	ol2214903 ol2214903
Тест начат	понедельник, 14 Февраль 2022, 10:04
Состояние	Завершено
Завершен	понедельник, 14 Февраль 2022, 14:05
Прошло времени	4 час.
Оценка	**60,00** из 100,00

Вопрос **Инфо**

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 5 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

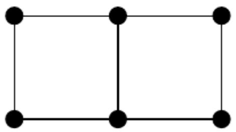
Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос 1

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Таня выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа так, чтобы для всех этих чисел выполнялось свойство:
если числа a и b не соединены отрезком, то сумма a^2+b^2 должна быть взаимно проста с n, а если соединены, то числа a^2+b^2 и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1.
При каком наименьшем n существует такая расстановка?



ol2214903_1.pdf

Комментарий:

Вопрос **2**

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

При $x, y, z \in (0, 1]$ найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{\sqrt{8x^4 + y} + \sqrt{8y^4 + z} + \sqrt{8z^4 + x} - 3}{x + y + z}.$$

ol2214903_2.pdf

Комментарий:

Вопрос 3

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

Диагональ AC вписанного четырехугольника $ABCD$ является диаметром описанной вокруг него окружности ω. Из точки D провели прямую, перпендикулярную отрезку BC, она вторично пересекла окружность ω в точке E. Найдите отношение площадей треугольника BCD и четырехугольника $ABEC$.

ol2214903_3.pdf

Комментарий:

Вопрос **4**

Нет ответа

Балл: 20,00

На доске написано число 5555 в системе счисления с четным основанием r ($r \geqslant 18$). Петя выяснил, что r-ичная запись x^2 представляет собой восьмизначный палиндром, у которого разность четвертой и третьей цифр равна 2. (Палиндромом называется число, которое читается одинаково слева направо и справа налево). При каких r такое возможно?

Вопрос **5**

Нет ответа

Балл: 20,00

Дана квадратная таблица 2023×2023. Каждая ее клетка окрашена в один из n цветов. Известно, что для любых шести клеток одного цвета, расположенных в одной строке, сверху от самой левой из них и снизу от самой правой из них нет клеток того же цвета. При каком наименьшем n такое возможно?

Ответ: 65.

Пример на n = 65:

52 1 5

26 57 40

52^2 даёт остаток 4 по модулю 5 и 0 по модулю 13

1^2 даёт остаток 1 по модулю 5 и 1 по модулю 13

5^2 даёт остаток 0 по модулю 5 и 12 по модулю 13

26^2 даёт остаток 1 по модулю 5 и 0 по модулю 13

57^2 даёт остаток 4 по модулю 5 и 12 по модулю 13

40^2 даёт остаток 0 по модулю 5 и 1 по модулю 13

Обладая этой информацией нетрудно убедиться, что сумма любых двух не соседних чисел не делится ни на 5 ни на 13, в то же время сумма любых двух соседних делится хотя бы на одно из этих чисел.

Оценка:

1) Так у какой-то суммы квадратов НОД с n должен быть больше одного, то n > 1.
2) Докажем, что любое подходящее n не будет делиться на 2,

Действительно, левое нижнее, центральное верхнее и правое нижнее числа – попарно не соседние, значит, если бы n делилось на 2, должны были бы иметь попарно различные остатки при делении на 2, что невозможно.

3) Докажем, что любое подходящее n не является степенью простого числа q (отсюда так же следует, что у n хотя бы 2 различных простых делителя).

Если бы n представляло собой степень простого числа, то сумма квадратов любых двух соседних чисел делилась бы на это простое число q. В частности, если квадрат левого нижнего числа сравним с x по модулю q, то квадраты обоих его соседей должны быть сравнимы с q – x, квадраты соседей этих чисел с x, в итоге, если посмотреть на таблицу сравнимости квадратом этих чисел по модулю q, получится:

q – x, x, q – x

x, q – x, x

Откуда видно, что сумма квадратов левого нижнего и правого верхнего делится на q, то бишь не взаимнопроста с n, противоречие.

4) Пусть p – такое простое число, что зная, что $a^2 + b^2$ делится на p, можно утверждать, что и a и b делятся на p (такими простыми числами являются, например: 3, 7, 11(написав их таблицы сравнимости по соответствующим модулям можно увидеть, что нет двух отличных от нуля остатка, в сумме дающих 0)). Докажем, что тогда минимальное n не может на него делиться.

