

	ol2235065 ol2235065
Тест начат	понедельник, 14 Февраль 2022, 10:08
Состояние	Завершено
Завершен	понедельник, 14 Февраль 2022, 14:04
Прошло времени	3 час. 55 мин.
Баллы	67/120
Оценка	56 из 100

Вопрос
Инфо

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 6 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос 1

Выполнен

Баллов: 20 из
20

Коля поехал на электросамокате в магазин в соседнюю деревню со скоростью 10 км/ч. Проехав ровно треть всего пути, он понял, что при движении с прежней скоростью успеет точно к закрытию магазина, и увеличил скорость вдвое. Но когда он проехал ровно $\frac{2}{3}$ всего пути, самокат сломался, и оставшуюся часть пути Коля прошел пешком. С какой скоростью он шел, если успел точно к закрытию магазина?

v - изначальная скорость самоката

u - скорость Коли пешком

s - дистанция между магазином и посёлком

t_1 - время прохождения трети расстояния со скоростью v

t_2 - время прохождения трети s со скоростью $2v$

t_3 - время прохождения трети s со скоростью u

По условию: $2t_1 = t_2 + t_3$

Значит $2(s/(3 * v)) = s/(3 * 2v) + s/(3 * u)$

$$2/v = 1/2v + 1/u$$

$$3/2v = 1/u$$

$$u = 2v/3 = 6 \frac{2}{3} \text{ км/ч}$$

Ответ: $u = 6 \frac{2}{3}$ км/ч.



Комментарий:

Вопрос **2**

Выполнен

Баллов: 20 из
20

Найдите все целые a , для которых квадратный трехчлен $x^2 + ax + 2a$ имеет два различных целых корня.

$x^2 + ax + 2a$ имеет 2 различных корня. Значит $D = a^2 - 8a = y^2$ (y - натуральное).

$$x_1 = (-a + y)/2 \text{ и } x_2 = (-a - y)/2$$

Если a делится (не делится) на 2, то y делится (не делится) на 2. Значит $-a \pm y$ делится на 2. Поэтому x_1 и x_2 - целые.

$$(a - 4)^2 = y^2 + 16$$

1) если $y^2 + 16 = (y + 1)^2$, то $y = 7.5$. Противоречие.

2) если $y^2 + 16 = (y + 2)^2$, то $y = 3$. Тогда $a = -1$ ($x_1 = 1$ и $x_2 = -2$) или $a = 9$ ($x_1 = -3$ и $x_2 = -6$).

3) если $y^2 + 16 = (y + 3)^2$, то $y = 1 \frac{1}{6}$. Противоречие.

4) если $y^2 + 16 = (y + z)^2$ ($z \geq 4$), то $16 = 2yz + z^2$ ($z^2 \geq 16$). Противоречие.

Ответ $a = -1$ и $a = 9$.

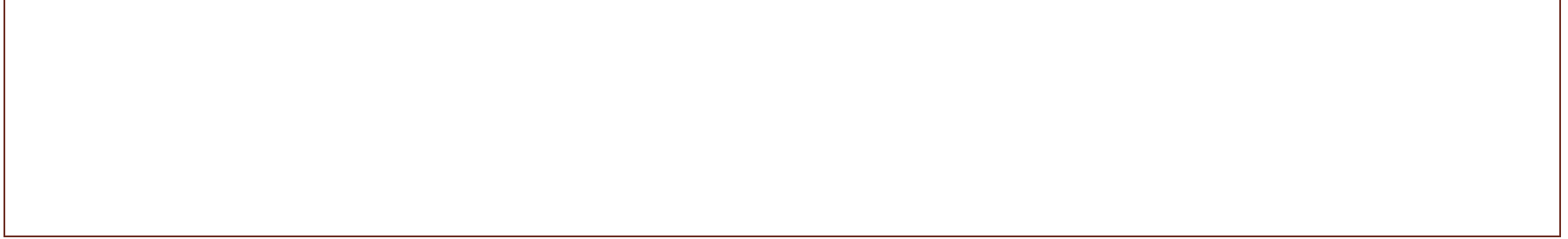
Комментарий:

Вопрос **3**

Нет ответа

Балл: 20

Положительные числа a , b и c удовлетворяют условию $abc(a + b + c) = 3$. Докажите неравенство $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8$.



