	ol2219255 ol2219255
Тест начат	понедельник, 14 Февраль 2022, 10:06
Состояние	Завершено
Завершен	понедельник, 14 Февраль 2022, 14:10
Прошло времени	4 час. 3 мин.
Оценка	**56** из 100

Вопрос
Инфо

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 4 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос **1**

Выполнен

Баллов: 8 из 10

Некоторый треугольник разрезали на пять маленьких треугольников так, как показано на рис. 1. Могли ли при этом все пять маленьких треугольников оказаться равными?

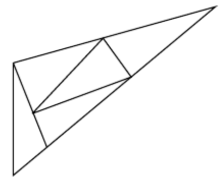

Рис. 1

Ответ: Да, могли. Назовём точки треугольника таким образом:

Т.к. нас спрашивают "могли ли", мы можем строить этот треугольник так, как нам надо. Построим точки F, G и E так, что они середины сторон AB, AD и DB соответственно. Тогда GF, FE и GE средние линии. Как известно, средние линии разбивают треугольник на 4 равных. То есть, AFG = FBE = GED = FGE. Остался треугольник ACD. Построим треугольник ADB так, что AD - перпендикуляр к стороне CB. Тогда ‹CDA = ‹ADE = 90°. Т.к. точка C не зависит от треугольника ADB, то мы можем её построить так, что CD = DG. Построим треугольник так, что 2AD = DB. Тогда DE = AD (т.к. E - середина DB). Получается, что треугольник ACD = GDE, по двум сторонам (CD = DG, DE = AD) и углу между ними (90°). Итого, все 5 треугольников равны. Осталось привести пример сторон.

DB = AB = 4
AD = 3
CD = DG = AG = 1
DE = EB = 2 | AF = FB = 2
GF = 2 | GE = AC = 2 | FE = 1.5

Комментарий:
рассуждение не содержит рисунка или словесного описания точек
8 баллов вместо 5 с учетом присланного рисунка
(меньше 10 поскольку решение правильное, но приведены неверные длины сторон)

Вопрос **2**

Выполнен

Баллов: 30 из 50

На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Костя выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа, не превосходящие n, так, чтобы для всех поставленных им чисел выполнялось свойство: *если числа a и b соединены отрезком, то разность $a - b$ должна быть взаимно проста с n, а если не соединены, то числа $a - b$ и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1.* Например, для картинки на рис. 2 Костя взял $n = 45$ и подобрал подходящую расстановку — она показана на рис. 3.

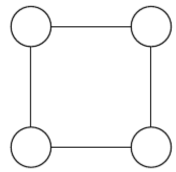

Рис. 2

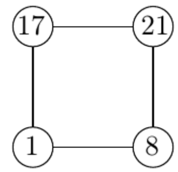

Рис. 3

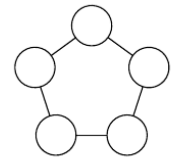

Рис. 4

а) При каком наименьшем n существует требуемая расстановка чисел на рис. 2?
б) Можно ли расставить числа в кружочках на рис. 4 при $n = 25$?
в) Можно ли расставить числа в кружочках на рис. 4 при $n = 39$?
г) При каком наименьшем n существует расстановка чисел в кружочках на рис. 4?

а) Очевидно, что n = 1 не подойдёт, т.к. общий делитель с 1 = 1, а должен существовать вариант, когда разность имеет общий делитель > 1.

Если n = 2, то мы можем расставлять числа только 1 и 2. Пример расстановки:

Разница соединённых чисел = 1, что взаимопросто с 2. Разница несоединённых = 0, НОД(2; 0) = 2.

б) Нет. Число 25 имеет 1 собственный делитель: 5 => все возможные делители, которые будут давать НОД > 1 кратны 5. Рассмотрим рисунок.

x - y ≡ x - z (mod 5) по условию => y ≡ z (mod 5) => y - z кратно 5, что противоречит условию => такое невозможно.

в) Нет. Число 39 имеет 0 собственных делителей => это возможно, только если x = y = z (из предыдущего рисунка), но тогда z и y будут давать в разности 0, а НОД(0, 39) ≠ 1, противоречие.

г) Если у n есть делитель 2, то x; y и x; z должны быть одной чётности, иначе одна из разниц с числом между ними будет точно чётной. Но тогда y и z будут одной чётности => их разница будет кратна 2, что противоречит условию.

