	ol2218706 ol2218706
Тест начат	понедельник, 14 Февраль 2022, 10:05
Состояние	Завершено
Завершен	понедельник, 14 Февраль 2022, 13:58
Прошло времени	3 час. 52 мин.
Оценка	**62,00** из 100,00

Вопрос
Инфо

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 5 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

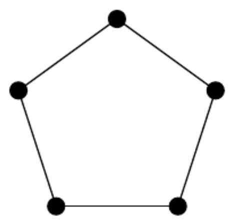
Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос 1

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Костя выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа так, чтобы для всех этих чисел выполнялось свойство:
если числа a и b не соединены отрезком, то сумма $a+b$ должна быть взаимно проста с n, а если соединены, то числа $a+b$ и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1.
При каком наименьшем n существует такая расстановка?



ol2218706_1.pdf

Комментарий:

Вопрос 2

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

При $x, y, z \in (0, 1]$ найдите минимальное значение выражения

$$A = \frac{(x+2y)\sqrt{x+y-xy} + (y+2z)\sqrt{y+z-yz} + (z+2x)\sqrt{z+x-zx}}{xy+yz+zx}.$$

ol2218706_2.pdf

Комментарий:

Вопрос 3

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

На сторонах BC и AD вписанного четырехугольника $ABCD$ отмечены точки K и M соответственно, причем $BK : KC = AM : MD$. На отрезке KM выбрана такая точка L, что $KL : LM = BC : AD$. Найдите отношение площадей треугольников ACL и BDL, если известно, что $AC = p$ и $BD = q$.

ol2218706_3.pdf

Комментарий:

Вопрос **4**

Выполнен

Баллов: 0,00 из 20,00

Натуральное число x в системе счисления с основанием r ($r > 3$) имеет вид $\overline{ppqq}$, причем $q = 2p$. Оказалось, что r-ичная запись числа x^2 представляет собой семизначный палиндром с тремя одинаковыми средними цифрами. (Палиндромом называется число, которое читается одинаково слева направо и справа налево). При каких r такое возможно?

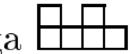
ol2218706_4.pdf

Комментарий:
Задача не решена.

Вопрос **5**

Выполнен

Баллов: 2,00 из 20,00

Доска $m \times n$ $(m, n > 5)$ разрезана на фигурки из шести единичных квадратиков вида  (фигурки можно поворачивать и переворачивать). При каких m и n такое возможно?

ol2218706_5.pdf

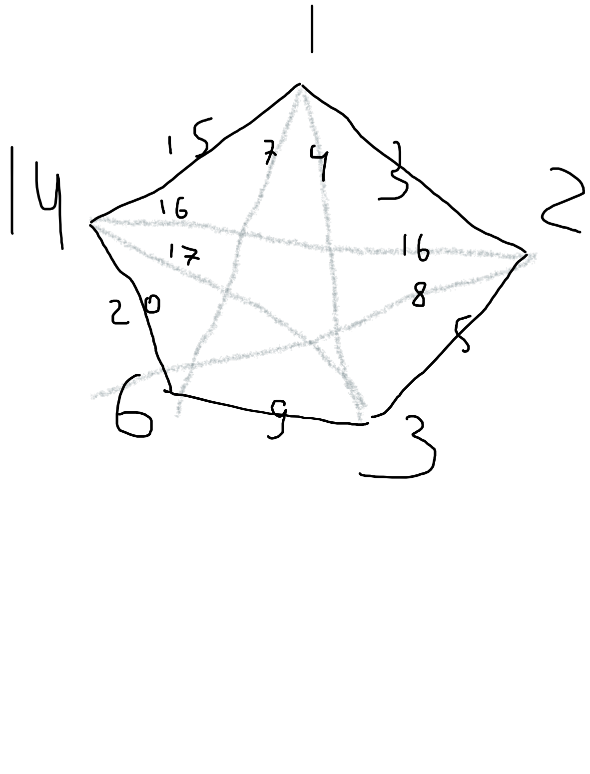
Комментарий:
Ответ неверный.

ПРЕДЫДУЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 27

СЛЕДУЮЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 17

1.
Заметим, что n не может быть четным:
Иначе каждые два соседа одной четности, ведь
A+b и a+c обязаны быть нечетными
Тогда b-c четно, т.е б и с одной четности(тогда любая пара соседей-
Это пара чисел одной четности)
Но тогда все числа одной четности=>
A + b четно – противоречие

2.
Заметим, что н не может быть степенью простого
Иначе любые два соседа в сумме делятся на это простое
А любые два не соседа в сумме не делятся на это простое
Тогда, если хотя бы одно число в кругу делится на р,
То и все числа в кругу делятся на р=> пара не соседей
В сумме дает число, делящееся на р – противоречие
Если в кругу нет чисел, кратных р, то остатки по модулю
Р в кругу чередуются, ведь пара соседей в сумме должна давать
Число, кратное р
Но т.к. 5 – нечетно, то чередоваться остатки не могут
Ну также если начать строить пример по часовой
Стрелке, то уже четвертое число с первым будут
В сумме давать число, кратное р
Хотя 1 и 4 число не соседи
Снова противоречие
3.
Наименьшее нечетное натуральное число, не являющееся
Степенью простого – это 15
(1 не подходит, т.к. единица не имеет делителей, больших 1)
3, 5, 7, 9, 11, 13 – не подходят
Остальные числа <15 четные
Пример для н = 15
Ставим по кругу числа 1, 2, 3, 6 , 14



