	ol2214673 ol2214673
Тест начат	понедельник, 14 Февраль 2022, 10:03
Состояние	Завершено
Завершен	понедельник, 14 Февраль 2022, 14:00
Прошло времени	3 час. 56 мин.
Оценка	**75** из 100

Вопрос
Инфо

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 -вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 5 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

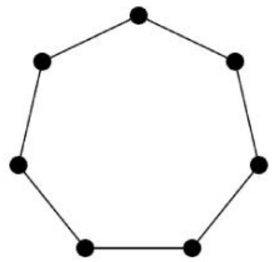
б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!
Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос **1**
Выполнен
Баллов: 20
из 20

На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Саша выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа так, чтобы для всех этих чисел выполнялось свойство:
если числа a и b не соединены отрезком, то сумма $a + b$ должна быть взаимно проста с n, а если соединены, то числа $a + b$ и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1.
При каком наименьшем n существует такая расстановка?



ol2214673 1.pdf

Комментарий:

Вопрос **2**
Выполнен
Баллов: 8
из 20

При $x, y, z \in (0, 2]$ найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{(x^3-6)\sqrt[3]{x+6}+(y^3-6)\sqrt[3]{y+6}+(z^3-6)\sqrt[3]{z+6}}{x^2+y^2+z^2}.$$

Решение:

Очевидно, что максимум выражения А на интервале (0,2] достигается при x=y=z=2 A= 3*(2 -6)*корень кубический из (2+6)/ (3*2)=1

Ответ: 1

Комментарий:
Равенство переменных не обосновано.

Вопрос **3**
Выполнен
Баллов: 20 из 20

Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Внутри треугольника AOB выбрана такая точка K, что прямая KO является биссектрисой угла CKD. Луч DK вторично пересекает описанную окружность треугольника COK в точке L, а луч CK вторично пересекает описанную окружность треугольника DOK в точке M. Найдите отношение площадей треугольников ALO и BMO.

Решение

Из вписанности LKOC угол LKC = углу LOC. Из вписанности MKOD угол MKD = углу MOD, угол LKC = углу MKD как вписанные, поэтому угол LOC = углу MOD, значит равны смежные с ним углы: угол AOL= углу BOM. Докажем, что площади ALO и BMO равны. Угол AOL= углу BOM, значит их площади относятся как LO * OA/(MO*OB). Пусть радиус описанной окружности вокруг LKOC равен r_1, а MKOD равен r2 . По теореме синусов LO= 2r1. MO= 2*r2* синус угла MKO. Угол LKO = LKC+CKO = MKD+ DKO= MKO следовательно синус угла LKO = синусу угла MKO, откуда следует LO/MO=r1/r2.

По теореме о пересекающихся хордах OA*OC=OB*OD => OC/OD=OB/OA => OB/OA=r1/r2 => OA/OB=r1/r2 =>

LO*OA/MO/OB=rt/r2*(r2/rt)=1. То есть площади треугольников ALO и BMO относятся как 1:1.
Ответ: 1

Комментарий:

Вопрос **4**
Выполнен
Баллов: 7
из 20

Натуральное число x в системе счисления с основанием r ($r \leqslant 36$) имеет вид $\overline{ppqq}$, причем $2q = 5p$. Оказалось, что r-ичная запись числа x^2 представляет собой семизначный палиндром с нулевой средней цифрой. (Палиндромом называется число, которое читается одинаково слева направо и справа налево). Найдите сумму r-ичных цифр числа x^2.

Решение: для условия 2q = 5p выберем p=2 и q=5. Тогда число x в r-ичной системе счисления = 2255 возводя в квадрат это число в r-ичной системе счисления получаем искомый палиндром r-ичной системе счисления 4950594. Основание системы счисления r =21. Сумма цифр палиндрома в десятичной системе равна 9*4=36.

Ответ:36

Комментарий:
Непонятно, откуда взялись p, q, и r.

Вопрос **5**
Выполнен
Баллов: 20 из 20

При каких n клетчатую доску $n \times n$ можно разбить по клеточкам на один квадрат 2×2 и некоторое количество полосок из пяти клеток так, что квадрат будет примыкать к стороне доски?

Всего будет 4 + 5к клеток, где к - количество полосок.

Тогда n^2=4+5k

тогда n^2=4 (mod 5)

Откуда n = 5t + 2 или n = 5t + 3

Пусть n = 5t + 3 Тогда:

Расположим квадрат 2*2 около верхней стороны (если нет перевернем доску)

Заметим, что в строке осталось (5t + 1) клеток, тогда точно есть одна вертикальная полоска с верхней точке в верхней строке. Назовем её обязательной. (если есть еще вертикальные полоски с началом в верхней строке, то они в количестве 5m, их назовем необязательными)

рассмотрим вторую строчку таблицы: в ней 2 клетки заняты квадратом, одна обязательной полоской, оставшиеся 5t либо не заняты, либо заняты необязательными. Тогда количество пустых клеток в этой строке 5t - 5m, заполняется горизонтальными полосками или необязательными полосками.

