	ol2216602 ol2216602
Тест начат	понедельник, 14 Февраль 2022, 10:08
Состояние	Завершено
Завершен	понедельник, 14 Февраль 2022, 14:03
Прошло времени	3 час. 54 мин.
Оценка	**60,00** из 100,00

Вопрос
Инфо

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 5 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

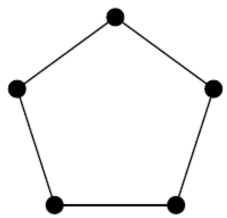
Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос **1**

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Таня выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа так, чтобы для всех этих чисел выполнялось свойство:
если числа a и b не соединены отрезком, то сумма a^2+b^2 должна быть взаимно проста с n, а если соединены, то числа a^2+b^2 и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1.
При каком наименьшем n существует такая расстановка?



Обозначения: x^k - x в степени k. x =(mod n) y значит, что x сравнимо с y по модулю n

Пронумеруем вершины по часовой стрелке 1, 2, 3, 4, 5.

Ответ: n = 65
n = 1 не подходит , т.к. должен быть общий делитель > 1.

Лемма 1. n - нечетно.

Пусть n - четно. Пусть x1 - четное. Тогда x3 и x4 нечетные(т.к. иначе x1 ^ 2 + x3^2 = четное или x1 ^ 2 + x4^2 = четное). Аналогично рассмотрев пару x3 и x5 а также x4 и x2 понимаем, что x2 и x5 - четные, но тогда x2^2 + x5^2 = четное. Противоречие.

Лемма 2. в разложении числа n все простые в 1ой степени. Это очевидно, т.к. если число не делится на k то и не делится на k^2 и если число делится на k^2 то делится и на k.

Лемма 3. n - не простое. Если n простое, то и общий множитель может быть только n.

Тогда x1^2 =(mod n) -x2^2.

x2^2 =(mod n) -x3^2.

x3^2 =(mod n) -x4^2.

x4^2 =(mod n) -x5^2.

x5^2 =(mod n) -x1^2.

=> x1^2 =(mod n) x3^2 =(mod n) x5^2 =(mod n) -x1^2 =(mod n) => они все 0. Но тогда x1^2 + x3^2 =(mod n) 0. Противоречие.

Если у n хотя бы три простых, то n >= 3*5*7 = 105. 105 >65.

Значит у n два простых. Рассмотрев все квадратичные остатки 3, 7 и 11 понимаем, что нету двух остатков кроме 0 и 0 сумма котрых кратна 3, 7 и 11 соответствено(также это верно по теореме Ферма: a^2 + b^2 =(mod p) 0 <=> либо a = b = 0 либо p = 4*k + 1). Единственная возможность использовать их в качестве общего множителя - это если в двух соседних вершинах будут стоять числа сравнимые с 0. Но если таких чисел будет хотя бы 3, то между какими-то двумя ребра не будет, а сумма их квадратов кратна p(p - это 3, 7 или 11). Тогда пусть x1 и x2 сравнимо с нулем по модулю p. Тогда все остальные соседние суммы имеют общий множитель q(q - второй простой делитель n). Тогда пусть x1^2 =(mod q) a, x2^2 = (mod q) b. x5^2 =(mod q) q - a. => x4^2 =(mod q) = a. x3^2 =(mod q) q - b. Но мы знаем, что x3^2 + x4^2 =(mod q) 0 => a + q-b = (mod q) 0 => a = b

Но тогда x5^2 + x2^2 =(mod q) q-b + b =(mod q) = 0 Но они не соединены.

=> два минимальных простых 5 и 13. n = 65. Пример 1, 2, 10, 30, 7. 1^2 + 2^ 2 кратно 5. 2^2 + 10^ 2 = 104 = 13 * 8 кратно 13. 10^2 + 30^ 2 кратно 5(оба слагаемых кратно 5). 30^2 + 7^ 2 =(mod 13) (4)^2 + 49 =(mod 13) 65 = 13*5 кратно 13.

7^2 + 1^ 2 = 50 кратно 5. 1 + 100 = 101 (не кратно не 5 не 13),

1^2 + 30^2 =(mod 13) 1 + 16 =(mod 13) 17. 901 =(mod 5) 1 (не кратно не 5 не 13)

2^2 + 30^2 = (mod 5) 4, 2^2 + 30^2 = (mod 13) 2^2 + 4^2 =(mod 13) 7 (не кратно не 5 не 13)

2 ^ 2 + 7 ^ 2 = 53(не кратно не 5 не 13)

10 ^ 2 + 7 ^ 2 = 149 (не кратно не 5 не 13, т.к. 149 = 2* 5* 13 + 9).

