	ol2243624 ol2243624
Тест начат	понедельник, 14 Февраль 2022, 10:15
Состояние	Завершено
Завершен	понедельник, 14 Февраль 2022, 13:07
Прошло времени	2 час. 52 мин.
Баллы	115/120
Оценка	**96** из 100

Вопрос
Инфо

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 6 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос **1**

Выполнен

Баллов: 20 из 20

Петя и Вася одновременно выехали на самокатах навстречу друг другу. Ровно посредине между ними расположен мост. Дорога от Пети до моста асфальтированная, а от Васи до моста — грунтовая. Известно, что по грунтовой дороге они едут с одинаковыми скоростями, а по асфальту Петя движется в 3 раза быстрее, чем по грунтовке. Петя за час добрался до моста и, не останавливаясь, продолжил движение. Через какое время после выезда он встретит Васю?

Пусть расстояние до моста от Пети и Васи это S, скорость по грунтовой дороге V, а скорость Пети по асфальту 3V. Тогда S/3V=1, так как это время Пети, чтобы доехать до моста со скоростью 3V. Вася за это время проехал расстояние V*1=S/3. Тогда сейчас между ними расстояние 2S/3. Тогда время до встречи равно (2S/3)/2V (так как скорость сближения равна 2V) = S/3V=1 час, 1 час + 1 час = 2 часа
Ответ: 2 часа.

Комментарий:

Вопрос 2

Выполнен

Баллов: 20 из 20

Дан квадратный трехчлен $2x^2 - x - 36$. Найдите все целые x, при которых значения этого трехчлена равны квадрату простого числа.

2x^2-x-36=p^2, p-простое

2x^2-x-(36+p^2)=0

D=1+4*2*(36+p^2)=8p^2+289=z^2, z-натуральное, так как x целый

8p^2=z^2-289=(z-17)(z+17), разность 2 скобок равна 34

1) p=2

8*2^2=32 => мы не сможем разложить на 2 скобки с разностью 34

2) p не 2 => p-нечетное

Скобки z+17 и z-17 одной четности

Тогда эти скобки это либо 2 и 4p^2, либо 4 и 2p^2, либо 2p и 4p, так как мы не можем брать p и 8p, p^2 и 8, 1 и 8p^2, так как p нечетное

1) 4p^2-2=34 => 4p^2=36 => p=3

8*9+289=361=>z=19

x=(1+-19)/4 => x1=5, x2=-4.5 => x=5

2) 2p^2-4=34 => p=sqrt(19), sqrt-квадратный корень

3) 4p-2p=34 => p=17

8*289+289=289*9=(17*3)^2 => z=51

x=(1+-51)/4 => x1=13, x2=-12.5 => x=13

Ответ: x=5, x=13.

Комментарий:

Вопрос **3**

Выполнен

Баллов: 20 из 20

Положительные числа a, b и c удовлетворяют условию $abc(a+b+c) = ab+bc+ca$.
Докажите неравенство $5(a+b+c) \geqslant 7+8abc$.

При делении первого равенства на abc получим a+b+c=1/a+1/b+1/c

По неравенству КБШ (a+b+c)(1/a+1/b+1/c)>=(1+1+1)^2=9 => a+b+c=1/a+1/b+1/c>=3

Тогда достаточно доказать, что 5(a+b+c)>=7/3*(a+b+c)+8abc>=7+8abc, так как a+b+c>=3

Докажем это:

5(a+b+c)>=7/3*(a+b+c)+8abc

15(a+b+c)>=7(a+b+c)+24abc

8(a+b+c)>=24abc

(a+b+c)>=3abc

(a+b+c)^2>=3abc(a+b+c)=3(ab+bc+ca)

a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca>=3ab+3bc+3ca

a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca>=0

2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca>=0

a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2>=0

(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2>=0 - верно

Тогда 5(a+b+c)>=7/3*(a+b+c)+8abc>=7+8abc

ч. т. д.

Комментарий:

Вопрос **4**

Выполнен

Баллов: 20 из 20

У Маши есть 1000 бусинок 50 различных цветов, по 20 бусинок каждого цвета. При каком наименьшем n для любого способа собрать из всех бусинок ожерелье можно выбрать n последовательных бусинок, среди которых есть бусинки 25 разных цветов?

Докажем, что мы всегда сможем найти 462 последовательные бусинки 25 разных цветов. Возьмем 500 последовательных бусинок. Среди них точно хотя бы 25 цветов, так как каждого цвета по 20.

Пока цветов больше 25, будем убирать 1 бусинку с любого конца нашей части ожерелья. Тогда количество цветов не станет меньше 25.

Пока цвет какого-то из концов части ожерелья встречается в ней хотя бы 2 раза, будем убирать 1 бусинку с этого конца части ожерелья. Тогда количество цветов не изменится.