Вопрос **4**

Выполнен

Баллов: 19 из
20

Какое наименьшее количество фишек можно расставить в клетках таблицы 99×99 так, чтобы в каждом квадрате 4×4 было не менее восьми фишек?

Оценка: Разобьём квадрат 99×99 на квадраты 4×4 , прямоугольники 3×4 и квадрат 3×3 .
Прямоугольники справа и снизу.

В любом квадрате 4×4 хотя бы 8 фишек (по условию).

В любом прямоугольнике 3×4 хотя бы 4 фишки.

В квадрате 3×3 хотя бы 1 фишка.

Значит всего хотя бы $8 * ((96 - 3)/4)^2 + 4 * (2 * (96 - 3)/4) + 1 = 4801$ фишка.

Пример на 4801:

кв 4×4

0001

0001

0011

1111

кв 3×4

0011

0001

0001

кв 4×3

000

000

100

111

кв 3×3

100

000

000

Ответ: 4801 фишка.

Комментарий:
написано

$$8 * ((96 - 3)/4)^2 + 4 * (2 * (96 - 3)/4) + 1 = 4801 \text{ фишка.}$$

правильно

$$8 * ((99 - 3)/4)^2 + 4 * (2 * (99 - 3)/4) + 1 = 4801 \text{ фишка.}$$

Вопрос **5**

Выполнен

Баллов: 8 из 20

Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O . Диагональ AC — биссектриса угла $\angle BAD$, точка M — середина стороны BC , а точка N — середина отрезка DO . Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является вписанным тогда и только тогда, когда четырехугольник $ABMN$ является вписанным.

Пусть $ABCD$ - впис. Докажем, что $ABMN$ - впис.

$ABCD$ - впис. Значит углы BCA и BDA равны. Значит углы BCA и ODA равны.

AC - бис. Значит углы BAC и CAD равны. Значит углы BAC и OAD равны.

Значит треугольники ABC и AOD подобны. Значит $AC/BC = AD/OD$. Значит $AC/MC = AD/ND$. Но углы MCA и NDA равны, так как углы BCA и BDA равны из вписанности $ABCD$. Значит треугольники AMC и AND подобны. Поэтому углы MAC и NAD равны, откуда углы MAN и CAD равны. Но углы CBD и CAD равны из вписанности $ABCD$. Значит углы MAN и MBN равны, откуда $ABMN$ - впис., чтд.

Мы доказали утверждение в 1 сторону.

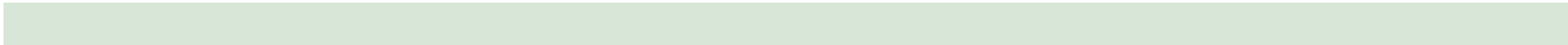
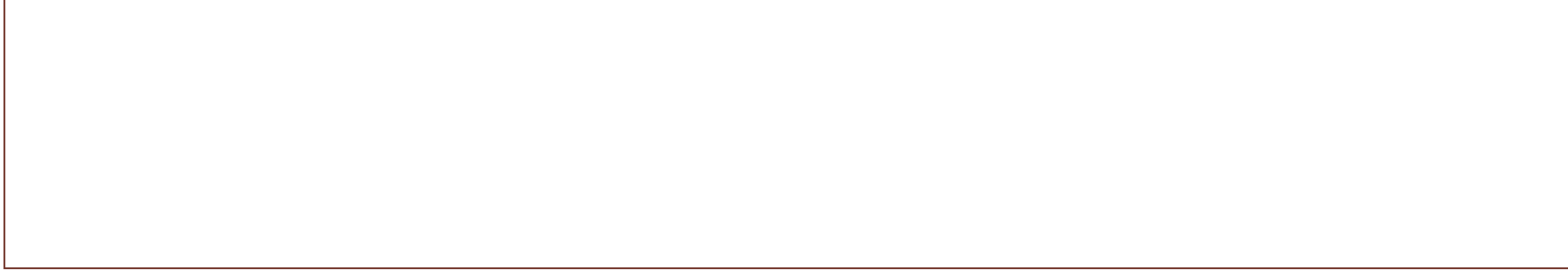
Комментарий:
правильное доказательство в одну сторону.

Вопрос **6**

Нет ответа

Балл: 20

Докажите, что у каждого из чисел $n! + 1$, $n! + 2$, \dots , $n! + n$ можно выбрать простой делитель, на который не делится ни одно из остальных.



ПРЕДЫДУЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 11

СЛЕДУЮЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 21

