| | |
|---|---|
| | ol2235085 ol2235085 |
| **Тест начат** | понедельник, 14 Февраль 2022, 10:10 |
| **Состояние** | Завершено |
| **Завершен** | понедельник, 14 Февраль 2022, 14:05 |
| **Прошло времени** | 3 час. 54 мин. |
| **Оценка** | **55** из 100 |

Вопрос
**Инфо**

**Уважаемый участник Олимпиады!**

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

**Вариант заключительного этапа состоит из 5 задач**. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

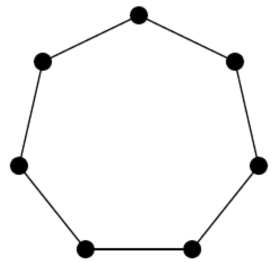
Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос **1**

Выполнен

Баллов: 0 из 20

На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Саша выбирает натуральное число $n$ и расставляет в кружочках различные натуральные числа так, чтобы для всех этих чисел выполнялось свойство:
*если числа $a$ и $b$ не соединены отрезком, то сумма $a+b$ должна быть взаимно проста с $n$, а если соединены, то числа $a+b$ и $n$ должны иметь общий натуральный делитель, больший 1.*
При каком наименьшем $n$ существует такая расстановка?



Пример:

Комментарий:

Вопрос 2

Выполнен

Баллов: 15 из 20

При $x, y, z \in (0, 2]$ найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{(x^3 - 6)\sqrt[3]{x+6} + (y^3 - 6)\sqrt[3]{y+6} + (z^3 - 6)\sqrt[3]{z+6}}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

ol2235085_2.pdf

Комментарий:
неравенство 3 $\sqrt{x}$ + 6
3 * $x$2 > 2x не обосновано.

Вопрос **3**

Выполнен

Баллов: 20 из 20

Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке $O$. Внутри треугольника $AOB$ выбрана такая точка $K$, что прямая $KO$ является биссектрисой угла $CKD$. Луч $DK$ вторично пересекает описанную окружность треугольника $COK$ в точке $L$, а луч $CK$ вторично пересекает описанную окружность треугольника $DOK$ в точке $M$. Найдите отношение площадей треугольников $ALO$ и $BMO$.

1. Заметим, что KO является внешней биссектрисой угла CKL.. Это означает, что O - середина дуги CKL. А это означает, что OC=OL.
2. Абсолютно аналогично OM=OD.
3. Заметим, что угол BOM=180-MOK, что равно 180-MKD, что равно CKD.
4. Абсолютно аналогично, угол AOL= углу CKD.
5. Посчитаем S треугольников по формуле через синус. S BMO = (BO*OM*sinBOM) / 2. S ALO = (AO*OL*sinAOL) / 2. Заметим, что sin BOM = sin AOL, т.к. угол BOM и угол AOL равны углу CKD. По свойству вписанного четырехугольника, BO*OD=AO*OC, но AO*OC=AO*LO, т.к. CO=OL.
6. Аналогично, BO*OD=BO*OM, поэтому S ALO и S BMO равны, то есть BO*OM=AO*OL.

Комментарий:

Вопрос **4**

Выполнен

Баллов: 0 из 20

Натуральное число $x$ в системе счисления с основанием $r$ ($r \leqslant 36$) имеет вид $\overline{ppqq}$, причем $2q = 5p$. Оказалось, что $r$-ичная запись числа $x^2$ представляет собой семизначный палиндром с нулевой средней цифрой. (Палиндромом называется число, которое читается одинаково слева направо и справа налево). Найдите сумму $r$-ичных цифр числа $x^2$.

Комментарий:

Вопрос **5**

Выполнен

Баллов: 20 из 20

При каких $n$ клетчатую доску $n \times n$ можно разбить по клеточкам на один квадрат $2 \times 2$ и некоторое количество полосок из пяти клеток так, что квадрат будет примыкать к стороне доски?

