	ol2211526 ol2211526
Тест начат	понедельник, 14 Февраль 2022, 10:05
Состояние	Завершено
Завершен	понедельник, 14 Февраль 2022, 14:05
Прошло времени	4 час.
Баллы	64/120
Оценка	**53** из 100

Вопрос **Инфо**

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 6 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос **1**

Выполнен

Баллов: 20 из 20

Петя и Вася одновременно выехали на самокатах навстречу друг другу. Ровно посредине между ними расположен мост. Дорога от Пети до моста асфальтированная, а от Васи до моста — грунтовая. Известно, что по грунтовой дороге они едут с одинаковыми скоростями, а по асфальту Петя движется в 3 раза быстрее, чем по грунтовке. Петя за час добрался до моста и, не останавливаясь, продолжил движение. Через какое время после выезда он встретит Васю?

Пусть скорость Пети на грунтовой дороге равна Vп, тогда скорость Васи равна Vв. В условии сказано, что по грунтовой дороге они едут с одинаковой скоростью, тогда Vп=Vв, обозначим Vп=V

Также известно, что на асфальте скорость Пети в 3 раза больше, чем на грунтовке, тогда скорость Пети на асфальте равна 3V

Пусть отрезок дороги до моста равен x, в условии сказано, что расстояние от Пети до моста и от Васи до моста равны.

Пусть один час равен t, тогда x/(3V)=t , т.к. Петя за час добрался до моста. За это время Вася проехал V*t, то есть (1/3)*x, т.к. они выехали одновременно.

Дальше они будут ехать на встречу друг другу по грунтовке, при этом расстояние между ними будет равно x-(1/3)*x = (2/3)x тогда время через которое они встретятся равно ((2/3)*x)/(V+V) т.к. движение на встречу т.е. время t0 = ((2/3)*x)/2V = x/3V = t = 1 час

Тогда итоговое время встречи равно t+t0=2t=2 часа

Ответ: 2 часа

Комментарий:

Вопрос **2**

Выполнен

Баллов: 20 из 20

Дан квадратный трехчлен $2x^2 - x - 36$. Найдите все целые x, при которых значения этого трехчлена равны квадрату простого числа.

2(x^2)-x-36=0

D=1+4*2*36=289=17^2

x1=(1+17)/4=4,5 x2=(1-17)/4=-4 тогда

2(x^2)-x-36=2(x-4.5)(x+4)=(2x-9)(x+4) подставим это в изначальное уравнение

(2x-9)(x+4)=b^2, где b -- простое число

т.к. x должно быть целым, то скобки в левой части тоже целые,

т.к. b -- простое, то у него нет делителей кроме b и 1, тогда у нас получается что

1) система: { 2x-9=b ; x+4=b

x+4=2x-9

x=13

b=17

17 -- простое число

2) система: { 2x-9=-b ; x+4=-b

x+4=2x-9

x=13

b=-17

(ответ системы такой же как ответ первой системы)

3) система: { 2x-9=b^2 ; x+4=1

x=-3

-15=b^2 такого не может быть, следовательно

у данной системы нет решений

4) система: { $2x-9b^2$; $x+4=-1$

$x=-5$

$19=b^2$

нет такого простого числа, которое во второй степени давало бы число 19

нет решений

5) система: { $2x-9=1$; $x+4=b^2$

$x=5$

$9=b^2$

$b=3$

3 -- простое число

6) система: { $2x-9=-1$; $x+4=-b^2$

$x=4$

$8=-b^2$ такого не может быть

нет решений

Ответ: $x=5$ $b=3$

$x=13$ $b=17$

P.s.

система: { $2x-9=1$; $x+4=b^2$ -- система из двух уравнений с двумя неизвестными

D -- дискриминант

b^2 -- b в квадрате

Комментарий:

Вопрос **3**

Выполнен

Баллов: 20 из 20

Положительные числа a, b и c удовлетворяют условию $abc(a+b+c) = ab+bc+ca$.
Докажите неравенство $5(a+b+c) \geqslant 7+8abc$.

Рассмотрим тривиальный случай, когда a=b=c=1 в этом случае

5(1+1+1)>=7+8*1

Воспользуемся неравенствами о среднем. Запишем их.

