	ol2237724 ol2237724
Тест начат	понедельник, 14 Февраль 2022, 10:03
Состояние	Завершено
Завершен	понедельник, 14 Февраль 2022, 14:05
Прошло времени	4 час. 1 мин.
Оценка	**60** из 100

Вопрос **Инфо**

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 5 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

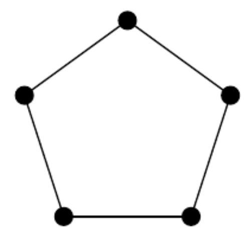
Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос **1**

Выполнен

Баллов: 20 из 20

На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Таня выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа так, чтобы для всех этих чисел выполнялось свойство:
если числа a и b не соединены отрезком, то сумма $a^2 + b^2$ должна быть взаимно проста с n, а если соединены, то числа $a^2 + b^2$ и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1.
При каком наименьшем n существует такая расстановка?



Предположим что n это простое число, тогда возьмем любую вершину, пусть остаток от деления числа в этой вершине, назовем ее вершина 1, в квадрате на n равен a, тогда остаток от деления квадратов чисел из соседних вершин на n равен n-a, рассмотри теперь следующую вершину по часовой, от вершины 1, так как сумма квадратов соседних вершин должна делиться на n, то остаток от деления на n квадратов чисел в соседних ей вершинах должен быть равен n-(n-a)=a, этими вершинами будут вершина 1,которую мы брали первой, и пусть будет вершина 2, тогда если мы возьмем вершину против часовой от вершины 1, у нее будет остаток n-a и она не будет соединяться с вершиной 2, но сумма остатков их квадратов от деления на n , будет давать n, что означает что сумма квадратов этих чисел делится на n, но такого не может быть по условию следовательно n не простое число.

Предположим что n=2*m, где m натуральное число больше 1, тогда так как вершин всего 5, то 3 из них будут иметь одинаковую четность, есть всего 2 случая как могут стоять эти вершины:

1) когда они трое стоят рядом.

2)когда двое стоят рядом, а оставшийся напротив них

В обоих случаях будут две вершины с одинаковой четностью не соединяющиеся отрезками, что значит они не будут взаимно простыми, так как сумма их квадратов будет делиться на 2, что значит что n нечетное число.

Предположим что n=3*m, где m натуральное число больше 1, тогда чтобы сумма квадратов чисел делилась на три, эти числа должны делиться на 3, так как всего два остатка от деления квадрата на 3 это: 1 и 0, и чтобы сумма двух квадратов делилась на 3, сумма их остатков должна быть равна 0, что происходит только когда 0 складывается с 0. Следовательно всего может быть две такие вершины, так как если их больше тогда есть две вершины которые не соединяются отрезками но их квадраты делятся на 3 следовательно и сумма делиться на 3. Следовательно в трех оставшихся вершинах стоят числа не делящиеся на 3, и другие числа которые объединяют отрезки, их квадраты делятся на простое число, если m простое значит возьмем любую из вершин которые делятся на 3, назовем ее вершина 1, тогда возьмем соседнюю в ней вершину не делящуюся на 3, назовем ее вершина 2, сумма остатков их квадратов от деления на m должна равняться m, пусть у вершины 1 остаток от деления на m равен a, тогда у вершины 2 остаток равен m-a, возьмем вершину соседнюю вершине 2 и не делящуюся на 3, назовем ее вершина 3, остаток от деления квадрата этой вершины равен a, так как сумма остатков при делении на m квадратов должна равняться m, возьмем вершину соседнюю вершине 3, но не 2 вершину, назовем ее вершина 4, остаток у ее квадрата при делении на m, равен m-a, так как остаток у квадрата вершины 3 равен a, а остаток у квадрата вершины 4 равен m-a, вершина 4 и вершина 1 не имеют отрезка между собой и сумма остатков их квадратов равна m, что значит что сумма их квадратов делиться на m, чего быть не может, следовательно m не простое число.

Аналогичные рассуждения и доказательства для n=7*m, как для n=3*m, остатки при делении квадрата на 7 равны: 0,1,2,4. Только если мы возьмем два 0 мы получим сумму двух квадратов делящихся на 7, следовательно числа должны делиться на 7, их будет максимум два, и m должно быть не простым числом.

