	ol2233176 ol2233176
Тест начат	понедельник, 14 Февраль 2022, 10:12
Состояние	Завершено
Завершен	понедельник, 14 Февраль 2022, 14:03
Прошло времени	3 час. 50 мин.
Оценка	**68,00** из 100,00

Вопрос
Инфо

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 5 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

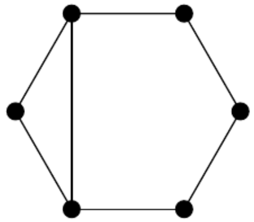
Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос **1**

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Костя выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа так, чтобы для всех этих чисел выполнялось свойство:
если числа a и b не соединены отрезком, то сумма $a+b$ должна быть взаимно проста с n, а если соединены, то числа $a+b$ и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1.
При каком наименьшем n существует такая расстановка?



Пример для n=15. (Обозначим крайнюю левую точку переменной A, которой соответствует число 6. Точка выше - B,3. C - 2. D - 1. E - 5. И нижняя левая точка - F,15).

Оценка: можем считать, что число n все простые входят в первой степени, так как (a,n) = 1 <=> (a, p1p2.... pkt) = 1, где n = p1^a1 * p2^a2 .... pk^ak.

Рассмотрим вершины A,C,E. В двух из них обязаны стоять числа одной четности, но они попарно не соединены => (2,n) = 1, то есть n нацело на 2 не делится.

Допустим, n - простое четное. Если число в вершине A взаимно простое с n, то в вершинах B и F по mod n стоят числа n - A, но тогда их сумма 2n - 2A взаимно проста с n - противоречие => A нацело делится на n => B нацело делится на n => C нацело делится на n, получается противоречие с тем, что A + C нацело не делится на n.

Таким образом, n есть произведение хотя бы двух нечетных простых => n больше либо равно 15,

ЧТД.

Комментарий:

Вопрос **2**

Выполнен

Баллов: 3,00 из 20,00

При $x, y, z > 0$ найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{(x-y)\sqrt{x^2+y^2} + (y-z)\sqrt{y^2+z^2} + (z-x)\sqrt{z^2+x^2} + \sqrt{2}}{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2+2}.$$

A = ((x-y) (sqrt (x^2 + y^2)) + (y - z) (sqrt (y^2+z^2) + (z-x) (sqrt (z^2 + x^2)) + sqrt (2)) : ((x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 + 2)

x,y,z > 0, Amax - ?

Пусть A > 1:sqrt(2) = > ((x-y) (sqrt (x^2 + y^2)) + (y - z) (sqrt (y^2+z^2)) + (z-x) (sqrt (z^2 + x^2)) + sqrt (2) > 1:sqrt(2) * ((x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 + 2)

x * sqrt(x^2+y^2) + y * sqrt(y^2+z^2) + z * sqrt(z^2 + x^2) > 1:sqrt(2) * ((x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 + 2) + y * sqrt(x^2+y^2) + z * sqrt(y^2+z^2) + x * sqrt(z^2 + x^2)

sqrt(2) * ((x * sqrt(x^2+y^2) + y * sqrt(y^2+z^2) + z * sqrt(z^2 + x^2)) > ((x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2) + 2 * y * sqrt ((x^2+y^2) : 2) + 2 * z * sqrt ((y^2+z^2) : 2) + 2 * x * sqrt ((x^2+z^2) : 2) больше либо равно (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 + y* (x+y) + z (y+z) + x (x+z) = 3 * (x^2+y^2+z^2) - xy - zx - yz

По неравенству Коши - Бунаковского получаем : sqrt(2) * (x*sqrt(x^2+y^2) + y * sqrt(y^2+z^2) + z * sqrt (z^2+x^2)) меньше либо равно sqrt(2) * (sqrt (x^2+y^2+z^2) * sqrt(2x^2+2y^2+ 2z^2)) = 2 * (x^2+y^2+z^2) => 2 * (x^2+y^2+z^2) > 3 * (x^2+y^2+z^2) - xy - yz - xz

xy + yz + xz > x^2 + y^2 + z^2

Но x^2+y^2+z^2 = (x^2+y^2):2 + (x^2+z^2) : 2 + (y^2+z^2) : 2 больше либо равно xy+xz+yz - противоречие => A меньше либо равно 1:sqrt(2)

При этом 1:sqrt(2) достигается на x=y=z=1.

Ответ: Amax = 1:sqrt(2)

Комментарий:
Оценка А неверна и не в ту сторону.

