	ol2205067 ol2205067
Тест начат	понедельник, 14 Февраль 2022, 10:05
Состояние	Завершено
Завершен	понедельник, 14 Февраль 2022, 14:10
Прошло времени	4 час. 5 мин.
Оценка	**80,00** из 100,00

Вопрос
Инфо

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 5 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

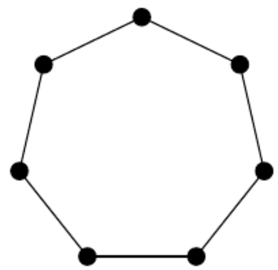
Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос **1**

Выполнен

Баллов: 15,00 из 20,00

На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Настя выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа так, чтобы для всех этих чисел выполнялось свойство:
если числа a и b не соединены отрезком, то разность $a - b$ должна быть взаимно проста с n, а если соединены, то числа $a - b$ и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1.
При каком наименьшем n существует такая расстановка?



Число n очевидно больше 1 и не делится на 2 и 3. так как в противном случае очевидно найдутся 2 не соседних числа, дающих одинаковый остаток по этим модулям (просто какой-то остаток встретится хотя бы 3 раз по принципу Дирихле). Значит n содержит простые множители большие 3. Рассмотрим три подряд идущих числа a, b, c. Пусть a-b делится на d, а b-c на s. Тогда d и s взаимнопросты, иначе a-c делится на нод(d,s). Отсюда следует, что в n хотя бы 2 различных простых множителя. Пусть их ровно 2 и они равны p и q. Пусть а - верхняя вершинка. Если оно сравнимо с числом справа по модулю p, то тогда для следующей по кругу вершинке число справа сравнимо по модулю q и т.д. Но тогда левая от а вершинка сравнима с а по модулю p и мы получаем противоречие, так как три подряд идущих числа (а и соседние вершины) сравнимы по не взаимнопростым модулям. Значит в n хотя бы 3 различных простых множителя и тогда n <= 5*7*11 = 385.
Пример: 1, 22, 33, 19, 30, 65, 21 - несложно убедиться, что он действительно работает

Комментарий:
пример неверный

Вопрос **2**

Выполнен

Баллов: 5,00 из 20,00

При $x, y \in (0,1]$ найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{(x^2 - y)\sqrt{y + x^3 - xy} + (y^2 - x)\sqrt{x + y^3 - xy} + 1}{(x - y)^2 + 1}.$$

Докажем, что A <= 1. Максимум достигается при x = y = 1. Не нарушая общности (выражение симметрично относительно x и y) пусть x^2 >= y. Тогда x >= y >= y^2. Значит x^2- y >= 0, y^2 - x <= 0. Значит второе слагаемое в числителе отрицательное и если мы уменьшим по модулю скобку y^2 - x, то выражение увеличится. Заметим, что y^2 - x <= y - x <= 0, что нам подходит так как это более маленькое по модулю отрицательное. Аналогично заметим, что x^2 - y >= x - y >= 0, то есть выражение снова увеличится, так как мы увеличили положительное слагаемое. Тогда домножим обе части, положим что A = 1 на знаменатель (он больше 0) и докажем, что слева не меньше чем справа. единицы в обеих частях сократятся, а так же после этого сократится один x-y. Останется доказать, что x-y >= разность корней. Заметим, что y + x^3 - xy <= x^2 ; y(1-x) <= x^2(1-x); y <= x^2 - верное нер -во. Значит первый корень меньше x, а второй аналогично больше y, поэтому их размность не болше x-y, ч.т.д.

Комментарий:
"Аналогично заметим, что x^2 - y >= x - y >= 0" - неверно при соблюдении описанных выше условий.
Пример верный.

Вопрос 3

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

На стороне AB остроугольного треугольника ABC отмечена точка M. Внутри треугольника выбрана точка D. Окружности ω_A и ω_B описаны вокруг треугольников AMD и BMD соответственно. Сторона AC вторично пересекает окружность ω_A в точке P, а сторона BC вторично пересекает окружность ω_B в точке Q. Луч PD вторично пересекает окружность ω_B в точке R, а луч QD вторично пересекает окружность ω_A в точке S. Найдите отношение площадей треугольников ACR и BCS.

Заметим, что угол MDR = PAM, так как внешний к вписанному четырехугольнику. Но MDR = MBR (на одну дугу опираются), значит прямые AC и BR параллельны. Аналогично параллельны прямые AS и BC (Можно так же заметить, что AC антипараллельна MD относительно AB и BR антипараллельна MD тоже относительно AB, откуда следует параллельность AC и BR и в аналогичном случае AS и BC). Это значит, что высота из B на AC равна высоте из R на AC, но тогда площади треугольников ABC и ARC равны. С другой стороны равны высоты из A на BC и из S на BC, следовательно площади ABC и BSC равны. Но это просто-напросто значит, что площади искомых треугольников равны.

Ответ: отношение равно 1.

Комментарий:

Вопрос **4**

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

В системе счисления с основанием r ($r \leqslant 100$) натуральное число x является двузначным с одинаковыми цифрами. Оказалось, что r-ичная запись числа x^2 четырехзначная, причем крайние цифры одинаковы, а средние равны нулю. При каких r такое возможно?

