	ol2252602 ol2252602
Тест начат	понедельник, 14 Февраль 2022, 10:07
Состояние	Завершено
Завершен	понедельник, 14 Февраль 2022, 14:03
Прошло времени	3 час. 55 мин.
Оценка	**61** из 100

Вопрос
Инфо

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 4 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос 1

Выполнен

Баллов: 10 из 10

Некоторый треугольник разрезали на пять маленьких треугольников так, как показано на рис. 1. Могли ли при этом все пять маленьких треугольников оказаться равными?

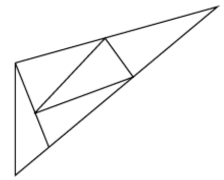

Рис. 1

Да, можно, как на отправленном рисунке по клеточкам ol2252602_1.png

Комментарий:

Вопрос 2

Выполнен

Баллов: 43 из 50

На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Костя выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа, не превосходящие n, так, чтобы для всех поставленных им чисел выполнялось свойство: *если числа a и b соединены отрезком, то разность $a-b$ должна быть взаимно проста с n, а если не соединены, то числа $a-b$ и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1.* Например, для картинки на рис. 2 Костя взял $n=45$ и подобрал подходящую расстановку — она показана на рис. 3.

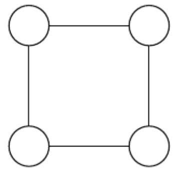
Рис. 2

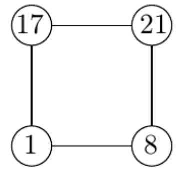

Рис. 3

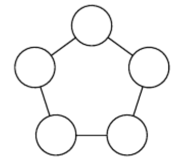
Рис. 4

а) При каком наименьшем n существует требуемая расстановка чисел на рис. 2?
б) Можно ли расставить числа в кружочках на рис. 4 при $n=25$?
в) Можно ли расставить числа в кружочках на рис. 4 при $n=39$?
г) При каком наименьшем n существует расстановка чисел в кружочках на рис. 4?

а) Понятно, что здесь не может быть n<4, иначе нам просто не хватит чисел, чтобы расставить их в кружочки. Приведём пример для n=4:

3 4

2 1

Здесь ни одно число не превосходит 4, 3-1=2 и 4-2=2 имеют общие делители с 4, а 3-2, 2-1, 4-1, и 4-3 взаимно просты с 4.

б) a

e b

c d

Рассмотрим число a. a-b и a-c должно иметь общие делители с 25. Этим общим делителем не может быть 25, потому что тогда одно из чисел точно будет больше 25. Значит, это 5. То есть, a-b делится на 5, и a-c делится на 5. Такое возможно, если: a и b - одинаковые ост. при делении на 5; a и c - одинаковые ост. при делении на 5. Но это значит, что b и c - одинаковые ост. при делении на 5, и b-c делится на 5. Но b и c стоят рядом, а 5-общий делитель с 25. Значит, условие не выполняется.

Ответ:нельзя.

в) У такой расстановки кружочков у каждого кружка есть 2 числа "напротив" его, значит, 2 числа, с которыми разность должна иметь общ.дел. с 39. В пункте б) разбиралось, почему нельзя, чтобы общий делитель был один и тот же для разности с обоими кружками. У 39 есть два делителя: 3 и 13. Значит,надо, чтобы разность с одним из двух чисел дел. на 3, а с другим - на 13.(и так для каждого числа).

Начнём с a:

a-d дел. на 3

a-c дел. на 13

b-d дел. на 13

c-e дел. на 3

У e не хватает 13, а у b - 3.Значит, b-e дел. и на 13, и на 3, значит, дел. на 39. Но такое не возможно.

Ответ: нельзя.

г) В пункте в) можно подставить любые 2 числа, и ничего от этого не изменится. Значит, нам нужно минимум 3 разных числа. Рассмотрим, что если число дел. на 2:

Есть всего 2 остатка, и они не могут стоять рядом. (Иначе разность будет делится на 2). Значит, они должны чередоваться. Но так как тут 5 стоящих по кругу чисел, обязательно будут рядом 2 числа с одинаковыми ост. Значит, число не может делится на 2.

Мин. число, не дел. на 2, и при этом состоящее из трёх разных множителей - это 3*5*7=105.

Пример:

35

18 33

5 7

Ответ: n=105.

Комментарий:
а) 10

б) 9

перепутаны буквы

в) 9

перепутаны буквы

г) 15

пример неверный

Вопрос **3**

Выполнен

Баллов: 8 из 10

На доске написано 2021 минусов. Петя и Вася играют в такую игру. Ход состоит в том, что можно один минус заменить на плюс, либо стереть один плюс и один минус, либо два минуса заменить на три плюса. Ходят по очереди, первым ходит Петя, проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

Каждый ход убирает минусы, или заменяет их на плюсы. Значит, пока есть хотя бы один минус, можно ходить, и выигрывает тот, после чьего хода не остаётся минусов. Петя может сначала походить "заменить 2 мин. на 3 пл", и останется 2019 минусов. 2019 дел. на 3, значит, он может каждый раз "дополнять" ход Васи, до того, чтобы убрались 3 минуса. Таким образом, он точно уберёт последний минус, и Вася не сможет никак походить.

Комментарий:
не подробно

Вопрос **4**

Нет ответа

Балл: 30

а) Имеется большая компания людей — больше 100 человек, в которой некоторые люди дружат. Верно ли, что каждую такую компанию можно разбить на две группы «дружественным способом», т. е. так, чтобы у каждого человека друзей в своей группе было больше либо равно, чем друзей в противоположной группе?

б) Докажите, что каждую компанию, в которую входит 2022 человека, можно разбить на 15 групп «недружественным способом», т. е. так, чтобы у каждого человека количество друзей в своей группе составляло не более $1/15$ от общего числа его друзей.