	ol2231699 ol2231699
Тест начат	воскресенье, 27 Февраль 2022, 10:07
Состояние	Завершено
Завершен	воскресенье, 27 Февраль 2022, 14:04
Прошло времени	3 час. 57 мин.
Оценка	**100** из 100

Вопрос **Инфо**

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 5 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

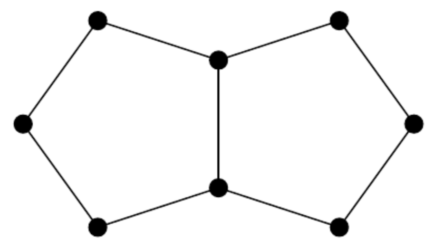
Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос **1**

Выполнен

Баллов: 20 из 20

На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Саша выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа так, чтобы для всех этих чисел выполнялось свойство:
если числа a и b не соединены отрезком, то сумма $a+b$ должна быть взаимно проста с n, а если соединены, то числа $a+b$ и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1.
При каком наименьшем n существует такая расстановка?



ol2231699_1.pdf

Комментарий:

Вопрос **2**

Выполнен

Баллов: 20 из 20

При $x, y, z \geqslant 3$ найдите минимальное значение выражения

$$A = \frac{(x^3 - 24)\sqrt[3]{x+24} + (y^3 - 24)\sqrt[3]{y+24} + (z^3 - 24)\sqrt[3]{z+24}}{xy + yz + zx}.$$

ol2231699_2.pdf

Комментарий:

Вопрос 3

Выполнен

Баллов: 20 из 20

На сторонах AB и AC остроугольного треугольника ABC отмечены соответственно такие точки K и L, что четырехугольник $BKLC$ является вписанным. Внутри этого четырехугольника выбрана точка M так, что прямая AM является биссектрисой угла BMC. Луч BM вторично пересекает описанную окружность треугольника AMC в точке P, а луч CM вторично пересекает описанную окружность треугольника AMB в точке Q. Найдите отношение площадей треугольников ALP и AKQ.

ol2231699_3.pdf

Комментарий:

Вопрос **4**

Выполнен

Баллов: 20 из 20

Натуральное число x в системе счисления с основанием r $(r \leqslant 400)$ имеет вид $\overline{ppqq}$, причем $7q = 17p$. Оказалось, что r-ичная запись числа x^2 представляет собой семизначный палиндром с нулевой средней цифрой. (Палиндромом называется число, которое читается одинаково слева направо и справа налево). Найдите сумму r-ичных цифр числа x^2.

[ol2231699_4.pdf](ol2231699_4.pdf)

Комментарий:

Вопрос **5**

Выполнен

Баллов: 20 из 20

При каких n клетчатую доску $n \times n$ можно разбить по клеточкам на один квадрат 3×3 и некоторое количество полосок из семи клеток так, что квадрат будет примыкать к стороне доски?

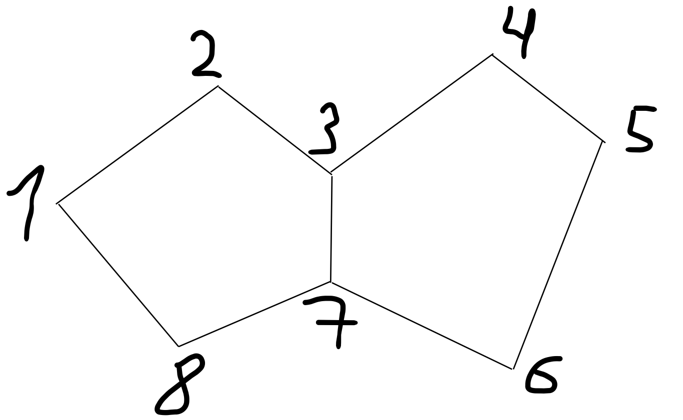
ol2231699_5.pdf

Комментарий:

ПРЕДЫДУЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
РЕЗЕРВ! Заключительный этап - Математика 10-11 21/22 (скрытый)

СЛЕДУЮЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 16

Пронумеруем точки следующим образом:



Ответ: 35. Пример: (2, 26, 14, 31, 25, 20, 1, 13) для точек 1,2,…,8 соответственно.

Решение:

Если n четно: пусть 1-е число нечетно. Тогда 3-е четно, поскольку они не соединены с 1-м, а значит их сумма должна быть нечетна, иначе она будет не взаимно проста с n. Аналогично 7-е четно, тогда 2-е, 4-е, и 5-е нечетны, поскольку не соединены с 7-м, а значит их сумма должна быть нечетной. Но тогда сумма 2-го и 4-го четна, а значит не взаимно проста с n, аа эти числа не соединены – противоречие. Если же 1-е четно, аналогично 7-е нечетно, значит 2-е и 4-е четны, а значит четна и их сумма – противоречие. Значит при четном n такое невозможно.

