	ol2242259 ol2242259
Тест начат	понедельник, 14 Февраль 2022, 10:05
Состояние	Завершено
Завершен	понедельник, 14 Февраль 2022, 14:01
Прошло времени	3 час. 55 мин.
Оценка	**60,00** из 100,00

Вопрос
Инфо

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 5 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

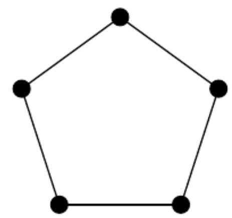
Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос 1

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Таня выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа так, чтобы для всех этих чисел выполнялось свойство:
если числа a и b не соединены отрезком, то сумма a^2+b^2 должна быть взаимно проста с n, а если соединены, то числа a^2+b^2 и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1.
При каком наименьшем n существует такая расстановка?



ol2242259_1.pdf

Комментарий:

Вопрос **2**

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

При $x, y, z \geqslant 1$ найдите минимальное значение выражения

$$A = \frac{\sqrt{3x^4 + y} + \sqrt{3y^4 + z} + \sqrt{3z^4 + x} - 3}{xy + yz + zx}.$$

ol2242259_2.pdf

Комментарий:

Вопрос 3

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

Дан вписанный четырехугольник $ABCD$ с перпендикулярными диагоналями. На описанной вокруг него окружности отмечена точка E, диаметрально противоположная D, причем отрезки AB и DE не пересекаются. Найдите отношение площадей треугольника BCD и четырехугольника $ABED$.

ol2242259_3.pdf

Комментарий:

Вопрос **4**

Выполнен

Баллов: 0,00 из 20,00

На доске написано число $x = 9999$ в системе счисления с четным основанием r. Вася выяснил, что r-ичная запись x^2 представляет собой восьмизначный палиндром, у которого сумма второй и третьей цифр равна 24. (Палиндромом называется число, которое читается одинаково слева направо и справа налево). При каких r такое возможно?

Заметим, что так как сумма второй и третьей цифры 24, то основание системы не может быть меньше 14 (оно четное), так как в противном случае каждая цифра не могла бы превосходить 11 (если основание 12), а сумма - 22. Значит r>=14. Так как x^2 будет представим в виде 8-значного палиндрома, то x^2>=r^7. Пусть r >= 16, тогда r^7=16^7=2^28=1024*1024*256>2 * 10^8, но x^2=(10^4-1)^2=10^8-2*10^4+1, < 10^8, значит, r < 16, значит остается один вариант r = 14. Осталось убедиться, что x в 14-ричной системе - палиндром.

Ответ: 14.

Комментарий:
Решение неверное, результат неверный.

Вопрос **5**

Нет ответа

Балл: 20,00

Дана квадратная таблица 2021×2021. Каждая ее клетка окрашена в один из n цветов. Известно, что для любых четырех клеток одного цвета, расположенных в одном столбце, справа от верхней из них и слева от нижней из них нет клеток того же цвета. При каком наименьшем n такое возможно?

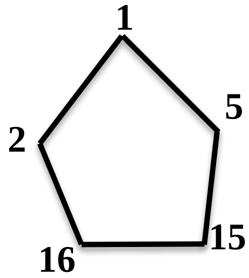
« ПРЕДЫДУЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 21

СЛЕДУЮЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ »
Вариант 14

Задача 1

Ответ: 65

Пример:



Доказательство примера. 65 = 5 * 13.

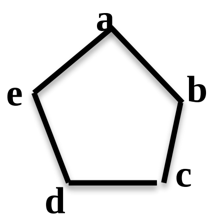
1) $1^2+5^2=26$ делится на 13 2)$1^2+2^2=5$ делится на 5 3) $1^2+15^2 = 226$ не делится на 5 и на 13 4) $1^2+16^2=257$ не делится на 5 и на 13 5) 5^2+15^2 делится на 5(каждое делится на 5) 6) $5^2+16^2=281$ не делится на 5 и 13 7) $5^2+2^2=29$ не делится на 5 и 13 8) $15^2+16^2=481$ делится на 13 9) $15^2+2^2=229$ не делится на 5 и 13 10) $16^2+2^2=260$ делится на 13. Что и требовалось доказать.

Оценка.

1) $n \neq 1$, так как иначе не найдется такого числа k, что n делится на k и сумма квадратов делится на k.

2) Пусть n делится на 2. Тогда по принципу Дирихле найдутся 3 таких числа, что они имеют одинаковый остаток по модулю 2. Тогда заметим, что для любой пары из этих трех чисел верно, что сумма квадратов будет делиться на 2. Тогда в пятиугольнике эти три числа должны быть попарно соседними. Но такого быть не может, так как если соседи одного не являются соседями друг друга. Отсюда следует, что n – нечетно.

3) Пусть n – простое.



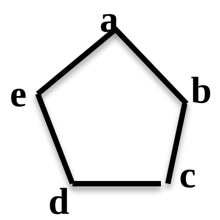
Тогда a^2+b^2делится на n, c^2+b^2 делится на n, c^2+d^2 делится на n => $(a^2+b^2) + (c^2+d^2) – (c^2+b^2) = a^2+d^2$ делится на n => противоречие => n – составное.