Так как для n=3*m и n=7*c, m и c должны быть не простыми следовательно m>=35=5*7 и c>=15=3*5, очевидно что m, n и c не могут быть квадратами так если чисто делиться на квадрат z^2 оно делиться и на z что значит что число просто так увеличили на z, а нам нужно чтобы n было минимальным. Следовательно если n делиться на 7 или 3 минимальное n может быть 105.

Так как n не делиться на 2, нее может делиться на 3 или 7 до 105, и не простое и не квадрат тогда минимальное n=5*13=65

Для этого n=5*13 можно подобрать пример:

2
(104:13=8)/ \ (85:5=17)
9

10
(1000:5=200)| |(130:13=10)
30___7
(949:13=73)

Рассмотрим 2 и 30: 4+900=904 не делиться ни на 5 ни на 13

Рассмотрим 2 и 7 : 4 +49=53 не делиться ни на 5 ни на 13

Рассмотрим 10 и 7: 100 +49=149 не делиться ни на 5 ни на 13

Рассмотрим 10 и 9 : 81+100=181 не делиться ни на 5 ни на 13

Рассмотрим 30 и 9: 900+81=981 не делиться ни на 5 ни на 13

Следовательно этот пример подходит и n=65 минимальное.

Ответ: при n=65/

Комментарий:

Вопрос **2**

Выполнен

Баллов: 20 из 20

При $x, y, z \geqslant 1$ найдите минимальное значение выражения

$$A = \frac{\sqrt{3x^4+y}+\sqrt{3y^4+z}+\sqrt{3z^4+x}-3}{xy+yz+zx}.$$

Минимальное значение этого выражения 1, предположим что это не так тогда:
√(3x^4+y)+√(3y^4+z)+√(3z^4+x)-3<xy+yz+zx

xy<=(x^2+y^2)/2

yz<=(z^2+y^2)/2

xz<=(x^2+z^2)/2

√(3x^4+y)+√(3y^4+z)+√(3z^4+x)-3<xy+yz+xz<=x^2+y^2+z^2 следовательно

√(3x^4+y)+√(3y^4+z)+√(3z^4+x)-3<x^2+y^2+z^2

√(3x^4+y)+√(3y^4+z)+√(3z^4+x)-3-x^2-y^2-z^2<0

Рассмотрим

√(3x^4+y)-1-x^2>=0

√(3x^4+y)>=1+x^2 возведем обе части в квадрат так как они обе положительные знак не изменится

3x^4+y>=x^4+2x^2+1 заменим y на его минимальное значение то есть 1

3x^4+1>=x^4+2x^2+1

3x^4>=x^4+2x^2

2x^2(x^2-1)>=0

2x^2>=0 (1)

x^2-1>=0 так как x>=1 (2)

из 1 и 2 следует что $2x^2(x^2-1)>=0$, следовательно $\sqrt{(3x^4+y)}-1-x^2>=0$

аналогично $\sqrt{(3y^4+z)}-y^2-1>=0$ и $\sqrt{(3z^4+x)}-z^2-1>=0$

Сложив все это получаем:

$\sqrt{(3x^4+y)}+\sqrt{(3y^4+z)}+\sqrt{(3z^4+x)}-3-x^2-y^2-z^2>=0$

Следовательно

$\sqrt{(3x^4+y)}+\sqrt{(3y^4+z)}+\sqrt{(3z^4+x)}-3-x^2-y^2-z^2<0$ это не верно и следовательно

$\sqrt{(3x^4+y)}+\sqrt{(3y^4+z)}+\sqrt{(3z^4+x)}-3<x^2+y^2+z^2$ это тоже не верно

и так как $\sqrt{(3x^4+y)}+\sqrt{(3y^4+z)}+\sqrt{(3z^4+x)}-3>x^2+y^2+z^2$ и $xy+yz+xz<=x^2+y^2+z^2$ то

$\sqrt{(3x^4+y)}+\sqrt{(3y^4+z)}+\sqrt{(3z^4+x)}-3>xy+yz+xz$ следовательно $(\sqrt{(3x^4+y)}+\sqrt{(3y^4+z)}+\sqrt{(3z^4+x)}-3)/(xy+yz+xz)>1$ следовательно минимальное значение может быть 1

