	ol2210637 ol2210637
Тест начат	понедельник, 14 Февраль 2022, 10:03
Состояние	Завершено
Завершен	понедельник, 14 Февраль 2022, 14:05
Прошло времени	4 час. 1 мин.
Баллы	85/120
Оценка	**71** из 100

Вопрос
Инфо

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 6 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос **1**

Выполнен

Баллов: 20 из 20

Коля поехал на электросамокате в магазин в соседнюю деревню со скоростью 10~км/ч. Проехав ровно треть всего пути, он понял, что при движении с прежней скоростью успеет точно к закрытию магазина, и увеличил скорость вдвое. Но когда он проехал ровно 2/3 всего пути, самокат сломался, и оставшуюся часть пути Коля прошел пешком. С какой скоростью он шел, если успел точно к закрытию магазина?

Решение: Обозначим все расстояние за S. Тогда не трудно понять, что если бы Петя преодолел все расстояние на самокате со скоростью 10 км/ч, то он бы преодолел путь за S/10 ч, и, по условию успел бы точно к закрытию магазина. Следовательно, так как он в итоге успел ровно к закрытию магазина, то на весь путь у него ушло именно S/10 ч. Первую 1/3 пути он преодолел со скоростью 10 км/ч, следовательно, на этот участок пути у него ушло S/30 ч. Вторую 1/3 пути он преодолел со скоростью 20 км/ч, следовательно, на этот участок пути у него ушло S/60 ч. На оставшуюся 1/3 пути у него осталось S/10-S/30-S/60=3S/60=S/20 ч. Поэтому он шел эту последнюю часть пути со скоростью (S/3)/(S/20)=20/3 км/ч.

Ответ: 20/3 км/ч.

Комментарий:

Вопрос **2**

Выполнен

Баллов: 20 из 20

Найдите все целые a, для которых квадратный трехчлен $x^2 + ax + 2a$ имеет два различных целых корня.

Решение: Сразу заметим, что для того, чтобы у трехчлена было два различных корня, его дискриминант должен быть больше 0. То есть a^2-8a>0 <=> a(a-8)>0. Откуда либо a>8 (1 случай), либо a<0 (2 случай). Корни трехчлена будут иметь вид (-a+sqrt(a^2-8a))/2 и (-a-sqrt(a^2-8a))/2. Следовательно, для того, чтобы они были целыми a^2-8a должно быть квадратом натурального числа. Разберем 1 случай. $(a-4)^2$>a^2-8a <=> 16>0, что очевидно верно. Также при a>12, a^2-8a>$(a-5)^2$ <=> 2a>25 <=> a>12 (то есть верно). Таким образом при a>12 число a^2-8a находится между двумя последовательными квадратами $(a-4)^2$ и $(a-5)^2$, следовательно, само квадратом не является. Разберем оставшиеся значения a. При a=9 a^2-8a=81-72=9=3^2, то есть это значение a под условие подходит так как трехчлен имеет два целых различных целых корня -3 и -6. При a=10 a^2-8a=100-80=20 - не квадрат, следовательно, это значения a не подходит. При a=11 a^2-8a=121-88=33 - не квадрат, следовательно, это значения a не подходит. При a=12 a^2-8a=144-96=48 - не квадрат, следовательно, это значения a не подходит. Разберем второй случай. $(a-4)^2$>a^2-8a <=> 16>0, что очевидно верно. Также при a<-4, a^2-8a>$(a-3)^2$ <=> -9>2a <=> -4>a (то есть верно). Таким образом при a>12 число a^2-8a находится между двумя последовательными квадратами $(a-4)^2$ и $(a-3)^2$, следовательно, само квадратом не является. Разберем оставшиеся значения a. При a=-1 a^2-8a=1+8=9=3^3, то есть это значение a под условие подходит так как трехчлен имеет два целых различных целых корня 2 и -1. При a=-2 a^2-8a=4+16=20 - не квадрат, следовательно, это значения a не подходит. При a=-3 a^2-8a=9+24=33 - не квадрат, следовательно, это значения a не подходит. При a=-4 a^2-8a=16+32=48 - не квадрат, следовательно, это значения a не подходит. Таким образом под условие подходят только a=-1 и a=9.

Ответ: a=-1, a=9.

Комментарий:

Вопрос 3

Выполнен

Баллов: 5 из 20

Положительные числа a, b и c удовлетворяют условию $abc(a+b+c)=3$. Докажите неравенство $(a+b)(b+c)(c+a)\geqslant 8$.

Решение: (a+b)(a+c)=a(a+b+c)+bc>=2sqrt(abc(a+b+c))=2sqrt(3) по неравенству Коши. Аналогично (a+b)(b+c)>=2sqrt(3) и (a+c)(b+c)>=2sqrt(3). Перемножая эти неравенства получаем: (a+b)^2(b+c)^2(a+c)^2>=8*3*sqrt(3), откуда (a+b)(b+c)(a+c)>=sqrt(8*3*sqrt(3)).

