	ol2253465 ol2253465
Тест начат	понедельник, 14 Февраль 2022, 10:06
Состояние	Завершено
Завершен	понедельник, 14 Февраль 2022, 14:05
Прошло времени	3 час. 58 мин.
Оценка	**60** из 100

Вопрос **Инфо**

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 5 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

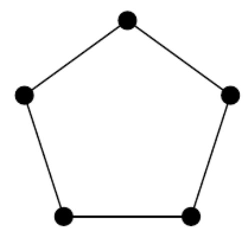
Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос **1**

Выполнен

Баллов: 20 из 20

На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Таня выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа так, чтобы для всех этих чисел выполнялось свойство:
если числа a и b не соединены отрезком, то сумма $a^2 + b^2$ должна быть взаимно проста с n, а если соединены, то числа $a^2 + b^2$ и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1.
При каком наименьшем n существует такая расстановка?



ol2253465_1.pdf

Комментарий:

Вопрос **2**

Выполнен

Баллов: 20 из 20

При $x, y, z \geqslant 1$ найдите минимальное значение выражения

$$A = \frac{\sqrt{3x^4+y}+\sqrt{3y^4+z}+\sqrt{3z^4+x}-3}{xy+yz+zx}.$$

_ol2253465_2.pdf

Комментарий:

Вопрос **3**

Выполнен

Баллов: 20 из 20

Дан вписанный четырехугольник $ABCD$ с перпендикулярными диагоналями. На описанной вокруг него окружности отмечена точка E, диаметрально противоположная D, причем отрезки AB и DE не пересекаются. Найдите отношение площадей треугольника BCD и четырехугольника $ABED$.

ol2253465_3.pdf

Комментарий:

Вопрос **4**

Выполнен

Баллов: 0 из 20

На доске написано число $x = 9999$ в системе счисления с четным основанием r. Вася выяснил, что r-ичная запись x^2 представляет собой восьмизначный палиндром, у которого сумма второй и третьей цифр равна 24. (Палиндромом называется число, которое читается одинаково слева направо и справа налево). При каких r такое возможно?

ol2253465_4.pdf

Комментарий:
решение неверное, результат неверный

Вопрос **5**

Выполнен

Баллов: 0 из 20

Дана квадратная таблица 2021×2021. Каждая ее клетка окрашена в один из n цветов. Известно, что для любых четырех клеток одного цвета, расположенных в одном столбце, справа от верхней из них и слева от нижней из них нет клеток того же цвета. При каком наименьшем n такое возможно?

ol2253465_5.pdf

Комментарий:
Указанное значение n не является наименьшим. Обоснование неверное.

Вариант 11

Покажем, что ответ равен 5*13=65;

Пример; По кругу числа стоят в таком порядке 1-2-10-65-13 и ещё есть ребро между 13 и 1.

Оценка;

Напишем на каждом ребре число — общий простой делитель суммы квадратов чисел, соединённых им и n (если таких несколько, то напишем любое). Пронумеруем числа подряд по кругу начиная с любого; a1,a2,a3,a4,a5. Заметим сначала, что n не кратен 2 (тк если n кратен 2, то из любых двух не соединённых ребром чисел одно чётное, а другое нет тк сумма из квадратов не делится на 2. Тогда не умаляя общности a1 четно, а a3- нет. Тк a3 нечётно, то a5 четно. A5 чётно, значит, a2 нечётно. Но тогда a4 должно с одной стороны быть четным из-за a2, а с другой стороны быть нечётным из-за a1. Противоречие). Теперь заметим, что на всех рёбрах не может быть записано одинаковое число p. Действительно, тогда a1^2++a2^2 делится на p и a2^2+a3^2 делится на p, значит, a1^2==a2^2(mod p). Аналогично, a3^2==a5^2. Итак, a5^2==a1^2 и их сумма делится на p. тк p!=2, то a1 и a5 делятся на p, а тогда все числа делятся на p, тогда сумма квадратов любых несмежных будет делиться на p – противоречие. Теперь посмотрим, сколько различных значений принимает число, написанное на рёберах. Один не может -доказано выше. Если их хотя бы 3, то n>=3*5*7=105>65. Значит, остался случай, где их два, и произведение меньше 65. Пусть, одно из них 3. Квадраты чисел могут давать остатки 1 и 0 при делении на 3, значит, если на ребре записано 3, то оба его конца кратны 3. Но тогда такое ребро может быть максимум одно(тк любые два числа, кратные трем должны быть соединены ребром — сумма их квадратов делится на 3). Но есть на остальных 4 ребраз записано одно число p. Пусть без огр общности a1 и a5 делятся на 3. Тогда тк на всех остальных рёберах стоит 5, a1^2+a4^2 делится на p— а между ними нет ребра — противоречие. По аналогичный причинам одним из этих чисел не может быть 7 или 11 (т. к. сумма квадратов чисел делится на 7 или 11 только тогда, когда они оба делятя на 7 или 11 — несложный перебор остатков). Значит, одно из этих чисел — 5 (т. к. иначе их произведение >=13*17>105), а тогда, n>=5*13=65 - доказано

