	ol2222286 ol2222286
Тест начат	понедельник, 14 Февраль 2022, 10:06
Состояние	Завершено
Завершен	понедельник, 14 Февраль 2022, 13:55
Прошло времени	3 час. 49 мин.
Оценка	**80** из 100

Вопрос
Инфо

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 4 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос 1

Выполнен

Баллов: 10 из 10

Некоторый треугольник разрезали на пять маленьких треугольников так, как показано на рис. 1. Могли ли при этом все пять маленьких треугольников оказаться равными?

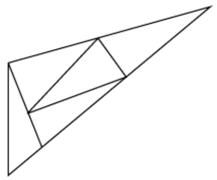


Рис. 1

ol2222286_1.pdf

Комментарий:

На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Костя выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа, не превосходящие n, так, чтобы для всех поставленных им чисел выполнялось свойство: *если числа a и b соединены отрезком, то разность $a-b$ должна быть взаимно проста с n, а если не соединены, то числа $a-b$ и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1*. Например, для картинки на рис. 2 Костя взял $n = 45$ и подобрал подходящую расстановку — она показана на рис. 3.

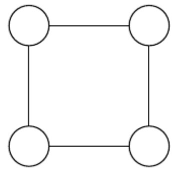


Рис. 2

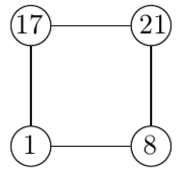


Рис. 3

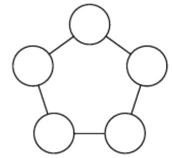


Рис. 4

а) При каком наименьшем n существует требуемая расстановка чисел на рис. 2?
б) Можно ли расставить числа в кружочках на рис. 4 при $n = 25$?
в) Можно ли расставить числа в кружочках на рис. 4 при $n = 39$?
г) При каком наименьшем n существует расстановка чисел в кружочках на рис. 4?

ol2222286_2.pdf

Комментарий:

Вопрос 3

Выполнен

Баллов: 10 из 10

На доске написано 2021 минусов. Петя и Вася играют в такую игру. Ход состоит в том, что можно один минус заменить на плюс, либо стереть один плюс и один минус, либо два минуса заменить на три плюса. Ходят по очереди, первым ходит Петя, проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

Заметим что количество минусов с каждым ходом будет уменьшатся уменьшаться. Значит мы не сможем сделать ход тогда, когда минусов нет, так как иначе можно минус заменить на плюс. Петя выигрывает, его стратегия – сначала два минуса меняет на 3 плюса, а потом если Вася один плюс и один минус вычёркивает или плюс меняет на минус, то Петя 2 минуса меняет на 3 плюса. Если Вася 2 минуса меняет на 3 плюса, Петя меняет минус на плюс. Таким образом после каждого хода Пети количество минусов будет делится на 3. В начале количество минусов 2021, он сделал 3 плюса из двух минусов и получил 2019 минусов, что кратно 3. Петя всегда сможет сделать ход, так как после хода Васи не может остаться 0 минусов, то есть число кратное 3, так как каждым ходом мы изменяем кол-во минусов на 2 или на 1, а предыдущий ход был Пети и он сделал кол-во минусов кратным трём.

Ответ Петя.

Комментарий:

Вопрос **4**

Выполнен

Баллов: 10 из 30

а) Имеется большая компания людей — больше 100 человек, в которой некоторые люди дружат. Верно ли, что каждую такую компанию можно разбить на две группы «дружественным способом», т. е. так, чтобы у каждого человека друзей в своей группе было больше либо равно, чем друзей в противоположной группе?

б) Докажите, что каждую компанию, в которую входит 2022 человека, можно разбить на 15 групп «недружественным способом», т. е. так, чтобы у каждого человека количество друзей в своей группе составляло не более $1/15$ от общего числа его друзей.

ol2222286_4.pdf

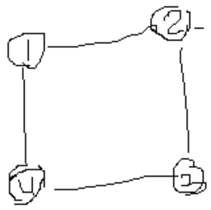
Комментарий:
а) 10

б) 0

ПРЕДЫДУЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Заключительный этап - Математика 6-7 21/22 (скрытый)

СЛЕДУЮЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 21

Да. Все треугольники прямоугольные и имеют стороны в 2 клеточки, 1 клеточку и диагональ прямоугольника 1 на 2.



n = 4

2а) n>=4 так как все числа различные. Пример на 4.