если $x=1$, $y=1$, $z=1$ тогда $(\sqrt{(3x^4+y)}+\sqrt{(3y^4+z)}+\sqrt{(3z^4+x)}-3)/(xy+yz+xz)= (\sqrt{(4)}+\sqrt{(4)}+\sqrt{(4)}-3)/3=3/3=1$

Ответ: 1

Комментарий:

Вопрос **3**

Выполнен

Баллов: 20 из 20

Дан вписанный четырехугольник $ABCD$ с перпендикулярными диагоналями. На описанной вокруг него окружности отмечена точка E, диаметрально противоположная D, причем отрезки AB и DE не пересекаются. Найдите отношение площадей треугольника BCD и четырехугольника $ABED$.

1. Пусть диагонали четырех-угольника ABCD пересекаются в точке O.
2. Так как ED диаметр, следовательно треугольник BED лежит на диаметре, следовательно он прямоугольный, следовательно угол DBE=90
3. AC перпендикулярно BD по условию, и BE перпендикулярно BD следовательно AC || BE, следовательно ABEC трапеция
4. Пусть BE=a, AC=b и BD=k, тогда так как ABEC трапеция и BO перпендикулярно AC, OC=(a+b)/2 а AO=(b-a)/2
5. S(bcd)(площадь треугольника BCD)=BD*OC/2=k(a+b)/4
6. S(dabe)(площадь DABE)=BD*OA/2+BE*BD/2=k(b-a)/4+ka/2=k(a+b)/4
7. S(bcd)/S(dabe)=(k(a+b)/4)/(k(a+b)/4)=1

Ответ: 1.

Комментарий:

Вопрос **4**

Выполнен

Баллов: 0 из 20

На доске написано число $x = 9999$ в системе счисления с четным основанием r. Вася выяснил, что r-ичная запись x^2 представляет собой восьмизначный палиндром, у которого сумма второй и третьей цифр равна 24. (Палиндромом называется число, которое читается одинаково слева направо и справа налево). При каких r такое возможно?

Представим x в десятичной системе счисления

x=9(r^3+r^2+r+1)

x^2=81(r^6+2r^5++3r^4+4r^3+3r^2+2r+1)

При переводе из десятичной в систему счисления r мы поделим последнее на r остаток оставляем получившуюся челую часть переносим то есть переносим [81/r], потом добавляем эту целую часть к 162 и находи что будет стоять в первой степени на предпоследнем месте там будет стоять остаток от деления (162+[81/r]) на r а на следующее место пойдет

[(162+[81/r])/r] тогда на 3 месте будет стоять остаток от (243+[(162+[81/r])/r])/r, и (243+[(162+[81/r])/r]-[(243+[(162+[81/r])/r])/r]*r)+[(162+[81/r])/r]*r

теперь подставляя r который будет меньше 81, так как если r>81, то x^2 в системе r будет семизначным числом, и больше 13, так как если r<13 тогда сумма второй и третей цифры будет меньше 24, находим r чтобы (243+[(162+[81/r])/r])/r, и (243+[(162+[81/r])/r]-[(243+[(162+[81/r])/r])/r]*r)+[(162+[81/r])/r]*r=24 и проверяем получается ли это число палиндромом.

Ответ такое возможно при r для которых выполняется:

(243+[(162+[81/r])/r])/r, и (243+[(162+[81/r])/r]-[(243+[(162+[81/r])/r])/r]*r)+[(162+[81/r])/r]*r=24

и

81>r>13

Если r подходит под все условиям тогда переводим x^2 в систему r и проверяем является ли полученное число палиндромом, если да тогда r подходит.

Комментарий:
Значение r не определено, продвижения в решении отсутствуют.

Вопрос **5**

Нет ответа

Балл: 20

Дана квадратная таблица 2021×2021. Каждая ее клетка окрашена в один из n цветов. Известно, что для любых четырех клеток одного цвета, расположенных в одном столбце, справа от верхней из них и слева от нижней из них нет клеток того же цвета. При каком наименьшем n такое возможно?