	ol2237421 ol2237421
Тест начат	понедельник, 14 Февраль 2022, 10:27
Состояние	Завершено
Завершен	понедельник, 14 Февраль 2022, 14:05
Прошло времени	3 час. 37 мин.
Оценка	**55** из 100

Вопрос
Инфо

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 4 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос **1**

Выполнен

Баллов: 10 из 10

Некоторый треугольник разрезали на пять маленьких треугольников так, как показано на рис. 1. Могли ли при этом все пять маленьких треугольников оказаться равными?

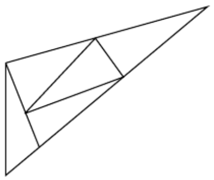


Рис. 1

20220214_115333.jpg

Комментарий:

На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Костя выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа, не превосходящие n, так, чтобы для всех поставленных им чисел выполнялось свойство: *если числа a и b соединены отрезком, то разность $a - b$ должна быть взаимно проста с n, а если не соединены, то числа $a - b$ и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1.* Например, для картинки на рис. 2 Костя взял $n = 45$ и подобрал подходящую расстановку — она показана на рис. 3.

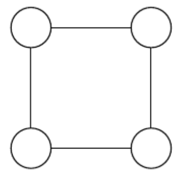


Рис. 2

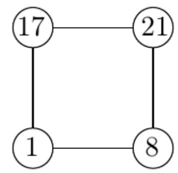


Рис. 3

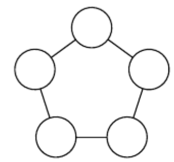


Рис. 4

а) При каком наименьшем n существует требуемая расстановка чисел на рис. 2?
б) Можно ли расставить числа в кружочках на рис. 4 при $n = 25$?
в) Можно ли расставить числа в кружочках на рис. 4 при $n = 39$?
г) При каком наименьшем n существует расстановка чисел в кружочках на рис. 4?

г) n=20

_20220214_115311.jpg

Комментарий:
а) 5

б) 10

в) 10

г) 0

Вопрос 3

Выполнен

Баллов: 10 из 10

На доске написано 2021 минусов. Петя и Вася играют в такую игру. Ход состоит в том, что можно один минус заменить на плюс, либо стереть один плюс и один минус, либо два минуса заменить на три плюса. Ходят по очереди, первым ходит Петя, проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

20220214_115250.jpg

Комментарий:

Вопрос **4**

Выполнен

Баллов: 10 из 30

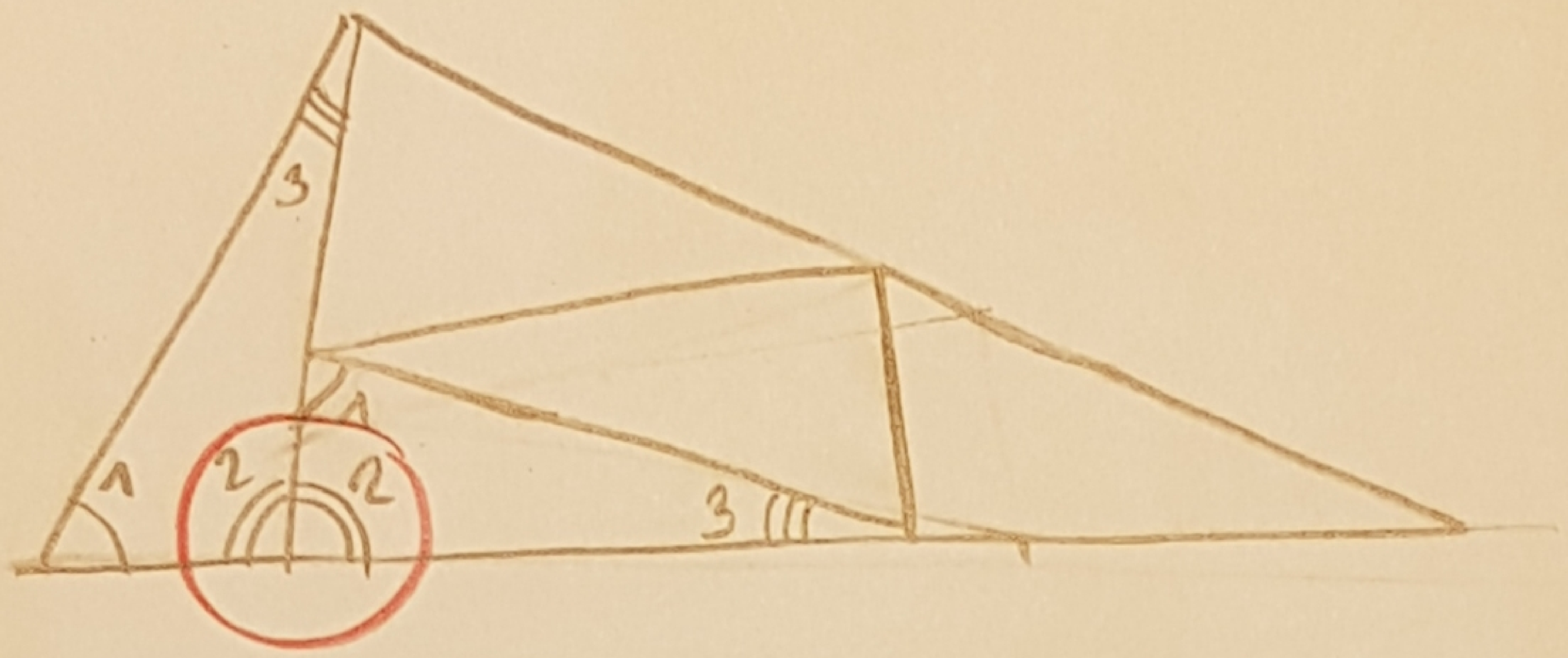
а) Имеется большая компания людей — больше 100 человек, в которой некоторые люди дружат. Верно ли, что каждую такую компанию можно разбить на две группы «дружественным способом», т. е. так, чтобы у каждого человека друзей в своей группе было больше либо равно, чем друзей в противоположной группе?

б) Докажите, что каждую компанию, в которую входит 2022 человека, можно разбить на 15 групп «недружественным способом», т. е. так, чтобы у каждого человека количество друзей в своей группе составляло не более $1/15$ от общего числа его друзей.

20220214_115231.jpg

Комментарий:

<u>Вопрос 1</u>



Рассмотрим углы маленького треугольника.

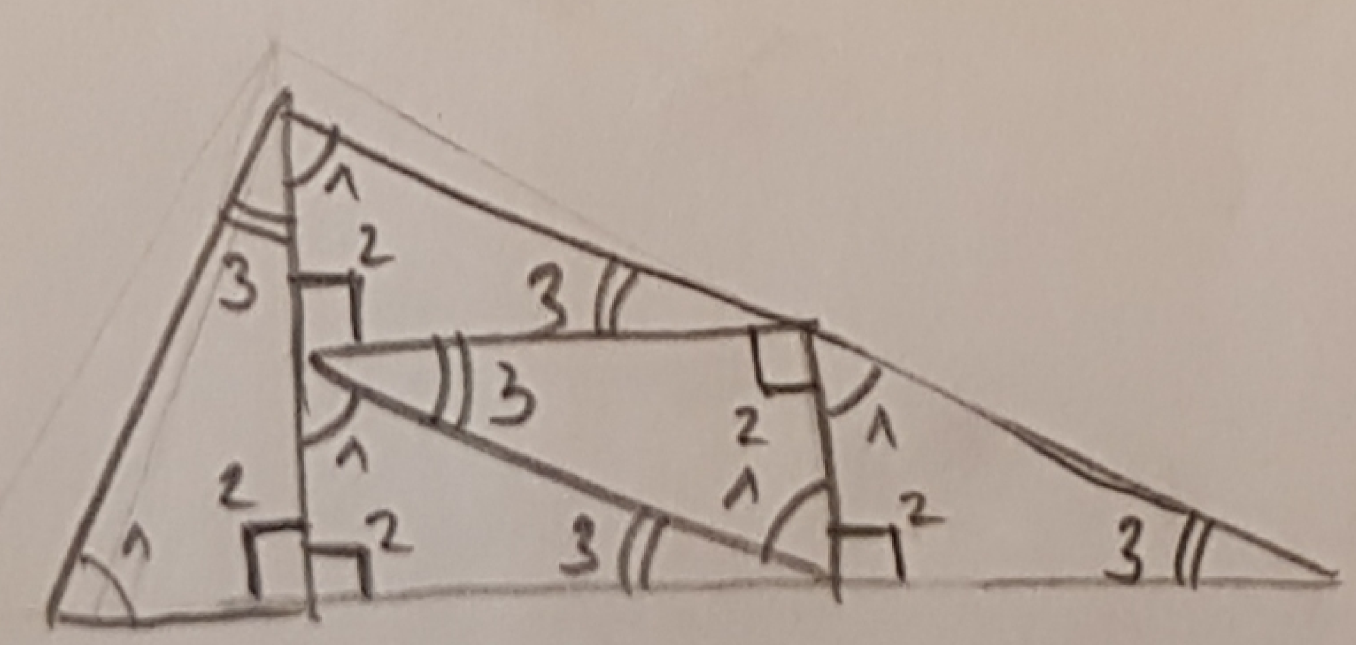
Мы знаем, что: $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$