Вопрос 3

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

На сторонах AB и CD вписанного четырехугольника $ABCD$, не являющегося трапецией, отмечены точки P и R соответственно, причем $AP : PB = CR : RD$. На отрезке PR выбрана такая точка Q, что $PQ : QR = AB : CD$. Найдите отношение площадей треугольников AQD и BQC, если известно, что $AD = x$ и $BC = y$.

Продлим AD и BC до пересечения в точке K. Тогда, так как ABCD вписанный, треугольник AKB подобен треугольнику CKD. Так как AP:PB = CR:RD, то KP и KR соответственно чевианы в подобных треугольниках. Тогда, KP:KR = AB:CD = PQ:QR => KQ - биссектриса угла PKR по основному свойству биссектрисы. С другой стороны, угол AKP равен углу CKR как соответственные в подобных треугольниках => KQ - биссектриса угла CKD => высоты, опущенные из Q на BC и AD равны =>Отношение площадей AQD к BQC = отношению AD к BC = отношению x к y. (S_{AQD} : S_{BQC} = AD:BC = x : y).

Комментарий:

Вопрос **4**

Выполнен

Баллов: 10,00 из 20,00

Запись натурального числа x в системе счисления с основанием r ($r \leqslant 70$) получается n-кратным повторением некоторой пары цифр, где n — натуральное число. Оказалось, что r-ичная запись x^2 состоит из $4n$ единиц. Найдите все пары (r, x), при которых такое возможно.

$x = a * r^{(2n-1)} + b*r^{(2n-2)} + ... + a*r+b$, 0 меньше либо равно a,b меньше r

$x^2 = r^{(4n-1)} + r^{(4n-2)} + ... + 1 = (r^{(4n)} - 1) : (r-1)$

$x = a*r\,(r^{(2n-2)} + r^{(2n-4)} + ... + 1) + b*(r^{(2n-2)} + ... + 1) = (ar+b) * (r^{(2n)} - 1) : (r^2 - 1)$

$(ar+b)^2 * (r^{(2n)} - 1)^2 : (r^2 - 1)^2 = (r^{(4n)} - 1) : (r-1)$

$(ar+b)^2 = (r^{(2n)} + 1) : (r^{(2n)} - 1) = (r^{(2n)} + 1) : (r^{(2n)} - 1) * (r+1)^2 * (r-1)$

Заметим, что $(r^{(2n)} + 1, r^{(2n)} - 1)$ меньше или равно 2 => $(r+1)^2 * (r-1)$ нацело делится на $(r^{(2n)} - 1) : 2$, если r нечетно и нацело делится на $r^2 - 1$, если r четно. Значит, $(r+1)^2 * (r-1)$ больше или равно $(r^{(2n)} - 1) : 2$, легко видеть, что при $r > 2$ это может быть лишь при $n = 1$, а при $r=2$ должно быть $(r+1)^2 * (r-1)$ нацело делится на $r^{(2n)} - 1$ => $(r+1)^2 * (r-1) > r^{(2n)} - 1$ => n меньше либо равно 2, но $n=2$ не подходит под делимость => $n = 1$.

Тогда (в случае $r=2$) :

$(2a+b)^2 = 5:3 * 3^2$ - не может быть, так как 15 не квадрат.

Пусть $r > 2$ => $(ar + b)^2 = (r^2 + 1):(r^2 - 1) * (r+1)^2 * (r-1) = (r^2 + 1) * (r+1)$ => $(r^2 + 1) * (r+1)$ - полный квадрат

$(r^2 + 1, r + 1) = (r^2 - r, r+1) = (r - 1, r + 1) = 2$, так как иначе $r^2 + 1$ и $r + 1$ просты , $r^2 + 1$ не может быть квадратом => противоречие, значит r - нечетное.

При этом $r^2 + 1 = 2 * t^2$, $r + 1 = 2 * s^2$. Нам достаточно перебрать все нечетные r до 70, такие что $r+1 = 2*s^2$, подходит лишь $r = 1$ => $(a+b)^2 = 4$, $a + b = 2$, то есть $x=2$.

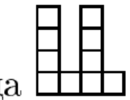
Ответ: (1,2)

Комментарий:
Ответ неверный.

Вопрос **5**

Выполнен

Баллов: 15,00 из 20,00

Доска $m \times n$ $(m, n > 15)$ разрезана на фигурки из десяти единичных квадратиков вида  (фигурки можно поворачивать и переворачивать). При каких m и n такое возможно?

Заметим, что мы сможем соорудить прямоугольник 4x5. Высота - 5, ширина - 4.

