	ol2211113 ol2211113
Тест начат	понедельник, 14 Февраль 2022, 10:07
Состояние	Завершено
Завершен	понедельник, 14 Февраль 2022, 14:05
Прошло времени	3 час. 57 мин.
Оценка	**58** из 100

Вопрос
Инфо

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 4 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос 1

Выполнен

Баллов: 7 из 10

Некоторый треугольник разрезали на пять маленьких треугольников так, как показано на рис. 1. Могли ли при этом все пять маленьких треугольников оказаться равными?

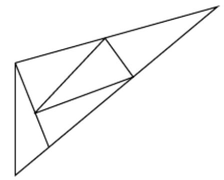


Рис. 1

ol2211113_1.jpg

Комментарий:
30 и 60

Вопрос **2**

Выполнен

Баллов: 41 из 50

На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Костя выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа, не превосходящие n, так, чтобы для всех поставленных им чисел выполнялось свойство: *если числа a и b соединены отрезком, то разность $a - b$ должна быть взаимно проста с n, а если не соединены, то числа $a - b$ и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1.* Например, для картинки на рис. 2 Костя взял $n = 45$ и подобрал подходящую расстановку — она показана на рис. 3.

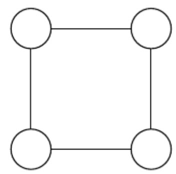


Рис. 2

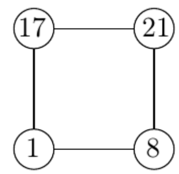


Рис. 3

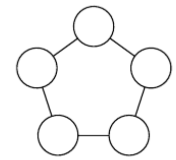


Рис. 4

а) При каком наименьшем n существует требуемая расстановка чисел на рис. 2?
б) Можно ли расставить числа в кружочках на рис. 4 при $n = 25$?
в) Можно ли расставить числа в кружочках на рис. 4 при $n = 39$?
г) При каком наименьшем n существует расстановка чисел в кружочках на рис. 4?

В прикреплённом файле сохранено тоже самое.

б) пронумеруем ячейки от 1 до пяти, начиная с левой нижней, по часовой стрелке. И расставим числа :

1 - число x

2 - число y

3 - число z

4 - число n

5 - число m

по условию задачи, разность z - x должна иметь общий натуральный делитель с числом 25, не равный 1, у числа 25 таких два: 25, 5, но по условию мы не можем ставить 0 в ячейки(т.к. мы его считаем не натуральным) => число 25 мы получить не можем => остаётся 1 допустимый делитель это 5. => разность z - x должна быть кратна 5. Пусть число x имеет остаток от деления на 5, равный k, тогда чтобы разность z - x делилась на 5,число z должно иметь остаток от деления на 5 равный 5 - k(если k = 0, тогда остаток равен 0) Проведём аналогичные рассуждения с разностью n - x, при этом у x будет тот же остаток k(т.к. оно никак не менялось) = > у числа n тоже будет остаток 5 - k => числа n и z должны иметь одинаковый остаток от деления на 5. Числа n и z стоят рядом => они соединены => разность z - n должна быть взаимно проста с числом 25 => она не должна делиться на 5. Тогда рассмотрим остаток от деления на 5 при вычитании этих чисел. При вычитании остатки вычитаются => остаток от деления на 5 должен быть не равен 0. z - n, сравнимо по модулю 5 с : 5 - k -(5 - k) = 5 - k - 5 + k = 0 => противоречие. Ответ : нет

в)пронумеруем ячейки от 1 до пяти, начиная с левой нижней, по часовой стрелке. И расставим числа :

1 - число x

2 - число y

3 - число z

4 - число n

5 - число m

число 39 имеет 3 делителя : 3, 13, 39, но исходя из пункта б) (его решения) делитель 39 не подходит. Значит остаются делители : 3, 13. Будем обозначать "связью" отрезок, между двумя различными числами, который не проведён. И будем называть "значением" связи число, которое является общим делителем между разностью соединенных числел и 39. (например : число x = 1 число z = 4. Они не соединены => между ними есть связь. z - x = 3 => связь равна трём). Из одного числа исходит две связи. И исходя из решения пункта б) обе связи, исходящие из числа должны быть разными, иначе получится тоже самое, что и в пункте б), т.е. два соседних числа будут иметь одинаковые остатки => будут иметь общие делители с числом 39. В данном пункте связи могут быть двух значений : 13 и 3. Посмотрим какие связи должны исходить из какого числа. Пусть число x и z имеют связь 3, => числа z и m должны иметь связь 13 => числа y и m должны иметь связь 3 => числа y и n должны иметь связь 13 => числа n и x должны иметь связь 3 => противоречие, т.к. числа x и z имеют связь 3 и числа n и x имеют связь 3. => Что бы решить задачу нужно иметь 3 разных значения связи. => Ответ : нет

