	ol2204244 ol2204244
Тест начат	воскресенье, 27 Февраль 2022, 10:09
Состояние	Завершено
Завершен	воскресенье, 27 Февраль 2022, 14:05
Прошло времени	3 час. 55 мин.
Оценка	**75** из 100

Вопрос **Инфо**

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 5 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

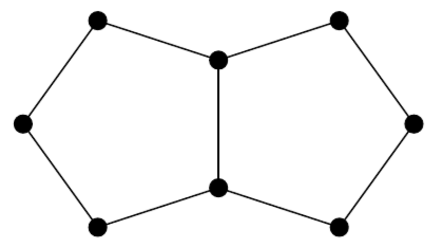
Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос **1**

Выполнен

Баллов: 18 из 20

На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Саша выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа так, чтобы для всех этих чисел выполнялось свойство:
если числа a и b не соединены отрезком, то сумма $a+b$ должна быть взаимно проста с n, а если соединены, то числа $a+b$ и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1.
При каком наименьшем n существует такая расстановка?



Ответ: n=35.

Назовём первой вершину, которая расположена посередине сверху и связана с 3 другими вершинами, а остальные назовём по часовой стрелке. Тогда в 1 вершину поставим 15, 2 - 34, 3 - 31, 4 - 19, 5 - 30, 6 - 12, 7 - 3, 8 - 27. Несложно проверить, что этот пример подходит под условие.

1) Докажем, что меньшие n нам не подойдут. Для начала поймём, что n нечётно. Действительно, если n кратно 2, то среди чисел в вершинах 1, 3, 7 должны быть два числа одной чётности. Но тогда их сумма кратна 2 и при этом должна быть взаимно проста с n. Значит n - нечётное.

2) Заметим, что можно считать, что все простые входят в n первой степени, так как наличие больших степеней никак не повлияет на условие и только увеличит n.

3) Докажем, что n не является простым числом (p). Рассмотрим фрагмент: вершины (1, 2, 3, 4). Пусть число в вершине 1 даёт остаток x от деления на p, тогда число в вершине 2 должно давать остаток (p-x), в вершине 3 - x, в вершине 4 - снова p-x. Таким образом, в вершине 1 и в вершине 4 сумма чисел делится на p, но они не соединены отрезком, что противоречит условию. Значит n имеет хотя бы два

различных простых делителя.

4) Покажем, что n не может быть вида 3*p, где p - простое число > 3. Заметим, что у нас хотя бы 3 ребра должны делиться на 3, т.к. среди фрагментов (1, 2, 3, 4), (4, 5, 1, 8) и (5, 6, 7, 8) в каждом по предыдущему шагу не могут все рёбра делиться на 3. Заметим, что всего кратных 3 чисел может быть не больше 2х, так как иначе был бы треугольник. Это означает, что у нас есть остатки 1 и 2.

Рассмотрим фрагменты (2, 3, 4) и (6, 7, 8). Заметим, отстаток - может быть максимум в одном фрагменте. Пусть в фрагменте (2, 3, 4) нет нулей, а во втором - есть (он там должен быть, так как нулей не больше двух). Тогда в (2, 3, 4) все должны быть 1. Заметим, что в фрагменте (1, 2, 3) должно быть ребро кратное 3. Тогда это может быть только ребро 1, 2, т.е. в вершине 1 стоит двойка, Но тгда в вершине 1 и в вершине 3 сумма кратна 3, значит

Комментарий:

Решение не завершено.

Вопрос **2**

Выполнен

Баллов: 17 из 20

При $x, y, z \geqslant 3$ найдите минимальное значение выражения

$$A = \frac{(x^3 - 24)\sqrt[3]{x+24} + (y^3 - 24)\sqrt[3]{y+24} + (z^3 - 24)\sqrt[3]{z+24}}{xy + yz + zx}.$$

Ответ: минимальное A = 1 (при x=y=z=3).

Докажем, что A всегда >=1.

Заметим, что по известному неравенству xy+yz+zx<=x^2+y^2+z^2

Если мы докажем, что (x^3-24)*"кубический корень из (x+24)" хотя бы >= x^2, то мы получим , что числитель хотя бы x^2+y^2+z^2. Так как все слагаемые положительны, можно будет сделать вывод, что A >= (x^2+y^2+z^2)/(x^2+y^2+z^2) т.е. A >= 1.

Докажем, что (x^3-24)*"кубический корень из (x+24)" >= x^2

Рассмотрим f(x) = "кубический корень из (x+24)" - (x^2)/(x^3-24)

Найдём производную этой функции. После преобразований получим:

f'(x)=1/3"(x+24) в степени -2/3"+(x^4+48x)/(x^3-24)^2

Как видно, при x хотя бы 3 f'(x)>0, значит f(x) возрастает на промежутке [3; + бесконечность)

Значит f(x) хотя бы f(3), т.е. хотя бы 0.

