к. другие варианты или меньше 10 или больше 36. оба варианта не подходят, т.к. в таком случае будет переход через разряд у 32r^5 и равенства между последней и первой цифрой тоже не будет. Если 19 mod r==100, то 81 делится на r=> r=9 - не подходит. Если 18 mod r=100, то 82 делится на r тогда r или 41 или 1 - не подходит. Если 17 mod r=100 то 83 делится на r, но 83 просто - не подходит. Если 20 mod r=100, то 80 делится на r значит r=20 или 16. Если r=20, то последняя цифра x^2 будет 0 - не подходит. Если r=16, то p^2=r - не может быть, т.к. тогда число не семизначное.

Таким образом, перебрав все варианты получается единственный ответ 36

Ответ: 36.

Комментарий:
Коэффициенты при степенях r — не обязательно цифры числа.

Вопрос **5**
Выполнен
Баллов: 15 из 20

При каких n клетчатую доску $n \times n$ можно разбить по клеточкам на один квадрат 2×2 и некоторое количество полосок из пяти клеток так, что квадрат будет примыкать к стороне доски?

Заметим, что n^2 должен быть сравним по модулю 5 с 4. Это возможно в двух случаях: 1) если n по модулю 5 сравнима с 2

2) n по модулю 5 сравнима с 3.

1) Заметим что тогда поставим в левый верхней угол квадрат 2x2. Заметим, что тогда мы сможем заполнить всю остальную таблицу полосками длины 5.(мы можем заполнить прямоугольник (5k+2)x5k полосками длины 5, а затем заполнить полосками длины 5 прямоугольник (5k)x2)

2) Покрасим таблицу в раскраску в 5 цветов по вертикалям (1 цвет, 2 цвет, 3 цвет, 4, 5, 1, 2, ..., 1, 2, 3). Заметим, что полоска длины 5 содержит в себе либо все клетки одного цвета, либо клетки всех цветов. Заметим, что цветов 1, 2 и 3 на одну полоску больше. Так же заметим, что квадрат 2x2 содержит в себе только 2 цвета. Также заметим, что можно разбить таблицу на полоски длины 5 так, что бы остался квадрат 3x3. Заметим, что в нем есть 3 различных цвета, каждого по 3 клетки. Тогда заметим, что если мы из такого квадрат выкинем квадрат 2x2, то у нас должна найтись полоска, которая покроет 5 клеток ровно 3х разных цветов, а такого быть не может.

Значит n должна быть сравнима с 2 по модулю 5.

Комментарий:
Непонятен итог рассуждения в 2).

« ПРЕДЫДУЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 13

СЛЕДУЮЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ »
Вариант 21