	ol2204024 ol2204024
Тест начат	понедельник, 14 Февраль 2022, 10:03
Состояние	Завершено
Завершен	понедельник, 14 Февраль 2022, 14:05
Прошло времени	4 час. 1 мин.
Оценка	**63** из 100

Вопрос
Инфо

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 5 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

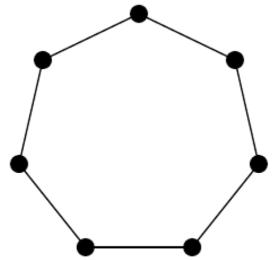
Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос **1**

Выполнен

Баллов: 18 из 20

На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Саша выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа так, чтобы для всех этих чисел выполнялось свойство:
если числа a и b не соединены отрезком, то сумма $a+b$ должна быть взаимно проста с n, а если соединены, то числа $a+b$ и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1.
При каком наименьшем n существует такая расстановка?



докажем что при n делящихся на 2 расстановки не существует: пусть есть такая расстановка А. тогда если все числа в вершинах одной четности, то будет проведено каждое ребро т.к. сумма чисел по краям любого ребра четна. иначе, пусть есть вершина с четным числом. тогда 4 несоседних с ней вершины должны быть нечетными, а тогда сумма двух крайних(из этих 4) делится на 2, а значит проведено ребро, которое не должно быть проведено.

докажем, что n не простое число в некоторой степени(не p^k): пусть простое и существует расстановка B, подходящая под условие. тогда поскольку сумма любых чисел на концах ребер не взаимнопроста с n, то она делится на p, тогда пусть остаток от деления на p у 1 вершины- x, тогда у следующей по циклу- -x, у следующей- x и у следующей- -x: x;-x;x;-x, а тогда будет проведено ребро между 1 и 4 вершинами, ?!

пусть n делится на 3. посмотрим на все числа по модулю 3. заметим, что если среди чисел в вершинах есть =#1 и =#2(где =# это сравнимы потому что такого символа я не нашел) то числа =#2 могут стоять только на соседних с =#1 местах, аналогично =#1 могут стоять только на соседних с =#2 местах, при этом может быть <= 2 чисел =#1(соседи 2) => есть <=2 чисел =#2 => всего не больше 4 остатков !=0, остатков равных 0 <=2 т.к. иначе есть 2 несоседних, и нам придется провести ребро, которого быть не должно.

значит если n=#0 mod 3 то все остатки это либо 0 и 1, либо 0 и 2.(0 все еще <=2) => делимость числа n на 3 дает не больше одного ребра на границе(можно сказать, что если разложить n на множители, то по модулю каждого простого все ребра между несоседними числами взаимнопросты с n => не делятся ни на одно простое, являющееся делителем n. а так же каждое ребро должно по >=1 простому модулю, дел-лю n быть =#0 (т.к. иначе число взаимнопросто с n). значит, условие выполнено <=> (по каждому простому дел-лю n все внутренние р-ра не сравнимы с 0, а каждое р-ро на границе хоть по какому-то модулю сравнимо с 0.)- *)

пусть n делится на простое число p>3. тогда по модулю p можно гарантировать не более 4 р-р на границе(внутренние р-ра- то которые не проведены, граничные- проведены(на рис. в условии)). докажем это:

пусть вершины занумерованы по циклу : 1 2 3 4 5 6 7. тогда заметим, что если по этому модулю не может быть >2 подряд идущих р-р делящихся на p("р-ро делится на число"- сумма чисел на концах р-ра делится на число)- иначе есть >=3 =Ю остатки в них имеют вид -x: x;-x;x;-x => две крайние будут соединены р-ром, ?! значит длина любого блока подряд идущих р-р <=2 => есть<=4 р-р делящихся на p.

тогда заметим, что если n=3*p- простое, то n не подойдет т.к. граничных р-р будет меньше 7. => в n есть >=2 простых дел-ля >3. тогда минимальное n это либо 3*5*7, либо 3*5*5, либо 5*7, либо 5*5.(если >=1 подойдет конечно)(т.к. все остальные n делящиеся на 2 простых не равных 3 больше, если число n делится на p^k где p простое, то можно уменьшить n, поделив на p^k-1, от этого условие не испортится т.к. условие <=>*)5*5 как мы поняли не подходит, из остальных наименьшее- 5*7 => n>=35

пример на n=35: по модулю 5 числа сравнимы с 1 4 1 0 2 3 2, по модулю 7 - с 0 2 1 6 1 3 0- в порядке обхода. по китайской теореме об остатках существуют сколь угодно большие числа, сравнимые с данными остатками по взаимнопростым модулям(5 и 7)=> существуют такие различные числа, сравнимые с тем, с чем написано. заметим, что по модулю 5 будут нарисованы только р-ра 1 2;2 3;5 6;6 7, а по модулю 7- только все оставшиеся на границе, => такие числа подойдут, победа.

Комментарий:
Нет реализации.

Вопрос 2

Выполнен

Баллов: 20 из 20

При $x, y, z \in (0, 2]$ найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{(x^3 - 6)\sqrt[3]{x+6} + (y^3 - 6)\sqrt[3]{y+6} + (z^3 - 6)\sqrt[3]{z+6}}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

докажем что (x^3-6)(x+6)^(1/3)<=x^2 при 2>=x>0

sqrt((x^3-6)(x+6)^(1/3))<=((x^3-6)+(x+6)^(1/3))/2 - неравенство о средних арифметическом и геометрическом

x^3-6<=2x-2 т.к. x(x^2-2)<4 -- x<2 и x^2<4.

