	ol2203861 ol2203861
Тест начат	понедельник, 14 Февраль 2022, 10:05
Состояние	Завершено
Завершен	понедельник, 14 Февраль 2022, 11:45
Прошло времени	1 ч. 40 мин.
Оценка	**64** из 100

Вопрос
Инфо

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 4 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос **1**

Выполнен

Баллов: 9 из 10

Некоторый треугольник разрезали на пять маленьких треугольников так, как показано на рис. 1. Могли ли при этом все пять маленьких треугольников оказаться равными?

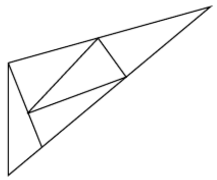

Рис. 1

Заметим что 4 правых треугольника равны если резать по серединам сторон, а 5 должен иметь угол в сумме дающий с одним из тех 180, но раз треугольники равны, то этот угол есть в этом треугольнике. То либо это тот же самый и тогда он 90 или в треугольнике 2 угла дают в сумме 180 и третий 0, но тогда если это разные то один из углов 0 что невозможно. Если один из углов 90, то и тот с которым он прилегает 90, а тогда просто возьмём равнобедренный прямоугольный треугольник, разделим его на 4 треугольника в два раза меньше его самого (по серединам сторон) и приставим его к углу 90.То один из катетов продлиться и будет треугольник разделённый на 5 равных треугольников как на рис.1.

Ответ: да.

Комментарий:
соотношение катетов должно быть

Вопрос **2**

Выполнен

Баллов: 15 из 50

На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Костя выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа, не превосходящие n, так, чтобы для всех поставленных им чисел выполнялось свойство: *если числа a и b соединены отрезком, то разность $a - b$ должна быть взаимно проста с n, а если не соединены, то числа $a - b$ и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1*. Например, для картинки на рис. 2 Костя взял $n = 45$ и подобрал подходящую расстановку — она показана на рис. 3.

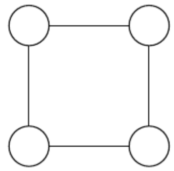

Рис. 2

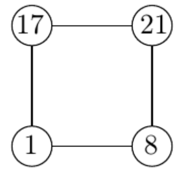

Рис. 3

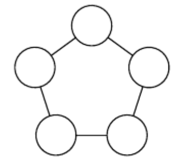

Рис. 4

а) При каком наименьшем n существует требуемая расстановка чисел на рис. 2?
б) Можно ли расставить числа в кружочках на рис. 4 при $n = 25$?
в) Можно ли расставить числа в кружочках на рис. 4 при $n = 39$?
г) При каком наименьшем n существует расстановка чисел в кружочках на рис. 4?

а)Заметим что кружков 4 => n хотя бы 4. При 4 можно поставить так: 1 - 2

, то суммы по рёбрам 1+2,1+4,3+2,3+4 нечётны, а 1+3,2+4 чётны всё подходит | |

(пример 1-2 первая строка , 4-3 вторая строка) 4 - 3

б)Заметим что сумма чисел стоящих на диагонали должна быть кратна 5, ведь 25=5*5, пусть самое верхнее число на 5 даёт остаток y, то 2 числа в нижней строке на диагоналях с ним => они дают остатки 5-y, то 2 числа в средней строке на диагонали хоть с одним из них => они дают остаток 5 - (5 - y) = y, но они соединены ребром с одни из чисел в нижней строке, но их остатки 5-y, а тогда их сумма кратна 5 и не взаимно проста с n противоречие, а значит ответ нет.

в)верхнее число 7 далее в средней строке 3 и 10, далее 2 и 6. 7+3 = 10, 7+10 = 17, 10+6 = 16,6+2 = 8,2+3 = 5

ни одна из сумм не кратна 3 или 13, а значит взаимно просты 3*13=39.

7+2 = 9,7+6 = 13,6+3 = 9,2+10 = 12,3+10 = 13 все суммы делятся на 3 или на 13, а значит не взаимно просты с 3*13=39.

