Вопрос **Инфо**

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 6 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос **1**

Выполнен

Баллов: 20 из 20

Коля поехал на электросамокате в магазин в соседнюю деревню со скоростью 10~км/ч. Проехав ровно треть всего пути, он понял, что при движении с прежней скоростью успеет точно к закрытию магазина, и увеличил скорость вдвое. Но когда он проехал ровно 2/3 всего пути, самокат сломался, и оставшуюся часть пути Коля прошел пешком. С какой скоростью он шел, если успел точно к закрытию магазина?

задача 1.jpg

Комментарий:

Вопрос **2**

Выполнен

Баллов: 20 из 20

Найдите все целые a, для которых квадратный трехчлен $x^2 + ax + 2a$ имеет два различных целых корня.

задача 2222.jpg

Комментарий:

Вопрос 3

Нет ответа

Балл: 20

Положительные числа a, b и c удовлетворяют условию $abc(a+b+c)=3$. Докажите неравенство $(a+b)(b+c)(c+a)\geqslant 8$.

Вопрос **4**

Выполнен

Баллов: 20 из 20

Какое наименьшее количество фишек можно расставить в клетках таблицы 99×99 так, чтобы в каждом квадрате 4×4 было не менее восьми фишек?

задача 44444.jpg

Комментарий:

Вопрос **5**

Нет ответа

Балл: 20

Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Диагональ AC — биссектриса угла $\angle BAD$, точка M — середина стороны BC, а точка N — середина отрезка DO. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является вписанным тогда и только тогда, когда четырехугольник $ABMN$ является вписанным.

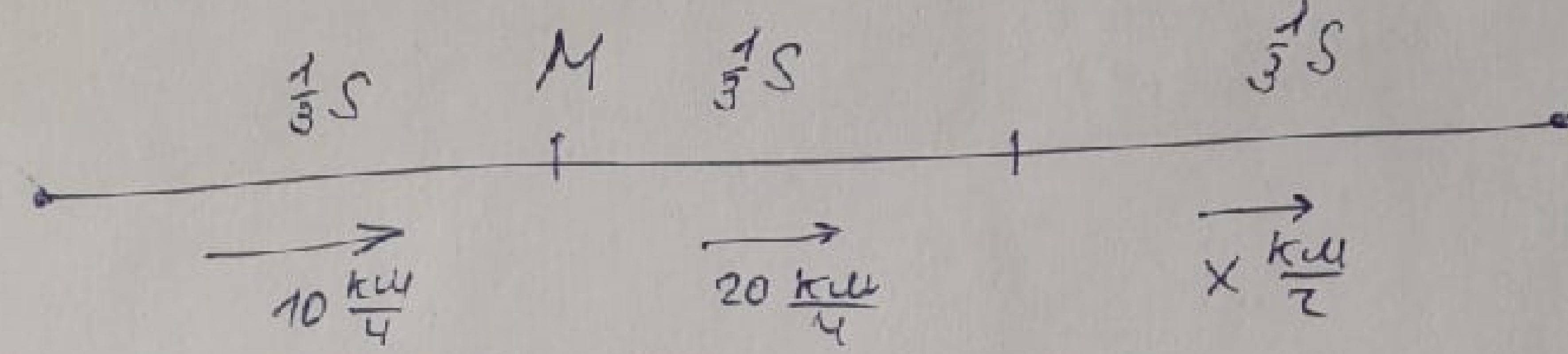
Вопрос **6**

Нет ответа

Балл: 20

Докажите, что у каждого из чисел $n!+1$, $n!+2$, \dots, $n!+n$ можно выбрать простой делитель, на который не делится ни одно из остальных.