г) пронумеруем ячейки от 1 до пяти, начиная с левой нижней, по часовой стрелке. И расставим числа :

1 - число x

2 - число y

3 - число z

4 - число n

5 - число m

Оценка :

Исходя из последних (наверно 3-х) предложений решения пункта в) мы имеем, что число должно иметь хотя бы 3 типа разных связей. Возьмём наименьшее такое число(в скобках число **подходящих** делителей):

1 - нет(0)

2 - нет(0)

3 - нет(0)

4 - нет(1)

5 - нет(0)

6 - нет(2)

7 - нет(0)

8 - нет(1) - 4 имеет делитель 2 => когда число делится на 4 оно делится и на 2 => аналогичные случаи тоже не подходят

9 - нет(1)

10 - нет(2)

11 - нет(0)

12 - нет(2)

13 - нет(0)

14 - нет(2)

15 - нет(2)

....

29 - нет(0)

30 - нет(3) - т.к. если число делится на 2 то числа должны стоять по кругу с чередующейся четностью, но если число x чет, то y нечет, то z чет, то n нечет, то m чет, то x нечет => противоречие(x должно быть и чет и нечет одновременно) => числа кратные 2 не подходят

....

105 - да(3) - 3, 5, 7

Пример:(все связь коммуникативны)

x = 14(связь с z = 3)

y = 6(связь с n = 3)

z = 8(связь с m = 7)

n = 9(связь с x = 5)

m = 1(связь с y = 5)

а) Оценка:

n = 1 не подходит, т. к. все числа будут одинаковые => соседние числа будут равны => их разность равна 0, а 0 делится на всё.

n = 2 подходит

Пример:(все связи коммуникативны)

пронумеруем ячейки, начиная с левой нижней, по часовой стрелке, от 1 до 4

ячейка 1 = 1(связь с третьей = 2)

ячейка 2 = 2(связь с четвёртой = 2)

ячейка 3 = 1

ячейка 4 = 2

ol2211113_2.pdf

Комментарий:
а) 3

верный пример с неверным ответом

б) 8

решение опирается на неверное утверждение фактически задача верно решена в следующем пункте

в) 10

г) 20

Вопрос **3**

Выполнен

Баллов: 10 из 10

На доске написано 2021 минусов. Петя и Вася играют в такую игру. Ход состоит в том, что можно один минус заменить на плюс, либо стереть один плюс и один минус, либо два минуса заменить на три плюса. Ходят по очереди, первым ходит Петя, проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

В прикреплённом файле тоже самое

- Ответ : Петя
- Стратегия:

Заметим, что каждая из предложенных операций уменьшает кол-во минусов(первая и вторая на 1, третья на 2) => что бы победить нужно что бы после последнего хода на доске остались только плюсы или не осталось ничего
Так же заметим, что операция 1 и операция 3 не зависят от кол-ва плюсов на данный момент => будем пользоваться только ими.

Начинает Петя и пользуясь третьей операцией убирает 2 минуса, и на доске остается 2019 минусов.

Заметим что число 2019 делится на 3

Далее ходит Вася. Он убирает либо 1 минус либо 2.

Что бы в конце, после последнего Петиного хода осталось 0 минусов нужно после каждого своего хода оставлять кол-во минусов кратное 3. => Если Вася убирает 1 минус своим ходом убираем 2 минуса, если Вася убирает 2 минуса убираем 1.

Следовательно за 1 "цикл"(ход Васи + ход Пети(первый ход Пети не учитывается)) будет убираться 3 минуса => через 2019 / 3 = 673 цикла мы получим 0 минусов. Т.к. цикл заканчивается ходом Пети, то Петя выиграет.

ol2211113_3.pdf

Комментарий:

Вопрос **4**

Выполнен

Баллов: 0 из 30

а) Имеется большая компания людей — больше 100 человек, в которой некоторые люди дружат. Верно ли, что каждую такую компанию можно разбить на две группы «дружественным способом», т. е. так, чтобы у каждого человека друзей в своей группе было больше либо равно, чем друзей в противоположной группе?

б) Докажите, что каждую компанию, в которую входит 2022 человека, можно разбить на 15 групп «недружественным способом», т. е. так, чтобы у каждого человека количество друзей в своей группе составляло не более $1/15$ от общего числа его друзей.

В прикреплённом файле тоже самое, что и здесь.

а) разбиваем этих людей на 2 группы следующим образом:

- В первой группе будут все.
- Во второй группе будет 0 человек (в задаче не сказано, что так нельзя)

Следовательно, если у людей из первой группы есть друзья, то они точно находятся в той-же группе => в противоположной группе у людей друзей нет => условие выполняется => Ответ : можно.

