Вопрос **Инфо**

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 6 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос **1**

Выполнен

Баллов: 20 из 20

Коля поехал на электросамокате в магазин в соседнюю деревню со скоростью 10~км/ч. Проехав ровно треть всего пути, он понял, что при движении с прежней скоростью успеет точно к закрытию магазина, и увеличил скорость вдвое. Но когда он проехал ровно 2/3 всего пути, самокат сломался, и оставшуюся часть пути Коля прошел пешком. С какой скоростью он шел, если успел точно к закрытию магазина?

ol2230285_1.pdf

Комментарий:

Вопрос **2**

Выполнен

Баллов: 20 из 20

Найдите все целые a, для которых квадратный трехчлен $x^2 + ax + 2a$ имеет два различных целых корня.

ol2230285_2.pdf

Комментарий:

Вопрос 3

Нет ответа

Балл: 20

Положительные числа a, b и c удовлетворяют условию $abc(a+b+c)=3$. Докажите неравенство $(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8$.

Вопрос **4**

Выполнен

Баллов: 15 из 20

Какое наименьшее количество фишек можно расставить в клетках таблицы 99×99 так, чтобы в каждом квадрате 4×4 было не менее восьми фишек?

ol2230285_4.pdf

Комментарий:
оценка снизу найдена правильно. не менее 4801.
приведен неправильный пример.
Если сдвинуться от крайнего правого нижнего положения на одну клетку вверх и на одну вправо, получим квадрат, в котором 7 фишек.

Вопрос **5**

Нет ответа

Балл: 20

Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Диагональ AC — биссектриса угла $\angle BAD$, точка M — середина стороны BC, а точка N — середина отрезка DO. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является вписанным тогда и только тогда, когда четырехугольник $ABMN$ является вписанным.

Вопрос **6**

Нет ответа

Балл: 20

Докажите, что у каждого из чисел $n!+1$, $n!+2$, \dots, $n!+n$ можно выбрать простой делитель, на который не делится ни одно из остальных.

« ПРЕДЫДУЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 21

СЛЕДУЮЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 13 »

Найдем врем до закрытия магазины на момент того, когда он увеличил скорость. Так как если бы он оставил ту же скорость, то доехал точно к закрытию. Осталось 2/3 пути S, v = 10 км/ч, t = 2s/3 : v. t = 2s/3v. Посчитаем сколько времени он потратил на вторую треть пути. Прошел он s/3 со скоростью 2v. t2 = S/6v. Значит, пешком он шел t – t2 = 2s/3v – s/6v = 3s/6v = s/2v. Осталась одна треть пути, значит скорость равна s/3/(s/2v) = 2v/3 = 20/3 км/ч

Ответ: 20/3 км/ч = 6 2/3 км/ч

$X^2 + ax + 2a = 0$ и корни должны быть различные и целые

Запишем условие наличия двух различных корней. $D > 0$. $A^2 – 8a > 0$. а может принадлежать (-бесконечность; 0) и (8; + бесконечность).

Так как корни целые, то дискриминант должен быть полным квадратом, если корень из дискриминанта число не целое, то (-а + корень из дискр) / 2 не будет целым, т.к. мы только прибавляем целое число и делим. Значит, дискриминант – полный квадрат.

$A^2 – 8a = y^2$, y – целое число, не равное нулю, т.к. при 0 корни, которые не входят в область определения а

$D = 64 + 4 * y^2$. А тоже целое число, значит этот дискриминант тоже полный квадрат.

$64 + 4 * y^2 = z^2$. Будем рассматривать именно модули y, z, т.к. их знак нам не важен.

64 и $4 * y^2$ кратны четырем, значит, z^2 тоже кратно четырем, значит, z кратно 2. И $z > 64$, т.к. $y > 0$.

64 дает остаток 1 при делении на 3, квадраты могут давать только остатки 1 и 2, значит. Если y в квадрате дает остаток 1, то тогда z^2 дает остаток 2 при делении на 3, а такого быть не может. Значит, y кратен 3. Начнем рассматривать y кратные 3

У = 3: 64 + 4 * 9 = 100 – полный квадрат

У = 6: 64 + 4 * 36 = 208 – не является полным квадратом

У = 9: 64 + 4 * 81 = 388 – не является полным квадратом

У = 12: 64 + 144 * 4 = 640 – не является полным квадратом

У = 15: 64 + 225 * 4 = 964 – не является полным квадратом.

Наименьший квадрат после 964 – 1024, а наибольший до 964 – 961. 1024 – 961 = 63, а разность между квадратами только возрастает и между послед всегда нечетна, значит, дальше даже между двумя подряд идущими квадратами не может быть разницы 64, а значит и не при подряд идущих невозможно, т.к. значения возрастают, значит, $z^2 – y^2$ уже больше нигде не будет равно 64. Значит, при y = 3 единственное возможное.

