	ol2214953 ol2214953
Тест начат	понедельник, 14 Февраль 2022, 10:06
Состояние	Завершено
Завершен	понедельник, 14 Февраль 2022, 13:53
Прошло времени	3 час. 46 мин.
Оценка	**70** из 100

Вопрос
Инфо

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 4 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос 1

Выполнен

Баллов: 5 из 10

Некоторый треугольник разрезали на пять маленьких треугольников так, как показано на рис. 1. Могли ли при этом все пять маленьких треугольников оказаться равными?

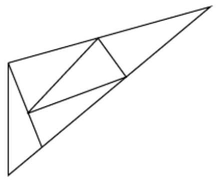

Рис. 1

Можно, на моем рисунке отмечены все стороны и прямые углы. Как видно, противоречий с неравенством треугольника нету.

ol2214953_1.jpg

Комментарий:
один угол не отмечен

корректность примера не очевидна по картинке

Вопрос **2**

Выполнен

Баллов: 43 из 50

На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Костя выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа, не превосходящие n, так, чтобы для всех поставленных им чисел выполнялось свойство: *если числа a и b соединены отрезком, то разность $a - b$ должна быть взаимно проста с n, а если не соединены, то числа $a - b$ и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1.* Например, для картинки на рис. 2 Костя взял $n = 45$ и подобрал подходящую расстановку — она показана на рис. 3.

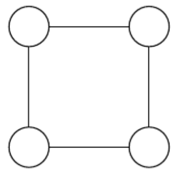

Рис. 2

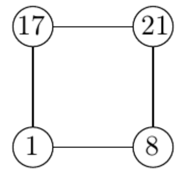

Рис. 3

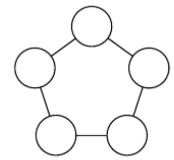

Рис. 4

а) При каком наименьшем n существует требуемая расстановка чисел на рис. 2?
б) Можно ли расставить числа в кружочках на рис. 4 при $n = 25$?
в) Можно ли расставить числа в кружочках на рис. 4 при $n = 39$?
г) При каком наименьшем n существует расстановка чисел в кружочках на рис. 4?

а) n=2. Давайте докажу что меньше не может быть. Это очевидно так как есть только одно натуральное число меньшее 2, это 1. Наибольший общий делитель всегда будет равен 1, так как НОД(1 и какого то числа)=всегда 1. Но давайте пронумеруем в порядке часовой стрелки кружочки от 1 до 4. Тогда разность первого и третьего числа(они не соединены) всегда не имеет общий делитель больший 2 с числом 1. Получается при n=1 расстановки не может быть. Давайте я приведу пример на n=2: давайте сделаем так, что число в кружочке совпадает с номером кружочка. Проще говоря, давайте просто поставим числа в кружки от 1 до 4 в порядке часовой стрелки. Тогда заметим, что соединены числа 1 и 2, 2 и 3, 3 и 4. У них разность всегда нечетная, получается они взаимно просты с n. А у чисел 2 и 4, 1 и 3(они не соединены) всегда разность делится на 2, значит есть общий делитель 2. Значит такая расстановка может быть.

б) Давайте заметим, что 25=5*5, то есть наибольший общий делитель всегда либо 1, либо 5, либо 25. То есть на самом деле можно сказать так: общий делитель либо 1, либо делится на 5. Тогда получается у соединенных числах разные остатки при делении на 5. А у не соединенных всегда одинаковые остатки при делении на 5. Давайте как в пункте А пронумеруем кружочки от 1 до 5 в порядке часовой стрелки. Дальше будем смотреть все остатки при делении на 5. Тогда кружочки 1 и 3 имеют одинаковые остатки (так как они не соединены) и также кружочки 1 и 4. То есть кружочки 1, 3, 4 имеют одинаковые остатки. Но заметим, что кружочки 2 и 4 имеют одинаковые остатки(так как не соединены). Получается кружочек 2 имеет одинаковый остаток с кружочком 4, но кружочек 4 имеет одинаковый остаток с кружочком 1. То есть кружочек 1 и 2 имеют одинаковые остатки. То есть их разность делится на 5, а такого не может быть. Значит подходящей расстановки не существует.