Т.к. корень – вогнутая функция, то $\sqrt{x+y-xy} = \sqrt{(1-x)y+x\cdot 1} \geq$

$$\geq (1-x)\sqrt{y} + x\cdot\sqrt{1} = (1-x)\sqrt{y}+x$$

Аналогично

$$\sqrt{y+z-yz} \geq (1-y)\sqrt{z}+y$$

$$\sqrt{z+x-xz} \geq (1-z)\sqrt{x}+z$$

Тогда исходное выражение можно оценить снизу так:

$$\frac{(x+2y)\left((1-x)\sqrt{y}+x\right)+(y+2z)\left((1-y)\sqrt{z}+y\right)+(z+2x)\left((1-z)\sqrt{x}+z\right)}{xy+yz+zx}$$

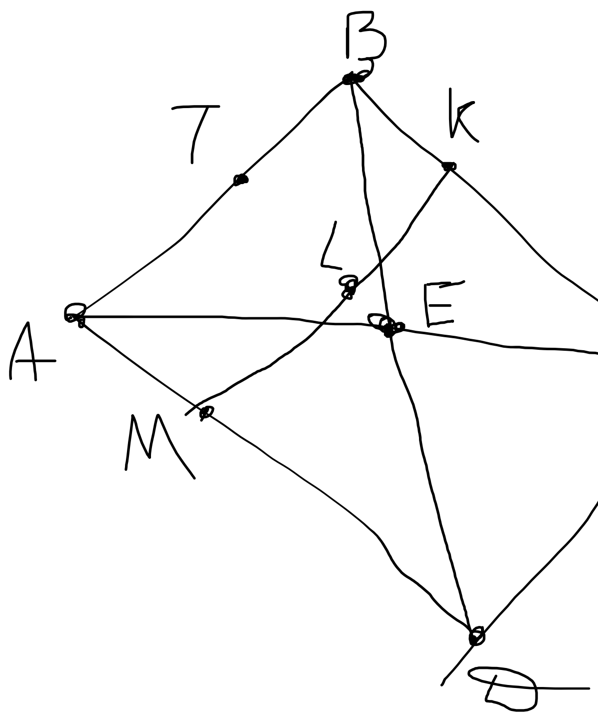
Тогда числитель – это: A, B, C – что-то неотрицательное

$$x^2+2xy+A+y^2+2yz+B+z^2+2zx+C \geq$$

$$\geq x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx \geq 3(xy+yz+zx)$$

Т.к. $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$

По транснеравенству. Тогда исходное выражение хотя бы 3. Нижняя оценка достигается, если X = y = z = 1



$$\frac{BK}{KC} = \frac{AM}{MD}$$

$$\frac{KL}{LM} = \frac{BC}{AD}$$

$AC = p$

$BD = q$

$$\frac{S_{ACL}}{S_{BDL}} = ?$$

Отметим S на стороне cd так, что cs/sd = bc/ad
Аналогично отметим точку T на АБ
Тогда

$$\overrightarrow{LS} = \frac{LM}{KM} \cdot \overrightarrow{KC} + \frac{LK}{KM} \cdot \overrightarrow{MD}$$

$$\overrightarrow{LT} = \frac{LM}{KM} \cdot \overrightarrow{KB} + \frac{LK}{KM} \cdot \overrightarrow{MA}$$

Заметим, что $\overrightarrow{LS} = \overrightarrow{LT} \cdot C$, где

$$C = \frac{\overrightarrow{KC}}{\overrightarrow{KB}} = \frac{\overrightarrow{MD}}{\overrightarrow{MA}}$$

эти отношения равны по условию

Тогда L, S, T лежат на одной прямой, но LT – биссектриса угла, образованного диагоналями, ведь т.к. абсд – вписанный, то EC/ED = EB/EA = BC/AD =CS/SD = BT/TA
Отсюда ES – биссектриса и ET – биссектриса. Тогда E S T на одной прямой. Тогда L E S T на одной прямой – биссектрисе угла CED. Тогда точка L равноудалена от прямых BD и AC. Т.е. треугольники из условия имеют равные высоты, тогда отношение их площадей – это отношение оснований, т.е. p/q
Ответ: p/q

$$x = \overline{ppqq} = p\cdot r^3 + p\cdot r^2 + q\cdot r + q = p\cdot r^3 + p\cdot r^2 + p\cdot 2r + p\cdot 2 =$$

$$= p(r^3 + r^2 + 2r + 2)$$

Тогда $x^2 = p^2(r^2+2)^2(r+1)^2 = p^2(r^6 + 2r^5 + 5r^4 + 8r^3 + 8r^2 + 8r + 4)$

Т.к. x^2 – семизначное число. $< r^7$
Отсюда p^2 < r
Заметим, что если 8p^2 < r, то цифра числа равна соответствующему коэффициенту многочлена
В скобках, умноженному на p^2. Тогда должно выполняться 5p^2 = 8p^2. Но такого быть не может –
Противоречие. Тогда 8p^2>r

пусть

$$\left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{4p^2}{r} \right\rfloor + 8p^2}{r} \right\rfloor + 8p^2 = t$$

Тогда 3-я цифра x^2 с конца – это $t - r\left\lfloor \frac{t}{r} \right\rfloor = t \bmod r$

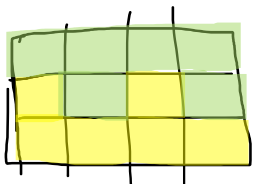
4-я цифра x^2 – это $8p^2 + \left\lfloor \frac{t}{r} \right\rfloor \bmod r$

5-я цифра: $5p^2 + \left\lfloor \frac{8p^2 + \left\lfloor \frac{t}{r} \right\rfloor}{r} \right\rfloor \bmod r$

по усл. эти 3 числа равны

Ответ: m делится на 4, n делится на 3, или наоборот

Сложим из двух фигур прямоугольник 4 на 3. Такими прямоугольниками получится замостить доску, т.к. одна сторона делится на 4, другая на 3.



Покрасим доску в четыре цвета следующим образом.