	ol2216701 ol2216701
Тест начат	понедельник, 14 Февраль 2022, 10:22
Состояние	Завершено
Завершен	понедельник, 14 Февраль 2022, 14:05
Прошло времени	3 час. 42 мин.
Оценка	**79** из 100

Вопрос
Инфо

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 4 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос **1**

Выполнен

Баллов: 10 из 10

Некоторый треугольник разрезали на пять маленьких треугольников так, как показано на рис. 1. Могли ли при этом все пять маленьких треугольников оказаться равными?

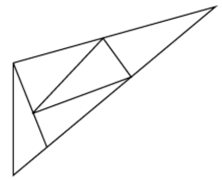


Рис. 1

Ответ: да.
Будем показывать как его строить. Нарисуем отрезок BH. Дальше нарисуем A, такую что AH перпендикулярно BH, AH = BH / 2.

Пусть M - середина BH

Пусть угол ABH = альфа, тогда угол BAH = 90 - альфа. Отметим C, т.ч. C в другой полуплоскости относительно BH от A, C на прямой AH и угол ABC = 90. Построим K, т.ч. KH = BH и K на отрезке HC. Построим L, т.ч. угол HKL = 90 и L на отрезке BC. Заметим равенство треугольников MHK и AHB по 2 катетам. Значит, угол MKH = альфа, по равенству треугольников, а значит угол MKL = 90 - альфа. Тк LK параллельно MH(BH), значит углы LBM = CLK как соответственные. Тк углы CLK и LKM как накрест лежащие => BC параллельно MK. Значит, BLKM - параллелограмм(LK параллельно BM по построению точки L, а BL параллельно MK мы только что доказали). Тогда треугольники BML и MHK равны по 1 признаку(BM = MH, угол MBL = угол HMK, BL = MK) => угол BML = 90(MHK = 90 и равенство треугольников) => ML параллельно HK => MLHK - параллелограмм(ML параллельно HK и MH параллельно LK), значит, LK = MH => треугольники LKC = MHK по 2 признаку(угол KLC = угол HMK, LK = MH, угол MHK = угол LKC = 90)

Доказали, что AHB = MHK = BML = LKC, осталось доказать, что все эти треeгольники равны треугольнику LMK, это правда, тк LMK = HKM(по 3 признаку, ML = HK(тк MLKH - параллелограмм), HM = LK(тк MLKH - параллелограмм), MK - общая)

Получилось, что мы построили такой треугольник и разбили его на такие 5 равных треугольников

Без имени.png

Комментарий:

На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Костя выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа, не превосходящие n, так, чтобы для всех поставленных им чисел выполнялось свойство: *если числа a и b соединены отрезком, то разность $a-b$ должна быть взаимно проста с n, а если не соединены, то числа $a-b$ и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1.* Например, для картинки на рис. 2 Костя взял $n=45$ и подобрал подходящую расстановку — она показана на рис. 3.

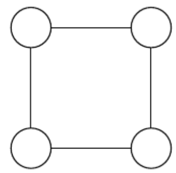


Рис. 2

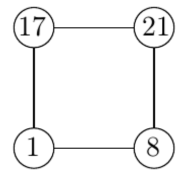


Рис. 3

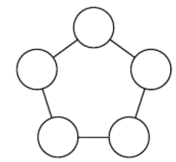


Рис. 4

а) При каком наименьшем n существует требуемая расстановка чисел на рис. 2?
б) Можно ли расставить числа в кружочках на рис. 4 при $n=25$?
в) Можно ли расставить числа в кружочках на рис. 4 при $n=39$?
г) При каком наименьшем n существует расстановка чисел в кружочках на рис. 4?

Стоит сказать, что если я употребляю слово модуль разности, то на делители это не влияет, тк число просто меняет знак, а значит, на взаимно простоту это не влияет

а) Ответ: 4

пример на 4: 1234, 1 2

4 3.   У 1 2 модуль разности = 1, у 2 3 модуль разности = 1, между 3 4 модуль разности = 1, между 1 4 модуль разности = 3; 1 и 3 взаимно просты с 4. А между диагоналями 1 3 и 2 4 модули разности - 2 и 2. Они имеют с 4 общий натуральный делитель 2.

оценка: т.к. в 4 кружочках различные натуральные числа, значит n >= 4.

