	ol2247431 ol2247431
Тест начат	понедельник, 14 Февраль 2022, 10:05
Состояние	Завершено
Завершен	понедельник, 14 Февраль 2022, 14:05
Прошло времени	4 час.
Оценка	**60,00** из 100,00

Вопрос
Инфо

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 5 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос **1**

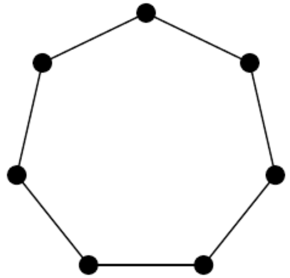
Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Саша выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа так, чтобы для всех этих чисел выполнялось свойство:

если числа a и b не соединены отрезком, то сумма $a+b$ должна быть взаимно проста с n, а если соединены, то числа $a+b$ и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1.

При каком наименьшем n существует такая расстановка?



н не равно 1 так как сумма чисел на смежных вершинах должна иметь общий делитель с 1 больше 1, что при н = 1 невозможно. Дадим имена вершинкам а1, а2, а2, а4, а5, а6, а7. Вершины с последовательными номерами соединены отрезками, так же а1 и а7 смежные. (а2 - а3, а5 - а6, а1-а7). Пример на 35 а1 = 3, а2 = 2, а3 = 13, а4= 15, а5 = 6, а6 = 9, а7 = 11. Докажем, что н не может быть четным. Если н четное, тогда смежные вершинки должны быть одной четности => все вершины одной четности. Докажем, что н не может быть простым числом. Если н простое, тогда пусть у а1 остаток при делении на н r, так как у простого числа существует всего один делитель больше единицы, и это оно само, тогда сумма чисел у смежных вершин должна делиться на него. Тогда у а2 остаток н - r при делении на н, а у а3 остаток r при делении на н, у а4 остаток n - r при делении на н, тогда сумма а1 + а4 будет делиться на н. Докажем, что н не равно 9. Сумма на не смежных вершинах должна быть взаимно простой с 9, а сумма на смежных должна делиться на 3, если у а1 остаток r. Тогда у а2 остаток 3 - r, а у а3 остаток r, у а4 остаток 3 - r, тогда сумма а1 + а4 будет делиться на 3. Аналогично 25 не подходит. Докажем, что н не равно 15. Заметим, что если у а1 остаток r, тогда у а3, а4, а5, а6 остаток не может быть равен 3 - r при делении на 3, а у а2 и а7 остаток при делении на 3 равен 3 - r. r в этом случае не равен 0, так как сумма а2 + а7 по условии взаимно проста с н => r равен 1 или 2. Если r = 1, тогда остатки у а2 и а7 равны 2, 2, а у а3, а4, а5, а6 остаток не может быть равен 2, у а3 и а6 остаток не может быть равен 1, так как сумма а7 + а3 и а6 + а2 взаимно проста с н, значит у а6 и а3 остаток может быть лишь 0, но и это не возможно так как как сумма а3 + а6 не должна делиться на 3 по условию=> н не делится на 3.
Минимальное число не простое, не четное, не делящееся на 3 это 35, пример приведен выше. Ответ 35.

Комментарий:

Вопрос 2

Выполнен

Баллов: 0,00 из 20,00

При $x, y, z \in (0, 2]$ найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{(x^3 - 6)\sqrt[3]{x+6} + (y^3 - 6)\sqrt[3]{y+6} + (z^3 - 6)\sqrt[3]{z+6}}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Комментарий:

Вопрос **3**

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Внутри треугольника AOB выбрана такая точка K, что прямая KO является биссектрисой угла CKD. Луч DK вторично пересекает описанную окружность треугольника COK в точке L, а луч CK вторично пересекает описанную окружность треугольника DOK в точке M. Найдите отношение площадей треугольников ALO и BMO.

