	ol2244386 ol2244386
Тест начат	понедельник, 14 Февраль 2022, 10:07
Состояние	Завершено
Завершен	понедельник, 14 Февраль 2022, 14:05
Прошло времени	3 час. 57 мин.
Оценка	**63,00** из 100,00

Вопрос
Инфо

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 5 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

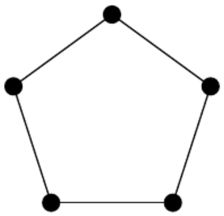
Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос **1**

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Костя выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа так, чтобы для всех этих чисел выполнялось свойство:
если числа a и b не соединены отрезком, то сумма $a + b$ должна быть взаимно проста с n, а если соединены, то числа $a + b$ и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1.
При каком наименьшем n существует такая расстановка?



Назовем вершины этой фигуры 1,2,3,4,5(по кругу)

n > 1 по условию. Докажем, что n нечетное. Пусть n четное, тогда чтобы выполнялось условие, сумма значений вершин, которые не соединены прямой должны быть нечетными. Рассмотрим сумму значений в вершинах 1 и 3, 1 и 4, 2 и 4, 2 и 5, 3 и 5, тогда пусть значение в вершине 1 – нечетное, тогда значение в 3 – четное, значение в 4 – четное, значение в 2 – нечетное, значение в 5 – четное, и по условию(из-за того, что 3 и 5 соединены) 3 должна иметь нечетное значение, но ранее мы поняли, что 3 имеет четное значение. Получили противоречие, значит n нечетное.

Пусть n – простое и n не равно 2, тогда НОД соседних вершин = n = p. Значит суммы 1-й + 2-й делится на p и 2-й + 3-й делится на p, следовательно, значение 1-й = значению 2-1 по модулю p. Сумма 1-й и 5-й делится на p и сумма 4-й и 5-й делится на p, следовательно значение 1-й равно значению 4-й по модулю p. Но сумма 1-й + 4-й вершин делится на p, следовательно, значение 3-й + значение 4-й по модулю p = 0, следовательно 2 * значение 1-й вершины по модулю p = 0, но p не делится на 2, значит значение 1-й вершины = p. Аналогичным способом рассматриваем 3-ю вершину и получаем, что значение 3-й вершины равно p, следовательно сумма значений 1-й и 3-й делится на p. Противоречие, т.к. в условии сказано, что вершины, не соединенные друг с другом в сумме не должны делиться на исходное число n, а тут сумма будет делиться, следовательно n – не простое число.

n = 9 не подходит, т.к. этот случай аналогичен случаю с n = 3. Следующее непростое нечетное число – 15. Оно подходит. Приведем пример для n = 15. Числа 1, 2, 3, 6, 14(расположены по кругу)

Ответ:15

Комментарий:

Вопрос 2

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

При $x, y, z \in (0, 1]$ найдите минимальное значение выражения

$$A = \frac{(x+2y)\sqrt{x+y-xy} + (y+2z)\sqrt{y+z-yz} + (z+2x)\sqrt{z+x-zx}}{xy+yz+zx}.$$

Заметим, что sqrt(x + y - xy) ≥ y, т.к   x + y ≥y(x + y), если y ≤ 1, что равносильно x + y – xy ≥ y^2, а тогда sqrt(x + y – xy) ≥y. Аналогично докажем, что sqrt(x + y - xy) ≥ x. Тогда числитель ≥ (x+2y)x + (y+2z)y + (z+2x)z =x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + zy + zx), тогда изначальное неравенство ограничено снизу.

(x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx))/(xy + yz + zx) = ((x^2 + y^2 + z^2)/(xy + yz + zx)) + 2. ((x^2 + y^2 + z^2)/(xy + yz + zx)) ограничена снизу 1, т.к. x^2 + y^2 + z^2 ≥ xy + yz + xz, потому что (x^ 2 + y ^ 2) / 2 ≥ xy, (y^2 + z^2) ≥yz, (x^2 + z^ 2)/2 ≥ xz, следовательно, Неравенство A ≥ 3. 3 можно получить при x=y=z=1

Комментарий:

Вопрос 3

Выполнен

Баллов: 18,00 из 20,00

На сторонах BC и AD вписанного четырехугольника $ABCD$ отмечены точки K и M соответственно, причем $BK : KC = AM : MD$. На отрезке KM выбрана такая точка L, что $KL : LM = BC : AD$. Найдите отношение площадей треугольников ACL и BDL, если известно, что $AC = p$ и $BD = q$.

