	ol2216665 ol2216665
Тест начат	понедельник, 14 Февраль 2022, 10:06
Состояние	Завершено
Завершен	понедельник, 14 Февраль 2022, 13:59
Прошло времени	3 час. 53 мин.
Оценка	**65** из 100

Вопрос
Инфо

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 5 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

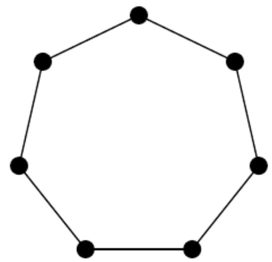
Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос **1**

Выполнен

Баллов: 20 из 20

На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Саша выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа так, чтобы для всех этих чисел выполнялось свойство:
если числа a и b не соединены отрезком, то сумма $a+b$ должна быть взаимно проста с n, а если соединены, то числа $a+b$ и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1.
При каком наименьшем n существует такая расстановка?



Ответ: 35

Пример: 1,13,15,5,23,26,4 в таком порядке по часовой стрелке. Проверим, что этот пример подходит. Так как n=35=5*7, сумма любых двух соседних чисел делится либо на 5, либо на 7, в этом нетрудно убедиться, осталось доказать, что сумма любых двух не соседних чисел не делится ни на 5, ни на 7, для этого запишем все наши числа сначала по модулю 5: 1,3,0,0,3,6,4, а затем по модулю 7: 1,6,1,5,2,5,4. Теперь видно, что сумма любых двух не соседних чисел не делится ни на 5, ни на 7, значит пример подходит.

Оценка: почему n не может быть меньше 35?

Если n делится всего лишь на одно простое число, то сумма любых двух соседних чисел обязана делится на это простое, но тогда сумма чисел через 2 тоже делится на это простое, но она должна быть взаимно проста с n, противоречие. Значит n делится как минимум на 2 различных простых числа, при этом оба эти числа встречаются в наименьших общих делителях суммы двух каких-то соседних чисел и числа n. Пусть одно из этих просто - это двойка. Рассмотрим 2 соседних числа, сумма которых делится на 2. Они одной четности, а 3 числа, которые не являются соседями этих двух чисел, другой четности, так как n делится на 2, но тогда из этих 3 чисел есть 2, стоящие через 1, одной четности, значит их сумма делится на 2, а значит не взаимно просто с n, противоречие. Значит оба эти простых не равны 2. Пусть одно из этих простых равно 3. Аналогично рассмотрим 2 числа, стоящие рядом, сумма которых делится на 3. Пусть они не кратны 3, тогда одно из них сравнимо с 1, а другое с 2. Тогда те же 3 числа, которые не являются соседями этих двух чисел, сравнимы с 0 по модулю 3, так как n делится на 3, но среди них есть 2 числа, стоящих через 1, противоречие. Значит оба соседних числа кратны 3. Тогда все остальные числа не сравнимы с 0 по модулю 3, а значит среди оставшихся пар соседних чисел нет пары, сумма которой делится на 3, так как тогда оба эти числа обязаны быть нулями по модулю 3, но это не так. Все остальные суммы пар чисел, стоящих рядом, не могут делится на 3, значит они делятся на какое-то другое простое, но по рассуждениям приведенным выше, такое простое не может быть одно, значит всего простых, на которые делится n, хотя бы 3, причем все они не равны 2, но тогда n>35. А если n делится на 2 простых, то оба эти простых не равны ни 2, ни 3, значит они не меньше чем 5 и 7, а значит n не меньше 35, ч.т.д.

Комментарий:

Вопрос 2

Выполнен

Баллов: 20 из 20

При $x, y, z \in (0, 2]$ найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{(x^3 - 6)\sqrt[3]{x+6} + (y^3 - 6)\sqrt[3]{y+6} + (z^3 - 6)\sqrt[3]{z+6}}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Ответ:1

Докажем, что А не больше 1. x^2+y^2+z^2>0, значит нужно доказать, что (x^3-6)*(x+6)^(1/3)+...<=x^2+y^2+z^2.

Докажем по отдельности, что (x^3-6)*(x+6)^(1/3)<=x^2 при x от 0 до 2 включительно. Заметим, что при таких x (x+6)^(1/3)<=2, поэтому необходимо доказать, что (x^3-6)*2<=x^2, то есть 2x^3-x^2-12<=0. Значит (x-2)(2*x^2+3*x+6)<=0, а это так, поскольку x<2 и 2*x^2+3*x+6>=0 для любого x, поскольку дискриминант отрицателен. Значит А не больше 1, теперь приведем пример. x=y=z=2, тогда A=(2*2+2*2+2*2)/(3*4)=1, значит ответ 1.

Комментарий:

Вопрос 3

Выполнен

Баллов: 20 из 20

Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Внутри треугольника AOB выбрана такая точка K, что прямая KO является биссектрисой угла CKD. Луч DK вторично пересекает описанную окружность треугольника COK в точке L, а луч CK вторично пересекает описанную окружность треугольника DOK в точке M. Найдите отношение площадей треугольников ALO и BMO.

Пусть угол KCO равен b, угол KDO равен c, а угол CKO равен a, тогда из теоремы синусов для треугольников CKO и DKO CO/sina=KO/sinb и DO/sina=KO/sinc, значит sinb/sinc=DO/CO. Угол OLK равен углу KCO и равен b из вписанности LCOK. Тогда из теоремы синусов для треугольника LOD OD/sinb=LO/sinc, значит sinb/sinc=OD/LO/ значит CO=LO. Аналогично MO=DO. Докажем, что угол AOL равен углу BOM. Угол AOL равен KOL+KOA=CLK+LCK=180-LKC, аналогично угол MOB равен 180-MKD, но углы LKC и MKD вертикальные, поэтому они равны, значит S(ALO)=LO*AO*sinAOL/2=CO*AO*sinAOL/2 и S(BMO)=BO*OM*sinBOM/2=BO*OD*sinBOM/2, синусы углов равны, поскольку углы равны, а BO*OD=AO*OC так как это минус степень точки O относительно окружности ABCD. Значит S(ALO)=S(BMO)

Ответ: 1

Комментарий:

Вопрос **4**

Выполнен

Баллов: 0 из 20

Натуральное число x в системе счисления с основанием r ($r \leqslant 36$) имеет вид $\overline{ppqq}$, причем $2q = 5p$. Оказалось, что r-ичная запись числа x^2 представляет собой семизначный палиндром с нулевой средней цифрой. (Палиндромом называется число, которое читается одинаково слева направо и справа налево). Найдите сумму r-ичных цифр числа x^2.

Комментарий:

Вопрос **5**

Выполнен

Баллов: 5 из 20

При каких n клетчатую доску $n \times n$ можно разбить по клеточкам на один квадрат 2×2 и некоторое количество полосок из пяти клеток так, что квадрат будет примыкать к стороне доски?

Ответ: при n сравнимых с 2 по модулю 5.

Пример: поставим квадрат 2 на 2 в верхний левый угол нашей доски. Тогда останется прямоугольник (n-2)*n и прямоугольник (n-2)*2, так как n-2 делится на 5, оба эти прямоугольника легко разбиваются на полоски из пяти клеток.

Оценка: посчитаем общее число клеток, с одной стороны их n^2, а с другой 2*2+5*k, где k - натуральное или 0. Значит n^2 сравнимо с 4 по модулю 5, значит n сравнимо с 2 или с 3 по модулю 5.

Комментарий:
Не разобран второй случай.

« ПРЕДЫДУЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 13

СЛЕДУЮЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ »
Вариант 21