б)Первый шаг : изначально предположим, что все со всеми дружат. Тогда распределим их по группам вот так:

разделим 2022 на 15 получим 134, остаток 12 => распределим их на группы:

15 - 12 = 3 группы по 134 человека.

12 групп по 135 человек.

Тогда условие будет выполняться т.к. в группе у человека максимум 134 человека кроме него, и он со всеми дружит, а 134 - это меньше, чем все его друзья(т.е. 2021), делённые на 15, т.к. там получится 134 и остаток 11, что больше, чем 134.

Второй шаг : пройдемся по всем людям по порядку, с каждым проделывая следующие действия:

- Подходим к человеку, ссорим его со всеми, с кем он для определённого случая должен дружить.
- Помещаем его в группу, где меньше всего его друзей

Третий шаг: мы прошлись по всем и теперь видим, что группы не перестали подходить под условие, т.к. мы каждый раз помещали человека в группу с меньшим кол-вом его друзей, а если мы ссорим одного человека с другим, то мы ссорим и второго человека с первым, значит, что количество друзей, после ссор у человека, которого мы уже посадили уменьшиться не может => это способ как рассадить людей по группам, подходящим под условие. => чтд.

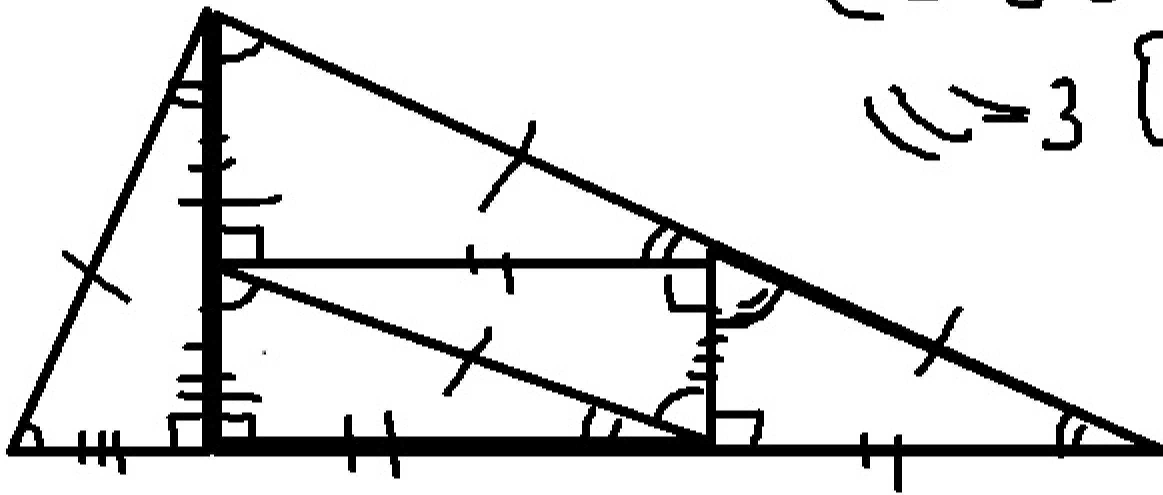
ol2211113_4.pdf

Комментарий:
а) 0

б) 0

ПРЕДЫДУЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Заключительный этап - Математика 6-7 21/22 (скрытый)

СЛЕДУЮЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 21



(= 60°

((= 30°

|| = 2 · |||

Эти Δ равны =>

=> Δ пр: подобн.

б) пронумеруем ячейки от 1 до пяти, начиная с левой нижней, по часовой стрелке. И расставим числа :

1 - число x

2 - число y

3 - число z

4 - число n

5 - число m

по условию задачи, разность z - x должна иметь общий натуральный делитель с числом 25, не равный 1, у числа 25 таких два: 25, 5, но по условию мы не можем ставить 0 в ячейки(т.к. мы его считаем не натуральным) => число 25 мы получить не можем => остаётся 1 допустимый делитель это 5. => разность z - x должна быть кратна 5. Пусть число x имеет остаток от деления на 5, равный k, тогда чтобы разность z - x делилась на 5,число z должно иметь остаток от деления на 5 равный 5 - k(если k = 0, тогда остаток равен 0) Проведём аналогичные рассуждения с разностью n - x, при этом у x будет тот же остаток k(т.к. оно никак не менялось) = > у числа n тоже будет остаток 5 - k => числа n и z должны иметь одинаковый остаток от деления на 5. Числа n и z стоят рядом => они соединены => разность z - n должна быть взаимно проста с числом 25 => она не должна делиться на 5. Тогда рассмотрим остаток от деления на 5 при вычитании этих чисел. При вычитании остатки вычитаются => остаток от деления на 5 должен быть не равен 0. z - n, сравнимо по модулю 5 с : 5 - k -(5 - k) = 5 - k - 5 + k = 0 => противоречие. Ответ : нет