(т.к. это треугольник)

Так-же, мы знаем, что: $\angle 2 + \angle 2 = 180^\circ$

(если на месте, обозначенным O - не два одинаковые, а два разных угла ($\angle 1$ и $\angle 2$, например), то тогда мы сразу можем сказать, что задача не возможна. Т.к $\left.\begin{array}{l}\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ \\ \text{и } \angle 1 + \angle 2 = 180^\circ\end{array}\right\}$ противоречие)

$\Rightarrow \angle 2 = 90^\circ$. Перерешим.



$\angle 1 + \angle 3 = 90^\circ$

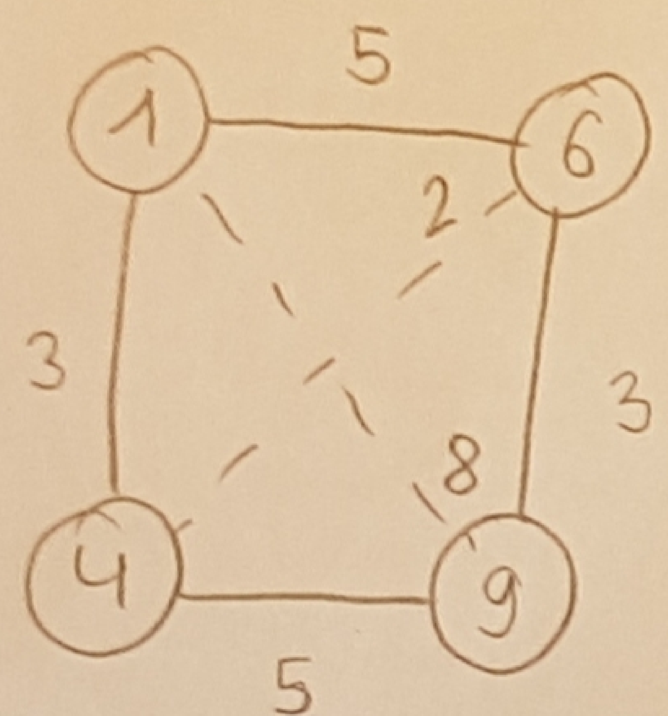
При $\angle 2 = 90^\circ$, такое возможно.

Если же $\angle 2 \neq 90^\circ$, то это НЕ возможно.

