	ol2238881 ol2238881
Тест начат	понедельник, 14 Февраль 2022, 10:06
Состояние	Завершено
Завершен	понедельник, 14 Февраль 2022, 14:05
Прошло времени	3 час. 59 мин.
Оценка	**57,00** из 100,00

Вопрос
Инфо

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 5 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

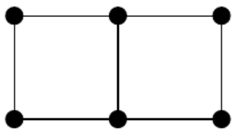
Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос 1

Выполнен

Баллов: 17,00 из 20,00

На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Таня выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа так, чтобы для всех этих чисел выполнялось свойство:
если числа a и b не соединены отрезком, то сумма a^2+b^2 должна быть взаимно проста с n, а если соединены, то числа a^2+b^2 и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1.
При каком наименьшем n существует такая расстановка?



ol2238881_1.pdf

Комментарий:
решение содержит верное, но недоказанное утверждение

Вопрос **2**

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

При $x, y, z \in (0, 1]$ найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{\sqrt{8x^4 + y} + \sqrt{8y^4 + z} + \sqrt{8z^4 + x} - 3}{x + y + z}.$$

ol2238881_2.pdf

Комментарий:

Вопрос 3

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

Диагональ AC вписанного четырехугольника $ABCD$ является диаметром описанной вокруг него окружности ω. Из точки D провели прямую, перпендикулярную отрезку BC, она вторично пересекла окружность ω в точке E. Найдите отношение площадей треугольника BCD и четырехугольника $ABEC$.

ol2238881_3.pdf

Комментарий:

Вопрос **4**

Нет ответа

Балл: 20,00

На доске написано число 5555 в системе счисления с четным основанием r $(r \geqslant 18)$. Петя выяснил, что r-ичная запись x^2 представляет собой восьмизначный палиндром, у которого разность четвертой и третьей цифр равна 2. (Палиндромом называется число, которое читается одинаково слева направо и справа налево). При каких r такое возможно?

Вопрос **5**

Нет ответа

Балл: 20,00

Дана квадратная таблица 2023×2023. Каждая ее клетка окрашена в один из n цветов. Известно, что для любых шести клеток одного цвета, расположенных в одной строке, сверху от самой левой из них и снизу от самой правой из них нет клеток того же цвета. При каком наименьшем n такое возможно?

ПРЕДЫДУЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 23

СЛЕДУЮЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 24

Задача № 1.

Ответ: 65

Решение:

Пусть в точках в верхней строке картинки слева направо написаны числа a, b, c, а в нижней сточке написаны числа d, e, f.

$n > 1$ – по очевидным причинам.

Число n не может быть чётным. Действительно, если n – чётное, то в парах (a, c), (a, e), (c, e) числа имеют разную чётность (так как их сумма квадратов должна быть взаимнопроста с 2), но это невозможно, потому что среди трёх чисел есть хотя бы два одинаковой чётности.

Число n не может быть степенью простого числа. В противном случае, если $n = p^k$, где p — простое, то выражения a^2+b^2; $b^2 + c^2$; c^2+f^2 делятся на p. Тогда $(a^2+b^2) - (b^2 + c^2) + (c^2 + f^2) = a^2 + f^2$ делится на p, что невозможно, так как a и f не соединены отрезком.

Теперь заметим, что если для числа n можно подобрать шестёрку (a, b, c, d, e, f), и простое число p входит в каноническое разложение числа n в степени k, то для числа n / p^{k-1} шестёрка (a, b, c, d, e, f) будет удовлетворять условию. Действительно, если какая-то сумма квадратов делилась на p, то он останется не взаимнопростой с новым числом. Будем считать, что все простые числа входят в n, в степени 1.

Сумма квадратов чисел, соединенных отрезком должна делиться на некоторое простое число p, входящее в разложение n. Будем говорить в этом случае, что число p «контролирует» этот отрезок.

Если p даёт остаток 3 при делении на 4 и $a^2 + b^2$ делится на p, то по теореме Жирара числа a и b сами делятся на p. Тогда число p, дающее остаток 3 при делении на 4 может «контролировать» не более 1 отрезка, в противном случае среди чисел a, b, c, d, e, f найдутся четыре, попарные суммы квадратов которых делятся на p и не взимнопросты с n, чего не может быть согласно схеме, изображенной в условии.

Предположим, что n – произведение 2 простых чисел. Число n не может быть произведением двух простых чисел, вида $4k+3$ по доказанному в предыдущем абзаце.

