Вопрос **Инфо**

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 6 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос 1

Выполнен

Баллов: 20 из 20

Коля поехал на электросамокате в магазин в соседнюю деревню со скоростью 10~км/ч. Проехав ровно треть всего пути, он понял, что при движении с прежней скоростью успеет точно к закрытию магазина, и увеличил скорость вдвое. Но когда он проехал ровно 2/3 всего пути, самокат сломался, и оставшуюся часть пути Коля прошел пешком. С какой скоростью он шел, если успел точно к закрытию магазина?

ol2250278_1.pdf

Комментарий:

Вопрос **2**

Выполнен

Баллов: 10 из 20

Найдите все целые a, для которых квадратный трехчлен $x^2 + ax + 2a$ имеет два различных целых корня.

ol2250278_2.pdf

Комментарий:
уравнение 4^2 + n^2=x^2 имеет в натур. числах 1 решение, а не беск. много.

n = + 3, x=+5.

Вы нашли корни, а не значения параметра

Вопрос 3

Нет ответа

Балл: 20

Положительные числа a, b и c удовлетворяют условию $abc(a+b+c)=3$. Докажите неравенство $(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8$.

Вопрос **4**

Выполнен

Баллов: 14 из 20

Какое наименьшее количество фишек можно расставить в клетках таблицы 99×99 так, чтобы в каждом квадрате 4×4 было не менее восьми фишек?

[ol2250278_4.pdf](ol2250278_4.pdf)

Комментарий:
верно, что "прямоугольник 3х4, в который должно быть поставлено еще как минимум новые 4 фишки". Суммарное количество посчитано неверно.

квадрат 3х3 в углу надо рассматривать отдельно

Вопрос **5**

Нет ответа

Балл: 20

Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Диагональ AC — биссектриса угла $\angle BAD$, точка M — середина стороны BC, а точка N — середина отрезка DO. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является вписанным тогда и только тогда, когда четырехугольник $ABMN$ является вписанным.

Вопрос **6**

Выполнен

Баллов: 12 из 20

Докажите, что у каждого из чисел $n! + 1$, $n! + 2$, \dots, $n! + n$ можно выбрать простой делитель, на который не делится ни одно из остальных.

ol2250278_6.pdf

Комментарий:
Утверждение :"n!\k делится на все числа от 1 до n кроме k," неверно, если n>=2k

У числа n!+k при простом k не всегда можно взять делитель k. Например, у числа n!+2 нельзя брать двойку, поскольку на нее также делится и число n!+4.

ПРЕДЫДУЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 21

СЛЕДУЮЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 13

Пусть 1\3 расстояния = x (км), а искомая скорость пешком равна y (км\ч).

Тогда время начиная со старта Коли до закрытия магазина равно 3x\10(все расстояние делить на его начальную скорость, ту с которой он планировал двигаться), и равно x/10+x/20+x/y.

x/10+x/20+x/y = 3x/10=6x/20

x/y= 3x/20, а значит y= 20/3(км\ч)

Ответ: 20/3 км/ч

$x^2 + ax + 2a = 0$ имеет 2 корня, а значит a^2 -8a >0, а значит a<0 или a>8, при этом корни уравнения равны $x = \frac{-\mathrm{a} \pm \sqrt{\mathrm{a}^2 - 8\mathrm{a}}}{2}$, заметим что если $\sqrt{\mathrm{a}^2 - 8\mathrm{a}}$ – целое число, то и при а(по модулю) четных (тогда под корнем четное, тогда и если применить операцию квадратного корня будет четное, чет-чет=чет, соответственно оба корня будут целые) и при нечетных (тогда под корнем нечетное, тогда и если применить операцию квадратного корня будет нечетное, нечет-нечет=чет, соответственно оба корня будут целые), а значит целые корни будут при любых а: a<0 или a>8, при которых $\sqrt{\mathrm{a}^2 - 8\mathrm{a}}$ – целое, т.е. при которых $\mathrm{a}^2 - 8\mathrm{a} = n * n$ где n – натуральное. У этого уравнения от а корни: $\mathrm{a} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 + \mathrm{n} * n}}{1}$(по формуле D\4), т.е. при всех n, при которых $4^2 + n^2$=x^2, при x – натуральных. Их бесконечно много, например при n = +- 3, x=+-5, и корни у исходного уравнения -2 и -6.