(я не уверена чем является рис.1, точным чертежом или неточным рисунком)

Вопрос 2

а) $n = 8$



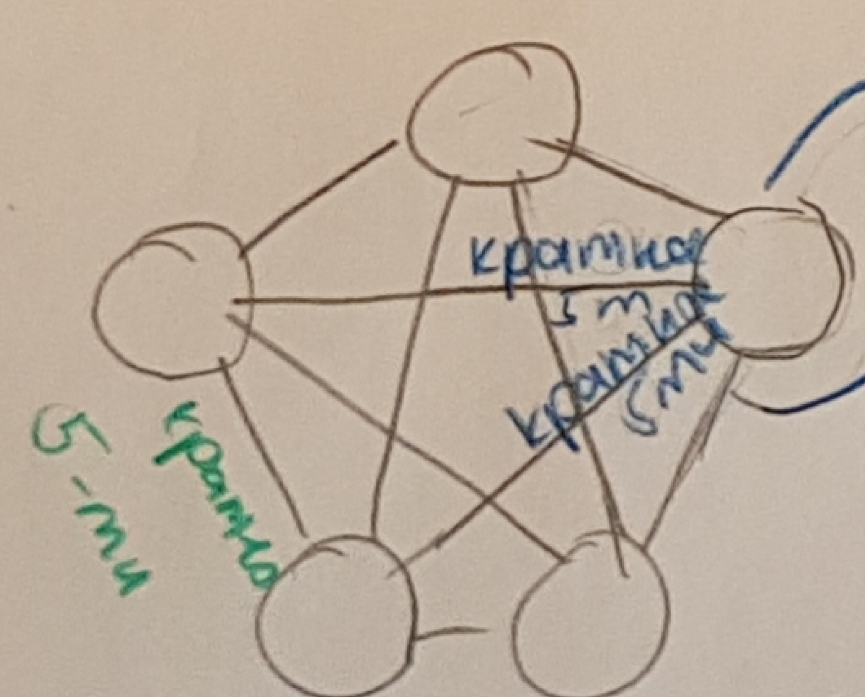
~~n = 1~~
~~n = 2~~
~~n = 3~~
~~n = 4~~
~~n = 5~~
~~n = 6~~
~~n = 7~~

не получается, слишком мало делителей.

б) нет

$25 = \{1; 5; 25\}$ – делители

Из тех, которые можно использовать, только 5. А этого не достаточно.

