	ol2203510 ol2203510
Тест начат	понедельник, 14 Февраль 2022, 10:04
Состояние	Завершено
Завершен	понедельник, 14 Февраль 2022, 14:10
Прошло времени	4 час. 5 мин.
Оценка	**70** из 100

Вопрос
Инфо

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 4 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос **1**

Выполнен

Баллов: 0 из 10

Некоторый треугольник разрезали на пять маленьких треугольников так, как показано на рис. 1. Могли ли при этом все пять маленьких треугольников оказаться равными?

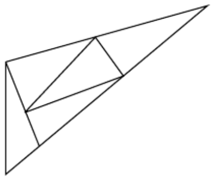

Рис. 1

Комментарий:

Вопрос **2**

Выполнен

Баллов: 50 из 50

На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Костя выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа, не превосходящие n, так, чтобы для всех поставленных им чисел выполнялось свойство: *если числа a и b соединены отрезком, то разность $a-b$ должна быть взаимно проста с n, а если не соединены, то числа $a-b$ и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1.* Например, для картинки на рис. 2 Костя взял $n=45$ и подобрал подходящую расстановку — она показана на рис. 3.

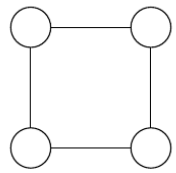

Рис. 2

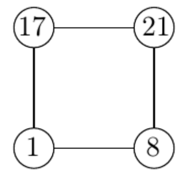

Рис. 3

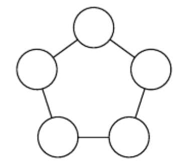

Рис. 4

а) При каком наименьшем n существует требуемая расстановка чисел на рис. 2?
б) Можно ли расставить числа в кружочках на рис. 4 при $n=25$?
в) Можно ли расставить числа в кружочках на рис. 4 при $n=39$?
г) При каком наименьшем n существует расстановка чисел в кружочках на рис. 4?

(а) **Ответ**: n=4

Оценка: Если n <= 3, то мы не сможем выбрать 4 различных натуральных числа, каждое из которых не превосходит n, ведь данному условию в таком случае могут удовлетворять только числа 1, 2 и 3, но их не 4, а всего лишь 3

Пример: Давайте в левый верхний кружок поставим "1", в правый верхний - "2", в правый нижний - "3", в оставшийся левый нижний - 4. Тогда нетрудно убедиться, что соединенные разности - это 3-2=1, 2-1=1, 4-1=3, 4-3=1, и все наши значения являются взаимно простыми с числом 4. Несоединенные разности - это 3-1=2 и 4-2=2, 4 не взаимно просто с 2.

(б) **Ответ:** нет

Обоснование: пусть такая расстановка возможна. Тогда назовем самое верхнее число "a1", последующее по часовой стрелке - "a2" , и тд, стоящее перед a1 - "a5". Заметим, что разность |a1 - a3| должна быть сравнима с 0 mod 5 *, значит, a1 сравнимо с a3 mod 5. Аналогично получаем, что a3 сравнимо с a5 mod 5, a5 сравнимо с a2 mod 5, a2 сравнимо с a4 mod 5, a4 сравнимо с a1 mod 5. Получается, что все 5 наших чисел сравнимы по модулю 5, а это значит, что любые 2 соседних числа дают одинаковые остатки по модулю 5, значит, разность двух соседних тоже делится на 5, но это значит, что она не взаимно проста с 25. Противоречие с условием.

*Примечание: если разность чисел не взаимно проста с числом 25 = 5^2, то она обязана в своем разложении иметь хотя бы одну пятерку, то есть делиться на 5

(в) **Ответ:** нет

Обоснование: пусть это возможно. Тогда также, как и в п.(б), назовем числа a1, a2, ..., a5 по часовой стрелке. Давайте последовательно рассматривать разности и что-то про них понимать. Посмотрим на модуль разности a1-a3. Она должна делиться либо на 13, либо на 3 (ведь 39=13*3, а на 13 и 3 вместе эта разность делиться не может, ведь она меньше 39 по модулю). Пусть, не умаляя общности, она делится на 13. Теперь смотрим на разность a1-a4 (разумеется, взятую по модулю). Если она будет делиться на 13, то тогда и разность соседних чисел a3 и a4 тоже делится на 13 (по понятным причинам, подробно описанным в п.(б)), значит, разность чисел a1 и a4 не может делиться на 13, стало быть, делится на 3. Теперь смотрим на разность a4 и a2, аналогично понимаем, что если эта разность делится на 3, то разность соседних a1 и a2 тоже делится на 3, но так нельзя, значит, она делится на 13. Теперь разность a2 и a5, которая не может делиться на 13 (иначе разность a4 и a5 тоже делится на 13), а значит, делится на 3. Теперь взглянем на разность чисел a3 и a5. Если она делится на 3, то, поскольку разность a2 и a5 тоже делится на 3, разность a2 и a3 тоже будет делиться на 3. Если же разность a3 и a5 делится на 13, то поскольку мы знаем, что разность a1 и a3 тоже делится на 13, получается, что разность двух соседних a1 и a5 должна делиться на 13.

