	ol2232570 ol2232570
Тест начат	понедельник, 14 Февраль 2022, 10:12
Состояние	Завершено
Завершен	понедельник, 14 Февраль 2022, 14:05
Прошло времени	3 час. 52 мин.
Оценка	**80,00** из 100,00

Вопрос
Инфо

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 5 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

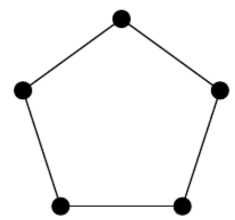
Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос **1**

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Костя выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа так, чтобы для всех этих чисел выполнялось свойство:
если числа a и b не соединены отрезком, то сумма $a+b$ должна быть взаимно проста с n, а если соединены, то числа $a+b$ и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1.
При каком наименьшем n существует такая расстановка?



ответ: 15

пример:

2+3 = 5 кратно 5
3+15 = 18 кратно 3
15 + 5 = 20 кратно 5
5+4 = 9 кратно 3
4+2 = 6 кратно 3

проверка:

2+15 = 17
3+5 = 8
15+4 = 19
5+ 2 = 7
4+3= 7;
17,8,19,7 - взаимно простые числа с 15
1 пятиугольник: пусть вершины (1) (2) (3) (4) (5)
(1) 3(x_2)
(2) 15(x_3)
(3) 5(x_4)
(4) 4(x_5)
(5) 2(x_1)
2 пятиугольник:

(1) x_1
(2) x_2
(3) x_3
(4) x_4
(5) x_5

оценка:
1) пусть цифры в кружочках: пусть n кратно 2, тогда $x_1 + x_3$, $x_2 + x_4$, x_3+x_5, x_4+x_1, $x_5 + x_2$ - нечетные, тогда их сумма тоже нечетная, т.к это сумма 5 нечетных чисел. Но их сумма равна $2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$ - четна. противоречие => n - нечетное
2) пусть n - степень просто p, тогда $x_1 + x_2$, $x_2 + x_3$, $x_3 + x_4$=> $(x_1 + x_2) + (x_3 + x_4) - (x_2 +x_3) = x_1 + x_4$ кратно p. противоречие
3) таким образом, n - нечетно и имеет хотя бы 2 различных простых делителя, то есть $n >= 15$.

Комментарий:

Вопрос **2**

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

При $x, y, z \in (0, 1]$ найдите минимальное значение выражения

$$A = \frac{(x+2y)\sqrt{x+y-xy} + (y+2z)\sqrt{y+z-yz} + (z+2x)\sqrt{z+x-zx}}{xy+yz+zx}.$$

пусть выражение [] меньше 3, тогда
((x+2y)sqrt(x+y-xy) + (y+2z)sqrt(y+z-yz) + (z+2x)sqrt(z+x-zx))/(xy+yz+zx) < 3.
тогда ((x+2y)sqrt(x+y-xy) + (y+2z)sqrt(y+z-yz) + (z+2x)sqrt(z+x-zx)) <3xy + 3yz+ 3zx
заметим, что (x+2y)sqrt(x+y-xy) > 3xy. пусть x>=y, тогда sqrt(x+y-xy) >= sqrt(x+y-y), т.к x<=1
выражение (x+2y)sqrt(x+y-xy) >= 3+y <= (x+2y)sqrt(x) > 3xy <= (x+2y)x >= 3xy, т.к x<=1 <= x^2 + 2xy >= 3xy <= x^2 >= xy. верно, т.к x>=y
если y>=x - аналогично
2y^2 + xy >= 3xy. 2y^2 >= 2xy .верно, т.к y>=x
аналогично для пар
y,z
z,x
получаем структуру неравенства, противоречие => наше выражение >= 3.

3 достигается при x=y=z=1.

Ответ: 3

Комментарий:

Вопрос **3**

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

На сторонах BC и AD вписанного четырехугольника $ABCD$ отмечены точки K и M соответственно, причем $BK : KC = AM : MD$. На отрезке KM выбрана такая точка L, что $KL : LM = BC : AD$. Найдите отношение площадей треугольников ACL и BDL, если известно, что $AC = p$ и $BD = q$.

1) пусть точка о - точка пересечения диагоналей AC и BD
2) ABCD - вписанный (по условию) => <(угол) OAD = <OBC и <OCB = <ODA => треугольник BOC подобен треугольнику AOD (по 2 углам)
3) по условию точки K, M делят стороны BC и AD в треугольниках BOC и AOD в одинаковом отношение, т.к эти треугольники подобны, соответствующие элементы у них относятся в отношение коэффициента подобия, в данном случае это стороны OK и OM, то есть OK/OM = OC/OD
- коэффициент подобия треугольника BOC и треугольника AOD, также KC и MD - тоже соответствующие элементы в этих треугольниках, то есть KC/MD = OC/OD. таким образом, **OK/OM = KC/MD = OC/OD => треугольник OKC подобен треугольнику OMD => угол KOC = углу MOD.**
4) KL/LM = BC/AD (по условию) = OC/OD (из подобия) = OK/OM => по свойству биссектрисы - **OL биссектриса угла KOM**
5) т.к угол KOL = углу LOM и угол KOC = углу MOD, получаем угол DOL = углу COL, то есть **OL - биссектриса угла DOC** => точка L равноудалена от AC и BD => **площадь треугольника ACL / площадь треугольника BDL = AC/BD = p/q, т.к площадь треугольника = высота * на основание /2,**
а высоты треугольников ACL и BDL из точки L - равны.