Так как x^3-24>=0, то отсюда следует нужное нам неравенство.

Мы доказали, что A хотя бы 1 и показали, что A=1 бывает. Значит минимальное значение A=1.

Комментарий:
Пропущены вычисления.

Вопрос **3**

Выполнен

Баллов: 20 из 20

На сторонах AB и AC остроугольного треугольника ABC отмечены соответственно такие точки K и L, что четырехугольник $BKLC$ является вписанным. Внутри этого четырехугольника выбрана точка M так, что прямая AM является биссектрисой угла BMC. Луч BM вторично пересекает описанную окружность треугольника AMC в точке P, а луч CM вторично пересекает описанную окружность треугольника AMB в точке Q. Найдите отношение площадей треугольников ALP и AKQ.

Ответ: отношение S = 1.

Докажем, что эти площади равны при помощи формулы S=(a*b*sinA)/2

1) Т.к. QAMB вписанный, то углы QAB и QMB равны.

Т.к. PAMC висанный, то углы PAC и PMC равны.

Т.к. углы QMB и PMC вертикальные, QAB PAC. Таким образом синусы углов QAK и PAL равны.

2) Заметим, что если AM - биссектриса угла BMC, то она же биссектриса угла QMP. Т.е. углы QMA и PMA равны. Т.к. QAMB вписанный, угол QBA равен углу QMA, который равен углу AMP и равен углу AQB. Т.е. AQ=AB, т.к. углы при основании равны. Абсолютно аналогично AP=AC.

3) По свойству секущих, так как BKLC вписанный, AK*AB=AL*AC. Тогда из предыдущего пункта AQ*AK=AL*AP.

4) S(AKQ)=(AQ*AK*sin(QAK))/2

S(ALP)=(AL*AC*sin(LAP))/2

Из доказанного выше видно, что эти площади равны.

Комментарий:

Вопрос **4**

Выполнен

Баллов: 0 из 20

Натуральное число x в системе счисления с основанием r $(r \leqslant 400)$ имеет вид $\overline{ppqq}$, причем $7q = 17p$. Оказалось, что r-ичная запись числа x^2 представляет собой семизначный палиндром с нулевой средней цифрой. (Палиндромом называется число, которое читается одинаково слева направо и справа налево). Найдите сумму r-ичных цифр числа x^2.

Комментарий:

Вопрос **5**

Выполнен

Баллов: 20 из 20

При каких n клетчатую доску $n\times n$ можно разбить по клеточкам на один квадрат 3×3 и некоторое количество полосок из семи клеток так, что квадрат будет примыкать к стороне доски?

Ответ: n=7k+3.

Нужно из левого верхнего угла вырезать квадрат 3 на 3, тогда под ним останется полоска 7k на 3, которая легко делится на полоски по 7, а оставшаяся часть - 7k+3 на 7k, также легко разбивается на полоски по 7.

1) Докажем, что другие n не подойдут. Из соображений пощади, n^2 должно давать остаток 2 от деления на 7. Это значит, что либо n=7k+3, либо n=7k+4.

2) Покажем, что n=7k+4 не подходит Допустим, нам удалось так разрезать доску 7k+4 на 7k+4. Покрасим нашу доску диагональной раскраской в 7 цветов диагоналями из левого нижнего угла в правый верхний.

Заметим, что полоска 1 на 7 всегда занимает по одной клетке каждого цвета.Мысленно уберём левый верхний квадрат 4 на 4 из доски . Оставшиеся клетки аналогично примеру легко разобьются на полоски 1 на 7. Это значит, что в оставшейся части поровну клеток каждого цвета.

Заметим, что в убранном квадрате 4 на 4 1 клетка - цвета 1 (далее кл. - клетка, цв. - цвета), 2 кл. цв. 2, 3 кл. цв. 3, 4 кл. цв. 4, 3 кл. цв. 5, 2 кл. цв. 6 и 1 кл. цв. 7. Можно считать, что вырезанный квадрат 3 на 3 прилегает к левой стороне доски. Тогда из соображений количества цветов он должен примыкать к левому краю по клеткам цветов 2, 3, 4.

3) Покрасим теперь доску диагональной раскраской в 7 цветов диагоналями из левого верхнего угла в правый нижний, начиная с левой нижней клетки. По абсолютно аналогичным соображениям квадрат 3 на 3 должен примыкать к левой границе по новым цветам 2, 3, 4. Но несложно установить, что новый цвет 2 - старый цвет 3, новый цв. 3 - старый цв. 2, новый цвет 4 - старый цвет 1. Это значит, что квадрат 3 на 3 сейчас примыкает к левой стороне по цветам 1, 2, 3, что противоречит предыдущему шагу. Таким образом, n=7k+4 не подходит.

Комментарий:

« ПРЕДЫДУЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
РЕЗЕРВ! Заключительный этап - Математика 10-11 21/22 (скрытый)

СЛЕДУЮЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 16 »