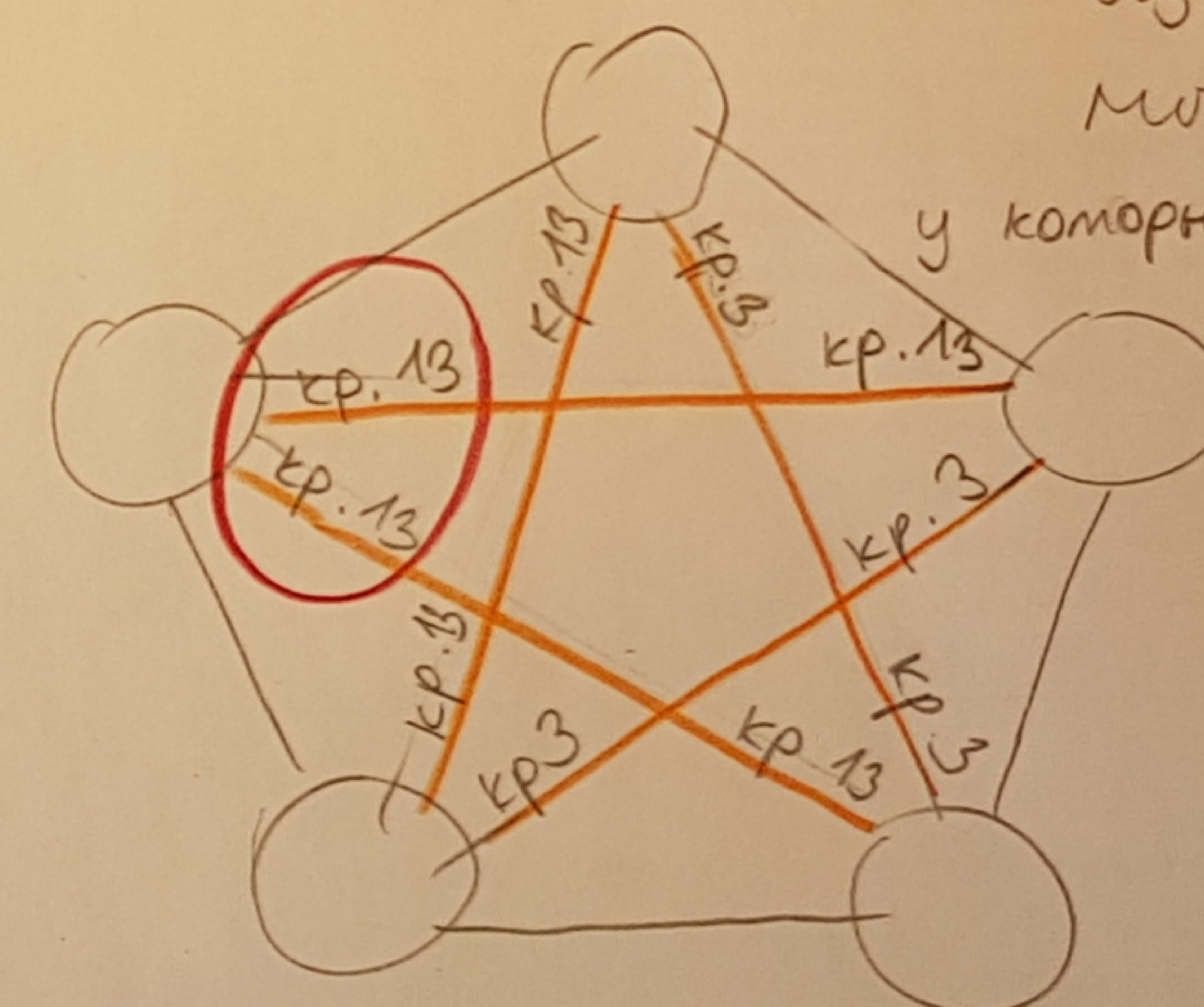


Если эти 2 разницы кратны 5-ти, то и эта разница будет кратна 5-ти, а это противоречит условию

в) нет

$39 = \{1; 3; 13; 39\}$ – делители

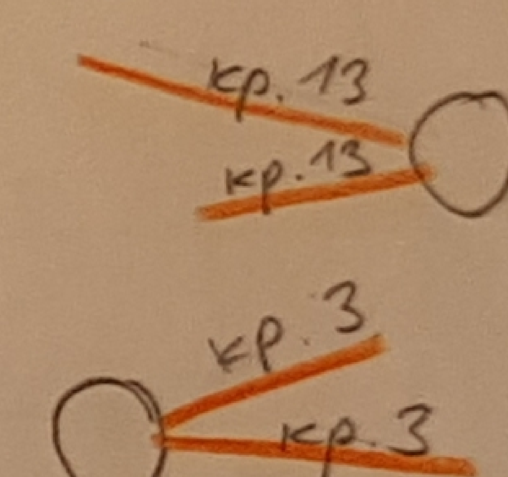
Из тех, которые можно использовать – 3 и 13. Рассмотрим пример.



Из одного ○ не могут выходить 2 /, у которых разность с одинаковой кратностью!

кр. – кратно

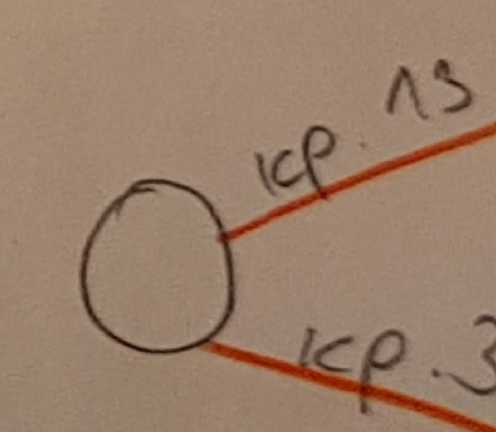
Пример:



Иначе, смотрите б).

– противоречие

Значит, должно быть так:



Попробуем заполнить

Вопрос 3

Проиграет тот, кому останется - - -
(3 минуса).
Тогда, что бы не сделал человек с 3мя минусами, то его противник просто уберёт оставшиеся минусы за 1 ход, тем самым оставляя проигравшему все плюсы. (это конец игры, больше ничего сделать нельзя).