б) Заметим, что 25 делится только на 1, 5, 25. 1 не считается, значит если у нас расстановка a b c d e, то разности на диагоналях(a - d, a - c, e - b, e - c и тд) должны делится на 5 или 25, тк не соединены ; однако наибольшее число, которое мы можем использовать = 25, а наименьшее = 1, а значит наибольший модуль разности равен 24, значит на 25 делится не может, тк 0 получить не можем, тк все числа различные. Значит модули разности на диагоналях делятся на 5. Тогда в нашей расстановке abcde a - d делится на 5 и a - e делится на 5 => d и e сравнимы по модулю 5. А значит d - e делится на 5, однако они соединены ребром, но разность взаимно проста с 25 !?

Ответ: нет

P.S.

Мы предположили, что такая расстановка есть, а потом получили противоречие в) Ответ: нет

Заметим, что у 39 достижимых(нашими разностями) делителей не равных единице ровно 2(3 и 13); 39 не достигается, по тем же причинам, что и в пункте б не достигалось 25. Предположим, что такая расстановка нашлась. Пусть это расстановка abcde.

Заметим, что d и e не сравнимы по модулю 3 и 13, но какое-то из них сравнимо с a по модулю 3 и другое сравнимо с a по модулю 13, тк a и d не соединены и a и e не соединены. НУО a сравнимо с c по модулю 3, и a сравнимо с d по модулю 13. Проделаем то же самое, но вместо a будет b. Теми же рассуждениями получим, что либо d, либо e сравнимо с b по модулю 3 и другое сравнимо с b по модулю 13. Заметим, что если d сравнимо с b по модулю 13, то a сравнимо с d по модулю 13 и b сравнимо с d по модулю 13, но a и b не могут быть сравнимыми по модулю 13, тк они соединены и разность взаимно проста с 39. Значит d сравнимо с b по модулю 3. Значит e сравнимо с b по модулю 13. Проделаем то же самое, только вместо b теперь c. Теми же рассуждениями получим, что либо a либо e сравнимо с c по модулю 13 а другое сравнимо с c по модулю 3.Однако мы знаем, что a сравнимо с c по модулю 3, значит e сравнимо с c по модулю 13, но мы знаем что e сравнимо с b по модулю 13. А значит, что b и c сравнимы по модулю 13, а значит и разность не взаимно проста с 39 !?

г) Ответ: 105

Пример: 16 102 41 4 17

105 = 3 * 5 * 7, т.е. достаточно доказать, что числа взаимно просты/делятся с/на одно из 3, 5, 7

41 - 16 = 25, общий делитель 5

16 - 4 = 12, общий делитель 3

102 - 4 = 98, общий делитель 7

102 - 17 = 85, общий делитель 5

41 - 17 = 24, общий делитель 3

Я показал, что не соединенные имеют общий делитель, теперь покажем, что соединенные взаимно просты

17 - 16 = 1

102 - 16 = 86 = 2 * 43 не делится ни на 3, ни на 5, ни на 7

102 - 41 = 61 не делится ни на 3, ни на 5, ни на 7

41 - 4 = 37 не делится ни на 3, ни на 5, ни на 7

17 - 4 = 13 не делится ни на 3, ни на 5, ни на 7

Оценка:

У n должно быть >= 3 простых делителя, иначе получится противоречие как в пункте в)

Если я докажу, что n не кратно 2, то я докажу пункт, ведь 3, 5, 7 - 3 следующих минимальных простых

Осталось доказать, что n нечетно

Пусть оно четно. Всего мест для расположения чисел нечетно, значит чисел какой-то четности среди них будет больше, а тк они расположены по кругу, значит, что будут 2 соседних числа с одинаковой четностью, их разность будет четна, однако разность должна быть взаимно проста, но у них есть общий делитель 2 !?

Комментарий:
а) 10

б) 10

в) 9

перепутаны буквы

г) 20

Вопрос **3**

Выполнен

Баллов: 10 из 10

На доске написано 2021 минусов. Петя и Вася играют в такую игру. Ход состоит в том, что можно один минус заменить на плюс, либо стереть один плюс и один минус, либо два минуса заменить на три плюса. Ходят по очереди, первым ходит Петя, проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