Тогда в конце алгоритма получим с концов части ожерелья цвета, встречающиеся в ней ровно 1 раз. При этом всего цветов ровно 25. Тогда среди бусинок, не считая 2 крайних, ровно 23 цвета, значит их не больше, чем 20*23=460. Тогда всего бусинок не больше 460+2=462.

Рассмотрим следующее ожерелье: сначала идут 20 бусинок 1 цвета, затем 20 бусинок 2 цвета, затем 20 бусинок 3 цвета и т.д. Тогда, чтобы взять 25 цветов, мы должны взять последнюю бусинку из 20 какого-то цвета, затем 23 цвета по 20 штук, и первую бусинку 25-го цвета. Тогда всего мы возьмем хотя бы 23*20+2=462.

Мы доказали, что всегда можем взять 462 последовательные бусинки такие, что среди них есть бусинки 25 разных цветов, но при этом мы не всегда можем взять меньше 462 бусинок. Тогда наименьшее n равно 462.

Ответ:462.

Комментарий:

Вопрос **5**

Выполнен

Баллов: 20 из 20

Точки A_1 и B_1 — середины сторон BC и AC остроугольного треугольника ABC, точка M — середина отрезка A_1B_1. Точка H — основание высоты, опущенной из вершины C на сторону AB. Через точку M проведены окружности, касающиеся сторон BC и AC соответственно в точках A_1 и B_1. Обозначим вторую точку пересечения окружностей через N. Докажите, что точки H, M и N лежат на одной прямой.

Сделаем инверсию относительно окружности с диаметром A1B1 (центр инверсии-т. M). Тогда точки A1 и B1 останутся на месте, а окружности перейдут в прямые, так как проходят через центр инверсии. Пусть окружность, касающаяся AC это w1, а BC - w2. Тогда w1 перейдет в прямую, проходящую через B1 и параллельную касательной в точке M к этой окружности, так как M - центр инверсии. Пусть углы треугольника A, B, C равны a, b, c соответственно. Тогда угол MB1C=a, так как A1B1 - средняя линия. Тогда дуга B1M=2a, так как AC - касательная и образует с ней угол, равный a. Тогда касательная в точке M к этой окружности будет образовывать угол a с BM против часовой стрелки от M. Тогда прямая параллельная ей в точке B1 будет образовывать тоже угол a с BM, но по часовой стрелке от B1. CH перпендикулярен A1B1 и CH делится пополам отрезком A1B1. Тогда угол HB1M=угол CB1M=a, так как треугольник HB1C равнобедренный. Тогда прямая B1H образует угол a с B1M по часовой стрелке от B1. Тогда B1H - искомая прямая - образ w1 при инверсии. Аналогично прямая A1H - образ w2 при инверсии. Тогда точка H (пересечение этих 2 прямых) до этого была точкой пересечения окружностей w1 и w2, то есть точкой N. Тогда точки H, M и N лежат на одной прямой, так как при инверсии точки остаются на прямых, соединяющих их с центром инверсии.
ч. т. д.

Комментарий:

Вопрос **6**

Выполнен

Баллов: 15 из 20

У натурального числа n нет ни одного делителя d, удовлетворяющего неравенству $n^2 \leq d^4 \leq n^3$. Докажите, что n имеет простой делитель, четвертая степень которого больше, чем n^3.

n не 1, так как тогда делитель 1 удовлетворяет первому неравенству

Пусть n=p1^a1*p2^a2*...*pk^ak, p1<p2<p3<......<pk

Будем делить n на максимальный его простой множитель на текущий момент, то есть каждый раз будем делить на число не больше предыдущего.

Рассмотрим первый момент, когда наше число k стало таким, что k^4<n^3 (этот момент когда-то настанет, так как в конце мы получим 1).

1) мы первым же действием получили такое k

Тогда (n/p)^4<n^3. Тогда (n/p)^4<n^2, иначе делитель n/p удовлетворяет первому неравенству

n^4/p^4<n^2 => p^4>n^2 => p^4>n^3, иначе делитель p удовлетворяет первому неравенству

Тогда n имеет простой делитель, четвертая степень которого больше, чем n^3

2) это произошло не первым действием

Тогда было число n/x, а стало n/xp, при этом (n/x)^4 >= n^3, а (n/xp)^4 < n^3 => (n/xp)^4 < n^2, иначе

делитель n/xp удовлетворяет первому неравенству

Заметим, что x>=p, так как мы каждым ходом делим на число, не большее предыдущего

n^4/x^4 >= n^3 => x^4 <= n

n^4/(xp)^4 < n^2 => x^4*p^4>n^2 => x^2*p^2>n>=x^4 => p^2>x^2 => p>x - противоречие

Тогда этот случай невозможен, а в 1 случае мы нашли p такое, что p^4>n^3

ч. т. д.

Комментарий:
Путаница в обозначениях - что такое число k, как оно связано с p.