Пусть < это угол. Запишем отношение площадей треугольников ALO BMO, Salo/Sbmo=(BO*MO*sin(<BMO))/(LO*OA*sin(<LOA)

Пусть <CKD = 2a, тогда <CKO=<OKD = a, <OLC = <OKC = a (KLCO вписанный), <DKO = <OMD = a, (MKOD вписанный).

Пусть <KOM = b, тогда <KMO = a - b (<CKO внешний треугольника MKO), <KMO = <KDO = a - b (MKOD вписанный), <MDK = <KOM (MKOD вписанный), <MDO = <MDK + <KDO = a - b + b = a => <OMD = <ODM = a => MO = OD, <MOB = 2a.

Пусть <LOK = c, тогда <KLO = c - b (<DKO внешний треугольника LKO), <KLO = <KDO = a - c (LKOC вписанный), <LCK = <KOL (LKOC вписанный), <LCO = <LCK + <KCO = a - c + c = a => <OLC = <OCL = a => LO = OC, <LOA = 2a.

Salo/Sbmo=(BO*MO*sin(<BMO))/(LO*OA*sin(<LOA), MO = OD, LO = OC. sin(<BMO) = sin(<LOA) = sin(2a)

Salo/Sbmo = (BO * OD)/(OC*AO)

ABCD вписанный => BO*OD= OC*OA => Salo/Sbmo = (BO * OD)/(OC*AO) = 1

Ответ: 1

Комментарий:

Вопрос 4

Выполнен

Баллов: 0,00 из 20,00

Натуральное число x в системе счисления с основанием r ($r \leqslant 36$) имеет вид $\overline{ppqq}$, причем $2q = 5p$. Оказалось, что r-ичная запись числа x^2 представляет собой семизначный палиндром с нулевой средней цифрой. (Палиндромом называется число, которое читается одинаково слева направо и справа налево). Найдите сумму r-ичных цифр числа x^2.

Комментарий:

Вопрос **5**
Выполнен
Баллов: 20,00 из 20,00

При каких n клетчатую доску $n \times n$ можно разбить по клеточкам на один квадрат 2×2 и некоторое количество полосок из пяти клеток так, что квадрат будет примыкать к стороне доски?

Ответ: 5m + 2, m целое и не отрицательное.

для н = 2 ответ очевиден, один квадрат 2 на 2 и 0 полосок.

н^2 = 4 + 5c

(н-2)(н+2) = 5c, 5 простое => на 5 делится одна из двух скобок.

если н представимо в виде 5m + 2 ((5m+2)^2 = 5(5m^2 + 4m) + 4)

пример на m = 1   к клетка квадрата 2 на 2, пn, п полоска, n ее номер

к	**к**	**п1**	**п1**	**п1**	**п1**	**п1**
к	к	п2	п2	п2	п2	п2
п3	п3	п3	п3	п3	п4	п5
п6	п6	п6	п6	п6	п4	п5
п7	п7	п7	п7	п7	п4	п5
п8	п8	п8	п8	п8	п4	п5
п9	п9	п9	п9	п9	п4	п5

при увеличении m на 1 добавится 2 прямоугольника размером 5m + 2 на 5 и квадрат 5 на 5, их мы можем замостить полосками из 5 клеток.

(5m+2)^2 + 50m + 45 = 25m^2 + 70m + 49 = (5(m + 1) + 2)^2

Если н представимо в виде 5m - 2, при m = 1 замостить невозможно, так как один квадрат 2 на 2, длинна стороны 3, а полоски 1 на 5.

Если m >= 2.