Заметим, что у минимального n точно не больше двух различных простых делителей (если бы их было хотя бы 3, то так как среди них нет двойки, то n было бы по крайней мере 3 * 5 * 7 = 105, но существует пример на 65). Тогда предположим, что утверждение 4 неверно, то бишь n делится на p и имеет ещё какой-то простой делитель q.

Если сумма квадратов никаких двух чисел не делилась бы на p, при этом расстановка удовлетворяла бы условию, то тогда разделив число n на p в степени, равной степени вхождения p в n, НОД любой суммы квадратов с n не изменился бы, при получившееся число меньше n, что противоречит минимальности.

Значит, есть пара чисел, сумма квадратов которых делится на p, но p это такое число, что из этого утверждения следует, что они оба делятся на p. При этом, среди любых трёх кружков найдутся 2 не соседних, значит, делящихся на p чисел не больше двух, при этом они соседние (значит, пара чисел, чья сумма квадратов делится на p, единственна).

Но тогда посмотри где именно они стоят и возьмём у них по соседу так, чтобы взятые кружки тоже были соседними (очевидно так всегда можно сделать

0 0 .

v v .

////

0 v .

0 v .

////

v 0 .

v 0 .

v – взятые кружки)

Если у какого-то нуля по модулю p остаток квадрата этого числа при делении на q равен x, то тогда у взятого у него соседа он равен q – x, тогда у соседа второго нуля x (иначе их сумма квадратов не сможет поделиться на q, а на p не может в силу особенности p), но тогда у второго нуля по модулю p остаток при делении квадрата этого числа на q равен q – x, откуда у двух соседних нулей по модулю p получились дополняющие до 0 остатки квадратов по модулю q, то бишь если бы мы поделили n на p, эта пара всё равно бы давала не единичный НОД, что противоречит минимальности n.

Из приведённых выше рассуждений следует, что минимальное $n \geq 5 * 13$ (2 простых делителя, не обладающих свойством, описанным в утверждении 4), то есть $n \geq 65$, ч.т.д.

Так как $0 < x \le 1$, то:

$4x \ge 4x^4 > 0$

$4x^2 \geq 4x^4 > 0$

Также, по условию: $1 \ge y > 0$

Сложив все 3 неравенства, получаем:

$$4x^2 + 4x + 1 \geq 8x^4 + y > 0$$

Извлекая корень:

$2x + 1 \ge \sqrt{8x^4 + y}$

Аналогично:

$2y + 1 \ge \sqrt{8y^4 + z}$

$2z + 1 \ge \sqrt{8z^4 + x}$

Складывая все 3 получившиеся неравенства, получаем:

$$\sqrt{8x^4 + y} + \sqrt{8y^4 + z} + \sqrt{8z^4 + x} \le 2(x + y + z) + 3$$

Что в силу положительности $x + y + z$ переписывается как:

$$\frac{\sqrt{8x^4+y} + \sqrt{8y^4+z} + \sqrt{8z^4+x} - 3}{x + y + z} \le 2$$

Оценка достигается при $x = y = z = 1$.

Ответ: 2.

Обозначим за F основание перпендикуляра из точки D на прямую BC.

Заметим, что так как AC – диаметр ω, то <ABC = 90 градусов, то бишь AB перпендикулярно BC, откуда AB параллельно DE, то бишь ABED – трапеция, но она вписана в ω => она равнобокая => <BED = <ADE (*).

Пусть X – такая точка на прямой DF, что BX || AD, тогда из того, что AB || DF => ABXD – параллелограмм, откуда:

1) AB = XD
2) <BXE = < ADE = <BED по (*) => треугольник XBE – р/б, но тогда BF – высота к основанию этого треугольника => медиана => FX = FE.

Заметим, что DF = DX + XF = AB + FE.

Равенство DF = AB + FE будем называть основным.

Заметим, что у треугольников BEC и BCD есть общая сторона BC, но тогда так как площадь это произведение основания на высоту, площади этих треугольников относятся как соответствующие высоты, то бишь SBEC/SBCD = EF/FD (1); Аналогично, у треугольников ABC и BCD есть общая сторона BC, откуда их площади относятся как соответствующие высоты, то есть SABC/SBCD = AB/FD (2);

Складывая равенства (1) и (2) видим, что:

SABEC/SBCD = (SABC + SBEC)/SBCD = SABC/SBCD + SBEC/SBCD = AB/FD + EF/FD = (AB + FE)/DF, что равно 1 по основному равенству.

Ответ: 1.