	ol2217049 ol2217049
Тест начат	понедельник, 14 Февраль 2022, 10:12
Состояние	Завершено
Завершен	понедельник, 14 Февраль 2022, 14:05
Прошло времени	3 час. 52 мин.
Оценка	**55,00** из 100,00

Вопрос **Инфо**

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 5 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

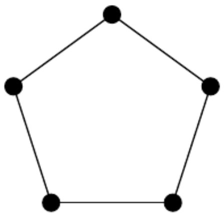
Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос **1**

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Костя выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа так, чтобы для всех этих чисел выполнялось свойство:
если числа a и b не соединены отрезком, то сумма $a + b$ должна быть взаимно проста с n, а если соединены, то числа $a + b$ и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1.
При каком наименьшем n существует такая расстановка?



1) Нашу конструкцию будем обозначать как (a-b-c-d-e), где соседние буквы обозначают числа в соседних вершинах нашего графа (первая и последняя тоже соединены). Называть конструкцию будем циклом.

2) Докажем, что при n = p^k, где p - простое число, не существует такого цикла.

если НОД(a+b, p^k) > 1, то p | (a+b), т.к. p^k в разложении на простые множители содержит только p.

Пусть у нас получилось расставить числа в этом случае n, получив цикл (a-b-c-d-e). Пусть a при делении на p даёт в остатке r. Тогда, т.к. p|(a+b), то b даёт в остатке при делении на p число (p-r). Аналогично число c дает в остатке (p - (p-r)) = r, а число d даёт в остатке p-r => p|(a+d) (т.к. сумма их остатков: r + p-r = p). Но в тоже время a и d не соседние, а значит по условию НОД(a+d, p^k)=1 => НОД(a+d, p)=1. Получаем противоречие => числа n вида p^k нам не подходят.

3) Докажем, что для четных n тоже не существует такой расстановки.

Положим у нас при четном n получилось придумать цикл (a-b-c-d-e). Тогда пусть без потери общности число a - нечетное (в цикле обязательно будет нечетное, т.к. если все четные, то все пары чисел в сумме делятся на 2, а значит нет пар, сумма которых взаимно проста с n, что противоречит условию). Также очевидно, что не соседние вершины имеют разную четность, иначе их сумма будет делиться на 2, а значит не будет взаимно проста с n. Тогда числа c, d - четные, т.к. иначе (a+c) или (a+d) делятся на 2. Аналогично рассуждая про вершину c, получаем, что e будет нечетным (иначе (c+e) четно). Тогда число b - четное (иначе (b+e) четное). Но тогда получаем, что b+d - четное (сумма четных), что противоречит условию (т.к. b и d не соседние). Противоречие! => для четных n нет такой расстановки чисел

4) Очевидно, что n = 1 не подходит, т.к. тогда все числа взаимно просты с n

5) Из критериев п.2, п.3, п.4 вытекает, что первые 14 чисел нам не подходят => минимальное n = 15.

6) приведем пример цикла для n=15: (1-9-3-7-5). Легко убедиться, что он работает.

7) Мы привели оценку на n=15 и привели пример. Получаем Ответ: 15

Комментарий:

Вопрос **2**

Выполнен

Баллов: 15,00 из 20,00

При $x, y, z \in (0, 1]$ найдите минимальное значение выражения

$$A = \frac{(x+2y)\sqrt{x+y-xy} + (y+2z)\sqrt{y+z-yz} + (z+2x)\sqrt{z+x-zx}}{xy+yz+zx}.$$

1)Заметим, что для наших чисел будут верны следующие неравенства (пусть a, b - какие-то числа из x, y, z): ab <= a, ab <= b, sqrt(a) >= a   - т.к. числа лежат на (0;1].