Пусть n – произведение простого числа $p=4k+1$ и простого числа $q=4t+3$. Тогда, какой бы отрезок не контролировало q, существует путь длины 3 из числа a в f, не содержащий этот отрезок, а значит полностью контролируемый p. Тогда, аналогично случаю n равного степени простого числа приходим к противоречию.

Пусть n – произведение простых чисел p=4k+1 и q=4t+1. Минимальное такое n равно 65 = 5 * 13. В этом случае условию удовлетворяет следующий набор чисел (a = 1, b = 2, c = 10, d = 8, e = 4, f = 20).

Если n – произведение трех и большего числа простых чисел, то оно будет больше или равно 105, что больше 65.

Задача № 2.

Ответ: 2.

Решение:

Заметим, что $\sqrt{8x^4+y} \leqslant \sqrt{8x^3+1} = \sqrt{(2x+1)(4x^4-2x+1)}$, так как $x \leqslant 1\ и\ y \leqslant 1.$ Так как $x>0$ выражение $2x+1>0$. Дискриминант многочлена $4x^2-2x+1$ меньше 0 и старший коэффициент положителен, поэтому $4x^2-2x+1>0$. Тогда по неравенству о средних имеем $\frac{(2x+1)+(4x^2-2x+1)}{2} \geqslant \sqrt{(2x+1)(4x^2-2x+1)}$ Отсюда $2x^2+1 \geqslant \sqrt{(2x+1)(4x^2-2x+1)} \geqslant \sqrt{8x^4+y}$. Тогда

$$\frac{\sqrt{8x^4+y}+\sqrt{8y^4+z}+\sqrt{8z^4+x}-3}{x+y+z} \leqslant \frac{(2x^2+2y^2+2z^2+1+1+1)-3}{x+y+z} = \frac{2(x^2+y^2+z^2)}{x+y+z}$$

. Так как $x \leqslant 1\ и\ y \leqslant 1\ и\ z \leqslant 1$, то $x^2+y^2+z^2 \leqslant x+y+z$. Тогда

$$\frac{\sqrt{8x^4+y}+\sqrt{8y^4+z}+\sqrt{8z^4+x}-3}{x+y+z} \leqslant \frac{2(x^2+y^2+z^2)}{x+y+z} \leqslant 2 .$$

Значение 2, достигается при $x=y=z=1$:

$$\frac{\sqrt{8\times1^4+1}+\sqrt{8\times1^4+1}+\sqrt{8\times1^4+1}-3}{x+y+z} = \frac{3+3+3-3}{1+1+1} = \frac{6}{3} = 2 .$$

Задача № 3.

Ответ: 1.

Решение:

Пусть T – точка пересечения отрезков DE и BC. Эти отрезки перпендикулярны, поэтому площадь $S_{\Delta BCD}=\frac{BC\times TD}{2}$.

$S_{ABEC}=S_{\Delta ABC}+S_{\Delta BEC}$. Так как ET и BC перпендикулярны, $S_{\Delta BEC}=\frac{BC\times ET}{2}$.

Так как AC — диаметр, угол ABC прямой и $S_{\Delta ABC}=\frac{BC\times AB}{2}$.

Тогда $\frac{S_{\Delta BCD}}{S_{ABEC}}=\frac{S_{\Delta BCD}}{S_{\Delta ABC}+S_{\Delta BEC}}=\frac{2S_{\Delta BCD}}{2S_{\Delta ABC}+2S_{\Delta BEC}}=\frac{BC\times TD}{BC\times ET+BC\times AB}=\frac{TD}{ET+AB}.$

Прямые AB и DE обе перпендикулярны BD и, следовательно параллельны друг другу.
Тогда они высекают равные дуги на окружности, то есть дуги AD и BE равны. Следовательно, равны хорды AD = BE. Таким образом, ABED — равнобокая трапеция, а BT – высота в ней. Проведём вторую высоту AS на основание DE. AS параллельно BT, AB параллельно ST и угол AST прямой, следовательно ABTS – прямоугольник. Тогда AS = BT и прямоугольные треугольники DAS и EBT равны по гипотенузе и катету.

Следовательно $DS=TE=\frac{(DE-AB)}{2}$. Тогда

$$\frac{TD}{ET+AB}=\frac{DE-ET}{AB+ET}=\frac{DE-\frac{(DE-AB)}{2}}{AB+\frac{(DE-AB)}{2}}=\frac{\frac{AB+DE}{2}}{\frac{AB+DE}{2}}=1.$$