Обозначим точкой O пересечение диагоналей. Пусть DO - биссектриса угла AOB. Докажем, что BD/AD = BC/AD Треугольник BOC подобен треугольнику AOD, поэтому BO/AO = BC/AD, но биссектриса делит сторону в отношении прилежащих сторон, поэтому BD/AD=BO/AD = BC/AD. Аналогично с CQ/QD=BC/AD. Пусть теперь точка K движется линейно по вектору BC, т.е. вектор BK = t * вектор BC, но тогда M движется Линейно, т.к. вектор AM = t * вектор AD. Мы знаем, что L делит KM в отношении Dc / AD, поэтому точка L тоже движется линейно. Это следует из того, что точка движется линейно тогда и только тогда, когда ее координату можно записать в виде k(t)x + b(t) = y. Если координаты точки k и точки M так записывают, то очевидно, координата L тоже. Поэтому точка L движется тоже по прямой при дыижении точек M и K . Но при t= 0 точка L совпадает с точкой P, а при t = 1, с точкой Q, поэтому L леджит на PQ, то есть лежит на биссектрисе угла AOB, поэтому расстояние от L до прямой BD равно расстоянию от L до AC. И т.к. площадь треугольника ACL это рассстояние от L до AC умножить на длину AC, то Площадь ACL / Площадь BDL = AC / BD = P/Q, то ответ p/q

Ответ:p/q

Комментарий:
Неаккуратная запись решения.

Вопрос **4**

Выполнен

Баллов: 0,00 из 20,00

Натуральное число x в системе счисления с основанием r ($r > 3$) имеет вид $\overline{ppqq}$, причем $q = 2p$. Оказалось, что r-ичная запись числа x^2 представляет собой семизначный палиндром с тремя одинаковыми средними цифрами. (Палиндромом называется число, которое читается одинаково слева направо и справа налево). При каких r такое возможно?

Я умножил в столбик число на себя, получил уравнение на каждую цифру в записи палиндрома
Сначала рассмотрим случай, когда 4 * з^2 < r. Оно одноциферное, но число 8 * p^2 точно не одноциферное. У 8 * p^2 первая цифра - 1, рассмотрим и получим противоречие. Значит у 4 * p^2 в записи 2 цифры

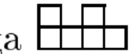
r = 3 * p^2 при условии, что r ≥ 8, но я

Комментарий:

Вопрос **5**

Выполнен

Баллов: 5,00 из 20,00

Доска $m \times n$ $(m, n > 5)$ разрезана на фигурки из шести единичных квадратиков вида  (фигурки можно поворачивать и переворачивать). При каких m и n такое возможно?

Пусть x – количество клеток на доске. x делится на 6, потому что доску полностью можно замастить фигурками состоящими из 6 клеток. Раскрасим доску в шахматную раскраску, тогда есть 2 типа фигурок. 1 – занимает 4 черных клетки и 2 белых, 2 – занимает 4 белых клетки и 2 черных. Пусть фигурок 1-го типа не равно фигуркам 2-го типа, тогда общая сумма занятых черных клеток не будет равна общей сумме занятых белых клеток, чего не может быть, т.к. x четно, а в шахматной раскраске такого поля кол-во черных клеток равно кол-ву белых клеток. Значит фигурок разных типов поровну. Пусть мы можем разрезать доску m*n на данные фигурки, тогда фигурок 1-го типа будет k, и фигурок 2-го типа тоже будет k. Любая такая расстановка равносильна замощению доски m*n k квадратами 3*4, т.к. из 2 данных фигурок можно собрать такой квадрат. Значит данными фигурками можно замастить любую доску, у которой одна сторона делится на 3, а другая сторона делится на 4.

Ответ: это возможно, когда либо m кратно 4, а n кратно 3, либо, когда m кратно 3, а n кратно 4

Комментарий:
Ответ неверный.

ПРЕДЫДУЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 27

СЛЕДУЮЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 17