	ol2214065 ol2214065
Тест начат	понедельник, 14 Февраль 2022, 10:09
Состояние	Завершено
Завершен	понедельник, 14 Февраль 2022, 14:03
Прошло времени	3 час. 54 мин.
Оценка	**67,00** из 100,00

Вопрос
Инфо

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 5 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

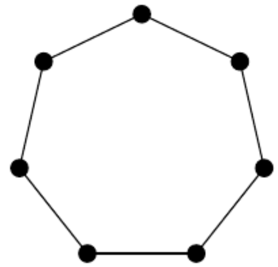
Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос **1**

Выполнен

Баллов: 17,00 из 20,00

На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Настя выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа так, чтобы для всех этих чисел выполнялось свойство:
если числа a и b не соединены отрезком, то разность $a - b$ должна быть взаимно проста с n, а если соединены, то числа $a - b$ и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1.
При каком наименьшем n существует такая расстановка?



ответ: при n = 5*7*11= 385

решение:

переформулируем условие: числа соединены ребром равносильно,что нод разности чисел и n больше 1 и

числа НЕ соединены ребром равносильно, что нод чисел и n равен 1

n = p1^k1*p2^k2 .....ps^ks (pi разные ,простые)

обозначим числа в 7 угольнике за a1, a2, a3, ... , a7 по часовой стрелке(a1 и a7 соседние) все различны по условию. те разности не равны 0

на ребрах семиугольника напишем нод разности чисел,стоящих в вершинах этого ребра ,с числом n

нод(a1-a2, n) = c1

нод (a2-a3, n) = c2

...

нод(a6-a7, n) = c6

нод(a7-a1, n) = c7

все ноды больше 1, тк числа соединены ребром(значит по усл это выполняется)

заметим, что ci и cj для любых не равных i и j от 1 до 7 верно ,что нод(ci,cj)=1.

докажем это.

пусть это не так. тогда существует такие ci, cj (i != j) ,тч нод(ci,cj) = d != 1

пусть d делится на простое число p

Выделим все c_j, которые делятся на p_1. Значит для таких нодов 2 числа ,стоящие в вершинах ребра, имеет одинаковый остаток по модулю p_1, тк их разность делится на p_1. Заметим, что таких c_j не более чем 3. От противного. Пусть хотя бы 4. Тогда найдутся по принципу Дирихле(или же Дирехле) такие 2 ребра (имеющие общую вершиной) с написаннами на них c_k ,c_m, тч они делятся на p_1. Тогда 3 числа стоящие в вершинах этих двух ребер имеют одинаковые остатки по модулю p_1 по ранее сказанному. Тогда все три числа должны быть попарно соединены ребрами, тк их попарные разницы делятся на p_1 и n делится на p_1 (значит нод больше 1 , значит соединены ребром по усл)

Но в семиугольнике нет трех попарно соединенных вершин. Противоречие. Значит таких c_j не более чем 3.

Аналогично с любым простым p_i на которое делится n.

пусть у n меньше либо равно 2 различных простых множителей. Значит c_i ,которые делятся на одно из этих простых множителей ,меньше либо равно чем 3 + 3 = 6. Но у нас c_i - 7. И они все больше 1. Противоречие. Значит у n хотя бы 3 различных простых множителя.

Рассмотрим любое простое p (n делится на p).

Пусть x_1, ... x_7 остатки при делении на p чисел a_1,.....a_7 соответственно. Если среди них найдутся такие $x_i=x_j=x_q$, то попарные разности этих чисел по модулю p сравнимы с 0, значит и ноды разности с n делятся на p,значит ноды больше 1. Значит числе попарно соединены ребром по условию. Но в семи угольнике такого нет. Противоречие. Значит для каждого остатка по модулю p не более двух x_i равных этому остатку. Тогда колво различных остатков по модулю p хотябы 4, иначе чисел было бы меньше либо равно 2 * 3 = 6, а у нас 7. Колво различных остатков по модулю p хотя бы 4.Значит p хотя бы 4.

значит $n >= 5* 7* 11$. произведение трех различных простых чисел больше либо равных 4.

получили оценку на 5*7*11

пример на n = 5*7*11

пусть по модулю 5 числа дают a_1,... a_7 остатки -0,0,1,1,2,2,3 соответсвтенно. (значит c_1, c_3,c_5 больше 1, что и требовалось)

по модулю 7 числа дают остатки 3,0,0,1,1,2,2, соответственно(значит c_2,c_4,c_6 больше 1 что и требовалось)

по модулю 11 числа дают остатки 0,1,2,3,4,5,0 соостветственно (значит c_7 больше 1 что и требовалось)

заметим что никакие лишние ребры проведены не будут по построению. Подберем такие семь различных чисел с необходимыми условиям по остатка по подулю 5,7,11 по КТО. пример построен.