(x+6)^(1/3)<=2 т.к. x<=2 => (x^3-6)+(x+6)^(1/3)<= 2x-2+2=2x => ((x^3-6)+(x+6)^(1/3))/2<=x

=> (x^3-6)(x+6)^(1/3)<=x^2, аналогично для y и z

значит A<=(x^2+y^2+z^2)/(x^2+y^2+z^2)=1

пример для a=1: x=y=z=2

(2*2+2*2+2*2)/(4+4+4)=1.

Комментарий:

Вопрос 3

Выполнен

Баллов: 5 из 20

Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Внутри треугольника AOB выбрана такая точка K, что прямая KO является биссектрисой угла CKD. Луч DK вторично пересекает описанную окружность треугольника COK в точке L, а луч CK вторично пересекает описанную окружность треугольника DOK в точке M. Найдите отношение площадей треугольников ALO и BMO.

пусть угол dko =a => /_omd=/_dko=a=/_okc=/_olc -из вписанности четырехугольников cokl и mkod
докажем что треугольник abo=alo(=> отношение площадей =1)

достроим точки: середина дуги cd, пересечение ml и ab, пересечение mb и al, диаметрально противоположные точки точкам a,b,c,d,l,m -на окружностях abcd,abcd,abcd,abcd,cok,dok, диаметрально противоположные точки точкам c,d -на окружностях cok,dok- a1,a2,a3,a4,a5,a6,a7,a8,a9,a10,a11,a12бф13б соответственно

Комментарий:
Решение не завершено.

Вопрос **4**

Выполнен

Баллов: 0 из 20

Натуральное число x в системе счисления с основанием r ($r \leqslant 36$) имеет вид $\overline{ppqq}$, причем $2q = 5p$. Оказалось, что r-ичная запись числа x^2 представляет собой семизначный палиндром с нулевой средней цифрой. (Палиндромом называется число, которое читается одинаково слева направо и справа налево). Найдите сумму r-ичных цифр числа x^2.

x=q+q*r+p*r^2+p*r^3=(r+1)(q+pr^2) =>

x^2=((r+1)(q+pr^2))^2=r^6+r^5*(2p^2)+r^4*(2pq+p^2)+r^3(4pq)+r^2(q^2+2pq)+r(q^2)+q^2

в 4 разряде 0 => коэф. при r^3 на самом деле =0

Комментарий:
Нет решения.

Вопрос **5**

Выполнен

Баллов: 20 из 20

При каких n клетчатую доску $n \times n$ можно разбить по клеточкам на один квадрат 2×2 и некоторое количество полосок из пяти клеток так, что квадрат будет примыкать к стороне доски?

ответ: при n(дальше н) сравнимых с 2 по модулю 5(вида 5к+2 при к натуральных или 0)
пример: поставим квадрат 2*2 в левый нижний угол. 2 крайних левых столбца заполним вертикальными полосками(это прям-к 2*5к значит так можно). остальной прям-к 5к*(5к+2) заполним горизонтальными полосками. заметим, что вся доска разбилась и квадрат 2*2 примыкает к границе доски, пример подходит.

докажем, что н сравнимо с 2 или 3 по модулю 5: количество клеток в квадрате- н*н=4+5*количество полосок => сравнимо с 4 (mod 5) но по модулю 5 с 4 сравнимы только квадраты 2 и 3 => н сравнимо с 2 или 3 по модулю 5.

докажем что н не сравнимо с 3 по модулю 5: пусть сравнимо и существует подходящее разбиение. пусть НУО квадрат примыкает к нижней стороне. тогда для каждой строки i посчитаем количество ai вертикальных полосок с нижней клеткой данной строке. (пусть нижняя строка- 1-ая) тогда a1#=1, a2#=0, a3#=2, a4#=0, a5#=0(где #= - сравнимо по модулю 5) и далее ai#=0 при i #=2, 4 или 5, ai#=1 при i#=1, ai#=2 при i#=3 - докажем это по индукции по номеру строки:

переход: от <i к i

аналогично, количество вертикальных полосок, с нижней клеткой в i полоске это количество незанятых предыдущими вертикальными полосками и горизонтальными в i строке. => оно сравнимо по модулю 5 с количеством незанятых предыдущими вертикальными полосками клеток. т.е. ai#=5k+3-a(i-1)-a(i-2)-a(i-3)-a(i-4), нетрудно заметить что для описанной последовательности(ai#=0 при i #=2, 4 или 5, ai#=1 при i#=1, ai#=2 при i#=3)-* это(ai#=5k+3-a(i-1)-a(i-2)-a(i-3)-a(i-4)) выполняется, и т.к. последовательность строится однозначно, то * выполнено.

база i=1 очевидна- в 1 строке есть 5к+1 незанятая клетка, каждая горизонтальная- длины 5, значит суммарная длина (по горизонтали) всех вертикальных сравнима с 1 по модулю 5 =>a1#=1.

i=2 и дальше- количество вертикальных полосок, с нижней клеткой в i полоске это количество незанятых предыдущими вертикальными полосками и горизонтальными в i строке. => оно сравнимо по модулю 5 с количеством незанятых предыдущими вертикальными полосками клеток.

=>a2#=3-1-2=0; a3#=3-1=2; a4#=3-1-2=0; a5#=3-1-2=0

база доказана.

теперь заметим, что в верхней строчке по доказанному ранее должно быть #=3 => хотя бы 1 вертикальная полоска с нижней клеткой в этой строке, но такого быть не может, победа.

Комментарий:

« ПРЕДЫДУЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 13

СЛЕДУЮЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ »
Вариант 21