Из условия следует, что двухзначное число можно записать, как a*r + a, где a - цифра этого число, а его квадрат, как b*r^3 + b, где b - крайняя цифра. Тогда мы знаем, что a^2 * (r+1)^2 = b*(r^3 + 1) = b*(r+1)(r^2 - r +1)
Значит a^2*(r+1) = b*(r^2 - r + 1). Заметим, что НОД(r+1 ; r^2 - r + 1) = НОД(r+1 ; 3) <= 3. Если нод равн 1, то тогда b делится на r+1, но b < r, так как он цифра в этой системе. Значит НОД равен 3 и тогда r+1= 3k; r = 3k-1

Подставим: a^2*3k = b*(9k^2 - 9k + 3) => a^2*k = b*(3k^2 - 3k + 1). Теперь скобки с числом k взаимнопросты, значит b делится на k. Так как b < r, то b < 3k-1, следовательно b = 2k или b = k. Если b = 2k, то a^2 = 2*(3k^2 - 3k + 1). Но скобка с числом k нечетна, значит справа степень двойки равна 1, а должна быть четной из - за a^2 с левой стороны. Значит b = k и a^2 = 3k^2 - 3k + 1. Напишем дискриминант квадратного уравнения относительно k. D = 12a^2 - 3. Он должен равняться квадрату целого числа, иначе корни будут иррациональны. Значит 3*(4a^2 - 1) = t^2. Заметим, что t^2 делится на 3, значит делится на 9, откуда получаем, что 4a^2 - 1 = 3s^2 => (2a - 1)(2a + 1) = 3s^2. Скобки слева взаимнопросты, значит верно либо 2a-1 = 3p^2 и 2a+1 = q^2, где p и q взаимнопротсы, либо 2a-1 и 2a + 1 поменяны местами. Если верен первый вариант, то q^2 - 3p^2 = 2. Тогда по модулю (3) q^2 = 2, что невозможно. Значит верен второй вариант, где 3p^2 - q^2 = 2. Заметим, что p и q нечетны из равенств с 2a-1 и 2a+1. Если p >= 9, то a > 100, что противоречит r <= 100. Значит нужно рассмотреть 4 варианта: Если p = 1, то q = 1. Если p = 3, то q = 5, если p = 5, то q^2 = 73 - невозможно, если p = 7, то q^2 = 145 - невозможно. Проверим подходящие варианты: Если q = p = 1, то a = 1, тогда 3k^2 - 3k + 1 = 1; k = 1, r = 2, b = 1 - подставляем, убеждаемся, что подходит. Если p = 3, то a = 13, 3k^2 -3k + 1 = 169; 3*(k^2 - k - 56) = 0; 3*(k+7)(k-8) = 0; k = 8; b = 8; r = 23 - подставляем, убеждаемся, что подходит.
Ответ: при r = 2 и r = 23.

Комментарий:

Вопрос **5**

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

У параллелепипеда $a \times b \times c$ грани разбиты на единичные клетки. Имеется также большое количество трехклеточных полосок, которые можно перегибать по границам клеток. При каких a, b и c три грани параллелепипеда, имеющие общую вершину, можно полностью обклеить полосками без наложений и зазоров так, чтобы клетки граней и полосок совпадали?

Не нарушая общности положим, что a делится на 3. Тогда площадь требуемой поверхности равна a*(b+c) + bc и она тоже должна делится на 3. Значит bc делится на 3, откуда b или c тоже делится на 3. Но если хотя бы 2 числа делятся на 3, то это значит что у всех 3 граней есть кратная 3 сторона, а такую грань легко обклеить полосками 1x3. Значит если хотя бы 2 из чисел делятся на 3, то можно, а если только одно, то нельзя из за рассчетов общей площади. Пусть теперь ни одно не делится на 3. Рассмотрим их по модулю 3. Если это набор (1, 1, 1) или (2, 2, 2), то площадь на 3 делится, а если (1, 1, 2) или (1, 2, 2) с точностью до перестановки, то площадь будет сравнима с 2 по модулю 3. Тогда есть шанс обклеить только у первых двух. Покажем, что нельзя.. Покрасим наши клетки в белый и черный следующим образом: у каждой грани зафиксируем угол у вершины, в которой все эти грани сходятся и две стороны такого угла обозначим осями, а клетку, которая примыкает к вершине этого угла за клетку (0; 0). Тогда мы можем любую клетку этой грани задать как (a, b), где a - насколько нужно отступить от клетки (0;0) по одной из осей и b - насколько по другой. Тогда давайте покрасим в белый все клетки вида (x, a), где x - любое, a - сравнимо с 1 по модулю 3, а также вида (b, y), где y - любое, b - тоже сравнимо с 1 по модулю 3, а все остальные в черный. И так для всех граней. Тогда несложно заметить, что наша поверхность состоит из черных квадратиков 2x2, которые отстоят друг от друга на расстоянии 1 и некоторые из них перегибаются через общие ребра граней + у общей вершинки граней все 3 примыкающие к ней клетки черные. Поэтому черных клеток всего нечетное число. Но любая полоска 1x3 либо лежит полностью в белых клетках, либо закрывает 2 черные, а значит закрыть все черные клетки они не смогут.
Ответ: если какие то 2 числа делятся на 3, а оставшееся любое.

Комментарий:

« ПРЕДЫДУЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 24

СЛЕДУЮЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ »
Вариант 25