Тогда мы можем собрать прямоугольник m * 20k, 20l * n, 4l * 5k, 5l * 4k, где m,n,l,k - каждые числа, принадлежащие N (чтобы m,n > 15).

Прямоугольники вида 4l * 5k и 5l * 4k собираются очевидно. Соберем m * 20k. Так как 5 и 4 взаимно просты, а m > 15, то существуют x,y принадлежащие N : m = 4x+5y (рисунок 1 word)

Раскрасим плоскость в шахматную раскраску квадратиками 2x2

Так заметим, что как бы мы ни положили нашу " букву Ц ", в ней всегда будет поровну белых и черных клеток => и в исходном прямоугольнике также => одна из его сторон нацело делится на 4. С другой стороны количество клеток в нем нацело делится на 5 => одна из его сторон нацело делится на 5 => вариантов, кроме описанных в примере, для прямоугольников быть не может.

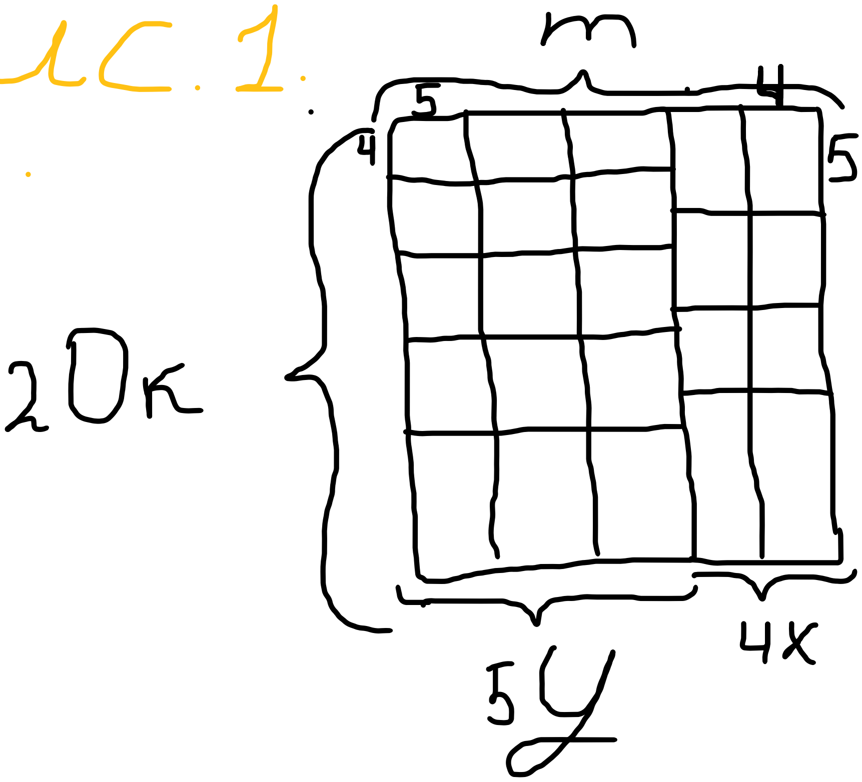
ol2233176_N5.pdf

Комментарий:
Недостаточно аргументирована оценка.

ПРЕДЫДУЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 28

СЛЕДУЮЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 18

Рис. 1



Аналогично собирается 20l * n.

УТВЕРЖДАЮ:
Ответственный секретарь Оргкомитета ОШ СПбГУ
Хуршудян А.Л. (______________)

ПРОТОКОЛ
рассмотрения апелляции участника Олимпиады школьников Санкт-Петербургского государственного университета

г. Санкт-Петербург № МАТ-31 *«31» марта 2022 г.*

Апелляционная комиссия в составе:

1. Евдокимова Татьяна Олеговна,
2. Белкова Анастасия Леонидовна,
3. Савельев Алексей Сергеевич.

рассмотрела апелляционное заявление участника Олимпиады школьников СПбГУ:

ФИО: ***Яртым Никита Юрьевич***

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады: ***Математика***

Количество набранных баллов до апелляции: ***68***

По результатам рассмотрения апелляционного заявления участника Олимпиады, Апелляционная комиссия приняла следующее решение: ***повысить оценку за работу на 12 баллов, признать участника победителем Олимпиады школьников СПбГУ по математике.***

Задача 2. Полный балл за задачу поставить нельзя, поскольку оценка, предшествующая неравенству Коши — Буняковского, не обоснована и выкладки написаны неаккуратно. Однако за решение можно добавить 12 баллов.

Задача 4. Правильный ответ (7,20), задача решена неверно.

Количество набранных баллов после апелляции: 80