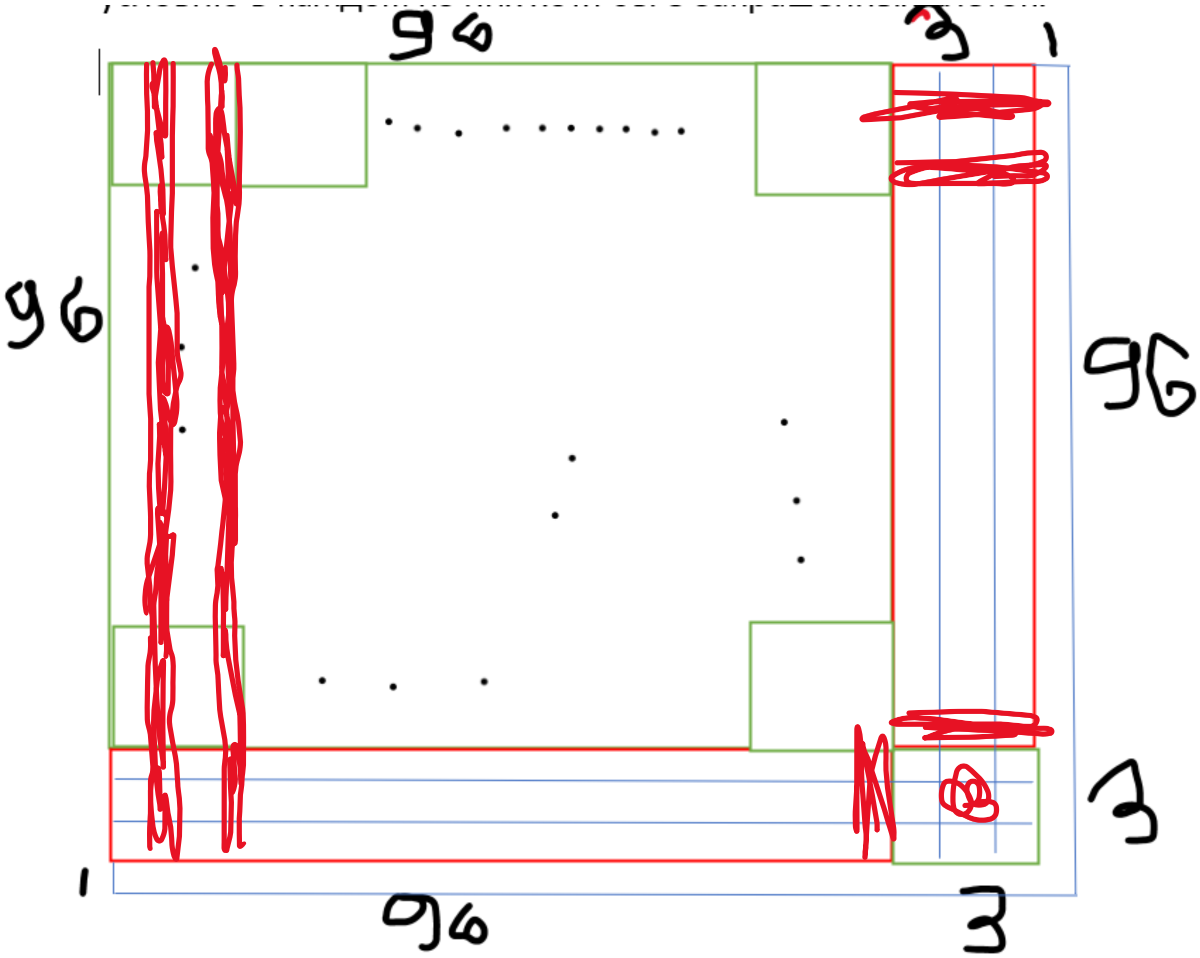
Тогда подставим y в выше записанное уравнение. $A^2 – 8a – 9 = 0$. D = 64 + 36 = 100. A1 = (8 + 10) / 2 = 9. A2 = (8 – 10) / 2 = -1.

Подставим оба значения а в уравнение из условия.

$X^2 + 9x + 18 = 0$. D = 81 – 18 * 4 = 81 – 72 = 9. X1 = -3 x2 = - 6. А и корни целые. Подходит

$X^2 – x – 2 = 0$. D = 1 + 8 = 9. X1 = 2 x2 =-1. А и корни целые. Подходит.

Ответ при а = 9 или а = -1



Разобьем часть 96*96 на квадраты непересекающиеся как показано на рисунке. В каждом из них хотя бы по 8 клеток закрашено. Значит, всего клеток там закрашено 96 / 4 * 96 / 4 * 8

Добавим по 1 * 99 справа и снизу. И тогда разобьем аналогично нижние части на квадраты 4 * 4. Их всего 96 : 4 * 2. В каждом из них также закрашено минимум 8 клеток, но 4 из них могут быть закрашены в добавленнлй части, значит, в изнчальной части миниимум 4 клетки. 48 * 4 клеток минимум.

Остался крайний квадрат 3 * 3, который мы добавили до 4 * 4. В нем также 8 клеток миниму, но 7 из них могут оказаться на добавленной части. Значит, в самом 3*3 минимум одна клетка.

Оценка минимум 24 * 24 * 8 + 48 * 4 + 1 = 4801 клеток закрашено. Пример на рисунке. В части 96 * 99 закрашиваем все четные столбцы. В каждом том квадрате закрашено