При $x=y=z=1$ значение выражения $(2+2+2-3)/3=3/3=1$. Покажем, что это наименьшее значение. Знаменатель дроби $\le x^2+y^2+z^2$ (известное неравенство, получаемое сложением трёх неравенств типа $a^2+b^2\ge 2*a*b$, которые верны, тк если всё перенести в левую часть, там получится $(a-b)^2$,и делением на два результата. Значит, достаточно д-ть, что числитель$\ge xy+yz+xz$. Докажем, что $\sqrt{3x^4+y}\ge x^2+1$, тогда другие два корня оценятся как y^2+1 и z^2+1, и числитель оценится в $x^2+y^2+z^2+3$, что и требовалось. Докакжем это неавенство. Возведём всё в квадрат.

$3*x^4+y\ge x^4+2x^2+1$

$2x^4+y\ge 2x^2+1$

Но тк $x\ge 1$ и $y\ge 1$, то $2x^4\ge 2x^2$ и $y\ge 1$, сложением этих неравенств получаем требуемое.

Ответ: 1.

Задача 3
Будем вести счёт не в дугах, а в их половинах. Пусть, y – половина дуги CD(те угол, опирающийся на неё), x- половина дуги DA, тогда на дугу AB опирается угол в 90-y, (тк диагонали перпенд.), CE – 90-y (тк E и D диаметрально противоп.) EB- y-x.
S(BCD)=CD*BD*sin(CDB)/2=2*sin(y)*BD*sin(90-x)/2=BD*sin(y)*cos(x)
S(ABED)=AE*BD*sin(AE,BD)/2=2sin(90-y+y-x)*BD*sin(y-x+x)/2=BD*sin(90-x)*sin(y)=BD*sin(y)*cos(x). Значит, S(BCD)/S(ABED)=1
(здесь я везде при рассчёте длины хорд я использовала формулу длины хорды через дугу, на которую она опирается, радиус опиcнной окружности считала равным 1 , тк в противном случае сделаем гомотетию так, чтобы он стал равным 1, картинка останется подобной начальной, и отношение площадей не изменится).
Ответ:1.

Заметим, что тк сумма двух цифр равна 24 и r чётно, $r>=14$ (тк в r-системе используются цифры от 0 до $r-1$).

С другой стороны, тк запись содержит 8 цифр, то $r^7<=9999^2$.
Покажем, что при $r=16$ это не выполняется. Действительно, в противном случае
$16^7<=9999^2$
$4^7<=9999$
$16384<=9999$- неверно. Значит, единственный оставшийся вариант это $r=14$. Но $14^7=105\ 413\ 504>10000^2>9999^2$. Значит, 14 тоже не подходит.
Ответ: ни при каких

Пример на 673: весь первый столбец — первый цвет, нижние три строки- целиком первый цвет. Остальные клетки покрасим по строкам. Отсавишиеся из 1-3 строки — 2 цвет, из 4-7 — 3 цвет и т. д. - из последней оставшейся строки в 673 цвет.