Комментарий:
нет числового примера

Вопрос **2**

Выполнен

Баллов: 0,00 из 20,00

При $x, y \in (0,1]$ найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{(x^2 - y)\sqrt{y + x^3 - xy} + (y^2 - x)\sqrt{x + y^3 - xy} + 1}{(x - y)^2 + 1}.$$

при x = y = 1/ 2 выражение принимает значение 1

пусть существует a > 1 --->

(x^2-y)(y+x^3-xy)^0.5 + (y^2-x)(x+y^3 - xy) + 1 > (x-y)^2 + 1 <->

(x^2-y)(y+x^3-xy)^0.5 + (y^2-x)(x+y^3 - xy) > x^2 - 2xy+y^2

заметим что y+x^3-xy

Комментарий:
пример неверный, доказательство не завершено

Вопрос 3

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

На стороне AB остроугольного треугольника ABC отмечена точка M. Внутри треугольника выбрана точка D. Окружности ω_A и ω_B описаны вокруг треугольников AMD и BMD соответственно. Сторона AC вторично пересекает окружность ω_A в точке P, а сторона BC вторично пересекает окружность ω_B в точке Q. Луч PD вторично пересекает окружность ω_B в точке R, а луч QD вторично пересекает окружность ω_A в точке S. Найдите отношение площадей треугольников ACR и BCS.

по условию AMDPS лежат на окр wa   и BQDMR лежат на окр wb.

пусть угол A- x, угол B -y при вершинах треугольника ABC. Тогда угол C = 180-x - y(тк сумма углов треугольника 180)

угол MDP = 180 - угол A = 180 - x(тк AMDP вписан в wa)

угол MDQ = 180- угол B = 180-y(тк BQDM вписан в wb)

Значит меньший угол QDP = 360 - угол MDP -угол MDQ = x+y

тогда угол QDP + угол C = x+y+180-x-y = 180

значит QDPC ВПИСАННЫЙ

Следовательно угол C = угол SDP = угол RDQ = 180-x-y (угол SDP И угол RDQ вертикальные) !!!! важно

угол RDQ + угол RBQ = 180 тк RBQD вписанный следовательно угол C + угол RBQ = 180 - значит BR параллельно с AC.

угол SDP= угол SAP тк ADPS вписанный следовательно угол C = угол SAP - значит AS параллельно BC.

заметим что если есть две параллельные прямые,то расстояние между ними константа равная длине отрезка с концами на прямых , перпендикулярного прямым - факт .

тогда посмотрим на треугольники ARC , ABC - их площади равны ,тк основание AC совпадает и опущенные высоты из B ,R равны ,тк RB || AC. (используем факт)

аналогично треугольники ABC, BSC - их площади равны ,тк основание BC совпадает и опущенные высоты из A , S равны ,тк AS || BC (используем факт)

тогда отношение площадей треугольников ACR , BCS равно отношению площадей треугольников ABC , ABC - те равно 1.

Ответ 1.

Комментарий:

Вопрос **4**

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

В системе счисления с основанием r ($r \leqslant 100$) натуральное число x является двузначным с одинаковыми цифрами. Оказалось, что r-ичная запись числа x^2 четырехзначная, причем крайние цифры одинаковы, а средние равны нулю. При каких r такое возможно?

пусть x = aa (в r) = a(r+1) (в 10) --- 0<a <r

пусть x^2 = b00b = b(r^3 + 1) (в 10) -------0<b< r

a>0 b> 0 тк x натуральное

тогда a^2*(r+1) ^ 2= b(r^3+1) = b(r+1)(r^2-r+1) (тк r > 0),то это равносильно тому ,что

a^2*(r+1)= b(r^2 - r + 1)

пусть нод(r+1, r^2-r+1)=d > 1, тогда r = -1 по модулю d

тогда r^2-r+1 = 1+1+1 = 3 по модулю d и 0 с другой стороны. значит 3 и 0 сравнимы по модулю d. Значит d = 3

Пусть d != 3,тогда d = 1.

Но тогда тк a^2*(r+1)= b(r^2 - r + 1),то b должно делится на r + 1. но b < r. и b !=0 ,иначе x = 0000=0. по условию x натуральное противоречие.

Тогда d = 3

тогда r + 1 = 3*k (k целое) ----> r = 3k-1 (r>0 -> k > 0)

подставим в a^2*(r+1)= b(r^2 - r + 1)

a^2*3*k= b*(9k^2-9k + 3) <-------> a^2 *k= b*(3k^2-3k+1)

заметим, что нод(3k^2 - 3k + 1, k)= нод(1,k)= 1

значит тк верно a^2 *k= b*(3k^2-3k+1),то b делится на k.

