	ol2240687 ol2240687
Тест начат	понедельник, 14 Февраль 2022, 10:08
Состояние	Завершено
Завершен	понедельник, 14 Февраль 2022, 13:11
Прошло времени	3 час. 2 мин.
Баллы	68/120
Оценка	**57** из 100

Вопрос
Инфо

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 6 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос 1

Выполнен

Баллов: 20 из 20

Коля поехал на электросамокате в магазин в соседнюю деревню со скоростью 10~км/ч. Проехав ровно треть всего пути, он понял, что при движении с прежней скоростью успеет точно к закрытию магазина, и увеличил скорость вдвое. Но когда он проехал ровно 2/3 всего пути, самокат сломался, и оставшуюся часть пути Коля прошел пешком. С какой скоростью он шел, если успел точно к закрытию магазина?

Пусть весь путь равен - S => первая треть пути это 1/3 S, начальная скорость Коли - V, тогда пусть на первую треть пути он затратил время t. Тогда 1/3 S = V * t, а тк Коля понял, что при движении с постоянной скоростью он успевает ровно к закрытию, то на весь путь ему надо затратить S / V = 3t времени. Далее он увеличил скорость вдвое и ехал до того момента, когда сломался самокат. Тк самокат сломался когда Коля проехал ровно 2/3 пути, значит оставшиеся 1/3 пути он шел пешком => Первую треть он ехал со скоростью V, последнюю треть с какой-то скоростью, значит оставшийся промежуток между последней третью и первой третью равен трети пути, то есть у Коли все участки пути, где у него разная скорость равны. Значит первую треть Коля проехал за время t, вторую за время 1/2 t, тк скорость в два раза больше, значит и время в 2 раза меньше, тк участки пути равны, значит оставшуюся треть пешком он шел за время 3t - t - 1/2 t = 1.5 t, тк пришел ровно к закрытию, значит и потратил на весь путь 3t времени, то есть на последнюю треть Коля затратил в 1.5 раза больше времени, чем на первую, значит его скорость была в 1.5 раза меньше, чем на первом участке => его скорость была равна 10км/ч : 1.5 = 20/3 км/ч.
Ответ: 20/3 км/ч

Комментарий:

Вопрос **2**

Нет ответа

Балл: 20

Найдите все целые a, для которых квадратный трехчлен $x^2 + ax + 2a$ имеет два различных целых корня.

Вопрос 3

Нет ответа

Балл: 20

Положительные числа a, b и c удовлетворяют условию $abc(a+b+c)=3$. Докажите неравенство $(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8$.

Вопрос **4**

Выполнен

Баллов: 20 из 20

Какое наименьшее количество фишек можно расставить в клетках таблицы 99×99 так, чтобы в каждом квадрате 4×4 было не менее восьми фишек?

Разобьем квадрат 99x99 на квадраты 4x4, начиная с левого верхнего угла, тогда нижние 3 строки и последние 3 столба останутся неразбитыми, разобьем их на прямоугольники 3x4, тогда внизу справа останется квадрат 3x3.
Заметим, что в каждом квадрате 4x4 должно быть хотя-бы 8 фишек, каждом прямоугольнике 3x4 хотя-бы 4 фишки, и в последнем квадрате 3x3 хотя-бы 1 фишка. Тогда всего фишек должно быть хотя-бы 24*24*8 + 24*4*2 + 1 = 4801 фишка. Докажем что их хватит.
Каждый квадрат 4x4 из нашего разбиения заполним так:

ф			**ф**
			ф
			ф
ф	ф	ф	ф

Каждый прямоугольник 3x4 внизу заполним также, как верхние 3 строки квадрата 4x4 (на рисунке), в правых прямоугольниках 4x3 поставим как левые 3 столбца квадрата 4x4 (на рисунке), а в квадрате 3x3 поставим в левую верхнюю клетку фишку.
Тогда к любом квадрате 4x4 нашего квадрата 99x99 стоит ровно 8 фишек.
Ответ: 4801 фишка.

Комментарий:

Вопрос **5**

Выполнен

Баллов: 8 из 20

Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Диагональ AC — биссектриса угла $\angle BAD$, точка M — середина стороны BC, а точка N — середина отрезка DO. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является вписанным тогда и только тогда, когда четырехугольник $ABMN$ является вписанным.

Предположим, что ABCD - вписанный, тогда нужно доказать, что ABMN - вписанный.
1) Угол BAC = угол CAD, тк AC - биссектриса угла BAD => тк ABCD - вписанный, то угол BCA = угол BDA, угол CBD = угол CAD
2) MC = 1/2 BC, ND = 1/2 OD
3) Рассмотрим треугольники ABC и AOD:
угол BAC = угол CAD
угол BCA = угол BDA   => треугольники ABC и AOD подобны => BC/AC = OD/AD => MC/AC = ND/AD.
4) MC/AC = ND/AD
угол BCA = угол BDA => треугольники AMC и AND подобны => угол MAC = угол NAD => угол AON + угол NAD = угол AON + угол MAC = угол MAN = угол CAD = угол CBD.
5) Четырёхугольник ABMN:
угол MBN = угол MAN => ABMN - вписанный => чтд.

Комментарий:
доказано одно утверждение из двух.

Вопрос **6**

Выполнен

Баллов: 20 из 20

Докажите, что у каждого из чисел $n! + 1$, $n! + 2$, \dots, $n! + n$ можно выбрать простой делитель, на который не делится ни одно из остальных.

ol2240687_6.pdf

Комментарий:

« ПРЕДЫДУЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 11

СЛЕДУЮЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 21 »

Возьмём число n!+x, где $x \leq n$, тогда докажем, что у него есть уникальный простой делитель p, на которое не делится больше никакое n!+y. Если и n!+x, и n!+y делятся на какое-то p, то и (n!+x) – (n!+y) тоже делится на p, то есть x-y делится на p, тогда x сравним с y по модулю p.

n!+x = x * $(\frac{n!}{x} + 1)$, если $(\frac{n!}{x} + 1)$ – простое, то оно больше n, тк это n умножить на $\frac{(n-1)!}{x}$ да и ещё +1, тогда n!+x кратно p, тогда почему нет такого n!+y, которое кратно тому же p, предположим, что есть, тогда (n!+x) – (n!+y) тоже делится на p, то есть x-y делится на p, тогда x сравним с y по модулю p, но они оба меньше p, тк p>n, тогда x=y, противоречие. А если $(\frac{n!}{x} + 1)$ – составное, тогда оно кратно какому-то p_i, тогда $\frac{n!}{x}$ не кратно p_i, тогда если кратно p_i, то p_i < n, но тк n! содержит x в разложении и кратен p_i, а $\frac{n!}{x}$ не содержит x в разложении и не кратен p_i, только x кратен p_i, тогда из чисел от 1 до n только x кратен p_i, значит $x=p_i$, тогда n!+x кратно p_i и оно единственное среди чисел от n!+1 до n!+n, которое кратно p_i , потому что n! кратен p_i , а какое-то y не кратно p_i , тк иначе x=y, а значит и сумма n!+y не кратна p_i, значит у n!+x p_i это уникальный делитель => у каждого числа от n!+1 до n!+n есть уникальный простой делитель, на который не делится ни одно из остальных.