2 – 1 =1 взаимно просто с 4

3-2=1 взаимно просто с 4

4-1=3 взаимно просто с 4

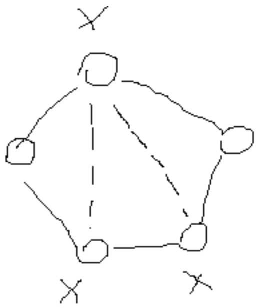
4-3=1 взаимно просто с 4

4-2=2 общий делитель 2

3-1=2 обший делитель 2

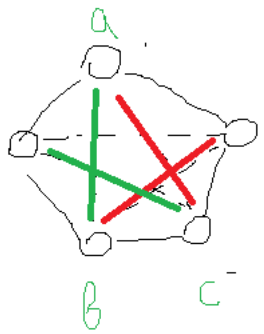
2б)

Нет, так как рассмотрим не соединённые числа. Так как у 25 всего 2 делителя не равных единицы это 5 и 25, числа не соединённые отрезком должны давать одинаковые остатки при делении на 5. Но тогда соседние числа будут тоже давать одинаковые остатки при делении на 5 значит их



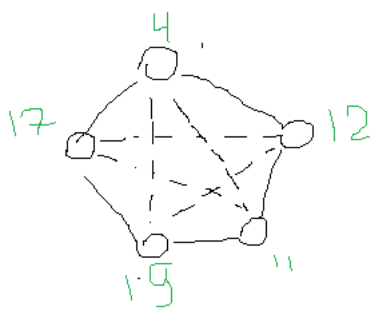
разница будет кратна 5.

2в)



39 имеет делители 3, 13 и 39 отличные от 1. Возьмём одно число a. Оно не соединено отрезками с двумя числами b и c. Если a-b делится на 13 и a-c делится на 13, то a и b одинаковые остатки при делении на 13 и a и c. Значит b и c одинаковые остатки. Значит b-c кратно 13, а b и c соединены отрезком. Тоже самое с делимостью на 3. Значит a даёт одинаковый остаток с b при делении на 13 и одинаковый с c при делении на 3. Это верно для любого из 5 чисел, так как мы рассматривали, a как произвольное число из этих 5.

Зелёное ребро означает что эти числа имеют одинаковые остатки при делении на 13, а красное на 3. Тогда будем соединять так вершины и поймём, что между двумя вершинами, показанными на рисунке мы не сможем провести ребро, так как если мы проведём его зелёным или красным у нас будет вершина из которой будут выходить рёбра одинакового цвета, это противоречит доказанному раннее.



2г)

Тоже самое работает для любых двух простых чисел(2в), то есть если вместо 3 и 13 взять 2 других простых числа ничего не изменится, так как доказательство основано на остатках, а не самих числах. Значит число n должно делится хотя бы на 3 простых числа. Среди них не может быть двойки так как каждые два соединённых отрезком числа должны быть разной чётности, а чисел 5. Значит какие-то 2 будут одинаковой чётности и их разность будет делится на 2. Значит n хотя бы 3*5*7=105. (3 5 и 7 минимальные простые числа без 2) Пример:

17-4=13 взаимно просто с 105

12-4=8 взаимно просто с 105

12-11=1 взаимно просто с 105

19-11=8 взаимно просто с 105

19-17=2 взаимно просто с 105

19-4=15 общий делитель 3

19-12=7 общий делитель 7

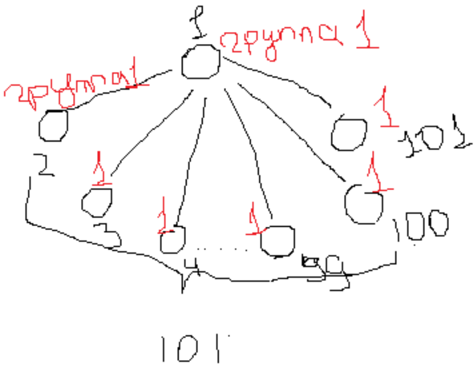
17-11=6 общий делитель 3

17-12=5 общий делитель 5

11-4=7 общий делитель 7

4а)

Чёрным цветом обозначены номера людей. Вершины – люди, рёбра дружеские связи.



Пусть первый человек относится к первой группе. Посмотрим, куда может относится второй человек. Так как у него всего 1 друг – первый человек, он должен быть с ним в одной группе, иначе, если он будет во второй, то он будет знаком с 0 человеками в этой группе, что противоречит условию задачи. Значит 2 человек находится во второй группе. Тоже самое с людьми 3-101. Они знакомы только с первым номером, значит должны находиться с ним в одной группе. Тогда все люди находятся в первой группе.

Значит не каждую компанию можно разбить на две группы таким образом.

Ответ: Нет.

4б)