Задача 1



S - общее расстояние

x - скорость пешком

Заметим, что пешком Коля прошел $S - \frac{2}{3}S = \frac{1}{3}S$

В точке M (на рис.) Коля понял, что если будет двигаться с ~~по~~ той же скоростью ($10\frac{км}{ч}$), то успеет точно к закрытию

Пусть до закрытия ~~вст~~ было t(ч.) (когда Коля находился в точке M)

Тогда $t = \frac{\frac{2}{3}S}{10}$

На второй трети пути Коля потратил t_2(ч) времени

$t_2 = \frac{\frac{1}{3}S}{20}$

На третей трети пути Коля потратил t_3(ч)

$t_3 = \frac{\frac{1}{3}S}{x}$

По условию Коля успел точно к закрытию, что означает что $t = t_2 + t_3$

$$\frac{\frac{2}{3}S}{10} = \frac{\frac{1}{3}S}{20} + \frac{\frac{1}{3}S}{x}$$

$$\frac{1}{15} = \frac{1}{60} + \frac{1}{3x}$$

$$\frac{1}{3x} = \frac{1}{20}$$

$$3x = 20$$

$$x = \frac{20}{3} км/ч$$

Ответ: $\frac{20}{3}\frac{км}{ч}$

Задача 2.

$x^2 + ax + 2a$

Найдем дискриминант

$D = a^2 - 8a$

Тогда

$x_1, x_2 = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 8a}}{2}$

$-a$ - целое; 2 - целое;

Значит $\sqrt{a^2 - 8a}$ - целое, так как корни целы

$\sqrt{a^2 - 8a} = n$ (n - целое число + положительное

$a^2 - 8a = n^2$

$a^2 - 8a - n^2 = 0$

$D = 64 + 4n^2$

$a_1, a_2 = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 4n^2}}{2} \Rightarrow \sqrt{64 + n^2 \cdot 4}$ - целое (т.к. a - целое)

$\sqrt{64 + n^2 \cdot 4} = 2\sqrt{16 + n^2} \Rightarrow \sqrt{16 + n^2}$ - целое

$\sqrt{16 + n^2} = k$ (k - целое)

$16 + n^2 = k^2$

$k^2 - n^2 = 16$

$(k - n)(k + n) = 16$

$16 = 2^4$

k-n - целое

k+n - целое

$\left\{\begin{matrix} k-n=1 \\ k+n=16 \end{matrix}\right. \Rightarrow k = \frac{17}{2}$ - не подходит

$\left\{\begin{matrix} k-n=16 \\ k+n=1 \end{matrix}\right. \Rightarrow k = \frac{17}{2}$ - не подходит

$\left\{\begin{matrix} k-n=-1 \\ k+n=-16 \end{matrix}\right. \Rightarrow k = \frac{-17}{2}$ - не подходит

$\left\{\begin{matrix} k-n=-16 \\ k+n=-1 \end{matrix}\right. \Rightarrow k = \frac{17}{2}$ - не подходит

$\left\{\begin{matrix} k-n=2 \\ k+n=8 \end{matrix}\right. \Rightarrow \left\{\begin{matrix} k=5 \\ n=3 \end{matrix}\right.$ - подходит

$\left\{\begin{matrix} k-n=-2 \\ k+n=-8 \end{matrix}\right. \Rightarrow \left\{\begin{matrix} k=-5 \\ n=-3 \end{matrix}\right.$ - подходит

$\left\{\begin{matrix} k-n=8 \\ k+n=2 \end{matrix}\right. \Rightarrow \left\{\begin{matrix} k=5 \\ n=-3 \end{matrix}\right.$ - подходит

$\left\{\begin{matrix} k-n=-8 \\ k+n=-2 \end{matrix}\right. \Rightarrow \left\{\begin{matrix} k=-5 \\ n=3 \end{matrix}\right.$ - подходит

$\left\{\begin{matrix} k-n=4 \\ k+n=4 \end{matrix}\right. \Rightarrow n=0$ - не подходит

$\left\{\begin{matrix} k-n=-4 \\ k+n=-4 \end{matrix}\right. \Rightarrow n=0$ - не подходит

Получим, что $n = \pm 3$

но $\sqrt{a - 8a} = n \Rightarrow n \neq -3$

Значит $n = 3$

$a_1 = \frac{8 + \sqrt{64 + 4n^2}}{2} = \frac{18}{2} = 9$

$a_2 = \frac{8 - \sqrt{64 + 4n^2}}{2} = -1$

Проверка: При $a = -1$, уравнение $x^2 - x - 2 = 0$

Имеет 2 корня $x_1 = 2; x_2 = -1$

При $a = 9$, уравнение $x^2 + 9x + 18 = 0$

Имеет 2 корня $x_1 = -3; x_2 = -6$

Ответ: $a = -1; a = 9$.

