Вопрос **Инфо**

**Уважаемый участник Олимпиады!**

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

**Вариант заключительного этапа состоит из 6 задач**. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос **1**

Выполнен

Баллов: 20 из 20

Коля поехал на электросамокате в магазин в соседнюю деревню со скоростью 10~км/ч. Проехав ровно треть всего пути, он понял, что при движении с прежней скоростью успеет точно к закрытию магазина, и увеличил скорость вдвое. Но когда он проехал ровно 2/3 всего пути, самокат сломался, и оставшуюся часть пути Коля прошел пешком. С какой скоростью он шел, если успел точно к закрытию магазина?

Чтобы доехать до магазина прямо к закрытию его средняя скорость должна быть 10 км/ч (понятно из условия). Средняя скорость-это все расстояние(S) делить на все время. Время на первом участке = S/3 / 10 = S/30. Время на втором участке равно S/3 / 20 = S/60 . Время на 3 участке равно S/3 / V = S/3V. То есть S/(S/30 + S/60 + S/3V) = 10. Сокращаем правую часть на S, знаменатель приводим к общему знаменателю. Получаем 1/(1/20 + 1/3V)=10 => 1/((3V+20)/60V)=10 => 60V/(3V+20)=10 => 60V=30V+200 => 30V=200 => V=20/3= 6 2/3 (шесть целых две трети) км/ч.

Комментарий:

Вопрос **2**

Выполнен

Баллов: 20 из 20

Найдите все целые $a$, для которых квадратный трехчлен $x^2 + ax + 2a$ имеет два различных целых корня.

a=-1 и a=9.

Посчитаем Дискриминант. Он должен быть строго больше 0, так как 2 корня, т.е. a2-8a>0. (a2 = a в квадрате). Отсюда a(a-8)>0. Получаем совокупность систем. 1 система: a>0 ;a-8>0.
Вторая система : a<0 ; a-8<0. Решая первую получаем a>8, решая вторую получаем a<0. Но корни должны быть целыми. x=-b+-КореньD/2a. уравнение приведенное, так что 2a заменим на 2, чтобы не путаться между коэф. a и параметром a. -b = -a . Корень из D = корень из a2-8a. Разумеется, чтобы корни были целыми обязательно должно выполняться 2 условия. Дискриминант должен являться квадратом натурального числа, а числитель формулы для x должен делиться на 2, чтобы он мог нацело разделиться. Начнем с первого условия. a2-8a=n2, где n натуральное число. a2-8a+16-16=n2 => (a-4)2 - 16 = n2 => (a-4)2 - n2 = 16. Выглядит сложно, но перефразируем это как разность двух квадратов целых чисел (a-целое, значит и a-4 целое) равна 16. Заметим, что a2-b2 для двух последовательных a2 и b2 становиться больше 16 при числах 8 и 9, а значит рассматривать числа больше 8 смысла нет. Так же разность между двумя последовательными квадратами всегда четна (a2+2a+1-a2=2a+1, а это нечетно). Значит наши числа должны отличаться хотя бы на 2, а разность их квадратов должна быть больше или равна 16. При разности 36 и 16 она равна 20, при больших числа она еще больше. При разности 25 и 9 она равна как раз 16. Запомним это. Следующий квадрат равен 16 - n2 =16 => n2=0 =>n=0, но мы помним, что n натуральное, так как n - это корень из дискриминанта, который должен быть больше 0(указано выше). Значит единственное, что нам подходит - (a-4)2=25 => a-4=5 или a-4=-5 => a=9 или a=-1. Подставляя a в формулу для корней получаем: 1) a=9, x1=-3, x2=-6 2)a=-1, x1=2 , x2=-1. Корни целые, а подходит хотя бы под одно условие (a>8 или a<0).

Комментарий:

Вопрос 3

Нет ответа

Балл: 20

Положительные числа $a$, $b$ и $c$ удовлетворяют условию $abc(a+b+c)=3$ . Докажите неравенство $(a+b)(b+c)(c+a)\geqslant 8$ .

Вопрос **4**

Выполнен

Баллов: 20 из 20

Какое наименьшее количество фишек можно расставить в клетках таблицы $99 \times 99$ так, чтобы в каждом квадрате $4 \times 4$ было не менее восьми фишек?