Ответ: 4851 фишка. Пример: таблица 99*99, в которой фишки лежат на каждой клетке каждого столбца с четным номером, если их пронумеровать начиная от самого левого столбца. (таких столбцов 49, в каждом 99 клеток), в нем в любом положении квадрата 4*4 в этом квадрате будет 2 столбца заполнены фишками, а значит будет ровно 8 фишек в каждом квадратике 4*4.

Посмотрим на квадрат 96*96, причем клетка с координатами 1:1(если пронумеровать столбцы таблицы 99*99 слева направо, а строки таблицы – сверху вниз) входит в этот квадрат. Он разбивается ровно на (96/4)^2 непересекающихся квадратов 4x4, в каждом из которых не менее 8 фишек, т.е. всего фишек как минимум 96*96/16*8=96*96\2=4608. Оставшаяся часть таблицы = «уголок» шириной 3 и длиной 99 , в него не помещается целый квадратик 4x4, но может быть «вставлена» часть его – прямоугольник 3x4, в который должно быть поставлено еще как минимум новые 4 фишки(так как от квадрата 96x96 в квадратике 4x4, содержащем это прямоугольник будет только 4 клетки, которые могут содержать фишки) значит нужно разместить еще 99*2-1=197 фишек. Посмотрим на квадратики 4x4, с правой верхней угловой клеткой в координатах 98:1 и 97:1. В квадратиках такого вида тоже должно быть как минимум 8 фишек, значит нужно разместить еще хотя бы 46 фишек, а знаит всего фишек как минимум 4608+197+46= 4851 фишек.

$n!+1$, $n!+2$, ……, $n!+n$. Заметим, что $n!+k = \{(n!\backslash k)+1\}*k$. Если k – простое число, то у чисел $n!+k$ выбираем простой делитель k (т.к. $n!\backslash k$ делится на все числа от 1 до n кроме k, то число $(n!\backslash k)+1$, как и число $\{(n!\backslash k)+1\}*k$ не делится ни на одно из чисел от 2 до n, кроме k, а так как k каждый раз разный, то ни у одного из чисел $n!+1$, $n!+2$, ……, $n!+n$ кроме $n!+k$ не будет делителя k), у числа $n!+1$ нет делителей среди чисел от 1 до n(при делении на каждое из них это число будет давать остаток 1), тогда это число – произведение нескольких(может быть само по себе простое, большее n, тогда выбираем его самого как единственный свой простой делитель) простых, больших n(из за этого мы не пересечемся со случаем когда k простой), тогда выбираем больший из них. Пусть k – составное число, равное $p*q*$…., где p,q простые(простых множителей может быть больше 2). Тогда $(n!\backslash k)+1$ не делится ни на одно число от 2 до n (потому что $n!\backslash k$ делится на все кроме k,и на k тоже делится так как делится на все простые числа, меньшие n, а так как k меньше n, то и все его простые делители тоже меньше n, т.е. присутствуют в разложении $n!\backslash k$ на простые множители), тогда $(n!\backslash k)+1$ = произведение нескольких(может быть само по себе простое, большее n, тогда выбираем его самого как единственный свой простой делитель) простых, больших n(из за этого мы не пересечемся со случаем когда k простой), тогда выбираем больший из них. Проверим, могут ли выбранные нами простые множители совпадать с какими то множителями у чисел $n!+k$. Пусть могут, тогда и число, в котором мы выбрали какое то простое число x, и число, которое кратно этому x, оба кратны x, которое больше n т.е. тогда разность между ними кратна этому простому числу, т.е. она больше или равна этому простому числу, т.е. она больше чем n, что невозможно, так как данные нам числа по условию последовательны, и их n штук, т.е. разность между ними не может превышать $n-1$, а значит все выбранные нами простые делители встречаются только в одном числе как простые множители