	ol2253517 ol2253517
Тест начат	понедельник, 14 Февраль 2022, 10:07
Состояние	Завершено
Завершен	понедельник, 14 Февраль 2022, 14:04
Прошло времени	3 час. 57 мин.
Оценка	**60,00** из 100,00

Вопрос
Инфо

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 5 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос 1

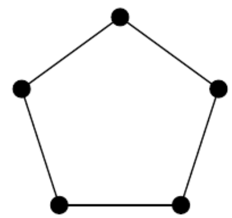
Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Таня выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа так, чтобы для всех этих чисел выполнялось свойство:

если числа a и b не соединены отрезком, то сумма a^2+b^2 должна быть взаимно проста с n, а если соединены, то числа a^2+b^2 и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1.

При каком наименьшем n существует такая расстановка?



ol2253517_1.pdf

Комментарий:

Вопрос **2**

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

При $x, y, z \geqslant 1$ найдите минимальное значение выражения

$$A = \frac{\sqrt{3x^4 + y} + \sqrt{3y^4 + z} + \sqrt{3z^4 + x} - 3}{xy + yz + zx}.$$

ol2253517_2.pdf

Комментарий:

Вопрос 3

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

Дан вписанный четырехугольник $ABCD$ с перпендикулярными диагоналями. На описанной вокруг него окружности отмечена точка E, диаметрально противоположная D, причем отрезки AB и DE не пересекаются. Найдите отношение площадей треугольника BCD и четырехугольника $ABED$.

ol2253517_3.pdf

Комментарий:

Вопрос **4**

Нет ответа

Балл: 20,00

На доске написано число $x = 9999$ в системе счисления с четным основанием r. Вася выяснил, что r-ичная запись x^2 представляет собой восьмизначный палиндром, у которого сумма второй и третьей цифр равна 24. (Палиндромом называется число, которое читается одинаково слева направо и справа налево). При каких r такое возможно?

Вопрос **5**

Нет ответа

Балл: 20,00

Дана квадратная таблица 2021×2021. Каждая ее клетка окрашена в один из n цветов. Известно, что для любых четырех клеток одного цвета, расположенных в одном столбце, справа от верхней из них и слева от нижней из них нет клеток того же цвета. При каком наименьшем n такое возможно?

1.

Ответ. При $n = 65$.

Оценка.

Докажем, что $n \leq 64$ нам не подходят. Тогда отсюда будет следовать, что минимальное подходящее n не меньше 65. От противного. Пусть подошло некоторое $n = m$, где $m \leq 64$. И пусть в кружочках записаны числа a, b, c, d, e (именно в таком порядке по часовой стрелке, a – верхнее число).

Для начала докажем, что m – нечётное число. От противного. Пусть m чётное. Тогда $a^2 + c^2$ и $a^2 + d^2$ – нечётные числа, т.к. они взаимно просты с m. Значит, их разность $c^2 - d^2$ – чётное число. $b^2 + e^2$ и $b^2 + d^2$ – нечётные числа, т.к. они взаимно просты с m. Значит, их разность $e^2 - d^2$ – чётное число. Т.к. числа $c^2 - d^2$ и $e^2 - d^2$ – чётные, то и их сумма $e^2 + c^2 - 2d^2$ – чётное число, т.е. $e^2 + c^2$ – чётное число. Но тогда $e^2 + c^2$ не взаимно просто с m, противоречие. Значит, m – нечётное число.

Теперь докажем, что в разложении m на простые множители не более 2 различных простых множителей. От противного. Пусть их хотя бы 3. В этом разложении нет двойки, т.к. m – нечётное число. Значит, эти три различных простых числа – это минимум 3, 5 и 7. Тогда $m \geq 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105 > 64$, противоречие. Значит, в разложении m на простые множители не более 2 различных простых множителей.