Комментарий:
доказали (a+b)(b+c)(a+c)>=sqrt(8*3*sqrt(3)),

но число sqrt(8*3*sqrt(3))<8.

Вопрос **4**

Выполнен

Баллов: 20 из 20

Какое наименьшее количество фишек можно расставить в клетках таблицы 99×99 так, чтобы в каждом квадрате 4×4 было не менее восьми фишек?

Решение: Начиная с самой верхней левой клетки таблицы выделим квадрат 96 × 96 и разобьем его на квадраты 4×4. В каждом таком квадрате 4×4 не меньше 8 фишек, следовательно, во всем квадрате 96 × 96 не менее 8*24*24=4608 фишек. Под выделенном квадратом 96 × 96 рассмотрим прямоугольник 3 × 96. Его можно разбить на 24 прямоугольничка 3 × 4. В каждом прямоугольничке стоит хотя бы 4 фишки, иначе в каком-то из квадратов, образованных прямоугольничком 3 × 4 и находящимся над ним прямоугольником 1 × 4 не больше 7 фишек, так как в прямоугольнике 1 × 4 не больше 4 фишек. Следовательно, в рассмотренном прямоугольнике 3 × 96 еще хотя бы 4*24=96 фишек. Аналогично, в прямоугольнике 3 × 96 справа от квадрата еще хотя бы 96 клеток. Посмотрим на правый нижний квадрат 2*2, в нем есть еще хотя бы одна фишка, иначе достраивая его до квадрата 4×4 мы добавим 7 клеток, содержащих не больше 7 фишек и весь получившийся квадрат будет содержать не больше 7 фишек. Таким образом фишек хотя бы 4608+96+96+1=4801. Построим пример на это число фишек. Начиная с 4-го столбца слева заставим 96 фишками каждый 4-ый столбец (то есть 4-ый, 8-ой, ... , 96-ой столбцы). Также каждую четвертую строку начиная с 4-ой строки сверху (то есть 4-ую, 8-ую, ... , 96-ую строки) полностью заставим фишками. Таблица разобьется на пустые (не содержащие фишек) 25*25=625 квадратов 3×3. В каждом таком квадрате поставим фишку в центральную клетку. Всего на пример уйдет 625+24*99+24*(99-4)=4801 фишка. Осталось показать, что условие для этого примера действительно выполняется. Посмотри на любой квадрат 4×4. Он содержит 4 подряд идущих столбца, по построению примера один из них полностью заставлен фишками, также в нем заставлена одна из строк, то есть в этом квадрате уже 7 фишек. Но он содержит еще одну из фишек квадратов 3×3. Так как расстояние между соседними центральными клетками этих квадратов равно 3 клеткам. То есть каждый квадрат содержит 8 фишек, что и требовалось.

Ответ: 4801 фишка.

Комментарий:

Вопрос **5**

Выполнен

Баллов: 20 из 20

Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Диагональ AC — биссектриса угла $\angle BAD$, точка M — середина стороны BC, а точка N — середина отрезка DO. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является вписанным тогда и только тогда, когда четырехугольник $ABMN$ является вписанным.

Решение: Докажем, что если четырехугольник ABCD-вписанный, то ABMN тоже вписанный. В этом случае угол ADO равен углу ACB, так как они опираются на одну дугу. Угол BAC равен углу OAD, так как AC - биссектриса угла BAD. Тогда треугольники OAD и BAC подобны по двум углам, а в подобных треугольниках равны все соответствующие углы, в частности, углы между стороной и медианой. То есть угол MAC равен углу NAD. Из равенства этих углов следует равенство углов MAN и CAD. В свою очередь угол CAD равен углу CBD, так как опирается с ним на одну дугу. Таким образом угол MAN равен углу MBN, то есть четырехугольник ABMN-вписанный. Докажем обратное, что если четырехугольник ABMN-вписанный, то и ABCD-вписанный. Из вписанности следует, что угол ANB равен углу AMB. Угол BAC равен углу OAD, так как AC - биссектриса угла BAD. Поэтому треугольники ABC и AOD подобны по углу у вершины и углу между медианой из этой вершины и противолежащей стороной. Откуда следует равенство углов ADO и ACB, что и означает, что четырехугольник ABCD - вписанный. Немного скажем о не совсем известном признаке подобия. Не трудно убедиться, что рассматривая треугольник, подобный AOD с коэффициентом BC/OD, мы получим треугольник A'O'D' и серединой стороны O'D' - N', такой что O'D'=BC, углы A'N'O' и AMB равны, и углы BAC и O'A'D' равны. И если эти треугольники не будут равны, то, совместив их основания, мы получим, что на луче MA найдется такая точка A', что углы BAC и O'A'D' равны и точки A и A' не совпадают, что очевидно невозможно, так как иначе один из углов больше другого.

Комментарий:

Вопрос **6**

Нет ответа

Балл: 20

Докажите, что у каждого из чисел $n!+1$, $n!+2$, \dots, $n!+n$ можно выбрать простой делитель, на который не делится ни одно из остальных.