таблица 8 на 8. Докажем, что ее замостить невозможно

x   **x**
        x
      x
    x   x
  x   x
x   x
        x
      x

8 * 8 = 64, всего 64 клетки, (64 - 4) / 5 = 12. 12 полос, на рисунке выше расположено 12 x, заметим, что мы не сможем расположить полоску 5 на 5, так что бы она не содержала в себе x, так же каждая полоска не может содержать в себе 2 x,

так как квадрат должен примыкать к одной из сторон рассмотрим
эти варианты

хп1	**п1**	**п1**	**п1**	**п1**	**хп2**	**п3**	**п4**
к	к			х	п2	п3	п4
к	к		х		п2	п3	п4
п8	п9	хп10			п2	п3	хп4
п8	хп9	п10			п2	хп3	п4
хп8	п9	п10	п5	п5	хп5	п5	п5
п8	п9	п10	п6	хп6	п6	п6	п6
п8	п9	п10	хп7	п7	п7	п7	п7

Заметим, что полосы от 1 до 7 определяются однозначно. п1 определяется однозначно, затем п2 и тд до п10
на картинке видно, что замостить не возможно.

Рассмотрим, что будет если увеличить m на 1.

таблица 13 на 13

x				**x**					**x**			
			x					x				
		x					x					x
	x					x					x	
x					x					x		
				x					x			
			x					x				x
		x					x				x	
	x					x				x		
x					x				x			
				x				x				
			x				x					x
		x				x					x	
	x				x					x		

здесь замостить не выйдет аналогично, строки будут определяться однозначно

таблица симметрична относительно одной диагонали

хп1	**п1**	**п1**	**п1**	**п1**	**хп2**	**п3**	**п4**

хп1	**п1**	**п1**	**п1**	**п1**	**хп2**	**п3**	**п4**
п5	п5	5п	п5	хп5	п2	п3	п4
к	к		х		п2	п3	п4
к	к	х			п2	п3	хп4
	х				п2	хп3	п4
х			п6	п6	хп6	п6	п6
			п7	хп7	п7	п7	п7
			хп8	п8	п8	п8	п8

Заметим, что в этом случае замостить первую вертикаль невозможно

			х				
		х					х
	х		п7	п7	п7	хп7	п7
хп3	п2	п1			хп4	п5	п6
п3	п2	п1		х	п4	п5	п6
п3	п2	п1	х		п4	п5	п6
п3	п2	хп1	k	k	п4	п5	хп6
п3	хп2	п1	k	k	п4	хп5	п6

в этом случае замостить невозможно замостить, каждая полоска определяется однозначно

			х				
		х					х
	х		п7			х	п7
хп4	п3	п2	п1		х	п5	п6
			п1	х			
			хп1				
		х	п1	к	к		х
п4	хп3	п2	п1	к	к	хп5	п6

п7	**п8**	**п9**	**х**	**п9**	
		х			х
	х	п5	п6	х	

п7 п8 п9 х п9

х хп2 п3 п4

п7 п8 х

к к х

к к хп5 п6 х

п1 х п1 п2 хп3 п4

хп8 п8

х п7 хп7

х п6 х п6

хп9 п9 хп3 п4 п5

к к х

к к х

п2 х п2 х

п1 х п1 п3 хп4 п5

к к п11 х п11

к к хп10 п10 х

п1 хп6 п7 п8 п9 х

хп1 хп3 п4 п5

п1 х

п1 х

п1 п6 хп7 п8 п9 х

п2 х п2 п3 хп4 п5

1вариант

к к п3 х п3 п4

к к хп2 п2 х

п1 х п1 х

хп9 п8 п7 х

х п4

хп10 п10

х п5 хп5

п9 хп8 п7 п6 х п6

2вариант
здесь рассмотрены все варианты расстановки квадрата и можно заметить, что для 5m - 2 это невозможно так при добавлении (m+1)добавится 2 прямоугольника, где длинна или ширина равна 5 и квадрат 5 на 5.

x x x
x x x
x x x
x x
x x x
x x x
x x x
x x x

у каждой полоски ровно 2 x, их здесь 24, полос в 8 на 8 должно быть 12, квадрат 2 на 2 уместить невозможно
для остальных ь

Комментарий:

« ПРЕДЫДУЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 11

СЛЕДУЮЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 23 »