	ol2246955 ol2246955
Тест начат	понедельник, 14 Февраль 2022, 10:07
Состояние	Завершено
Завершен	понедельник, 14 Февраль 2022, 14:04
Прошло времени	3 час. 56 мин.
Баллы	62/120
Оценка	**52** из 100

Вопрос **Инфо**

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 6 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос **1**

Выполнен

Баллов: 20 из 20

Петя и Вася одновременно выехали на самокатах навстречу друг другу. Ровно посредине между ними расположен мост. Дорога от Пети до моста асфальтированная, а от Васи до моста — грунтовая. Известно, что по грунтовой дороге они едут с одинаковыми скоростями, а по асфальту Петя движется в 3 раза быстрее, чем по грунтовке. Петя за час добрался до моста и, не останавливаясь, продолжил движение. Через какое время после выезда он встретит Васю?

Пусть расстояние от Пети до моста x , тогда и от Васи до моста x. Пусть скорость мальчиков на грунтовке равна V , тогда скорость Пети на асфальте равна 3V. Так как Петя за один час добрался до моста , то за этот час он проехал расстояние x и при это ехал по асфальту со скоростью 3V, значит 3V * 1(час) = x , в это время Вася двигался по грунтовке со скорость V, и он проехал расстояние V * 1(час) и из первого уравнение это расстояние равно x/3 , тогда расстояние между мальчиками после часа езды равно x+x-x-x/3=(2/3) * x , и теперь их общая скорость равна 2V, так как скорость Пети теперь равна V , а скорость Васи не менялась. Тогда время за которое они проедут это расстояние до встречи равно (2/3) * x / 2V= x/3V , из первого уравнения это время равно 1 часу. Тогда общее время до встречи равно 2 часам. Ответ: 2 часа.

Комментарий:

Вопрос **2**

Выполнен

Баллов: 10 из 20

Дан квадратный трехчлен $2x^2 - x - 36$. Найдите все целые x, при которых значения этого трехчлена равны квадрату простого числа.

Пусть f(x)=2x^2-x-36. Найдем корни f(x). D=1+4*2*36=289=17^2. x=(1+-17)/4. x1=4,5; x2=-4; Тогда (x-4,5)(x+4)=p^2. Тогда если x нечетное , то скобка x+4 нечетная, а скобка x-4,5 полуцелая , значит выражение слева от знака равенства будет полуцелым , а выражение справа целым , противоречие. Тогда x делиться на 2, пусть x=2k, заменим . (2k-4,5)(2k+4)=(4k-9)*(k+2)=p^2.Так как p-простое и обе скобки целые, то
(1) 4k-9=p , k+2=p; До множим второе равенство на 4 : 4k+8=4p и вычтем из второго первое: 17=3p, значит p не целое, так как 17 не кратно 3, противоречие.

В остальных случаях будем делать аналогичные преобразования с уравнениями:

(2) 4k-9=-p , k+2=-p; 4k+8=-4p, 17=-3p; значит p не целое, так как 17 не кратно 3, противоречие.

(3) 4k-9=1 , k+2=p^2; 4k+8=4p^2, 17=4p^2-1; 18/4=p^2; значит p не целое, противоречие.

(4) 4k-9=p^2 , k+2=1; 4k+8=4, 17=4-p^2; p^2=-13; противоречие, так как квадрат числа отрицательным быть не может.

(5) 4k-9=-1 , k+2=-p^2; 4k+8=-4p^2, 17=-4p^2+1; p^2=-4; противоречие, так как квадрат числа отрицательным быть не может.

(6) 4k-9=-p^2 , k+2=-1; 4k+8=-4, 17=-4+p^2; p^2=21; противоречие, так как 21 не квадрат натурального числа.

Мы рассмотрели все возможные случаи , во всех получили противоречия, тогда у данного уравнения нет корней.

Комментарий:
перебор полный, ошибка в разложении на множители
ответ неверный

Вопрос **3**

Выполнен

Баллов: 20 из 20

Положительные числа a, b и c удовлетворяют условию $abc(a+b+c) = ab+bc+ca$.
Докажите неравенство $5(a+b+c) \geqslant 7+8abc$.

Поделим обе части изначально равенства на abc, тогда a+b+c=1/a +1/b +1/c, по неравенству КБШ для дробей

1/a +1/b +1/c>=(3^2)/(a+b+c), тогда так как a+b+c=1/a +1/b +1/c, то a+b+c>=(3^2)/(a+b+c), значит (a+b+c)^2>=3^2, тогда a+b+c>=3;

Заметим, что неравенство можно до множить на выражения abc и a+b+c при этом знак неравенства не меняется , так выражения положительные, из-за того что числа a, b, c положительные.