Теперь докажем, что m не может быть степенью простого числа. От противного, пусть $m = p^x$, где x – натуральное число, p – простое. Т.к. m – нечётное, то и p – нечётное. Тогда, т.к. числа $a^2 + b^2$, $b^2 + c^2$, $c^2 + d^2$, $d^2 + e^2$, $e^2 + a^2$имеют с m общий делитель, больший 1, а у m все делители, большие 1, - это степени p, то все числа $a^2 + b^2$, $b^2 + c^2$, $c^2 + d^2$, $d^2 + e^2$, $e^2 + a^2$ делятся на p. Тогда их сумма, т.е. $2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2)$ делится на p. А т.к. p – нечётное, то $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2)$ делится на p. Одновременно $(a^2 + b^2) + (c^2 + d^2)$ делится на p. Значит, на p делится e^2. Аналогично, на p

делится c^2. Значит, на p делится $c^2 + e^2$. Т.е. $c^2 + e^2$ не взаимно просто с m. Противоречие, значит, m – не степень простого числа.

Итак, в разложении m на простые множители не может быть одного различного простого, и не может быть больше 2 различных простых множителей. Значит, в разложении m на простые множители ровно 2 простых множителя. Пусть это u и v.

Докажем, что в разложении m на простые множители нет 3, 7 и 11. От противного, пусть, скажем, u равно 3, 7 или 11. Квадраты при делении на 3 дают остатки 0 или 1, причём 0 если и только если само число, возводимое в квадрат делится на 3, при делении на 7 остатки 0, 1, 4 или 2, причём 0 если и только если само число, возводимое в квадрат делится на 7, при делении на 11 остатки 0, 1, 4, 9, 5, 3, причём 0 если и только если само число делится на 11. Отсюда вытекает, что сумма квадратов делится на 3 если и только если оба числа делятся на 3, сумма квадратов делится на 7 если и только если оба числа делятся на 7, сумма квадратов делится на 11 если и только если оба числа делятся на 11. Т.е. сумма квадратов делится на u если и только если оба числа делятся на u. Если среди чисел a, b, c, d, e есть хотя бы 3, делящихся на u, то хотя бы 2 из них не соседние, при этом сумма их квадратов делится на u, т.е. не взаимно проста с m. А это невозможно. Значит, чисел, делящихся на u, у нас не больше 2. Пусть, без ограничения общности, это a и b. Тогда b^2+c^2, c^2+d^2, d^2+e^2, e^2+a^2 с u взаимно просты, при этом не взаимно просты с m. Значит, все делятся на v. Значит, b^2, d^2 и a^2 сравнимы по модулю v, тогда e^2+b^2 делится на v, т.е. не взаимно просто с m. Противоречие. Значит, в разложении m нет 3, 7, 11.

Итак, в разложении m 2 простых числа, причём это не 2, 3, 7 или 11. Значит, эти 2 простых числа минимум 5 и 13. Значит, m>=5*13=65. Противоречие. Значит, n<=64 нам действительно не подходят, ч.т.д.

Пример.

При $n = 65 = 5 * 13$ подходят числа 1, 13, 65, 55, 2, выставленные по часовой стрелке именно в таком порядке.

2.

Ответ. 1.

Решение.

Для начала докажем, что при $x, y, z \geq 1$, $A \geq 1$.

Для начала заметим, что т.к. квадрат любого действительного числа неотрицателен, то:

$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 0 + 0 + 0 = 0,$$

$$x^2 + y^2 - 2xy + y^2 + z^2 - 2yz + z^2 + x^2 - 2zx \geq 0,$$

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2xy + 2yz + 2zx,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx \text{ (!)}.$$

Имеем:

$$x \geq 1 \text{ (1)}.$$

Возведём обе части неравенства (1) в квадрат, имеем право, т.к. они неотрицательны, получим:

$$x^2 \geq 1 \text{ (2)}.$$

Обе части неравенства (2) умножим на число $x^2 > 0$, получим:

$$x^4 \geq x^2,$$

$$2x^4 \geq 2x^2,$$

$$3x^4 + 1 \geq x^4 + 2x^2 + 1,$$

$$3x^4 + 1 \geq (x^2+1)^2 \text{ (3)}.$$

Т.к. $y \geq 1$, то из неравенства (3) получаем:

$$3x^4 + y \geq 3x^4 + 1 \geq (x^2+1)^2,$$

$$3x^4 + y \geq (x^2+1)^2 \text{ (4)}.$$

Из обеих частей неравенства (4) извлечём квадратный корень, имеем право, т.к. они неотрицательны:

$$\sqrt{3x^4 + y} \geq \sqrt{(x^2+1)^2} \text{ (5)}.$$

Т.к. $x^2+1 \geq 1+1>0$, то $\sqrt{(x^2+1)^2}=x^2+1$. Значит, из неравенства (5) получаем:

$$\sqrt{3x^4+y} \geq x^2+1 \text{ (6).}$$

Аналогично получаются неравенства:

$$\sqrt{3y^4+z} \geq y^2+1 \text{ (7)}$$

И

$$\sqrt{3z^4+x} \geq z^2+1 \text{ (8).}$$

Сложив неравенства (6), (7) и (8), получим:

$$\sqrt{3x^4+y}+\sqrt{3y^4+z}+\sqrt{3z^4+x} \geq x^2+1+y^2+1+z^2+1,$$

$$\sqrt{3x^4+y}+\sqrt{3y^4+z}+\sqrt{3z^4+x}-3 \geq x^2+y^2+z^2,$$

Применив неравенство (!), получим:

$$\sqrt{3x^4+y}+\sqrt{3y^4+z}+\sqrt{3z^4+x}-3 \geq x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx,$$

$$\sqrt{3x^4+y}+\sqrt{3y^4+z}+\sqrt{3z^4+x}-3 \geq xy+yz+zx \text{ (9).}$$

Поделим обе части неравенства (9) на число $xy+yz+zx>0$, получим:

$$\frac{\sqrt{3x^4+y}+\sqrt{3y^4+z}+\sqrt{3z^4+x}-3}{xy+yz+zx} \geq \frac{xy+yz+zx}{xy+yz+zx},$$

$$A \geq 1,$$

Ч.т.д.

Теперь заметим, что при $x=y=z=1$, имеем:

$$A=\frac{\sqrt{3x^4+y}+\sqrt{3y^4+z}+\sqrt{3z^4+x}-3}{xy+yz+zx}=\frac{\sqrt{3\cdot1^4+1}+\sqrt{3\cdot1^4+1}+\sqrt{3\cdot1^4+1}-3}{1\cdot1+1\cdot1+1\cdot1}=\frac{\sqrt{3+1}+\sqrt{3+1}+\sqrt{3+1}-3}{1+1+1}=\frac{\sqrt{4}+\sqrt{4}+\sqrt{4}-3}{3}=\frac{2+2+2-3}{3}=\frac{3}{3}=1.$$

Т.к. при любых $x,y,z \geq 1$, $A \geq 1$, а при $x=y=z=1$, $A=1$, то минимальное значение A при $x,y,z \geq 1$ равно 1, ч.т.д.

3.

Ответ. $1:1$.

Решение.

Пусть S – точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$, а w – его описанная окружность.

Т.к. DE – диаметр w, то вписанный угол DBE, опирающийся на этот диаметр, – прямой, т.е. $BD \perp BE$. А т.к. по условию $BD \perp AC$, то $AC \| BE$. Значит, $ABEC$ – трапеция или параллелограмм. Но т.к. $ABEC$ – вписанный в окружность w четырёхугольник, то $ABEC$ – равнобочная трапеция, а BS – её высота, т.к. $BS \perp AC$. Пусть ET – высота трапеции $ABEC$. Т.к. точка S лежит на отрезке AC и $ABEC$ – равнобочная трапеция, то точка T тоже лежит на отрезке AC, причём $CT = AS$. Т.к. $BS \perp ST$, $ST \perp TE$, $TE \perp EB$, $EB \perp BS$, то $SBET$ – прямоугольник, значит, $BE = ST$.

Имеем:

$$AS = CT \text{ (1)},$$

$$BE = ST \text{ (2)}.$$

Сложим (1) и (2), получим:

$$AS + BE = CT + ST,$$

$$AS + BE = CS,$$

$$\frac{1}{2}AS \cdot BD + \frac{1}{2}BE \cdot BD = \frac{1}{2}CS \cdot BD,$$

$$S_{\Delta BAD} + S_{\Delta BED} = S_{\Delta BCD},$$

$$S_{ABED} = S_{\Delta BCD},$$

$$\frac{S_{\Delta BCD}}{S_{ABED}} = \frac{1}{1}.$$