2) Давайте докажем, что A >= 1/x + 1/y + 1/z. Из этого будет следовать оценка на A >= 3, т.к. из неравенства о средних: 3/(1/x+1/y+1/z) <= (x+y+z)/3 <= 1. Равенство будет достигаться при x=y=z=1

3) Заметим, что x + 2y >= xz + yx + yz - по нер-ву в п.1

Также sqrt(x+y-xy) >= sqrt(x+y - (x+y)/2) = sqrt((x+y)/2) >= (sqrt(x) + sqrt(y))/2 >= (x+y)/2 (По нер-ву о средних и нер-ву п.1)

Получаем A >= (xy + yz + zx)((x+y)/2 + ...)/(xy+yz+zx) = x+y+z

4) Получаем из п.2 и п.3, что нам надо д-ть, что (Пусть F(выражение) - циклическая сумма)

F((x+2y)*(x+y)/2) >= F(1/x)*F(xy)

Что равносильно 3(F(x^2) + F(xy)) >= 2F(1/x)*F(xy) = 2*(2F(x) + F(xy/z))=2(2F(x)+xyz*F(1/x^2))

Что, в свою очередь, напрямую следует из нер-ва о средних.

Комментарий:
В пункте 3 не все переходы обоснованы.

Вопрос 3

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

На сторонах BC и AD вписанного четырехугольника $ABCD$ отмечены точки K и M соответственно, причем $BK : KC = AM : MD$. На отрезке KM выбрана такая точка L, что $KL : LM = BC : AD$. Найдите отношение площадей треугольников ACL и BDL, если известно, что $AC = p$ и $BD = q$.

1)Пусть P - пересечение BD и AC

2) Докажем, что L лежит на биссектрисе к углу BPA, т.е. на биссертрисе угла, образованного прямыми BD и AC. Это будет означать, что точка L равноудалена от прямых AC и BD, а значит и высоты к основаниям AC и BD в треугольниках ACL и BDL равны, а значит их площади будут относиться как отношение оснований, т.е. как AC:BD = p:q.

3) т.к. ABCD - вписанный, то треугольники BPC и APD подобны (углы CAD, DBC и углы ADB, ACB равны как опирающиеся на одну и ту же дугу DC и AB соответственно). Причем эти треугольники подобны с коэффициентом r = BC/AD => BP/AP = r

Из условия: BK/KC = AM/MD=j => BK = BC/(j+1), AM = AD/(j+1). Тогда BK/AM = BC/AD = r. Получаем, что треугольники BPK и APM подобны по углу и двум подобным сторонам при нем (BK/AM = r = BP/AP, углы CAD, DBC равны как опирающиеся на одну и ту же дугу DC) => **углы BPK и APM равны**, а также **KP/PM = r**

По условию KL/LM = BC/AD = r. Посмотрим на чевиану PL треугольника KPM. Получаем, что KL/LM = r = KP/PM => PL - биссектриса, т.к. она делит сторону в соотношении соответственных сторон треугольника (золотое св-во биссектрисы). Получаем, что L лежит на биссертрисе угла KPM => P лежит на биссектрисе BPA, т.к. углы BPK и APM равны. По п.2 это доказывает задачу. Собственно, что и требовалось доказать.

Комментарий:

Вопрос **4**

Выполнен

Баллов: 0,00 из 20,00

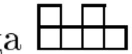
Натуральное число x в системе счисления с основанием r ($r > 3$) имеет вид $\overline{ppqq}$, причем $q = 2p$. Оказалось, что r-ичная запись числа x^2 представляет собой семизначный палиндром с тремя одинаковыми средними цифрами. (Палиндромом называется число, которое читается одинаково слева направо и справа налево). При каких r такое возможно?

Комментарий:

Вопрос **5**

Выполнен

Баллов: 0,00 из 20,00

Доска $m \times n$ $(m, n > 5)$ разрезана на фигурки из шести единичных квадратиков вида  (фигурки можно поворачивать и переворачивать). При каких m и n такое возможно?

Комментарий:

« ПРЕДЫДУЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 48

СЛЕДУЮЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 37 »