0< b < r = 3k -1 значит либо b = k, либо b= 2k

1)b=2k ------> a^2*k=2*k(3k^2-3k+1) <----> a^2 = 2(3k^2 - 3k +1)

при k четном 3k^2-3k+1 - нечетное

при k нечетном 3k^2-3k+1 нечетное

значит a^2 делится на 2 ,но не делится на 4. при целом a такое невозможно .противоречие

2) b = k != 0 --> a^2*k=k(3k^2-3k+1) <-> a^2 = 3k^2 - 3k + 1

3k^2 - 3k + 1 всегда нечетное -> a нечетное -> a^2 = 1 (mod4)

при k = 0(mod4) 3k^2 - 3k + 1 = 0-0+1=1(mod4) ok

k = 1(mod4) 3k^2 - 3k + 1 = 3-3+1=1(mod4) ok

k=2(mod4) 3k^2 - 3k + 1 = 3-2+1 = 2(mod4) плохо

k = 3(mod4) 3k^2 - 3k + 1 = 3- 1 + 1= 3(mod4) плохо

значит k по модулю 4 либо 0,либо 1

при этом r <=100 -> k <= (100+1)/3 -> k <= 33(тк k целое)

Выполняется равенство a^2 = 3k^2-3k+1<-> 4*a^2=12k^2-12k+4<->

(2a)^2 = 3*(2k-1)^2+1 <-> (2a-1)(2a+1) = 3*(2k-1)(2k+1)

нод (2a-1,2a+1)=нод(2a-1,2) = 1.

Значит возьмем любое p!= 3,на которое делится 2k-1, в степени t. Тогда либо 2a-1 делится в точности на p ^(2t),либо 2a+1 делится в точности на p ^(2t).

Тогда возможно 2 случая.

1)2a-1 = 3x^2   2a+1 = y^2 (x, y нечетные) заметим, что s^2 (mod3) равняется либо 0,либо 1

---> 3x^2 + 2 = y^2 ---> 0+2 = 2= y^2(mod3) -----противоречие выше сказанному

2) 2a+1 = 3x^2   2a-1 = y^2 (x, y нечетные) заметим, что s^2 (mod3) равняется либо 0,либо 1

----->3x^2-2=y^2 и (2a+1)(2a-1) = 3(2k-1)^2 -> xy = 2k-1

0< k <=33 k=0;1 (mod4) --- >

k= 1,4,5,8,9,12,13,16,17,20,21,24,25,28,29,32,33

верно что a^2=3k^2-3k+1, b = k, r = 3k-1, x = a*(r+1)

k =1 -> a = 1, b = 1 , r = 2, x = 3

k=4- > a^2 = 37 ->a не целое плохо

k = 5 ->a^2 = 61 - > a не целое плохо

k=6 -> f^2 = 91 - > a не целое плохо

k = 8 ->a = 13,b=8,r = 23,x = 13*24

k=9 -> a^2 = 217 - > a не целое плохо

k = 12 - >a^2 = 469- > a не целое плохо

k = 13 - > a не целое плохо

k = 16 - > a не целое плохо

k = 17 - > a не целое плохо

k = 20- > a не целое плохо

k = 21 - > a не целое плохо

k = 24 - > a не целое плохо

k = 25 - > a не целое плохо

k = 28 - > a не целое плохо

k = 29 - > a не целое плохо

k = 32 - > a не целое плохо

k = 33 - > a не целое плохо

определялось что a не целое ,с помощью вычисления

Ответ $r = 2$ или $r = 23$

Комментарий:

Вопрос **5**

Выполнен

Баллов: 10,00 из 20,00

У параллелепипеда $a \times b \times c$ грани разбиты на единичные клетки. Имеется также большое количество трехклеточных полосок, которые можно перегибать по границам клеток. При каких a, b и c три грани параллелепипеда, имеющие общую вершину, можно полностью обклеить полосками без наложений и зазоров так, чтобы клетки граней и полосок совпадали?

Заметим что грани прямоугольников, имеющих общую вершину , имеют размеры a*b , b*c, c*a .

Тогда чтобы можно было замостить полосками 1*3 колво клеток должно делится на 3. Значит a*b + b*c +c*a делится на 3.

Рассмотрим все возможные различные наборы по модулю 3 из 3 чисел:

000 подходит ,тк a*b + b*c +c*a делится на 3

001 подходит ,тк a*b + b*c +c*a делится на 3

002 подходит ,тк a*b + b*c +c*a делится на 3

011 не подходит ,тк a*b + b*c +c*a не делится на 3

012 не подходит ,тк a*b + b*c +c*a не делится на 3

022 не подходит ,тк a*b + b*c +c*a не делится на 3

111 подходит ,тк a*b + b*c +c*a делится на 3

112 не подходит ,тк a*b + b*c +c*a не делится на 3

122 не подходит ,тк a*b + b*c +c*a не делится на 3

222 подходит ,тк a*b + b*c +c*a делится на 3

если 000 или 001 или 002, то одно из ребер каждой из трех граней делится на 3. Тогда мы можем замостить каждую грань полосками 1*3 по отдельности. Значит если среди a, b, c есть хотя бы 2 числа,которые делятся на 3,то такой набор нам подходит.

Осталось понять подходят ли наборы a,b,c , остатки которых по модулю 3 равны,но не равны 0.

Раскрасим в шахматную раскраскув 3 цвета 2 грани правильно и третью чтобы состыковалась с 1.

Тогда одного цвета будет s, второго s+1, третьего s+2. в каждой полоски 1*3 без сгиба или же на сгибе с 1 и 2 или же 1 и 3 гранью есть каждый цвет росно 1 раз.

Комментарий:
Решение не завершено.

« ПРЕДЫДУЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 24

СЛЕДУЮЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 25 »