	ol2216109 ol2216109
Тест начат	понедельник, 14 Февраль 2022, 10:16
Состояние	Завершено
Завершен	понедельник, 14 Февраль 2022, 13:40
Прошло времени	3 час. 24 мин.
Баллы	81/120
Оценка	**68** из 100

Вопрос
Инфо

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 6 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос 1

Выполнен

Баллов: 5 из 20

Петя и Вася одновременно выехали на самокатах навстречу друг другу. Ровно посредине между ними расположен мост. Дорога от Пети до моста асфальтированная, а от Васи до моста — грунтовая. Известно, что по грунтовой дороге они едут с одинаковыми скоростями, а по асфальту Петя движется в 3 раза быстрее, чем по грунтовке. Петя за час добрался до моста и, не останавливаясь, продолжил движение. Через какое время после выезда он встретит Васю?

За час Петя преодолел расстояние 3x а Вася x. Так как мост находился посередине расстояние от Васи до моста тоже 3x. Значит расстояние между ними через час равно 3x - x = 2x. Через полчаса Петя проедет еще 3/2x а Вася

1/2x. В сумме они проедут 3/2x + 1/2x = 2x то есть в этот момент они встретились. Значит Петя встретит Васю через

1.5 часа после выезда. Ответ: 1.5 часа.

Комментарий:
Результат неверный.

Вопрос **2**

Выполнен

Баллов: 6 из 20

Дан квадратный трехчлен $2x^2 - x - 36$. Найдите все целые x, при которых значения этого трехчлена равны квадрату простого числа.

Пусть 2x^2 - x - 36 = (x + 4)(2x - 9) = p^2 p - простое число тогда либо одна из скобок равна 1 либо обе скобки равны p. x + 4 = 1 x = -3 2x - 9 = -15 тогда (x+4)(2x - 9) = -15 не подходит

2x - 9 = 1 x = 5 тогда (x+4)(2x-9) = 9 = 3^2 подходит

x + 4 = 2x - 9 = p x = 13 (x+4)(2x-9) = 17^2 подходит

Ответ 5 , 13

Комментарий:
обоснование неверное, перебор вариантов неполный

Вопрос **3**

Выполнен

Баллов: 20 из 20

Положительные числа a, b и c удовлетворяют условию $abc(a+b+c)=ab+bc+ca$.
Докажите неравенство $5(a+b+c)\geqslant 7+8abc$.

Если abc >= 1 то ab + bc + ca >= a + b + c

5(a + b + c)^2 >= 5(3ab + 3bc + 3ac) = 15(ab + bc + ca) = 8(ab + bc + ca) + 7(ab+ bc +ca) >= 8(ab+bc+ca) + 7(a+b+c) =

= 8abc(a+b+c) + 7(a+b+c) Сокращая на a +b +c получаем 5(a+b+c) >= 7 + 8abc.

Пусть abc <1   По условию abc(a+b+c) = ab + bc + ca <=> a + b + c = 1/a + 1/b + 1/c

(a + b + c)(1/a + 1/b + 1/c) >= 9 по неравенству Коши => a + b + c >= 3 =>

7 + 8abc < 7 + 8 = 15 <= 5(a + b + c)

Комментарий:

Вопрос **4**

Выполнен

Баллов: 10 из 20

У Маши есть 1000 бусинок 50 различных цветов, по 20 бусинок каждого цвета. При каком наименьшем n для любого способа собрать из всех бусинок ожерелье можно выбрать n последовательных бусинок, среди которых есть бусинки 25 разных цветов?

Ответ: 462

n < 462 не подходит потому что если бусинки расставить одноцветными группами по 20 то нельзя получить

> 24 цветов. 462 подходит потому что в любой последовательности из 462 бусинок >= 24 различных цвета

Тогда если ни в какой последовательности нет 25 цветов то в любой из них ровно 24 различных цвета бусинок.

Противоречие.

Комментарий:
Не обосновано, в чем противоречие в том, что n=462 подходит для любого способа сбора бус.

Вопрос **5**

Выполнен

Баллов: 20 из 20

Точки A_1 и B_1 — середины сторон BC и AC остроугольного треугольника ABC, точка M — середина отрезка A_1B_1. Точка H — основание высоты, опущенной из вершины C на сторону AB. Через точку M проведены окружности, касающиеся сторон BC и AC соответственно в точках A_1 и B_1. Обозначим вторую точку пересечения окружностей через N. Докажите, что точки H, M и N лежат на одной прямой.

Пусть X точка пересечения HA1 и окружности проходящей через M и касающейся BC

Y точка пересечения HB1 и окружности проходящей через M и касающейся AC

Тогда <MA1H = <MA1C тк точки H и C симметричны относительно A1B1

<MA1C = <MXA1 тк A1C касательная. => треугольник MA1X равнобедренный => MA1 = MX

Аналогично MB1 = MY => MA1 = MB1 = MX = MY => A1 , B1, X, Y лежат на одной окружности с центром в точке M

Тогда H как пересечение радикальных осей A1X и B1Y является радикальным центром 3 окружностей =>

H лежит на радикальной оси MN => H M N лежат на одной прямой.

Комментарий:

Вопрос **6**

Выполнен

Баллов: 20 из 20

У натурального числа n нет ни одного делителя d, удовлетворяющего неравенству $n^2 \leq d^4 \leq n^3$. Докажите, что n имеет простой делитель, четвертая степень которого больше, чем n^3.

Пусть не существует такого простого делителя. Тогда все простые делители p< n^(1/2)
Тогда d = n/p > n ^(1/2) а значит d > n^(3/4) так как по условию любой делитель либо < n^(1/2)

либо > n^(3/4). => p < n^(1/4) для любого простого делителя. Разложим n на простые множители

n = p1*p2 ...*pk какие то множители могут совпадать. Рассмотрим последовательность делителей вида

n/(p1*p2 ....*pi) i от 1 до k. Первый делитель n/p1 > n^(3/4) => n/p1*p2 > n^(3/4)/n^(1/4) = n^(1/2)

Тогда n/p1*p2 > n*(3/4) Тогда по индукции получаем что все делители в этой последовательности >n^(3/4)

Но n/p1*p2....*pk = 1 <= n^(3/4) Противоречие.

Комментарий:

« ПРЕДЫДУЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 12

СЛЕДУЮЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 22 »