	ol2242105 ol2242105
Тест начат	понедельник, 14 Февраль 2022, 10:37
Состояние	Завершено
Завершен	понедельник, 14 Февраль 2022, 13:54
Прошло времени	3 час. 17 мин.
Баллы	63/120
Оценка	**53** из 100

Вопрос **Инфо**

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 6 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос **1**

Выполнен

Баллов: 20 из 20

Петя и Вася одновременно выехали на самокатах навстречу друг другу. Ровно посредине между ними расположен мост. Дорога от Пети до моста асфальтированная, а от Васи до моста — грунтовая. Известно, что по грунтовой дороге они едут с одинаковыми скоростями, а по асфальту Петя движется в 3 раза быстрее, чем по грунтовке. Петя за час добрался до моста и, не останавливаясь, продолжил движение. Через какое время после выезда он встретит Васю?

v- скорость передвижения мальчиков по грунтовой. Тогда скорость Пети по асф. $v2=3v$. S-расстояние от мальчиков до моста в начале (2S - расстояние между нимим в начале).

Известно, что Петя проехал S за час по асфальту: $1*3v*=S$ $S=3v$.

За час Вася проедет v по грунтовой, расстояние между ним и Петей будет $S-v=2v$. Скорость их сближения после 1го часа=сумме их скоростей (по грунтовой)$=v+v=2v$. $2v/(2v)=1$ час.

Значит, они встретятся через 1+1=2 часа.

Комментарий:

Вопрос **2**

Выполнен

Баллов: 20 из 20

Дан квадратный трехчлен $2x^2 - x - 36$. Найдите все целые x, при которых значения этого трехчлена равны квадрату простого числа.

2x^2-x-36=(x+4)*(2x-9)=p*p

1) x+4=+-p 2x-9=+-p Одного знака, т.к. произведение больше 0

x+4=2x-9 x=13

x+4=2x-9=17 Простое число, x=13 подходит.

2)x+4=+-1; 2x-9=+-p*p Одного знака, т.к. произведение больше 0

1. x+4=1 x=-3 2x-9=-15

(1)*(-15)=-15 - не квадрат простого. Не подходит.

2. x+4=-1 x=-5

2x-9=-19

(-1)(-19)=19 - не квадрат простого. Не подходит.

3)x+4=+-p*p; 2x-9=+-1 Одного знака, т.к. произведение больше 0

1. 2x-9=1 x=5

x+4=9

9*1=9 - квадрат простого. x=5 подходит.

2. 2x-9=-1 x=4

x+4=8

8*(-1)=-8 - не квадрат простого. Не подходит.

Ответ: подходят x=13; x=5

Комментарий:

Вопрос **3**

Выполнен

Баллов: 3 из 20

Положительные числа a, b и c удовлетворяют условию $abc(a+b+c) = ab+bc+ca$.
Докажите неравенство $5(a+b+c) \geqslant 7+8abc$.

k=abc; s=a+b+c; g= ab+bc+ca;

s*k=g;

Нер-во средних (ср. ар. >= ср. геом.):

a+b+c>=3*(abc)^1/3 <=> s>=3*k^1/3

ab+bc+ca>=3*(abc)^2/3 <=> g>=3*k^2/3

s=g/k; s>=(3*k^2/3)/k=3*k^(-1/3)

s*s>=(3*k^1/3)*(3*k^(-1/3))=9 s^2>=9 s>0 (все числа>0) s>=3

s>=3 s^2=s*s>=3s

Док-ть:

5s>=7+8k=7+8(g/s)

5s^2-7s-8g>=0

Комментарий:
решение не завершено, неравенство не доказано

Вопрос **4**

Выполнен

Баллов: 0 из 20

У Маши есть 1000 бусинок 50 различных цветов, по 20 бусинок каждого цвета. При каком наименьшем n для любого способа собрать из всех бусинок ожерелье можно выбрать n последовательных бусинок, среди которых есть бусинки 25 разных цветов?

