	ol2253999 ol2253999
Тест начат	понедельник, 14 Февраль 2022, 10:06
Состояние	Завершено
Завершен	понедельник, 14 Февраль 2022, 14:05
Прошло времени	3 час. 59 мин.
Оценка	**80** из 100

Вопрос
Инфо

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 -вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 5 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

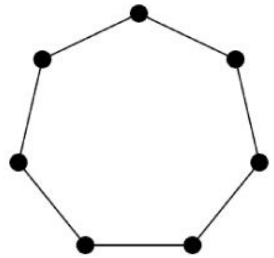
б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!
Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос **1**
Выполнен
Баллов: 20 из 20

На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Саша выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа так, чтобы для всех этих чисел выполнялось свойство:
если числа a и b не соединены отрезком, то сумма $a + b$ должна быть взаимно проста с n, а если соединены, то числа $a + b$ и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1.
При каком наименьшем n существует такая расстановка?



Пронумеруем числа от 1 до 7, начиная с какого-нибудь по часовой стрелке. Заметим, что n не может быть простым, т.к. тогда соединенные числа не взаимнопросты с n только тогда, когда в сумме делятся на него, значит если у первого числа остаток x при делении на n, то у следующего по часовой n - x, у следующего x, ..., у числа, стоящего рядом с первым x, но если 2x делится на n, то третье число плюс седьмое будут давать остаток 2x при делении на n, а они не соединены. Также, если n делится на 2, то среди семи чисел есть хотя бы 4 одной четности, но они все очевидно не могут быть соединены. Т.о. n это произведение скольких-то нечетных простых чисел.

Если из первых 35 натуральных чисел выкинуть все четные и простые, то останутся 9, 15, 21, 25, 27, 33, 35.

Числа 9 и 27 имеют простым делителем только 3, значит во всех парах сумма будет делиться на 3, а так не работает, значит выкидываем их, аналогично с 25.

Числа 15, 21, 33 делятся на 3. Поймем почему они не подходят. Если среди семи чисел больше двух делящихся на 3, то какие-то два из них не соединены друг с другом, но в сумме делятся на 3 => (?!). Тогда у нас не больше двух делящихся на три, и они соединены. Из оставшихся 5 все должны давать один остаток при делении на 3, иначе есть остаток, которого хотя бы 3, и не все из этих 3 соединены с некоторым другим числом, дающим другой остаток, но в сумме с ним делятся на 3... Получается есть 5 чисел с одинаковым остатком при делении на 3, их суммы не делятся на 3, значит делятся на второе простое (5, 7, 11) тогда по рассуждению из самого начала, остатки по второму простому чередуются, и тогда первое из этих пяти в сумме с четвертым делится (?!)

Осталось только 35, для него существует пример: 1, 4, 10, 5, 2, 8, 34. Они стоят по кругу, не трудно убедиться что соседние имеют общий делитель с 35, а не соседние - не имеют.

Комментарий:

Вопрос **2**
Выполнен
Баллов: 15 из 20

При $x, y, z \in (0, 2]$ найдите максимальное значение выражения

$$A = \frac{(x^3 - 6)\sqrt[3]{x+6} + (y^3 - 6)\sqrt[3]{y+6} + (z^3 - 6)\sqrt[3]{z+6}}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Рассмотрим (x^3-6)*(x+6)^1/3. Заметим, что (x+6)^1/3<=2, так как x<=2. Аналогично (y+6)^1/3<=2 и (z+6)^1/3<=2.Рассмотрим 2*(x^3-6). Заметим,что x^3<=(x^2)/2+6, так как x^2<=4, то 3*(x^2)/4<=3, x^2<=(x^2)/4+3. Тогда 2*x^3<=x^2+12, тогда 2*(x^3-6)<=x^2. Аналогично 2*(y^3-6)<=y^2 и 2*(z^3-6)<=z^2..Значит A<=(x^2+y^2+z^2)/(x^2+y^2+z^2) = 1. Достигается при x=y=z=2.

Комментарий:
Непонятны причинно-следственные связи в рассуждении.

Вопрос **3**
Выполнен
Баллов: 20 из 20

Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Внутри треугольника AOB выбрана такая точка K, что прямая KO является биссектрисой угла CKD. Луч DK вторично пересекает описанную окружность треугольника COK в точке L, а луч CK вторично пересекает описанную окружность треугольника DOK в точке M. Найдите отношение площадей треугольников ALO и BMO.

из условия LCOK - вписанный => угол CLO = углу OKC

из условия KODM-вписанный=> угол OKD = углу DMO

но также из условия мы знаем что KO биссектриса CKD то есть угол CKO = углу OKD

=> углы CLO, OKC, OKD, DMO равны

из вписанности LCOK и KODM: угол OKD = углу LCO и угол CKO = углу ODM

таким образом углы OLC, LCO, OKC, DKO, ODM, DMO равны (!)