Разобьем доску на фигуры трех типов: квадраты 4*4, прямоугольники 3*4 и один квадрат 3*3. Верхний левый угол таблицы размером 96*96 ( то есть квадрат слева сверху) разобьем на квадраты 4*4. Очевидно, что в каждом из них должно быть не менее 8 фишек. Квадратов всего 96/4 = 24 в строке => 24*24=576 квадратов. В каждом по 8 фишек( это минимум). Итого в этой части таблицы 24*24*8 фишек. Ниже этого квадрата есть полоска 3*100. Ее часть 3*96 разобьем на прямоугольники 3*4. Для самых нижних квадратов 4*4, который состоят из прямоугольников 3*4 и полоски 1*4, которая является частью квадрата 4*4 должно быть 8 фишек. В лучшем случае в полоске 1*4 окажется 4 фишки, а их мы уже посчитали. Значит минимум нам надо еще 4 фишки в каждом прямоугольнике. Прямоугольников 24 => фишек 24*4. Точно тоже самое мы можем проделать со столбцом 3*96. Итого минимум надо 24*4*2 фишки внутри всех прямоугольников 3*4. Остается очень не хороший квадрат 3*3 в самом правом нижнем углу. Он является частью самого нижнего правого квадрата 4*4, в котором тоже должно быть 8 фишек. Он состоит из уголка 4*4 ( в нем 7 клеток) и квадрата 3*3, про который я сказал выше. Если во всех этих 7 клетках уголка будут стоять фишки( а мы их уже посчитали), то нужна хотя бы еще 1 фишка в этом квадрате 3*3. Итого общее количество фишек: 24*24*8(в квадратах 4*4) + 24*4*2(в прямоугольниках 3*4) + 1 ( в квадрате 3*3) = 4801 Фишка. Это оценка для идеальной ситуации, в которой максимальное количество фишек лежат на пересечении фигур, но я ее смог реализовать. Кроме этого при построении примера нужно учитывать, что в каждом квадрате 4*4 должно быть минимум 8 фишек. Пример в файле. Зеленым цветом указаны квадраты 4*4 ( на примере их меньше, но нужно понимать, что таблицу 99*99 я просто не в состоянии заполнить). Синим указаны строка и столбец из прямоугольников 3*4, а красным квадрат 3*3 ol2203226_4.pdf

Комментарий:

Вопрос **5**

Нет ответа

Балл: 20

Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке $O$. Диагональ $AC$ — биссектриса угла $\angle BAD$, точка $M$ — середина стороны $BC$, а точка $N$ — середина отрезка $DO$. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является вписанным тогда и только тогда, когда четырехугольник $ABMN$ является вписанным.

Вопрос **6**

Нет ответа

Балл: 20

Докажите, что у каждого из чисел $n!+1$, $n!+2$, \dots, $n!+n$ можно выбрать простой делитель, на который не делится ни одно из остальных.

« ПРЕДЫДУЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 11

СЛЕДУЮЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 21 »

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | | | x | x | | | x | x | | | x | x | | | x | | | |
| | | | x | | | | x | | | | x | | | | x | | | |
| | | | x | | | | x | | | | x | | | | x | x | | |
| x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x |
| x | | | x | x | | | x | x | | | x | x | | | x | | | |
| | | | x | | | | x | | | | x | | | | x | | | |
| | | | x | | | | x | | | | x | | | | x | x | | |
| x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x |
| x | | | x | x | | | x | x | | | x | x | | | x | | | |
| | | | x | | | | x | | | | x | | | | x | | | |
| | | | x | | | | x | | | | x | | | | x | x | | |
| x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x |
| x | | | x | x | | | x | x | | | x | x | | | x | | | |
| | | | x | | | | x | | | | x | | | | x | | | |
| | | | x | | | | x | | | | x | | | | x | x | | |
| x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x | x |
| | | x | x | | | x | x | | | x | x | | | x | x | | | |
| | | | x | | | | x | | | | x | | | | x | | | |
| | | | x | | | | x | | | | x | | | | x | | | x |