	ol2200476 ol2200476
Тест начат	понедельник, 14 Февраль 2022, 10:08
Состояние	Завершено
Завершен	понедельник, 14 Февраль 2022, 14:02
Прошло времени	3 час. 54 мин.
Оценка	**70,00** из 100,00

Вопрос
Инфо

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 5 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос **1**

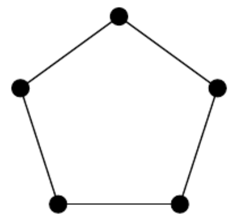
Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Костя выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа так, чтобы для всех этих чисел выполнялось свойство:

если числа a и b не соединены отрезком, то сумма $a + b$ должна быть взаимно проста с n, а если соединены, то числа $a + b$ и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1.

При каком наименьшем n существует такая расстановка?



ol2200476_1.pdf

Комментарий:

Вопрос **2**

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

При $x, y, z \in (0, 1]$ найдите минимальное значение выражения

$$A = \frac{(x+2y)\sqrt{x+y-xy} + (y+2z)\sqrt{y+z-yz} + (z+2x)\sqrt{z+x-zx}}{xy+yz+zx}.$$

ol2200476_2.pdf

Комментарий:

Вопрос 3

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

На сторонах BC и AD вписанного четырехугольника $ABCD$ отмечены точки K и M соответственно, причем $BK : KC = AM : MD$. На отрезке KM выбрана такая точка L, что $KL : LM = BC : AD$. Найдите отношение площадей треугольников ACL и BDL, если известно, что $AC = p$ и $BD = q$.

ol2200476_3.pdf

Комментарий:

Вопрос **4**

Выполнен

Баллов: 0,00 из 20,00

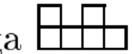
Натуральное число x в системе счисления с основанием r $(r > 3)$ имеет вид $\overline{ppqq}$, причем $q = 2p$. Оказалось, что r-ичная запись числа x^2 представляет собой семизначный палиндром с тремя одинаковыми средними цифрами. (Палиндромом называется число, которое читается одинаково слева направо и справа налево). При каких r такое возможно?

Комментарий:

Вопрос 5

Выполнен

Баллов: 10,00 из 20,00

Доска $m \times n$ $(m, n > 5)$ разрезана на фигурки из шести единичных квадратиков вида  (фигурки можно поворачивать и переворачивать). При каких m и n такое возможно?

ol2200476_5.pdf

Комментарий:
Решение не завершено, ответ неверный.

« ПРЕДЫДУЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 48

СЛЕДУЮЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ »
Вариант 37

Пронумируем круги в порядке обхода по ребрам от 1 до 5.
1) Пусть n- простое число. Тогда чтобы сумма имела нод с н больше 1, сумма должна быть кратно н.
Тогда идя по циклу остатки будут чередоваться (на нечетном месте будет остаток a, а на четном н-a) так как 1 и 5 нечетные, то сумма 1 и 5 2a, и 1 и 5 круги соединены ребром, поэтому 2a кратно н если н не два, то тогда все числа сравнимы с 0 по модулю н, тогда сумма любых двух будет иметь нод=н, хотя есть круги не соединенные ребром
2) пусть н – кратно 2, тогда пусть в первом круге число четности 1, тогда в 3 и 4 круге будут числа четности 2 (иначе сумма чисел несоединенных ребром одной четности кратна 2 и н кратно 2, поэтому нод хотя бы 2),
аналогично если 3 четности 2, то в кругах 1 и5 числа четности 1, и если 4 честности 2, то числа в 1 и 2 четности 1, тогда получается что число во втором и пятом круге одной четности, поэтому у их суммы и н нод хотя бы 2, но эти круги не соединены – противоречие, следовательно н не кратно 2.
Мы получили, что н не кратно 2 и оно равно произведению хотя бы двух простых.
если н равно квадрату простого н=p^2, то если нод больше 1, то кратен p, аналогично первому рассуждению обходя по циклу остатки по модулю p должны чередоваться, но в первом и пятом круге тогда будут числа с одинаковыми остатками, поэтому 2a кратно p так как они соединены, и единственное тогда это 0, но тогда все числа кратны p – противоречие
следовательно н – произведение хотя бы двух различных простых не равных 2 => n>=15=3*5
пример:
1-2-3-15-5 числа соответственно расставлены по кругу в порядке обхода на данном рисунке
1+2=3 (нод=3) 2+3=5 (нод=5) 3+15=18 (нод 3) 15+5=20 (нод 5) 5+1=6 (нод 3)
1+3=4, 1+15=16,2+15=17, 2+5=7, 3+5=8, 3+1=4 – каждое из этих чисел взаимнопросто с 15
Ответ: н минимум 15

№2

рассмотрим слагаемое $(x+2y)\sqrt{x+y\text{-}xy}$, по неравенству о среднем между геометрическим и арифметическим $x+y \geq 2\sqrt{xy}$ и $x^2+y^2 \geq 2xy$ и $x^2<x$ при x от 0 до 1,