Итак, мы предположили, что расстановка возможна, однозначно определили делимость каждой из четырех первых разностей на 3 или 13 (предполагали, что первая делится на 13, но если она делится на 3, рассуждения полностью аналогичны) и в итоге, пытаясь что-то понять про оставшуюся разность, получили противоречие. Это значит, что расстановка невозможна.

(г) **Ответ:** n=105

Оценка: поймем, какие ограничения могут быть на число n:

1. Оно не должно являться простым (ведь в противном случае любые разности были бы взаимно просты с n, ведь они меньше n по модулю)

2. Оно не должно являться произведением двух простых множителей в некоторых степенях (этот случай разобран в пункте (в), в обобщенном виде в рассуждениях просто число 3 можно заменить на некое p1, а число 13 - на p2)

3. Оно не должно быть четным:

Пусть оно четное, тогда никакая разность двух соседних чисел не должна быть четной, значит, любые два соседних числа разной четности, но тогда четные и нечетные числа чередуются, но они не могут чередоваться, ведь в противном случае их можно было бы однозначно разбить на пары (четное-следующее за ним нечетное), но у нас 5 чисел, а 5 -нечетное число, на пары не разбивается. Противоречие

4. Оно не должно быть степенью натурального числа (случай разобран в п.(б), только в общем виде вместо 25 можно написать p^n, а вместо 5 - просто p)

Найдем минимальное число, которое соответствует всем ограничениям:

В нашем числе должно быть хотя бы 3 простых множителя, не равных двойке. 3 минимальных таких простых множителя - это 3, 5 и 7, значит, min число - это 3*5*7 = 105

Пример: пусть, воспользовавшись названиями чисел из пунктов (б) и (в), a1 = 1; a2 = 9; a3 = 8; a4 = 4; a5 = 2. Тогда разности рядом стоящих чисел принимают значения 1,8,1,4,2; разности не рядом стоящих - 7,5,3,7

Комментарий:

Вопрос **3**

Выполнен

Баллов: 10 из 10

На доске написано 2021 минусов. Петя и Вася играют в такую игру. Ход состоит в том, что можно один минус заменить на плюс, либо стереть один плюс и один минус, либо два минуса заменить на три плюса. Ходят по очереди, первым ходит Петя, проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

Ответ: Петя

Стратегия: пускай первым ходом Петя поменяет два минуса на три плюса, а дальше будет действовать в зависимости от ходов Васи: Если Вася своим ходом убрал только один минус, то Петя 2 минуса заменяет на 3 плюса, а если Вася за ход убрал 2 минуса, то Петя заменяет минус на плюс

Почему же она работает? Первым ходом Петя сделал так, чтобы кол-во минусов было 2021-2=2019, что делится на 3, а дальше он дополняет убранные Васей минусы до числа, кратного трем, т.е. после любого хода Васи кол-во минусов не будет кратно 3 (а это значит, что Пете всегда будет что убрать), а После ходов Пети будут соответственно числа минусов, равные 2019, 2016, ..., 0. Значит, минусов не останется именно после хода Пети, а любой ход игры возможно сделать тогда и только тогда, когда на доске есть хотя бы 1 минус. Поскольку после какого-то хода Пети минусов не останется, Вася не сможет сделать ход, а значит, проиграет

Комментарий:

Вопрос **4**

Выполнен

Баллов: 10 из 30

а) Имеется большая компания людей — больше 100 человек, в которой некоторые люди дружат. Верно ли, что каждую такую компанию можно разбить на две группы «дружественным способом», т. е. так, чтобы у каждого человека друзей в своей группе было больше либо равно, чем друзей в противоположной группе?

б) Докажите, что каждую компанию, в которую входит 2022 человека, можно разбить на 15 групп «недружественным способом», т. е. так, чтобы у каждого человека количество друзей в своей группе составляло не более $1/15$ от общего числа его друзей.

а) **Ответ:** нет, неверно

Контр пример: пусть у нас есть компания из 1000 человек, где каждый знаком с каждым. Допустим, у нас получилось разбить их на 2 группы A и B (пусть без ограничения общности в A больше либо равно человек, чем в B) так, как сказано в условии. Тогда в группе A точно будет хотя бы 500 человек. Посмотрим на любого человека из группы B (такой всегда найдется, ведь группы непустые). В группе A у этого человека хотя бы 500 знакомых (ведь он знаком со всеми), а всего у него знакомых ровно 1000-1=999, значит, в своей группе у него максимум 999-500=499 знакомых, но тогда в своей группе у него меньше знакомых, чем не в своей. Противоречие.

Комментарий:

« ПРЕДЫДУЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Заключительный этап - Математика 6-7 21/22 (скрытый)

СЛЕДУЮЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ »
Вариант 21