3/(1/a +1/b +1/c) <= кубический корень (a*b*c) <= (a+b+c)/3

3/(1/a +1/b+1/c) = 3/(bc/abc + ac/abc + ab/abc) = 3/((bc+ac+ab)/abc) = (3*abc)/(bc+ac+ab)

Воспользуемся условием abc*(a+b+c) = ab+bc+ca

Разделим обе части на (ab+bc+ca)*(a+b+c) (оно не равно нулю, т.к. все числа положительные по условию)

Получим: abc/(ab+bc+ca) = 1/(a+b+c)

Подставим это:

3/(1/a +1/b+1/c) = 3* (1/(a+b+c))

Мы знаем, что 3/(1/a +1/b+1/c) <= (a+b+c)/3 (из неравенства о среднем)

Подставим полученное выше, получим:

3/(a+b+c) <= (a+b+c)/3

Домножим обе части неравенства на (a+b+c)*3 (оно больше 0, поэтому можем домножать)

Получим 9<=((a+b+c)*(a+b+c))

((a+b+c)*(a+b+c)) - 9 >= 0 следовательно

a+b+c>=3 или a+b+c<= -3 , т.к. a,b,c положительные, то a+b+c > 0 следовательно оно не может быть <= -3

следовательно a+b+c>=3 подставим это в неравенство из условия, рассмотрим его левую часть

5*(a+b+c) >= 5*3

5(a+b+c)>= 15

воспользуемся неравенством о среднем

кубический корень (abc) <=(a+b+c)/3 возведем в куб обе части, получим:

abc<= ((a+b+c)*(a+b+c)*(a+b+c))/27

рассмотрим правую часть неравенства из условия:

7+8*abc <= 7+8*(((a+b+c)*(a+b+c)*(a+b+c))/27)

Мы знаем, что min(a+b+c)=3 если 7+8*abc <= 7+8*(((a+b+c)*(a+b+c)*(a+b+c))/27) то оно будет меньше и при большем значении a+b+c

Тогда подставим вместо a+b+c -- 3

получим 7+8*abc <= 7+8*((3*3*3)/27) <= 7+8*15

5*(a+b+c) <= 15 т.е. мы получим, что левая часть >=(больше либо равна) 15, а правая <=(меньше либо равна) 15, следовательно неравенство выполняется

Доказано.

P.s.

abc=a*b*c

<= -- меньше либо равно

>= больше либо равно

/ -- черта деления

(a+b+c)*(a+b+c) -- (a+b+c) в квадрате, аналогично с кубом

кубический корень (a*b*c) -- (a*b*c) в степени 1/3

Комментарий:

Вопрос **4**

Выполнен

Баллов: 4 из 20

У Маши есть 1000 бусинок 50 различных цветов, по 20 бусинок каждого цвета. При каком наименьшем n для любого способа собрать из всех бусинок ожерелье можно выбрать n последовательных бусинок, среди которых есть бусинки 25 разных цветов?

В худшем случае у нас будут идти подряд сначала 20 бусин одного цвета, потом 20 бусин другого цвета и так далее. В этом случае чтобы найти n последовательных бусин 25 разных цветов нам нужно чтобы n было 23*20+2=462.
Т.к. у нас будет по 20 бусин 23 цветов и следующие 2 бусины с концов обязательно будет другого цвета, т.е. 25 цвета. Если у нас будет расстановка такая что перед этим бусинами будет стоять 10 бусин одного цвета и за ними будет стоять 10 бусин того же цвета, то нам не хватит 23*20+2 n бусин, т.к. мы получим 24*20 бусин и 24 цвета, поэтому нам нужно минимум 24*20+1=481 бусин, чтобы получить 25 разных цветов 481 бусин точно хватит, т.к. 24 разными мы цветами можем получить максимум 480 бусин(т.к. каждого у нас 20 бусин) тогда 481-я бусина обязательно будет другого цвета, т.е. 25-ого цвета

Это худший случай, т.к. если среди 20 бусин у нас будет не 1 цвет, а хотя бы 2, то нам уже хватит меньшего числа n, чтобы получить 25 разных цветов

Нас же спрашивают минимальное n для любого способа собрать.

Меньшим количеством бусин мы сможем получить 25 разных цветов, т.к. рассмотренная расстановка бусин, т.к. в расстановке 10 бусин 1 цвета, затем по 20 бусин 23 цветов, затем 10 того же цвета, что и первые 10 бусин

Комментарий:
Рассуждение про 10 бусин одного цвета с двух сторон выбранного участка неверное, так как не доказано, что в другом фрагменте того же ожерелья нельзя обойтись меньшим числом бусин.

Вопрос **5**

Нет ответа

Балл: 20

Точки A_1 и B_1 — середины сторон BC и AC остроугольного треугольника ABC, точка M — середина отрезка A_1B_1. Точка H — основание высоты, опущенной из вершины C на сторону AB. Через точку M проведены окружности, касающиеся сторон BC и AC соответственно в точках A_1 и B_1. Обозначим вторую точку пересечения окружностей через N. Докажите, что точки H, M и N лежат на одной прямой.

Вопрос 6

Нет ответа

Балл: 20

У натурального числа n нет ни одного делителя d, удовлетворяющего неравенству $n^2 \leq d^4 \leq n^3$. Докажите, что n имеет простой делитель, четвертая степень которого больше, чем n^3.