Выигрывает Петя. Заметим, что за один ход количество минусов и плюсов либо -1 +1; -1 -1; -2 +3. Первым ходом Петя стирает 2 минуса на 3 плюса, тем самым оставляя 2019 минусов. Заметим, что 2019 делится на 3, тк 2 + 0 + 1 + 9 = 12 делится на 3 => 2019 делится на 3. Дальше на ход -1 + 1 отвечаем -2 +3, на ход -1 -1 отвечаем -2 +3, на ход -2 +3 отвечаем -1 +1. Заметим, что после нашего хода количество минусов каждый раз уменьшается на 3, а тк 2019 делится на 3 именно после нашего хода закончится игра(тк игра заканчивается когда остается 0 минусов). Остается доказать только то, что мы можем делать такие ходы. Когда мы не можем ответить ходом по нашему плану? 1) когда не хватает минусов. Такое невозможно, тк после каждого Петиного хода остается количество минусов кратное 3. Но за ход можно уменьшить максимум на 2, значит после после хода Васи, если он уменьшает минусы на 1, останется >= 2 минуса, чего нам достаточно, если уменьшает минусы на 2, то останется >= 1 минус, чего нам тоже достаточно. 2) не хватает плюсов. Такое тоже невозможно, тк ходы Пети только увеличивают количество плюсов, а границы больше которой нельзя увеличивать плюсы нет.
Мы доказали, что ходами, которые точно можно совершить Петя не проиграет, а тк ничьи не бывает в этой игре, тогда выиграет Петя(Выигрывает тот после хода которого остается 0 минусов, а мы доказали, что после Васи 0 остаться не может)

Комментарий:

Вопрос 4

Выполнен

Баллов: 10 из 30

а) Имеется большая компания людей — больше 100 человек, в которой некоторые люди дружат. Верно ли, что каждую такую компанию можно разбить на две группы «дружественным способом», т. е. так, чтобы у каждого человека друзей в своей группе было больше либо равно, чем друзей в противоположной группе?

б) Докажите, что каждую компанию, в которую входит 2022 человека, можно разбить на 15 групп «недружественным способом», т. е. так, чтобы у каждого человека количество друзей в своей группе составляло не более $1/15$ от общего числа его друзей.

а) Ответ: нет

Возьмем Компанию из 101 человека, где все дружат со всеми, если мы разобьем на две группы, то в какой-то группе будет

больше людей. Пусть в меньшей n, тогда в большей 101 - n, причем n <= 50. Тогда любой человек из меньшей компании дружит с n - 1 человеком из своей группы и с 101 - n из противоположной группы. Заметим, что n - 1 < 101 - n, тк n - 1 <= 49

101 - n >= 51

!?

б) Разобьем на 15 групп, в каждой из которых не более 135 людей(мы так можем, потому что 135 * 15 = 2025 > 2022). Заметим, что у каждого человека не более 2021 знакомых(количество всех людей - 1).

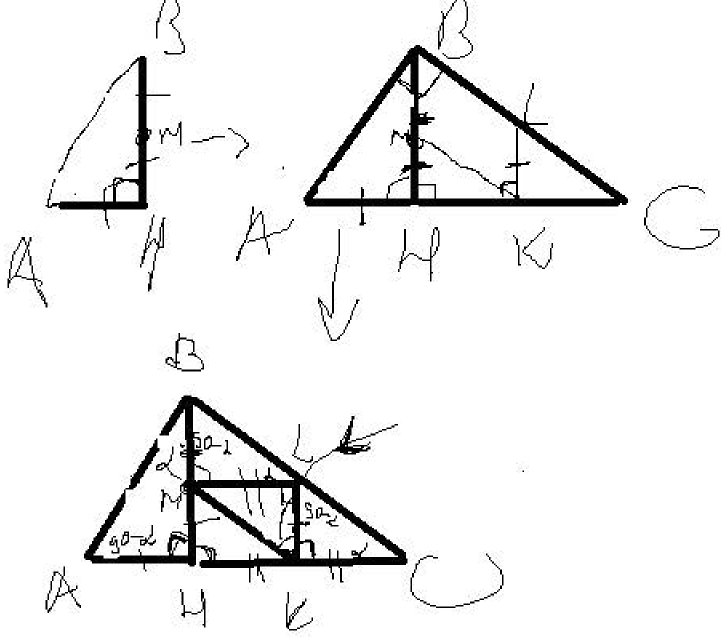
В каждой группе у человека <= 134 знакомых(тк сам с собой человек дружить не может). Мы хотим доказать, что это <= 1/15 всех его знакомых. [2021/15] = 135.

134 <= 135, а значит у каждого человека не более 1/15 всех его друзей.

ЧТД

Комментарий:
а) 10

б) 0


B
M
A
H
B
M
A
H
K
C
B
L
M
90-α
90-α
A
H
K
C