Ответ: n=962.

Пример: Все бусинки одного цвета лежат подряд. Пусть мы возьмем k бусинок, k< n. Тогда мы оставим непокрытыми 1000-k бусинок. 1000-k>1000-n=38. Хотя бы 39 бусинок. Среди 39-ти бусинок подряд гарантированно будут лежать 20 одноцветных. (Возьмем центральную бусинку среди 39, любые 20, ее содержащие бусинок подряд не "достают" до покрытых нами (19 вправо или 19 влево лежат на непокрытом участке).) Эти 20 одноцветных мы не покроем; n меньше 962 не подходит.

Почему n=962 подходит? Рассмотрим 38 непокрытых бусинок. Пусть среди них есть 20 1 цвета К. "Сдвигаем" область покрытия по 1 бусинке против часовой стрелки, пока 1 из бусинок цвета К не станет покрыта. Снова рассмотрим 38 непокрытых бусинок. Среди них есть 19 цвета К (меньше быть не может, иначе мы бы покрыли 2 бусинки, а значит покрыли бы первую бусинку раньше, а значит перестали двигать область раньше). Помимо этого есть еще 19 бусинок. Среди этих 38 непокрытых бусинок нет 20 одного цвета (19<20), а значит, мы покрыли бусинки каждого цвета.

Комментарий:
Указанное значение n не является наименьшим.

Вопрос **5**

Нет ответа

Балл: 20

Точки A_1 и B_1 — середины сторон BC и AC остроугольного треугольника ABC, точка M — середина отрезка A_1B_1. Точка H — основание высоты, опущенной из вершины C на сторону AB. Через точку M проведены окружности, касающиеся сторон BC и AC соответственно в точках A_1 и B_1. Обозначим вторую точку пересечения окружностей через N. Докажите, что точки H, M и N лежат на одной прямой.

Вопрос **6**

Выполнен

Баллов: 20 из 20

У натурального числа n нет ни одного делителя d, удовлетворяющего неравенству $n^2 \leq d^4 \leq n^3$. Докажите, что n имеет простой делитель, четвертая степень которого больше, чем n^3.

n не равно 1, иначе d=n подходит. То есть, простые делители n существуют.

Пусть n не имеет такого делителя. p1 - наибольший простой делитель n. Тогда p1^4<=n^3, если p1^4=n^3, то мы нашли противоречие (p1 удовлетворяет неравенству), будем рассматривать p^4<n^3. p1 - делитель p, а значит, он не удовлетворяет неравенству, а т.к. p1^4<n^3, то p1^4< n^2 (иначе нер-во выполняется).

Итак, p1^2<n^2. Рассмотрим n/p1 - это делитель n. Пусть (n/p1)^4<n^2, тогда n^2<n*p1^2, p1^2>n - не подходит (иначе p1^4>n^2). А т.к. нер-во с n/p1 не выполняется, то (n/p1)^4>n^3, n>p1^4. p1<n^4. Т.к. p1 - самый большой простой делитель, то любой другой простой делитель n p будет меньше, чем n^1/4.

Возьмем d[0]=p1. Будем домножать его на простые числа-делители n, получая d[1], d[2], . . . (d[r+1]=d[r]*p[r] где p[r] - простой делитель n/d[r]) Возьмем наименьший номер d-шки k такой, что d[k]^4>n^3 (а такой номер найдется, т.к. последняя d-шка равна n, а n^4>=n^3). Рассмотрим d[k-1]. d[k-1]^4< n^3, т.к. иначе k не наименьший подходящий номер. Но d[k-1] не удовлетворяет нер-ву, а значит, d[k-1]<n^2; Но тогда p[k-1]^4=d[k]^4/d[k-1]^4>n^3/n^2=n. p[k-1]>n^1/4. Противоречие.

Комментарий:

« ПРЕДЫДУЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 12

СЛЕДУЮЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 22 »