Теперь выразим abc из исходного равенства и подставим в неравенство : 5(a+b+c)>=7+8(ab+bc+ca)/(a+b+c), теперь до множим обе части неравенства на (a+b+c): 5(a+b+c)^2>=7(a+b+c)+8(ab+bc+ca),

теперь преобразуем неравенство следующим образом: (a+b+c)^2+4*(a+b+c)^2>=7(a+b+c)+8(ab+bc+ca),

(a+b+c)^2+4a^2+4b^2+4c^2+8ab+8bc+8ac>=7(a+b+c)+8(ab+bc+ca), теперь сократим выражения 8(ab+bc+ca) с обеих сторон:

(a+b+c)^2+4a^2+4b^2+4c^2>=7(a+b+c) и поделим обе части неравенства на (a+b+c): a+b+c+4(a^2+b^2+c^2)/(a+b+c)>=7,

Теперь докажем , что (a^2+b^2+c^2)/(a+b+c)>=1, заметим , что по среднему квадратическому

((a^2+b^2+c^2)/3)^(1/2)>=(a+b+c)/3, теперь докажем , что (a+b+c)/3>=((a+b+c)/3)^(1/2), это неравенство поделим на левую часть

Тогда ((a+b+c)/3)^(1/2)>=1, возведем в квадрат обе части нашего неравенства , тогда (a+b+c)/3>=1, это верно так как в начале

мы доказывали , что a+b+c>=3, тогда ((a^2+b^2+c^2)/3)^(1/2)>=(a+b+c)/3>=((a+b+c)/3)^(1/2), значит

((a^2+b^2+c^2)/3)^(1/2)>=((a+b+c)/3)^(1/2), возведем в квадрат обе части нашего неравенства , тогда (a^2+b^2+c^2)/3 >=

>= (a+b+c)/3, до множим на 3, тогда a^2+b^2+c^2>=a+b+c, тогда (a^2+b^2+c^2)/(a+b+c)>=1 - верное неравенство , значит

4(a^2+b^2+c^2)/(a+b+c)>=4, так как a+b+c>=3, то a+b+c+4(a^2+b^2+c^2)/(a+b+c)>=4+3=7, тогда a+b+c+4(a^2+b^2+c^2)/(a+b+c)>=7

это верное неравенство и оно равносильно исходному, тогда мы доказали , что исходное неравенство верно.

Комментарий:

Вопрос **4**

Выполнен

Баллов: 12 из 20

У Маши есть 1000 бусинок 50 различных цветов, по 20 бусинок каждого цвета. При каком наименьшем n для любого способа собрать из всех бусинок ожерелье можно выбрать n последовательных бусинок, среди которых есть бусинки 25 разных цветов?

Ответ:462.

Оценка почему нельзя меньше: если расставить все бусинки 20 одного цвета , потом следующие 20 другого цвета и так далее, то n последовательных бусинок должны содержать 23 цвета целиком и еще хотя бы 2 цвета , то есть n хотя бы 23*20+2=462.

Почему этим количеством всегда можно обойтись , поймем что среди них есть всегда точно 24 цвета , так как 23*20 меньше n, пусть есть расстановка , в которой где бы не выбрать n подряд идущих , среди них только 24 цвета, тогда выберем наибольшее количество шариков подряд идущих одного цвета(цвета1) и возьмем n шаров начиная с первого шара цвета 1 и по часовой стрелке , тогда пусть крайний шар среди n последовательных цвета 2, тогда сдвинем всю цепочку n шаров на 1 , тогда самый левый шар цвет не сменил, значит и самый правый тоже , так как количество цветов не изменилось(в последовательности цвета 1 хотя бы 2 шара, так как иначе все шары просто чередуются и среди 462 будут шары 25 цветов), тогда будем так сдвигать и получим что цепочка из шаров цвета 2 имеет такую же длину что и цепочка шаров цвета 1 и так далее, тогда среди 461 шара с началом в самой длинной цепочке x шаров одного цвета и далее (461-x) шар , в следующих 461 шаре также в начале цепочка одноцветных шаров длины x и так далее(x длина наибольшей одноцветной последовательности), тогда так как 461 и 1000 взаимно просты то и сдвигаясь по кругу на 461 мы попадем во все цепочки(цепочки длины n в которых каждый шар был началом), тогда когда мы попадем в шар стоящий перед цепочкой длины x цвета 1 и в нем начинается новая цепочка длины x>=2 , значит этот шар имеет цвет 1 и длина была не максимальная одноцветной цепочки. Противоречие.