Рассмотрим 3 строку

в ней одна клетка занята обязательной полоской, оставшиеся 5t + 2 либо не заняты, либо заняты необязательными, причем необязательных полосок кратно 5. Тогда в этой строке появится еще 2 обязательных полоски.

рассмотрим 4 строку

в ней 3 клетки заняты обязательными полосками, оставшиеся 5t либо не заняты, либо заняты необязательными в количестве кратном 5. Тогда пустые клетки в этой строке заполняется горизонтальными полосками или необязательными полосками.

рассмотрим 5 строку

в ней 3 клетки заняты обязательными полосками, оставшиеся 5t либо не заняты, либо заняты необязательными в количестве кратном 5. Тогда пустые клетки в этой строке заполняется горизонтальными полосками или необязательными полосками.

рассмотрим 6 строку

в ней 2 клетки заняты обязательными полосками, оставшиеся 5t либо не заняты, либо заняты необязательными в количестве кратном 5. Также данная строка не завершает таблицу, т.к. обязательные полоски, начавшиеся в 3 строке еще продолжаются. Значит в этой полоске появится еще одна новая обязательная полоска.

Получившаяся ситуация аналогична исходной: в строках 6 и 7 образовался квадрат 2*2 из обязательных полосок. Значит дальнейшее появление обязательных полосок будет происходить аналогично строкам 1-5. Так как ни на каком из моментов в этих строках таблица не могла закончиться, то и в последовательных аналогичных ситуациях таблица закончиться не сможет.

Значит вариант с n = 5k + 3 не подходит.

Рассмотрим n = 5k + 2. Тогда квадрат 2*2 поместим в левый верхний угол. Оставшуюся часть доски разделим на 2 полосы 2*(n-2) (вертикальную и горизонтальную справа и снизу от квадрата). Тогда эти полосы 2*(n-2), т.е. 2*5к, тогда их можно разбить на полоски по 5.

Оставшаяся часть доски - квадрат (n-2)*(n-2), т.е. 5к*5к. Его также можно разбить на полоски по 5. Значит случай n = 5k + 2 подходит.

Ответ: при n = 5k + 2.

Комментарий:

« ПРЕДЫДУЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 13

СЛЕДУЮЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ »
Вариант 21

Очевидно $n \neq 1$. Пусть по кругу стоят числа a_1, a_2, a_3,….a_7 (по часовой стрелке). Предположим, что n кратно 2. Тогда a_1 ,a_3 ,a_5 имеют попарно различные остатки при делении на 2, противоречие. Предположим, что $n=p^k$, где p простое, k натуральное. Тогда $a_1 + a_2 \vdots p$, $a_2 + a_3 \vdots p$, $a_3 + a_4 \vdots p$ $a_1 + a_4 = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) - (a_2 + a_3) \vdots p$, противоречие.

Предположим, что n кратно 3. Пусть $a_i \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 3)$. Тогда вводя циклическую нумерацию то есть $a_{m+7} = a_m$ при $m \in Z$. Получим $a_{i+2}, a_{i+3}, a_{i+4}, a_{i+5} \neq 0 (\mathrm{mod}\ 3)$. $a_{i+2} + a_{i+4} \neq 0 (\mathrm{mod} 3)$.(Аналогично , $a_{i+3} \equiv a_{i+5}$ (mod 3) и $a_{i+2} \equiv a_{i+5}$ (mod3)). Если при этом $n=3p^k$, где p простое, $p \neq 3$, k натуральное, то $a_{i+2} + a_{i+3} \vdots p$, $a_{i+3} + a_{i+4} \vdots p$, $a_{i+4} + a_{i+5} \vdots p \Rightarrow a_{i+2} + a_{i+5} = (a_{i+2} + a_{i+3}) + (a_{i+4}\ a_{i+5}) - (a_{i+3} + a_{i+4}) \vdots p$, противоречие. Посмотрим, возможно ли $n=3p^k$, если $a_i \neq 0 (\mathrm{mod}\ 3) \forall i$. Тогда, с учетом этого, $a_i \neq a_{i+2} (\mathrm{mod}\ 3) \forall i \Rightarrow a_i \equiv a_j (\mathrm{mod}\ 3) \forall i, j$ (т.к $a_1 \equiv a_3 \equiv a_5 \equiv a_7 \equiv a_2 \equiv a_4 \equiv a_6 (\mathrm{mod}\ 3)$)(=> пример с a_i подходит и для $n=p^k$ (т.к среди сумм $a_i + a_j$ нет кратных 3), противоречие поэтому $n \neq 3p^k$.

Значит, у n есть минимум 2 простых и различных делителя, больше 3, то есть $n \geq 35$. Пример на n=35: $a_1=31$ $a_2=14$ $a_3=7$ $a_4=8$ $a_5=20$ $a_6=30$ $a_7=19$

Ответ 35