тогда $\frac{(x+2y)\sqrt{x+y\text{-}xy}+(y+2z)\sqrt{z+y\text{-}zy}+(z+2x)\sqrt{x+z\text{-}xz}}{xy+yz+zx} \geq \frac{(2\sqrt{xy}+y)\sqrt{2\sqrt{xy}\text{-}xy}+(2\sqrt{zy}+z)\sqrt{2\sqrt{zy}+zy}+(2\sqrt{xz}+x)\sqrt{2\sqrt{xz}\text{-}xz}}{xy+yz+zx} \geq$

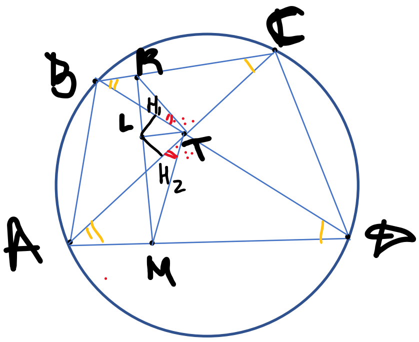
$\frac{2xy\sqrt{\frac{2}{\sqrt{xy}}\text{-}1}+2zy\sqrt{\frac{2}{\sqrt{zy}}\text{-}1}+2xz\sqrt{\frac{2}{\sqrt{xz}}\text{-}1}}{xy+yz+zx}+\frac{y^2\sqrt{\frac{2}{\sqrt{xy}}\text{-}1}+z^2\sqrt{\frac{2}{\sqrt{zy}}\text{-}1}+x^2\sqrt{\frac{2}{\sqrt{xz}}\text{-}1}}{x^2+y^2+z^2}$ заметим $\frac{2}{\sqrt{xz}}\text{-}1 \geq 1$ при z, x от 0 до 1

тогда $\frac{2xy\sqrt{\frac{2}{\sqrt{xy}}\text{-}1}+2zy\sqrt{\frac{2}{\sqrt{zy}}\text{-}1}+2xz\sqrt{\frac{2}{\sqrt{xz}}\text{-}1}}{xy+yz+zx}+\frac{y^2\sqrt{\frac{2}{\sqrt{xy}}\text{-}1}+z^2\sqrt{\frac{2}{\sqrt{zy}}\text{-}1}+x^2\sqrt{\frac{2}{\sqrt{xz}}\text{-}1}}{x^2+y^2+z^2} \geq \frac{2(xy+yz+zx)}{xy+yz+zx}+\frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}$=3 -минимальное значение A

при x=y=z=1 минимальное значение достигается (3*3/3=3)

Ответ: A=3

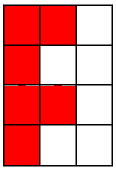
№3



По условию вк/кс=ам/тд (вк+кс=вс, ам+мд=ад),
кл/лм=вс/ад, получаем вк/кс=ам/тд=вс/ад
пусть т- пересечение диагоналей, тогда тс/тд=вс/ад
(вст и атд подобны), следовательно тс/тд=ск/мд и
углы кст=мтд (вписан.) , следовательно треугольники
тмд и ткс подобны , следовательно углы мтд=ктс
и втк=атм и тм/тк=ад/вс
по условию кл/лм=вс/ад , следовательно тл-
биссектриса треугольника кмт (углы ктв=атм) ,
следовательно лт биссектриса атв , следовательно л
равноудалена от вд и ас (лн1=лн2)
площади треугольников алс и влд равны
(ас*лн2)/2=p*лн2 /2 и (вд*лн1)/2=q*лн1/2
соответственно
 следовательно их отношение равно p/q

Ответ: p/q

№5 заметим, что если m=3k n=4p, где k,p какие то натуральные числа, то доску можно разбить на данные фигуры. Заметим что мы умеем делить прямоугольник 3 на 4 на две такие фигуры (показано на рисунке ниже), поэтому если прямоугольник 3k на 4p очевидно что его можно разрезать сначала на прямоугольники 3*4 полностью, затем внутри мы тоже умеем разбивать



Заметим что m*n кратно 12. Если доску раскрасить шахматной раскраской, то в одной фигуре всегда будет 2 клетки одного цвета и четыре другого => всего клеток каждого цвета при такой раскраске будет четное количество, а при шахматной раскраске может быть два варианта либо одного цвета м, другого м+1, тогда они разной четности не подходит либо первого и второго цвета по м, поэтому если каждого цвета четное количество, то одного цвета 2к, тогда всего клеток 4к. также так как в самой фигуре 6 клеток, поэтому общее количество должно делиться еще и на 3 => n*m кратно 12.
Допустим, что доска может быть такой, что n,m кратны 2, но не кратны 4. Тогда разделим доску сначала на квадраты 2на2 и покрасим их в шахматную раскраску. Тогда в каждую фигуру будет входить 3 одного цвета 3 клетки другого => если такая доска разбилась на данные фигуры, то количество клеток одного и другого цвета одинаковое, но так как n,m не кратны 4 то квадратов 2 на 2 одного цвета строго больше другого (так как в новой доске стороны нечетной длины, площадь нечетна) => одна сторона точно должна делится на 4.
Осталось доказать, что нельзя разбить доску со сторонами 12к и м, где м не кратно 3 и 4

Ответ: 3к, 4м.