Комментарий:
Обоснование с описанием сдвига не полное.

Вопрос **5**

Выполнен

Баллов: 0 из 20

Точки A_1 и B_1 — середины сторон BC и AC остроугольного треугольника ABC, точка M — середина отрезка A_1B_1. Точка H — основание высоты, опущенной из вершины C на сторону AB. Через точку M проведены окружности, касающиеся сторон BC и AC соответственно в точках A_1 и B_1. Обозначим вторую точку пересечения окружностей через N. Докажите, что точки H, M и N лежат на одной прямой.

Опишем около треугольников AB1H и BA1H окружности , пусть K их вторая точка пересечения, проведем отрезки HK, KB1,

KA1, тогда AB1KH-вписанный и BA1KH-вписанный, продлим HK до пересечения с A1B1 и получим точку T;

Угол BAC=углу TKB1; угол ABC=углу TKA1; Поскольку A1B1 средняя линия, то она параллельна основания , тогда

угол CB1A1=углу CAB=углу TKB1, тогда окружность описанная около треугольника TKB1 будет касаться прямой AC

в точке B1, аналогично с окружностью описанной около треугольника TKA1 и прямой BC;

Докажем, что точка T середина A1B1 , тогда точка K будет равна точке N и точки M, N,H будут лежать на одной прямой.

Проведем CK, B1H, AK, HA1, KB; Так как B1 середина AC, то в прямоугольном треугольнике ACH , треугольник AB1H равнобедренный , значит угол CAB равен углу B1HA, тогда угол KHB1 равен углу TB1K, так как угол CB1K= углу KHA и

угол CB1T равен углу B1HA; Из вписанного CB1KA1 угол A1B1K равен углу KCA1; Из вписанного AB1KH угол B1HK равен углу B1AK; Тогда угол B1AK равен углу KCA1, аналогично, угол B1CK равен углу KBA1.

Докажем , что при таком условии прямая CK содержит симедиану треугольника ACB;

Заметим, что треугольник CKA подобен треугольнику BKC, тогда пусть коэффициэнт подобия равен m, тогда BC=m*AC;

CK=m*AK; Тогда в треугольнике AKC сторона CK=m*AK, значит, в треугольнике CKB сторона KB=m*CK, тогда KB=m^2*AK;

Заметим, что угол AKC равен углу CKB , тогда CK биссектриса треугольника AKB, тогда по свойству биссектрисы ,

AK/KB=AF/FB, где точка F точка пересечения прямой CK с отрезком AB, тогда заметим, что AC^2/CB^2=AF/FB, это свойтсво симедианы , тогда CK содержит симедиану треугольника ACB, так как треугольник B1CA1 гомотетичен треугольнику ACB, то CK также симедиана треугольника B1CA, теперь докажем если во вписанном четырехугольнике диагональ явдяется симедианой для какого-то треугольника , то и для всех треугольников точка пересечения диагоналей является основанием симедианы .

Пусть ABCD вписанный и точка E пересечение диагоналей и AE симедиана треугольника BAD , докажем, что CE симедиана треугольника BCD;

Пусть AD=m*AB, тогда ED=m^2 * BE; Треугольники ABE, DCE подобны и BEC, AED подобны.

Тогда CE/ED=CB/DA и CE/EB=CD/BA поделим первое на второе , тогда EB/ED=(BA*CB)/(DA*CD).

Подставим из известных соотношений AD и ED: 1/m^2=CB/(m*CD), до множим на m , тогда CD=m*CB, тогда отношение сторон такое , тогда CE симедиана. Тогда в исходной задаче во вписанном B1CA1K KC симедиана в треугольнике B1KA1, так как угол B1KC= углу B1A1C=углу TKA1, то CK симметрична TK относительно биссектрисы , тогда так как CK симедиана , то KT медиана , значит , точка T середина A1B1. Ч. Т. Д.

Комментарий:
"тогда угол KHB1 равен углу TB1K, так как угол CB1K= углу KHA и угол CB1T равен углу B1HA" - это не обосновано.

"Из вписанного AB1KH" - не обосновано.

"Заметим, что треугольник CKA подобен треугольнику BKC" - не обосновано.

итд

Вопрос **6**

Нет ответа

Балл: 20

У натурального числа n нет ни одного делителя d, удовлетворяющего неравенству $n^2 \le d^4 \le n^3$. Докажите, что n имеет простой делитель, четвертая степень которого больше, чем n^3.