Тогда пусть n - нечётное. Тогда, чтобы не было ситуации как в пункте б), нужно чтобы x - y и x - z имели НОД с взаимопростыми делителями n. Раз n нечётное, то первые такие делители 3 и 5.

Пусть e - c кратно 3, а e - b кратно 5. Тогда b - e тоже кратно 5, а b - d должно быть кратно 3 (иначе будет ситуация как в б).). Тогда d - a должно быть кратно 5. c - e кратно 3 => c - a тоже должно быть кратно 5. И получается ситуация, как в пункте б) => 2 взаимопростых делителя это мало. Пример на 3 взаимопростых делителя 3, 5, 7 => n = 3 * 5 * 7 = 105:

Ответ: 105.

Комментарий:
а) 0

б) 10

в) 0

г) 10

нет примера

с учетом присланного рисунка

г) 20 вместо 10

Вопрос 3

Выполнен

Баллов: 8 из 10

На доске написано 2021 минусов. Петя и Вася играют в такую игру. Ход состоит в том, что можно один минус заменить на плюс, либо стереть один плюс и один минус, либо два минуса заменить на три плюса. Ходят по очереди, первым ходит Петя, проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

Ответ: Победит Петя.

Сходить нельзя тогда, когда все знаки стали плюсами => минусы должны закончится. Кол-во минусов нельзя увеличить, только уменьшить. Рассмотрим все варианты ходов не учитывая "+":

1) - 1 "-"
2) - 1 "-"
3) - 2 "-"

Заметим, что если мы всегда можем дополнить ход предыдущего игрока до 3. Тогда план Пети такой:

1) Он делает 3 вариант хода => Остаётся 2019 минусов. 2019 кратно 3.

2) Вася делает какой-либо ход.

3) Петя дополняет его до 3.

4) Повторяем с 2 шага.

Получается, кол-во минусов всё время будет кратно 3 после хода Пети, и когда-нибудь дойдёт до 0 => Вася не сможет сходить. Победил Петя.

Комментарий:
плюсы игнорируются

Вопрос **4**

Выполнен

Баллов: 10 из 30

а) Имеется большая компания людей — больше 100 человек, в которой некоторые люди дружат. Верно ли, что каждую такую компанию можно разбить на две группы «дружественным способом», т. е. так, чтобы у каждого человека друзей в своей группе было больше либо равно, чем друзей в противоположной группе?

б) Докажите, что каждую компанию, в которую входит 2022 человека, можно разбить на 15 групп «недружественным способом», т. е. так, чтобы у каждого человека количество друзей в своей группе составляло не более $1/15$ от общего числа его друзей.

а) Нет (Будем считать, что в группах должен быть как минимум 1 человек, иначе же можно всех распределить в 1 группу => ответ Да).

Допустим, у нас в компании так, что 1 человек дружит со всеми, но больше никто ни с кем не дружит. Тогда, все, кто попадут в группу без "общего друга", будут иметь друзей меньше в своей группе (0), чем друзей в противоположной группе (1).

Комментарий:

« ПРЕДЫДУЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 11

СЛЕДУЮЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ »
Заключительный этап - Математика 6-7 21/22 (скрытый)

УТВЕРЖДАЮ:
Ответственный секретарь Оргкомитета ОШ СПбГУ
Хуршудян А.Л. (______________)

ПРОТОКОЛ
рассмотрения апелляции участника Олимпиады школьников Санкт-Петербургского государственного университета

г. Санкт-Петербург — № МАТ-17 — *«31» марта 2022 г.*

Апелляционная комиссия в составе:

1. Савельева Анастасия Глебовна,
2. Погожев Сергей Владимирович,
3. Флоринский Александр Алексеевич.

рассмотрела апелляционное заявление участника Олимпиады школьников СПбГУ:

ФИО: ***Осокин Александр Валерьевич***

Предмет (комплекс предметов) Олимпиады: ***математика***

Количество набранных баллов до апелляции: ***43***

По результатам рассмотрения апелляционного заявления участника Олимпиады, Апелляционная комиссия приняла следующее решение: ***повысить оценку за работу на 13 баллов, признать участника призером Олимпиады школьников СПбГУ по математике.***

Рисунок к задаче №1 обнаружен, построения приняты, оценка за задачу повышена на 3 балла.

Рисунок к задаче №2 обнаружен, приведенный на нем пример позволяет повысить оценку за задачу на 10 баллов.

Оценку за задачу №4 оставить без изменений.

Количество набранных баллов после апелляции: 56