	ol2232762 ol2232762
Тест начат	понедельник, 14 Февраль 2022, 10:05
Состояние	Завершено
Завершен	понедельник, 14 Февраль 2022, 14:05
Прошло времени	3 час. 59 мин.
Оценка	**65,00** из 100,00

Вопрос
Инфо

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 5 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

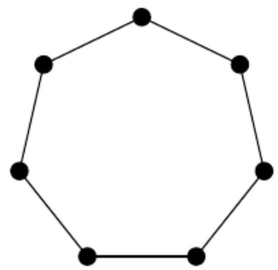
Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос **1**

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Настя выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа так, чтобы для всех этих чисел выполнялось свойство:
если числа a и b не соединены отрезком, то разность $a-b$ должна быть взаимно проста с n, а если соединены, то числа $a-b$ и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1.
При каком наименьшем n существует такая расстановка?



Обозначим числа a1, a2, ..., a7 по часовой стрелке.

Очевидно, что если разность делится на простой делитель входящий в разложение числа n, то между числами составляющими эту разность будет ребро, ведь и n и эта разность делятся на одно и тоже число большее 1, а значит НОД > 1.

Заметим, что n не может делится ни на 2, ни на 3, т. к. тогда по принципу Дирихле нашлось 7/3=2.66.., хотя бы 3 числа с одинаковым остатком, но все попарные разницы этих чисел, тогда будут делится на 2 или на 3, но тогда у нас получится полный граф на 3 вершинах, но таковых на рисунке нет. Предположим, что число n делится только на один простой делитель, тогда все разницы по кругу делятся только на этот единственный простой делитель, а значит все числа равны по модулю этого простого делителя, а значит все попарные разности кратны этому делителю, что невозможно по рисунку. Предположим, что у n только 2 простых делителя, тогда заметим, что разность a1 - a2 и a2 - a3 не могут делится на один и тот же простой делитель, ведь тогда бы и разность (a1 - a3) = (a1 - a2) + (a2 - a3) делилась на этот простой делитель, что невозможно по рисунку. Тогда пусть a1 - a2 делится на первый простой делитель, a2 - a3 на второй, аналогично a3 - a4 на первый, ... , a6 - a7 делится на второй, a7 - a1 делится на первый, но тогда a7 - a1 и a1 - a2 делятся на первый простой делитель, но тогда a7 - a2 также делится на первый простой делитель, что невозможно по рисунку.

Значит у числа хотя бы 3 простых делителя отличных от 2 и 3. три самых минимальных простых числа это 5, 7 и 11, если возьмем больше то и n станет больше. n = 5 * 7 * 11 = 385.

Пример:

a1 = 1, a2 = 6, a3 = 20, a4 = 25, a5 = 32, a6 = 37, a7 = 23.

a1 - a2 = -5 НОД = 5, a1 - a3 = 19 НОД = 1, a1 - a4 = 24 НОД = 1, a1 - a5 = 31 НОД = 1, a1 - a6 = 36 НОД = 1.

a2 - a3 = -14 НОД = 7, a2 - a4 = 19 НОД = 1, a2 - a5 = 26 НОД = 1, a2 - a6 = 31 НОД = 1, a2 - a7 = 17 НОД = 1.

a3 - a4 = -5 НОД = 5, a3 - a5 = 12 НОД = 1, a3 - a6 = 27 НОД = 1, a3 - a7 = 3 НОД = 1.

a4 - a5 = -7 НОД = 7, a4 - a6 = 12 НОД = 1, a4 - a7 = 2 НОД = 1.

a5 - a6 = -5 НОД = 5, a5 - a7 = 9 НОД = 1.

a6 - a7 = -14 НОД = 7

a7 - a1 = -22 НОД = 11

Ответ: 385

Комментарий:

Вопрос **2**

Выполнен

Баллов: 5,00 из 20,00

При $x, y \in (0, 1]$ найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{(x^2 - y)\sqrt{y + x^3 - xy} + (y^2 - x)\sqrt{x + y^3 - xy} + 1}{(x - y)^2 + 1}.$$

ol2232762_2.pdf

Комментарий:
Не обосновано выполнение неравенства после замены.
Пример верный

Вопрос 3

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

На стороне AB остроугольного треугольника ABC отмечена точка M. Внутри треугольника выбрана точка D. Окружности ω_A и ω_B описаны вокруг треугольников AMD и BMD соответственно. Сторона AC вторично пересекает окружность ω_A в точке P, а сторона BC вторично пересекает окружность ω_B в точке Q. Луч PD вторично пересекает окружность ω_B в точке R, а луч QD вторично пересекает окружность ω_A в точке S. Найдите отношение площадей треугольников ACR и BCS.