Стратегия Пети:

Петя ходит первым. Его задача всегда после своего хода оставлять Васе кратное 3ём число минусов. Тогда, как бы не походил Вася, Петя всегда сможет уменьшить число минусов до кратного 3ём.

Пример:

Петя: оставил 6 минусов
Вася: (убрал 2, заменив на плюсы) оставил 4 минуса
Петя: (убрал 1 минус, заменив на плюс) оставил 3.
Вася: убрал 1 минус, осталось 2
Петя: убрал последние 2 минуса. Победа.

Важно:

2021 : 3 = 673, ост. 2

Первым ходом, Петя меняет 2 минуса на 3 плюса, оставляя 2019 минусов.
(2019 делится на 3, 673).

Вопрос 4

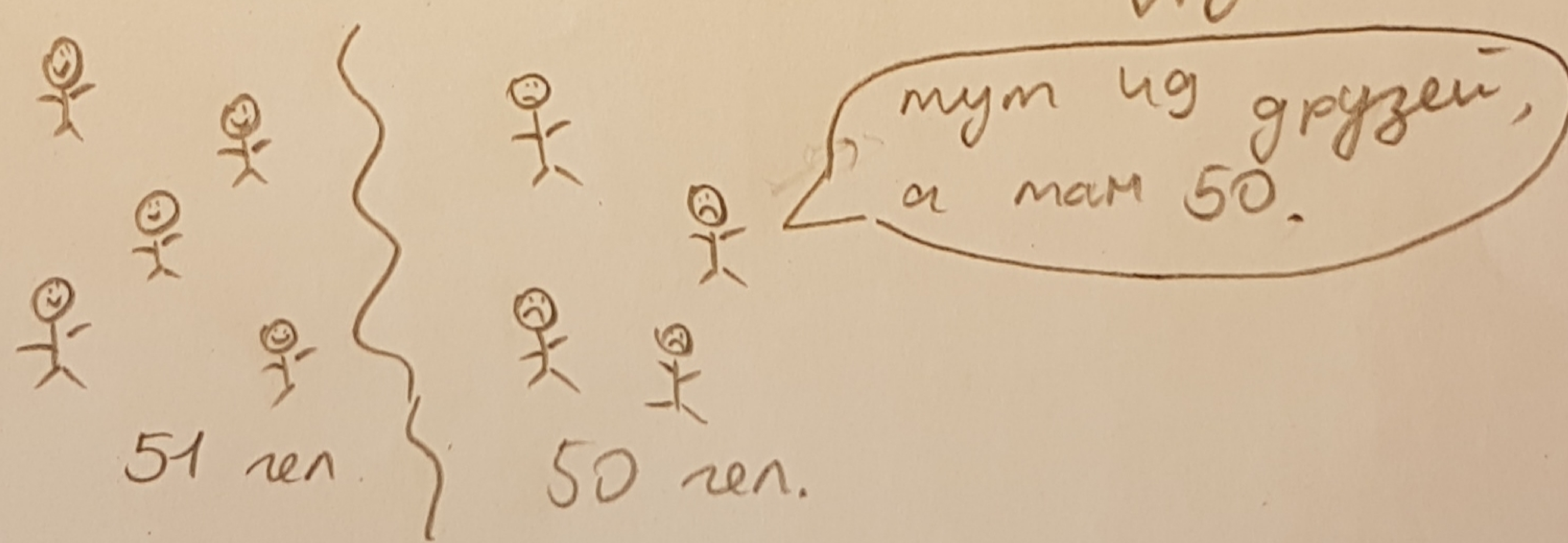
а) Нужно доказать, что такое возможно в КАЖДОЙ компании, где больше 100 человек.

Вот контр-пример:

Всего 101 человек (нечётное кол-во).

Все со всеми дружат.

Поровну разбить не получится, и в меньшей группе у всех людей друзей будет меньше, чем в большей группе.



б)