Предположим, n – простое число p или степень простого числа p. Пусть остаток 1-го числа от деления на p равен x. Тогда чтобы сумма 1-го и 2-го, а также первого и 8-го имела общие делители с n, их остатки от деления на p могут быть только p-x, иначе сумма не делится на p, а значит взаимнопроста и с любой степенью p. Но тогда остатки от деления на p у 3-го и 7-го чисел должны быть равны p-(p-x)=x, поскольку они соединены со 2-м и 8-м соответственно. Тогда остаток от деления суммы 2-го и 7-го чисел равен p-x+x=p, то есть их сумма кратна p, а значит не взаимно проста с n, тогда как они не соединены – противоречие.

Предположим, n=3p, где p – простое. Рассмотрим остатки 1-го и 5-го числа от деления на 3:

Предположим, остаток 1-го от деления на 3 равен 1. Тогда остатки 3-го, 4-го, 5-го, 6-го и 7-го от деления на 3 могут быть либо 0 либо 1, поскольку они не соединены. Но в таком случае как минимум 3 из 5 пар должны делиться на p, а это невозможно, из рассмотренного в предыдущем пункте для простого p. Аналогично если остаток 1-го равен 0 или 2, сотается 2 допустимых остатка для чисел в правом пятиугольнике и приходим к тому же противоречию. Значит такого быть не может. Минимальное нечетное число, не представимое в одном из этих видов – 35, пример приведен выше.

Так как x,y,z≥3 => $\sqrt[3]{x+24} \geq 3$, $\sqrt[3]{y+24} \geq 3$, $\sqrt[3]{z+24} \geq 3$, и xy+yz+zx>0, поэтому A≥ $\frac{3(x^3-24+y^3-24+z^3-24)}{xy+yz+zx} = \frac{3(x^3+y^3+z^3-72)}{xy+yz+zx}$

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z) * (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) =$$
$$= (x+y+z) * \frac{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2}{2}$$

$\frac{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2}{2} \geq 0$ значит $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \geq 0$ $(\text{т. к.}\, x+y+z > 0)$

Значит $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$ => A≥ $\frac{3(3xyz-72)}{xy+yz+zx} = \frac{8xyz-216+xyz}{xy+yz+zx}$

8xyz-216=8(xyz-27) ≥8*(3*3*3-27)=0 => A≥ $\frac{xyz}{xy+yz+zx} = \frac{\frac{xyz}{3}+\frac{xyz}{3}+\frac{xyz}{3}}{xy+yz+zx} \geq \frac{xy+yz+zx}{xy+yz+zx} = 1, \text{т. к.}\, x, y, z \geq 3$

Равенство достигается при x=y=z=3

Ответ: 1.

По теореме о двух секущих AK*AB=AL*AC => AK:AL=AC:AB. <QAB=<QMB как опирающиеся на одну дугу QB, <QMB=<PMC как вертикальные, <PAC=<PMC как опирающиеся на одну дугу PC. Значит <QAB=<PAC и площади треугольников ALP и AKQ относятся как произведения сторон, прилежащих к равным углам, то есть как $\frac{AL*AP}{AK*AQ}$. <QBA=<QMA как опирающиеся на одну дугу QA. <QMA=<PMA так как AM – биссектриса угла BMC (а значит и вертикального ему <QMP). <PMA=<PCA как опирающиеся на одну дугу PA. Значит <QBA=<PCA. Тогда треугольники QAB и PAC подобны по двум углам, а значит PA:QA=AC:AB. Тогда с учётом AK:AL=AC:AB имеем: PA:QA=AK:AL => $\frac{AL*AP}{AK*AQ} = 1$, то есть отношение площадей равно 1.

Ответ: 1.

$x = p * r^3 + p * r^2 + q * r + q$; 7q=17p, 7 взаимно просто с 17, значит q кратно 17, т.е. q=17S=>p=7S
S – натуральное, поскольку p и q – натуральные. x=7S$(r^3 + r^2) + 17S(r + 1) = S(7r^2 + 17)(r + 1)$

x^2 – семизначный палиндром с нулем посередине, то есть имеет вид mnk0knm

x^2=$m(r^6 + 1) + n(r^5 + r) + k(r^4 + r^2) = (S(7r^2 + 17)(r + 1))^2$, тол есть делится на $(r+1)^2$

Значит $m(r^6 + 1) + n(r^5 + r) + k(r^4 + r^2)$ делится на $(r+1)^2$

$r^2 \equiv -2r - 1$ (mod $(r+1)^2$)