в) Давайте заметим, что 39=3*13, то есть наибольший общий делитель всегда либо 1, либо делится на 3, либо делится на 13, ну либо и на 13 и на 3 делится. Давайте опять кружочки пронумеруем от 1 до 5 по часовой стрелки. Тогда пусть числа сравнимы по какому то модулю если их разность делится на этот модуль(простыми словами, остатки по модулю равны). Сразу заметим, что соединенные кружочки сравнимы не могут быть по модулю большему 1(а иначе их НОД больше 1).Тогда заметим, что если первое и третье кружочек сравнимы по модулю 3 например, то первое и четвертый кружочек не могут быть сравнимы по модулю 3(а иначе третье и четвертый кружочек сравнимы по модулю три, но они соединены). То есть если первый и третий кружочек сравнимы по модулю три, то первый и четвертый сравнимы по модулю 13. Давайте разберем только этот случай(первый и третий кружочек сравнимы по модулю три, то первый и четвертый сравнимы по модулю 13). Тогда заметим, что четвертый и второй кружочек не могут быть сравнимы по модулю 13(а иначе первый и второй сравнимы по модулю 13). То есть четвертый и второй сравнимы по модулю 3. Аналогично третий и пятый кружочек не могут быть сравнимы по модулю 3(а иначе пятый и первый сравнимы по модулю 3). То есть третий и пятый кружочек сравнимы по модулю 13. Так как четвертый и второй сравнимы по модулю 3, то второй и пятый должны быть сравнимы по модулю 13(а иначе четвертый и пятый сравнимы по модулю 3). Мы получили, что второй и пятый сравнимы по модулю 13 и получили, что третий и пятый сравнимы по модулю 13. Получается второй и третий сравнимы по модулю 13, но такого не может быть так как НОД будет делиться на 13, то есть не будет равен 1. Противоречие, значит такого не может быть.

г) Давайте вообще поймем, что мы получили от пунктов б и в. На самом деле доказательство в пункте б, говорит, что если n имеет только один простой делитель, то расстановки не существует. То есть давайте в моем доказательстве пункта б поставим вместо 5 какое то простое число p и все доказательство будет таким же(то есть найдутся два соединенных кружка таких, что они будут сравнимы по модулю p). А в пункте в, мы поняли что если n имеет только два простых делителя, то расстановки нету. Также можно подставить простые p, q и доказательство будет таким же. Получается нужно, чтобы у n было хотя бы три различный простых делителя. Но заметим, что n либо имеет двойку(то есть n четное), либо нет. Если n четное, то давайте заметим, что соединенные числа должны быть разной четности(а иначе разность двух соединных кружочков делятся на 2). Но это значит, что первое кружочек сравним по модулю 2 с третьим, а третий с пятым, то есть первый и пятый сравнимы по модулю 2. То есть разность делится на 2, а такого не может быть. То есть n нечетное. Но какое есть наименьшее число, что у него хотя бы три различный простых делителей и оно нечетное. Заметим, что наименьший простой делитель хотя бы 3, второй по большинству хотя бы 5, а самый большой простой делитель хотя бы 7. То есть n хотя бы 3*5*7=105. Пример для n=105: Давайте по часовой стрелки поставим числа 2, 10, 9, 5, 4. Тогда очевидно что у соединенных числах(2 и 10, НОД(10-2, 105)=1, 10 и 9, разность 1; 9 и 5, НОД(9-5, 105)=1; 4 и 5, разность 1; 2 и 4, НОД(4-2, 105)=1) разность взаимно проста с n. А у не соединных разность не взаимно проста(2 и 5, НОД(5-2, 105)=3; 2 и 9, НОД(9-2, 105)=7; 10 и 5, НОД(10-5, 105)=5; 10 и 4, НОД(10-4, 105)=3; 9 и 4, НОД(9-4, 105)=5). То есть наименьшее n это 105.