Всё выполняется

Комментарий:

Вопрос **2**

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

При $x, y, z \geqslant 1$ найдите минимальное значение выражения

$$A = \frac{\sqrt{3x^4 + y} + \sqrt{3y^4 + z} + \sqrt{3z^4 + x} - 3}{xy + yz + zx}.$$

x^2 + y^2 + z^2
Обозначение: sqrt(x) - корень из x. x^k - x в степени k.

Ответ: 1

Пример: при x = y = z = 1

A = (sqrt(3*1 + 1)+sqrt(3*1 + 1)+sqrt(3*1+1) - 3)/(1*1 + 1*1 + 1*1) = (2 + 2 + 2 - 3) / 3 = 3/3 = 1

Оценка:

т.к. x, y, x >= 1, то 3*x^4 + y > 1 => sqrt(3*x^4 + y) >= 1 => числитель неотрицателен, знаменатель тоже => докажем, что числитель больше згаменателя => A >= 1.

т.к. x>= 1, то x^4 >= x^2 => 2*x^4 >= 2*x^2 => 3*x^4 >= x^4 + 2* x^2 => 3*x^4 + 1 >= x^4 + 2*x^2 + 1 =>

sqrt(3*x^4 + 1) >= sqrt((x^2+1)^2)

sqrt(3*x^4 + 1) >= x^2 + 1

т.к. y >= 1, то sqrt(3*x^4 + y) >= x^2 + 1 => Аналогично повторив для sqrt(3*y^4 + z) и sqrt(3*z^4 + x) получаем, что sqrt(3*x^4 + y) + sqrt(3*y^4 + z) + sqrt(3*z^4 + x) >= x^2 + y^2 + z^2 + 3. По транснеравенству x^2 + y^2 + z^2 >= чем любая другая перестановка => sqrt(3*x^4 + y) + sqrt(3*y^4 + z) + sqrt(3*z^4 + x) - 3 >= x*y + y*z + z*x =>

A >= 1

Комментарий:

Вопрос **3**

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

Дан вписанный четырехугольник $ABCD$ с перпендикулярными диагоналями. На описанной вокруг него окружности отмечена точка E, диаметрально противоположная D, причем отрезки AB и DE не пересекаются. Найдите отношение площадей треугольника BCD и четырехугольника $ABED$.

Пусть точка пересечения диагоналей ABCD - т. N. Sabed = Sdab + Sdeb. Т.к. AC перепендикулярно BD, то AN - высота в треуг. DAB. т.к. E - диаметр. против. D, то ED - диаметр => <DBE = 90 => EB - высота в треуг. DEB => Sabed = 1/2 * AN * BD + 1/2 * EB * BD = 1/2 * BD * (AN + EB). Пусть B' диаметрально противоположная B. Тогда BO = B'O = DO = EO = R => т.к. диагонали делятся пополам то DBEB' - паралелограм с углом 90 => это прямоугольник. Пусть AN пересекает B'E в M. Значит т.к. AN перепенд. DB, то NM || EB, ME || NB => MNBE - парал. с углом 90 => прямоугольник => MN = EB. Пусть K - середина MN. Отсиметрим рисунок относительно KO. N совпадет с M(т.к. OK перпенд MN). BD с EB', полуокр с полуокр => A совпадет с C(т.к. A лежит на полуокр и прямая AK переходит в KC) => MC = AN => AN + EB = MC + MN = CN но Sbcd = 1/2*CN*(BD) => отношение площадей равно 1.

Комментарий:

Вопрос **4**

Нет ответа

Балл: 20,00

На доске написано число $x = 9999$ в системе счисления с четным основанием r. Вася выяснил, что r-ичная запись x^2 представляет собой восьмизначный палиндром, у которого сумма второй и третьей цифр равна 24. (Палиндромом называется число, которое читается одинаково слева направо и справа налево). При каких r такое возможно?

Вопрос **5**

Выполнен

Баллов: 0,00 из 20,00

Дана квадратная таблица 2021×2021. Каждая ее клетка окрашена в один из n цветов. Известно, что для любых четырех клеток одного цвета, расположенных в одном столбце, справа от верхней из них и слева от нижней из них нет клеток того же цвета. При каком наименьшем n такое возможно?

Ответ: 674 цвета. Расположим 673 цвета подряд в первом столбце. Сделам так еще три раза. В последнюю клетку положим 674ый цвет. Тогда в первом столбце не будет ни одного цвета встречающегося 4 раза. Остальные столбцы заполним аналогично

Комментарий:
Указанное значение n не является наименьшим. Обоснование неверное.

« ПРЕДЫДУЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 21

СЛЕДУЮЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 14 »