в)пронумеруем ячейки от 1 до пяти, начиная с левой нижней, по часовой стрелке. И расставим числа :

1 - число x

2 - число y

3 - число z

4 - число n

5 - число m

число 39 имеет 3 делителя : 3, 13, 39, но исходя из пункта б) (его решения) делитель 39 не подходит. Значит остаются делители : 3, 13. Будем обозначать "связью" отрезок, между двумя различными числами, который не проведён. И будем называть "значением" связи число, которое является общим делителем между разностью соединенных чисел и 39.(например : число x = 1 число z = 4. Они не соединены => между ними есть связь. z - x = 3 => связь равна трём). Из одного числа исходит две связи. И исходя из решения пункта б) обе связи, исходящие из числа должны быть разными, иначе получится тоже самое, что и в пункте б), т.е. два соседних числа будут иметь одинаковые остатки => будут иметь общие делители с числом 39. В данном пункте связи могут быть двух значений : 13 и 3. Посмотрим какие связи должны исходить из какого числа. Пусть число x и z имеют связь 3, => числа z и m должны иметь связь 13 => числа y и m должны иметь связь 3 => числа y и n должны иметь связь 13 => числа n и x должны иметь связь 3 => противоречие, т.к. числа x и z имеют связь 3 и числа n и x имеют связь 3. => Что бы решить задачу нужно иметь 3 разных значения связи. => Ответ : нет

г) пронумеруем ячейки от 1 до пяти, начиная с левой нижней, по часовой стрелке. И расставим числа :

1 - число x

2 - число y

3 - число z

4 - число n

5 - число m

Оценка :

Исходя из последних (наверно 3-х) предложений решения пункта в) мы имеем, что число должно иметь хотя бы 3 типа разных связей. Возьмём наименьшее такое число(в скобках число **подходящих** делителей):

1 - нет(0)

2 - нет(0)

3 - нет(0)

4 - нет(1)

5 - нет(0)

6 - нет(2)

7 - нет(0)

8 - нет(1) - 4 имеет делитель 2 => когда число делится на 4 оно делится и на 2 => аналогичные случаи тоже не подходят

9 - нет(1)

10 - нет(2)

11 - нет(0)

12 - нет(2)

13 - нет(0)

14 - нет(2)

15 - нет(2)

....

29 - нет(0)

30 - нет(3) - т.к. если число делится на 2 то числа должны стоять по кругу с чередующейся четностью, но если число x чет, то y нечет, то z чет, то n нечет, то m чет, то x нечет => противоречие(x должно быть и чет и нечет одновременно) => числа кратные 2 не подходят

....

105 - да(3) - 3, 5, 7

Пример:(все связь коммуникативны)

x = 14(связь с z = 3)

y = 6(связь с n = 3)

z = 8(связь с m = 7)

n = 9(связь с x = 5)

m = 1(связь с y = 5)

а) Оценка:

n = 1 не подходит, т. к. все числа будут одинаковые => соседние числа будут равны => их разность равна 0, а 0 делится на всё.

n = 2 подходит

Пример:(все связи коммуникативны)

пронумеруем ячейки, начиная с левой нижней, по часовой стрелке, от 1 до 4

ячейка 1 = 1(связь с третьей = 2)

ячейка 2 = 2(связь с четвёртой = 2)

ячейка 3 = 1

ячейка 4 = 2

- Ответ : Петя
- Стратегия:

Заметим, что каждая из предложенных операций уменьшает кол-во минусов(первая и вторая на 1, третья на 2) => что бы победить нужно что бы после последнего хода на доске остались только плюсы или не осталось ничего
Так же заметим, что операция 1 и операция 3 не зависят от кол-ва плюсов на данный момент => будем пользоваться только ими.

Начинает Петя и пользуясь третьей операцией убирает 2 минуса, и на доске остается 2019 минусов.

Заметим что число 2019 делится на 3

Далее ходит Вася. Он убирает либо 1 минус либо 2.

Что бы в конце, после последнего Петиного хода осталось 0 минусов нужно после каждого своего хода оставлять кол-во минусов кратное 3. => Если Вася убирает 1 минус своим ходом убираем 2 минуса, если Вася убирает 2 минуса убираем 1.

Следовательно за 1 "цикл"(ход Васи + ход Пети(первый ход Пети не учитывается)) будет убираться 3 минуса => через 2019 / 3 = 673 цикла мы получим 0 минусов. Т.к. цикл заканчивается ходом Пети, то Петя выиграет.