Комментарий:
а) 3

неверный ответ и оценка

верный пример

б) 10

в) 10

г) 20

Вопрос **3**

Выполнен

Баллов: 10 из 10

На доске написано 2021 минусов. Петя и Вася играют в такую игру. Ход состоит в том, что можно один минус заменить на плюс, либо стереть один плюс и один минус, либо два минуса заменить на три плюса. Ходят по очереди, первым ходит Петя, проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

Ответ: Петя.

Заметим, что на самом деле количество минусов либо уменьшается на 1, либо на 2, но никак не увеличивается. По этим причинам игрок не может сделать ход если нету минусов. То есть давайте просто смотреть на количество минусов(то есть нам не важно сколько плюсов). Приведем стратегию для Пети, чтобы он гарантированно выйгрывал. Тогда давайте Петя сделает ход: два минуса заменить на 3 плюса. Тогда осталось 2019 минусов. Заметим, что оно делится на 3. Теперь Петя будет играть за второго игрока. Давайте если Вася будет своим ходом убирает 2 минуса, то Петя после его хода будет следующим ходом убирать 1 минус(с помощью хода: один минус заменить на плюс, этот ход всегда существует) А если Вася будет убирать 1 минус, то Петя 2. Тогда заметим, что после хода Васи количество минусов всегда не делится на 3. То есть у Пети всегда есть ход после Васи(потому что 0 делится на 3). А после хода Пети количество минусов всегда делиться на 3(1+2=3, 2+1=3). Так как количество минусов всегда уменьшается то будет ход, когда после хода Пети количество минусов будет равно 0. То есть я привел стратегию в которой Петя всегда выйгрывает.

Комментарий:

Вопрос **4**

Выполнен

Баллов: 12 из 30

а) Имеется большая компания людей — больше 100 человек, в которой некоторые люди дружат. Верно ли, что каждую такую компанию можно разбить на две группы «дружественным способом», т. е. так, чтобы у каждого человека друзей в своей группе было больше либо равно, чем друзей в противоположной группе?

б) Докажите, что каждую компанию, в которую входит 2022 человека, можно разбить на 15 групп «недружественным способом», т. е. так, чтобы у каждого человека количество друзей в своей группе составляло не более $1/15$ от общего числа его друзей.

а) Так как в задаче точно не написано, может ли быть одна группа пустой(то есть там нету человека), то давайте я опишу два варианта: 1) Если можно: то давайте просто засунем всех людей в одну группу, тогда очевидно, что такое может быть, так как все друзья у человека будут в этой же группе. 2) Если нельзя, то в каждой группе есть хотя бы один человек. Тогда утверждение(верно ли, что каждую такую компанию можно разбить на две....) из вопроса пункта а неверно. Давайте я приведу контр пример. Давайте возьмем 101 человека и пусть все со всеми дружат. То есть каждый человек дружит с 100 людьми. Тогда пусть можно разбить на две группы дружественным способом. Тогда заметим, что в меньшей группе(где меньше людей) по принципу Дирихле не больше 50 человек. Давайте возьмем из этой меньшей группы одного человека. Так как 100/2=50. То в его группе должно быть хотя бы 50 его друзей. То есть в его группе должно быть хотя бы 1+50(он и его хотя бы 50 друзей) людей. Но мы сказали что там не больше 50 человек. Противоречие. Значит не каждую такую компанию можно разбить на две группы дружественным способом.

б) Давайте разберем случай когда все дружат со всеми. Тогда можно просто определить группы по 136 человек и 137 человек. И просто туда как удобно сунуть людей. Тогда тут у каждого друзей не более 136, то есть не более 1/15. Также давайте разберем случай когда граф это дерево или несколько деревьев(граф друзей). Тогда можно просто начать с листов. И листы сунуть в первую группу. Удалить листы. И в новом дереве листы уже сунуть в вторую группу. И потом тоже самое, но в третью группу и так далее. Тогда у каждой вершины в ее группе не будет друзей, потому что его родитель в дереве в другой группе, а сыновья тоже в другой группе.

Комментарий:
а) 10

б) 2

приведен частный пример графа

« ПРЕДЫДУЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Заключительный этап - Математика 6-7 21/22 (скрытый)

СЛЕДУЮЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ »
Вариант 21