1. Квадрат 2x2 поставим в угол, а оставшуюся доску разобьем на прямоугольники 2 x 5k и 5k x 5k+2. Т.к. у прямоугольника есть сторона, кратная 5, они, очевидно разбиваются на полоски из пяти клеток. Теперь объясним, почему другие n не подходят. Заметим, что из соображений площади, мы получаем, что n может быть либо 5k+2, либо 5k+3, т.к. n^2 должен давать остаток 4 от деления на 5.
2. Как известно, полоски из пяти клеток лучше всего контролируют диагональную раскраску 5 цветов. Допустим, у нас получилось разбить доску 5k+3 x 5k+2, тогда расположим доску так, чтобы 2x2 примыкал к ее левой стороне.
3. Покрасим доску диагональной раскраской в 5 цветов диагоналями левого нижнего края в правый верхний. Заметим, что при такой раскраске любая полоска из 5 клеток занимает 5 разных цветов. Вырежем из левого верхнего угла доски квадрат 3x3. Абсолютно аналогично соображениям из примера, оставшаяся доска разбита на полоски из 5 клеток. Это означает, что в ней поровну клеток каждого цвета. Заметим, что в вырезанном квадрате 3x3, 1 клетка цвета 1, 2 клетки цвета 2, 3 клетки цвета 3, 2 клетки цвета 4, одна клетка цвета 5. Это означает, что наш вырезанный квадрат 2x2 обязан состоять из одной клетки цвета 2, двух клеток цвета 3 и одной клетки цвета 4, т.к. иначе оставшихся цветов будет не поровну и оставшаяся часть не разобьется на полоски из 5 клеток. То есть наш вырезанный 2x2 примыкает к левой границе по клеткам цвета 2 и 3.
4. Сотрем нашу раскраску и покрасим доску диагональной раскраской из 5 клеток, начиная от левого нижнего угла вдоль диагонали из правого нижнего угла в левый верхний. Абсолютно аналогично предыдущим рассуждениям квадрат 2x2 должен примыкать к границе по цветам 2 и 3. Но заметим, что нынешние клетки цвета 3 при раскраске в первый раз были цвета 1. Поэтому квадрат 2x2, который сейчас примыкает к границе по клеткам 2 и 3 в первой раскраске должен был примыкать по клетке цвета 1. Но мы доказали, что квадрат обязан примыкать только по клеткам цвета 2 и 3 по первой раскраске. Противоречие. Значит, доску 5k+3 x 5k+3 так разбить нельзя. А значит можно только 5k+2 x 5k+2. И для них есть пример.

Комментарий:


« ПРЕДЫДУЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 13

СЛЕДУЮЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 21 »

1. Докажем, что одно из слагаемых числителя не больше, чем $x^2$, тогда числитель не больше $x^2 + y^2 + z^2$, А не больше 1. Докажем, что ($x^3$ - 6) * $\sqrt[3]{x+6}$ не больше
2. Во-первых, при x от 0 до $\sqrt[3]{6}$, ($x^3$- 6) * $\sqrt[3]{x+6}$ < 0, а $x^2$ > 0. Поэтому неравенство верно.

   Во-вторых, при x > чем $\sqrt[3]{6}$ , возьмем производную f = ($x^3$- 6) * $\sqrt[3]{x+6}$ - $x^2$

   Производная = $\frac{x^3-6}{3(x+6)^{\frac{2}{3}}}$ + $3\sqrt[3]{x+6} * x^2 - 2x$

   Заметим, что при x > $\sqrt[3]{6}$ дробь $\frac{x^3-6}{3(x+6)^{\frac{2}{3}}}$ > 0, а $3\sqrt[3]{x+6} * x^2$ > 2x

   Поэтому производная > 0.

   Это означает, что при x от $\sqrt[3]{6}$ до 2, f – возрастает, но при x=2, f=0. Значит, на этом участке f≤0.

3. Так как мы оценили числитель выражения $x^2 + y^2 + z^2$, которое > 0, то после деления числителя на $x^2 + y^2 + z^2$, наша А оценится сверху единицей.

   Поэтому максимум А = 1.

   Ответ: максимум А = 1, достигается при x=y=z=maxA=1