$r^3 \equiv r(-2r - 1) = -2r^2 - r \equiv 4r + 2 - r = 3r + 2$ (mod $(r+1)^2$)

$r^4 \equiv r(3r + 2) = 3r^2 + 2r \equiv -6r - 3 + 2r = -4r - 3$ (mod $(r+1)^2$)

$r^5 \equiv r(-4r - 3) = -4r^2 - 3r \equiv 8r + 4 - 3r = 5r + 4$ (mod $(r+1)^2$)

$r^6 \equiv r(5r + 4) = 5r^2 + 4r \equiv -10r - 5 + 4r = -6r - 5$ (mod $(r+1)^2$)

$m(r^6 + 1) + n(r^5 + r) + k(r^4 + r^2) \equiv m(-6r - 5 + 1) + n(5r + 4 + r) + k(-4r - 3 - 2r - 1) = (6r + 4)(n - m - k) = (3r + 2) * 2(n - m - k) \equiv 0$ (mod $(r+1)^2$)

3r+2=3(r+1)-1 – взаимно просто с r+1, а значит и с $(r+1)^2$, то есть 2(n-m-k) делится на $(r+1)^2$

r>q=17S≥ 17, то есть r≥ 18. Если 2(n-m-k)$\neq 0$, то $|2(n - m - k)| \geq (r + 1)^2 \geq 19(r + 1) > 19r$

С другой стороны $|2(n - m - k)| \leq 2n + 2m + 2k < 2r + 2r + 2r = 6r$, поскольку n,m,k – цифры. Противоречие, а значит 2(n-m-k)=0, то есть n-m-k=0 => n=k+m

x^2=$m(r^6 + 1) + (k + m)(r^5 + r) + k(r^4 + r^2) = m(r^6 + r^5 + r + 1) + k(r^5 + r^4 + r^2 + r) = (r + 1)\left(m(r^5 + 1) + k(r^4 + r)\right) = (r + 1)^2\left(m(r^4 - r^3 + r^2 - r + 1) + k(r^3 - r^2 + r)\right) = (S(7r^2 + 17)(r + 1))^2$

Значит $m(r^4 - r^3 + r^2 - r + 1) + k(r^3 - r^2 + r) = S^2(7r^2 + 17)^2$

$m + m(r^2 + 1)(r^2 - r) + k + k(r^2 + 1)(r - 1) = S^2(7(r^2 + 1) + 10)^2$

$m + k \equiv S^2 * 100\ (mod\ (r^2 + 1))$; S=q/17<r/17 => $0 \leq 100S^2 < \frac{100r^2}{289} < r^2 < r^2 + 1$

$0 \leq m + k < 2r < r^2 + 1$ (т. к. $r \geq 18$), значит $0 \leq m + k < r^2 + 1$

$m + k \equiv S^2 * 100\ (mod\ (r^2 + 1))$, левая и правая части не меньше нуля и меньше r^2+1

Значит они равны, то есть m+k=100S^2; r>n=m+k=100S^2

$r \leq 400 => 100S^2 < 400 => S^2 < 4 => S < 2 => S = 1$. Значит p=7; q=17; n=m+k=100, сумма r-ичных цифр x^2 равна 2(m+n+k)+0=400.

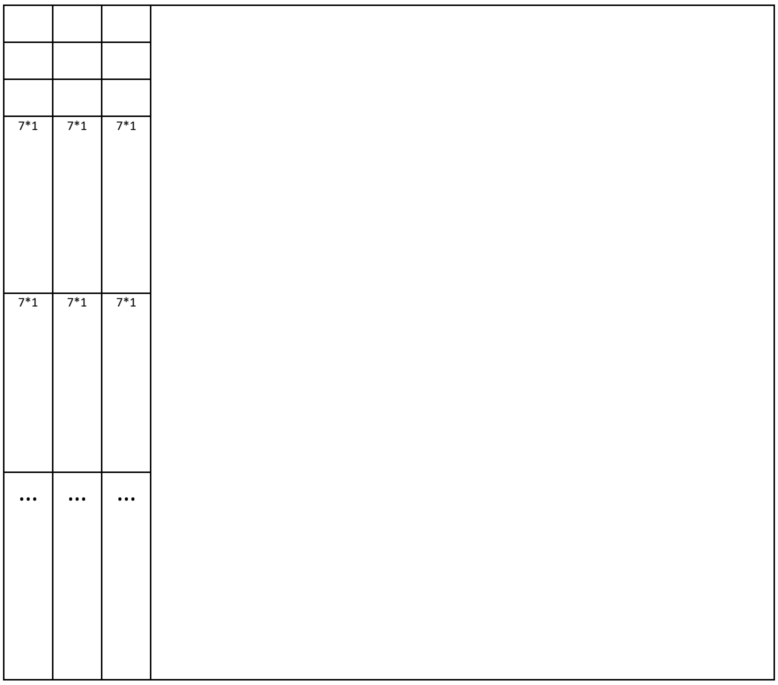
Ответ: 400.