Пример: 7

/ \

3 10

\ /

2 - 6

г)рассуждая по б) можно понять что n должно делится на 2 различных простых числа иначе у нас остатки только у и p-y(p - простое число на которое делится n).А тогда у и p-y будут соединены ребром противоречие, а тогда n = 6,10,12... , при n делящимся на 2 у нас либо хотя бы 3 нечётных, либо хотя бы 3 чётных, а тогда 2 числа одинаковой чётности стоят на одном ребре(иначе тех которых не более 2 могут участвовать только в 4 рёбра, а рёбер 5 противоречие), а тогда n не делится на 2 и тогда минимальное n которое делится на 2 различных простых числа это 15.пример для 15 верхнее число 15 далее в средней строке 4 и 2, далее 10 и 6. 15 + 2 = 17, 2+6 = 8, 6+10 = 16, 10+4 = 14, 4+15 = 19 ни одна из сумм не делится на 3 или на 5, а значит взаимно просто с 3*5 = 15. 15 + 10 = 25, 15 + 6 = 21,6 + 4 = 10, 10 + 2 = 12, 4 + 2 = 6 все суммы делятся на 3 или 5, а значит не взаимно просты с 3*5 = 15.

```
Пример:      15
           /     \
         4         2
          \         /
          10   -   6
```

Ответ: а)4 , б)нет, в)да г)15.

Комментарий:
а) 10

б) 2

в) 0

г) 3

Вопрос 3

Выполнен

Баллов: 10 из 10

На доске написано 2021 минусов. Петя и Вася играют в такую игру. Ход состоит в том, что можно один минус заменить на плюс, либо стереть один плюс и один минус, либо два минуса заменить на три плюса. Ходят по очереди, первым ходит Петя, проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

Заметим что каждым из возможным ходов кол-во минусов уменьшается на 1,1,2 соответственно. И всегда можно уменьшить кол-во минусов на 1 или на 2 ходом 1 или 3 соответственно(если есть столько минусов).То если Петя первым ходом заменит 2 минуса на 3 плюса, а потом будет уменьшать кол - во минусов противоположно Васе(если Вася на 1, то он на 2, а если Вася на 2, то он на 1), то после Петиного хода кол - во минусов делится (они с Васей убирают по 3), а после Васиного не делится, то их станет 0 после Петиного хода и Вася не сможет сходить.

Ответ: Петя.

Комментарий:

Вопрос **4**

Выполнен

Баллов: 30 из 30

а) Имеется большая компания людей — больше 100 человек, в которой некоторые люди дружат. Верно ли, что каждую такую компанию можно разбить на две группы «дружественным способом», т. е. так, чтобы у каждого человека друзей в своей группе было больше либо равно, чем друзей в противоположной группе?

б) Докажите, что каждую компанию, в которую входит 2022 человека, можно разбить на 15 групп «недружественным способом», т. е. так, чтобы у каждого человека количество друзей в своей группе составляло не более $1/15$ от общего числа его друзей.

а) заметим что если один человек дружит со всеми остальными, а они не дружат между собой, то у них по 1 другу и они должны быть с ним в группе, а тогда все люди в одной группе с тем кто дружит со всеми противоречие, а значит ответ нет.

Ответ: а)нет.

б) наугад распределим их по группам и если в какой-то группе у человека в группе более 1/15 друзей, то переведём его в группу где менее 1/15 его друзей такая есть, ведь иначе у него более 1 кол-ва его друзей. Докажем что когда-нибудь перераспределение прекратится. Заметим что при перемещении человека в группу кол-во дружб внутри групп уменьшается, ведь исчезли дружбы этого человека с его друзьями из той группы, то есть исчезло более 1/15 * 2 дружб от кол-ва его друзей(дружба взаимна и 1 дружит со 2, и 2 дружит с 1 это две разные дружбы), а появилось не более 1/15*2 дружб внутри групп от кол-ва его друзей.То есть в сумме уменьшилось. Дружб внутри групп не более всего кол-ва дружб не более 2022*2021(каждый дружит с каждым) и дружб в группах не менее 0.А тогда если перераспределение не закончится, то когда дружб станет 0(их меньше стать не может), то у всех в группе будет 0 друзей и даже если всего у них по 0 друзей, то у всех не более 1/15 друзей в группе, а если у них всего друзей более 0, то и подавно, то перераспределений не более 2022*2021(каждый раз уменьшается хотя бы на 1 и изначально не более 2022*2021 дружб внутри групп), а значит перераспределение точно остановится и мы разобьём их на не дружащие группы Если групп менее 15, то в пустые группы добавим по 1 человеку из других групп где более 1 человека и тогда в каждой ранее пустой группе по 1 человеку и тогда друзей в группе у них 0, а в каждой ранее не пустой группе новых людей не появилось, а значит у каждого снова менее 1/15 друзей. А значит их можно так разбить. Что и требовалось доказать.

Комментарий:

« ПРЕДЫДУЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 11

СЛЕДУЮЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Заключительный этап - Математика 6-7 21/22 (скрытый) »