тогда из (!) углы MOD и LOC тоже равны, но тогда равны и углы MOA и LOB (т.к. углы AOD и BOC равны как вертикальные)

также из (!) MO=OD и LO=OC

запишем площади треугольников ALO и BMO

S ALO= LO*OA*1/2*sin угла LOA = OC*OA*1/2*sin угла LOA

S BMO= BO*OM*1/2*sin угла BOM = BO*OD*1/2*sin угла BOM

заметим что OC*OA=BO*OD (как отрезки пересекающихся хорд)

и угол LOA = BOM (т.к. они состоят из общего угла LOM и из равных углов MOA и LOB)

таким образом sin LOA = sin BOM

1/2=1/2

следовательно площади треугольников равны

Ответ: 1:1

Комментарий:

Вопрос **4**
Выполнен
Баллов: 10 из 20

Натуральное число x в системе счисления с основанием r ($r \leqslant 36$) имеет вид $\overline{ppqq}$, причем $2q = 5p$. Оказалось, что r-ичная запись числа x^2 представляет собой семизначный палиндром с нулевой средней цифрой. (Палиндромом называется число, которое читается одинаково слева направо и справа налево). Найдите сумму r-ичных цифр числа x^2.

q = 2,5 p, значит p кратно 2, p не больше 14, q не больше 35. В r-ичной системе счисления x = -pp(2,5p)(2,5p)- = p*r^3 + p*r^2+2.5p*r+2.5p, x^2 = p^2*r^6+2p^2*r^5+6p^2*r^4+10p^2*r^3+11.25p^2*r^2+12.5p^2r+6.25p^2 = -abc0cba- = a*r^6+b*r^5+c*r^4+0+c*r^2+b*r+a. Сумма цифр числа x^2 равна 2(a+b+c). отсюда a = 6,25p^2 (mod r). p^2<r (потому что число семизначное, а не восьмизначное), Значит p может равняться только 2 и 4 (0 быть не может). Рассмотрим оба случая. При p = 4: 16r^6+32r^5+96r^4+160r^3+180r^2+200r+100. Перебрав все возможные варианты для p=4, стало ясно, что решений, удовлетворяющих условию задачи, при p=4 и r<=36, нет.

При p = 2: 4r^6+8r^5+24r^4+40r^3+45r^2+50r+25. Тогда при r = 22, (цифры от 0 до 21) у нас получается, что x^2 = 4r^6+9r^5+5r^4+0+5r^2+9r+4 = -4950594-, и сумма цифр в десятичной системе счисления составляет 4+4+5+5+9+9=36.

(горизонтальные линии вокруг числа "-a-" равносильны черте над числом a. Это аналог данного обозначения)

Ответ: сумма r-ичных цифр числа x^2 в десятичной системе счисления равна 4+9+5+0+5+9+4 = 36.

Комментарий:
Решение неполное, равенство r=22 неверно.

Вопрос **5**
Выполнен
Баллов: 15
из 20

При каких n клетчатую доску $n \times n$ можно разбить по клеточкам на один квадрат 2×2 и некоторое количество полосок из пяти клеток так, что квадрат будет примыкать к стороне доски?

Заметим, что площадь квадрата равна n^2=4+5t, значит n=5k+2 (понятно ,что есть пример на то, когда 2*2 находится в угле, вдоль идут прямоугольники 5*1 и 1*5 на

два уровня в высоту и в ширину. Далее у нас останется только квадрат ,стороны которого кратны 5,а значит замощение возможно.)

Случай, когда n=5k+3 ,очевидно, не возможен. Чтоб это доказать, придумаем поясняющую раскраску.

Сделаем одну диагональную раскраску для 8*8(для остальных будет аналогично) соответственно так от левого верхнего края - (1, 22, 333, 4444, 55555, 111111, 2222222, 33333333, 4444444, 555555, 11111, 2222, 333, 44, 5) и второй случай (т.е вторую раскраску) раскраски смотрим в левый нижний угол (1, 22, 333, 4444, 55555, 111111, 2222222, 33333333, 4444444, 555555, 11111, 2222, 333, 44, 5) . У нас 12 единиц и пятерок, 14 троек ,а остальных по 13. И в первом варианте раскраски и во втором 1*5 и 5*1 занимают все числа от 1 до 5, поэтому для уравнивания чисел квадрат

должен занимать клетки с числами 2,3,3,4. Для первой раскраски отметим , где они(квадраты 2*2) могут стоять и для второй сделаем аналогичное действие(видно на раскраске ,как отмечать). Заметим, что они будут пересекаться(совпадать) только по центру(пересечение (совпадение) квадратов должно быть, иначе на какой-то раскраске квадрат 2*2 не будет покрывать 2334), значит только центральная клетка будет 2*2. А значит наш квадрат 2*2 не будет прилегать к стороне! Что и требовалось доказать.

Ответ: n=5k+2.

Комментарий:
Алгоритм раскраски нечетко описан, а рассуждения недостаточно обоснованы.

« ПРЕДЫДУЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 13

СЛЕДУЮЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ »
Вариант 21