Задача 11

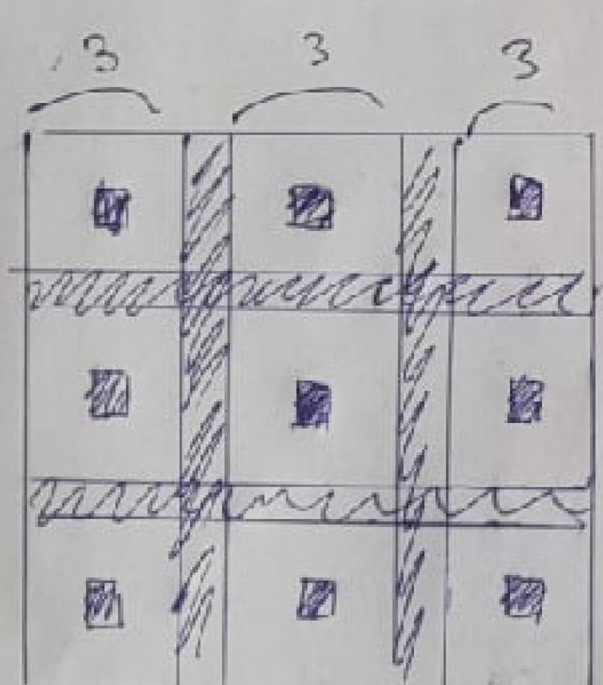
~~Ответ: 4851~~

~~Пример:~~

~~Всего строчек 99~~
~~Мы заставляем фишками каждую 2-ую строку, начиная со 2 сверху (см. рис)~~
~~Тогда мы заставим фишками 49 строк.~~
~~И потратим на это~~
~~$49 \cdot 99$ фишек = 4851 фишка~~

Ответ: 4801

Пример

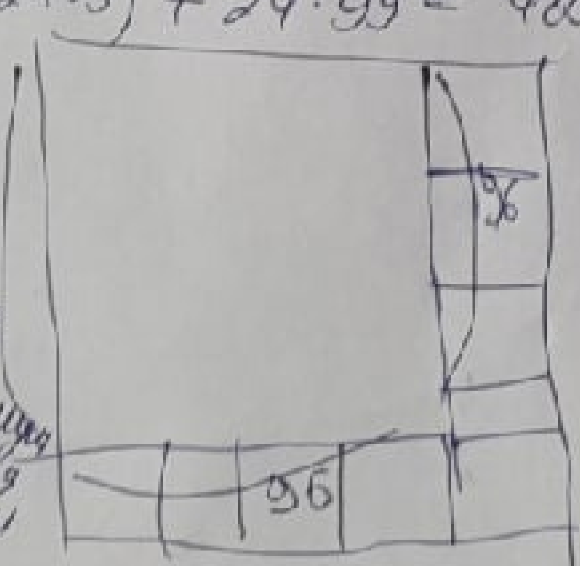


В нашем примере фишек

$25(25+24\cdot 3)+24\cdot 99=4801$

Оценка

Отметим внутри квадрат 96×96 который поделим на 24×24 квадратов 4×4. Тогда в них как минимум $24\times 24\times 8$ фишек. Оставшуюся часть квадрата поделим на прямоугольники 3×4



И в левом нижнем углу квадрат 3×3.
Тогда в прямоугольниках будет хотя бы 4 фишки
а в квадрате 3×3 хотя бы 1 фишка

кол-во фишек (общее) $\geq \underbrace{24\cdot 24\cdot 8}_{\text{квадраты } 4\times 4}+\underbrace{24\cdot 8}_{\text{прямоугольники } 3\times 4}+\underbrace{1}_{\text{квадрат } 3\times 3}=$

$=4801$