Пусть m – количество полосок из 7 клеток => $7m+9=n^2$; составим таблицу остатков от деления на 7

n	0	1	2	3	4	5	6
n^2	0	1	4	2	2	4	1

$7m+9=7(m+1)+2$, значит n^2 дает остаток 2 от деления на 7, значит n дает остаток 3 или 4 от деления на 7, значит или $n=7k+3$ или $n=7k+4$, k – натуральное или 0

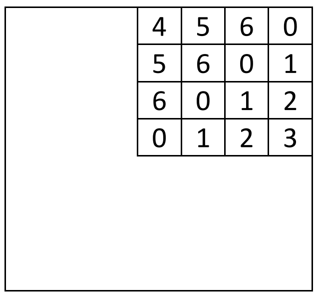
1)Если $n=7k+3$, такое разбиение существует:



В левом верхнем углу расположим квадрат 3*3; пространство строго под ним заполним вертикальными полосками 7*1, поскольку квадрат 7k+3*7k+3, под ним остается прямоугольник 7k*3, который можно заполнить как показано на рисунке. Справа остался прямоугольник 7k+3*7k; его можно разбить на 7k+3 горизонтальных прямоугольников 1*7k, каждый из которых легко замостить k горизонтальными полосками 1*7 в ряд. Значит такое возможно.

2) Если $n=7k+4$:

Предположим, что получилось разбить и квадрат 3*3 примыкает к стене. Введем координаты клеток, начиная с левой нижней: по горизонтали ось i, по вертикали – j. Рассмотрим диагональную раскраску в 7 цветов, где клетка с координатами (i,j) красится в цвет с номером, равным остатку от деления i-j на 7 (номера цветов от 0 до 6). Заметим, что при такой раскраске в полоске 1*7 или 7*1 будет по 1 клетке каждого цвета. Аналогично предыдущему случаю разобьем исходный квадрат на квадрат 4*4, прямоугольник 7k*3 и прямоугольник 7k+4*7k, расположив квадрат в правом верхнем углу. Каждый из прямоугольников легко разбить на полоски, поскольку одна из сторон каждого делится на 7. Поскольку в каждой полоске равное количество цветов 0,1,…,6, то во всем квадрате 4 лишних клетки цвета 0, по 3 лишних клетки цветов 1 и 6, по 2 цветов 2 и 5 и по одной цветов 3 и 4. Если получилось разбить исходный квадрат на квадрат 3*3 и полоски, в которых одинаковое количество всех цветов, значит в квадрате 3*3 цвета 0 на 1 больше, чем цветов 1 и 6, на 2 больше, чем цветов 2 и 5 и на 3 больше, чем цветов 3 и 4. Пусть цветов 3 и 4 по x, тогда всего $2x+2(x+1)+2(x+2)+(x+3)=7x+9=3*3=9$ => x=0, значит в нашем квадрате 3*3



3 клетки цвета 0. Поскольку раскраска диагональная, это возможно только если правый верхний угол имеет цвет 0, так как вся диагональ из правого верхнего в левый нижний угол одного цвета, а она содержит 3 клетки. Значит его координаты удовлетворяют условию i-j делится на 7.

Теперь раскрасим исходный квадрат аналогично, но по диагонали из левого верхнего угла в правый нижний будет идти один цвет (например номером цвета клетки (i,j) будет остаток от деления i+j на 7). Тогда по аналогичным соображениям левый верхний угол квадрата 3*3 раскрашен в цвет диагонали большого квадрата из левого верхнего угла в правый нижний, а это 7k+4+1=7k+5, то есть остаток 5 от деления на 7 , а значит и цвет 5. Значит правый верхний угол раскрашен в цвет на 2 больше, так как сумма его координат на 2 больше, а это 5+2=7, остаток от деления на 7 - 0, а значит и цвет 0. Значит его координаты удовлетворяют условию i+j делится на 7.

Сложим два найденных условия для координат верхнего правого угла и получим, что 2i делится на 7, а значит i делится на 7, а так как сумма координат делится на 7, то и j делится на 7. Если квадрат примыкает к левой стенке, i=3 – не подходит, если к нижней, j=3 – не подходит, если к правой, i=7k+4 – не подходит, если к верхней1, j=7k+4 – не подходит. Значит при таком условии квадрат 3*3 не может оказаться у стенки.

Ответ: при n=7k+3, где k – натуральное или 0.