ответ: p/q

Комментарий:

Вопрос **4**

Выполнен

Баллов: 0,00 из 20,00

Натуральное число x в системе счисления с основанием r $(r > 3)$ имеет вид $\overline{ppqq}$, причем $q = 2p$. Оказалось, что r-ичная запись числа x^2 представляет собой семизначный палиндром с тремя одинаковыми средними цифрами. (Палиндромом называется число, которое читается одинаково слева направо и справа налево). При каких r такое возможно?

x = ppqq, q=2p, x^2 = cpaaapc, r>3
1) x = q+q*r + p*r^2 + p*r^3 = 2p + 2pr + pr^2 + pr^3 = p*(r^3 + r^2 + 2r + 2) = p(r+1)(r^2 + 2)
2) x^2 = c + p*r + a*r^2 + a*r^3 + a*r^4 + p*r^5 + c*r^6 = c(r^6+1) + p(r^5+r) + a(r^4 + r^3 + r^2)
мы знаем, что x делится на (r+1) => x^2 делится на (r+1) .
r^6 + 1 = (r+1)(r^5 - r^4 + r^3 - r^2 + r - 1) делится на (r+1).

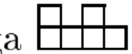
r^5 + r = r(r^4 + 1)= r(r+1)(r^3 - r^2 + r - 1) делится на (r+1).
значит, что a(r^4 + r^3 + r^2) делится на (r+1), но (r^4 + r^3 + r^2) = r^2(r^2 + r + 1) = r^2(r*(r+1) + 1) = (сравнимо 1 (mod(r+1)) , то есть (r^4 + r^3 + r^2) взаимно простые с (r+1) => a делится на (r+1), но a - цифра в r-ичной системе записи числа.
такое может быть, только если a = 0.

Комментарий:

Вопрос 5

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

Доска $m \times n$ $(m, n > 5)$ разрезана на фигурки из шести единичных квадратиков вида  (фигурки можно поворачивать и переворачивать). При каких m и n такое возможно?

1) если одно из чисел m,n кратно 3, а другое четырем, то возможно замостить прямоугольниками 4*3 или 3*4 из двух наших фигур (получим прямоугольник 3k*4l, либо 4k*3l).
2)можно замостить прямоугольник 12*7. (в каждом 3*4 по 2 фигурки)
3) любое число больше 5, представленного в виде 3k+4l**, например 7=3*1+4*1. Мы можем замощать прямоугольники 12*3 и 12*4,тогда можно замостить прямоугольник вида 12*p, где p>5
** нужно просто взять как можно больше троек, которые влезают в число и заменить, если нужно 1 или 2 тройки на пятерку
4) так как мы можем замостить любой прямоугольник 12*p, то (12k)*p тоже можем, просто размножив блок 12*p.
5)раскрасим доску m*n в шахматную раскраску, т.к в 1 фигурке 6 клеток, то площадь m*n кратна 6. т.к клеток четное количество, то черных и белых клеток поровну. заметим, что в каждую фигурку попало по 2 белых клетки и 4 черных, либо 2 черных и 4 белых.
если фигурок 1 типа - x, а второго - y, то черных клеток 4x + 2y, а белых 4y+2x => 4x+2y=4y+2x => x=y. всего фигурок x+y = 2x кратное 2 => mn кратно 12
6) мы умеем замощать прямоугольник вида 3k*4l и 12k * p, также мы знаем, что mn кратно 12. значит у нас есть либо сторона кратна 12, либо кратная 3, но не кратная 2. но, тогда другая сторона кратна 4 - разобрали, либо кратна 6, но не кратна 12, тогда другая сторона кратна 2, но не кратна 4,

то есть в последнем случае обе стороны не кратны 4. покажем, что такой прямоугольник нельзя замостить: раскрасим доску в большую шахматную раскраску (квадратами 2*2). т.к обе стороны доски не делятся на 4, черных квадратов будет на 1 больше или меньше, чем белых.
с другой стороны, при такой раскраске в каждую нашу фигурку попадает поровну черных и белых клеток, значит фигур должно быть поровну. Противоречие.
ответ:
1) m кратно 3, n кратно 4.
2) m кратно 4, n кратно 3
3) n или m кратно 12

Комментарий:

« ПРЕДЫДУЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 27

СЛЕДУЮЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ »
Вариант 17