< - обозначение углов

Лемма. две окружности пересекаются в двух точках P, Q через каждую точку пересечения провели прямые повторно пересекающиеся окружности в точка A, B и C, D соответственно.
Тогда AB || CD.
Доказательство: 2 случая AB не пересекло CD и пересекло в первой окружности, пересечение во второй окружности доказывается аналогично

1 случай. <ACQ = <QPB ,т. к. ACPQ - вписанный <QDP = 180 - <QPB, т.к. PQDB - вписанный <ACQ + <QDP = 180 => AC || BD ЧТД

2 случай. <ABP = <AQP, т.к. опираются на одну дугу <AQP=<PDC, т.к. PQCD - вписанный <ABP=<PDC - накрест-лежащие => AC || BD ЧТД

PR проходит через D и AB через M => по лемме BR || PA || AC

QS проходит через D и AB через M => по лемме SA || BQ || CB

ACBR - трапеция S(ACB)=S(ACR), т. к. высоты и основания равны

BCSA - трапеция S(ABC)=S(BSC), т.к. высоты и основания равны

S(ACR) = S(BSC)

S(ACR)/S(BCS)=1/1

Ответ: 1/1

Комментарий:

Вопрос **4**

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

В системе счисления с основанием r ($r \leqslant 100$) натуральное число x является двузначным с одинаковыми цифрами. Оказалось, что r-ичная запись числа x^2 четырехзначная, причем крайние цифры одинаковы, а средние равны нулю. При каких r такое возможно?

k = 2 a^2 = 7 a^2 = 14 - нет

Числа в скобочках будем считать в r-ичной системе исчисления.

^ - операция возведения в степень

<= - меньше или равно

x = (aa)= a*r + a = (r + 1)a, x^2 = (b00b) = b*r^3 + b=(r^3+1)b=(r+1)(r^2-r+1)b

x^2=(r+1)^2a^2 = (r+1)(r^2-r+1)b

(r+1)a^2 = (r^2 - r + 1)b

a^2 = (r^2 - r + 1)/(r+1)*b

a^2 = ((r - 2) + 3/(r+1))*b

a^2 = (r-2)*b + 3b/(r+1)

Заметим, что a^2 целое (r-2)*b тоже целое, значит 3b/(r+1) тоже целое, но b не делится на r+1, т. к. b < r, а 3b делятся на r + 1, а значит r + 1 делится на 3, ведь иначе при домножении b на 3 мы бы не получили число кратное r + 1.

Значит r = 3k - 1, где k - натуральное и т.к. r <= 100, то k <= 33

a^2 = (3k-3)*b + 3b/3k

a^2= (3k-3)*b + b/k. b/k - целое, значит b делится на k, но b < 3k - 1, Значит b либо k, либо 2k.

a^2 = (3k-3)*k + 1 = 3k^2 - 3k + 1 или a^2 =(3k - 3)2k + 2=6k^2-6k+2, но 6k^2 - 6k+2 не делится на 4 ни при каком остатке, а значит не может быть квадратом

Переберем k

k = 1 a^2 = 1 - подходит r = 2 a = 1 b = 1. (11)^2 = (1001)

k = 2 a^2 = 7 - нет

k = 3 a^2 = 19 - нет

k = 4 a^2 = 37 - нет

k = 5 a^2 = 61 - нет

k = 6 a^2 = 91 - нет

k = 7 a^2 = 127 - нет

k = 8 a^2 = 169 - да, r = 23 a = 13 b = 8, (13,13)^2=(8008)

k = 9 a^2 = 217 - нет

k = 10 a^2 = 271 - нет

k = 11 a^2 = 331 - нет

k = 12 a^2 = 397 - нет

k = 13 a^2 = 469 - нет

k = 14 a^2 = 547 - нет

k = 15 a^2 = 631 - нет

k = 16 a^2 = 721 - нет

k = 17 a^2 = 817 - нет

k = 18 a^2 = 919 - нет

k = 19 a^2 = 1027 - нет

k = 20 a^2 = 1141 - нет

k = 21 a^2 = 1261 - нет

k = 22 a^2 = 1387- нет

k = 23 a^2 = 1519 - нет

k = 24 a^2 = 1657 - нет

k = 25 a^2 = 1801 - нет

k = 26 a^2 = 1951 - нет
k= 27 a^2 = 2107 - нет

k = 28 a^2 = 2269 - нет

k = 29 a^2 = 2437 - нет

k = 30 a^2 = 2611 - нет

k = 31 a^2 = 2791 - нет

k = 32 a^2 = 2977 - нет

Ответ r = 2 r = 23

Комментарий:

Вопрос **5**

Нет ответа

Балл: 20,00

У параллелепипеда $a \times b \times c$ грани разбиты на единичные клетки. Имеется также большое количество трехклеточных полосок, которые можно перегибать по границам клеток. При каких a, b и c три грани параллелепипеда, имеющие общую вершину, можно полностью обклеить полосками без наложений и зазоров так, чтобы клетки граней и полосок совпадали?

Заметим, что $x^2 \le x$ и $x^3 \le x$ при $0 < x \le 1$.

Тогда если заменить x^2, x^3 на x и y^2, y^3 на y, то все значения в выражении, хотя бы не уменьшатся даже, если $(x^2 - y)$ или $(y^2 - x)$ поменяет знак, то только с отрицательного на положительный, а значит всё равно значение не уменьшить

Получаем

$$A = \frac{(x^2 - y)\sqrt{y + x^3 - xy} + (y^2 - x)\sqrt{x + y^3 - xy} + 1}{(x - y)^2 + 1}$$
$$\ge \frac{(x - y)\sqrt{y + x - xy} + (y - x)\sqrt{x + y - xy} + 1}{(x - y)^2 + 1}$$
$$= \frac{(x - y)\sqrt{y + x - xy} - (x - y)\sqrt{x + y - xy} + 1}{(x - y)^2 + 1} = \frac{1}{(x - y)^2 + 1}$$
$$\ge \frac{1}{1} = 1$$

Равенство достигается при x = 1 и y = 1.

Ответ: 1