4) n = 3 * p, где p – простое. Заметим, что a^2+b^2 делится на 3 тогда и только тогда, когда a и b делятся на 3. Докажем это

a mod 3	0	1	2
a^2 mod 3	0	1	1

Если a не делится на 3, то a^2+b^2 сравнимо с 1 или 2 по модулю 3. Противоречие.

Но тогда есть не более 2 чисел, делящихся на 3, так как иначе возникнет противоречие с условием, аналогичное случаю n делится на 2. Тогда не более 1 ребра, где сумма квадратов чисел делится на 3, значит на остальных 4 ребрах сумма квадратов делится на p.



Пусть эти 4 ребра – 1) a-b, 2) b-c, 3) c-d 4) d-e

a^2+b^2делится на p, c^2+b^2 делится на p, c^2+d^2 делится на p => $(a^2+b^2) + (c^2+d^2) – (c^2+b^2) = a^2+d^2$ делится на p. Противоречие => значит $n \neq 3 * p$.

Аналогично случаю $n = 3 * p$, докажем, что $n = 7 * p$ и $n = 11 * p$, где p – простое быть не может. Сделаем табличку, где строки a mod 7, столбцы b mod 7, ячейки (a^2+b^2) mod 7

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	4	2	2	4	1
1	1	2	5	3	3	5	2
2	4	5	1	6	6	1	5
3	2	3	6	4	4	6	3
4	2	3	6	4	4	6	3
5	4	5	1	6	6	1	5
6	1	2	5	3	3	5	2

Аналогично mod 11

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	1	4	9	5	3	3	5	9	4	1
1	1	2	5	10	6	4	4	6	10	5	2
2	4	5	8	2	9	7	7	9	2	8	5
3	9	10	2	7	3	1	1	3	7	2	10
4	5	6	9	3	10	8	8	10	3	9	6
5	3	4	7	1	8	6	6	8	1	7	4
6	3	4	7	1	8	6	6	8	1	7	4
7	5	6	9	3	10	8	8	10	3	9	6
8	9	10	2	7	3	1	1	3	7	2	10

9	4	5	8	2	9	7	7	9	2	8	5
10	1	2	5	10	6	4	4	6	10	5	2

Тогда получаем, что 4 ребра будут делиться на p.

a^2+b^2делится на p, c^2+b^2 делится на p, c^2+d^2 делится на p => $(a^2+b^2) + (c^2+d^2) - (c^2+b^2) = a^2+d^2$ делится на p. Противоречие => значит $n \neq 7 * p$, $n \neq 11 * p$. Чтд.

5) n = 9 * p, p - простое. Заметим, что если сумма квадратов чисел на ребрах делится на 9, то она делится на 3, если на 3 * p, то на 3, тогда все рассуждения аналогичны случаю n = 3 * p=> решений нет.

6) $n = p^k$, p – простое. Если a^2+b^2 делится на m, n делится на m, то m делится на p. Тогда a^2+b^2делится на p, c^2+b^2 делится на p, c^2+d^2 делится на p => $(a^2+b^2) + (c^2+d^2) - (c^2+b^2) = a^2+d^2$ делится на p => противоречие => $n \neq p^k$.

Теперь найдем минимальное число не противоречащее, удовлетворяющее всем условиям. Сделаем таблицу из нечетных.

3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33
пр	пр	пр	3 * p	пр	пр	3 *p	пр	пр	3 *p	пр	p^k	p^k	пр	пр	3 *p
35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61	63	65
7 * p	пр	3 *p	пр	пр	9 * p	пр	p^k	3 *p	пр	11*p	3 * p	пр	пр	9 * p	

Мы доказали, что при n < 65 решений нет.

Ответ: 65.

Задача 2

$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$ *(неравенство между средним квадратическим и арифметичнским)*

$\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2} \geq \frac{a+b+c+d}{2}$

Докажем, что $\frac{\sqrt{3x^4+y}+\sqrt{3y^4+z}+\sqrt{3z^4+x}-3}{xy+yx+xz} \geq 1$

$$\sqrt{3x^4+y}+\sqrt{3y^4+z}+\sqrt{3z^4+x}-3 \geq\ xy+yx+xz$$

$$\sqrt{x^4+x^4+x^4+y} \geq \frac{x^2+x^2+x^2+\sqrt{y}}{2}$$

Доказать, что

$$\frac{3x^2+\sqrt{y}+3y^2+\sqrt{z}+\ 3z^2+\sqrt{x}}{2} \geq 3+xy+yx+xz$$

$$x^2+y^2 \geq 2xy$$

$$x^2+z^2 \geq 2xz$$

$$z^2+y^2 \geq 2zy$$

$$2xy+2xz+2zy+\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}+x^2+y^2+z^2 \geq 6+2xy+2yx+2xz$$

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}+x^2+y^2+z^2 \geq 6$$

Это верно, так как x, y, z ≥ 1 по условию. Теперь пример, когда выражение = 1

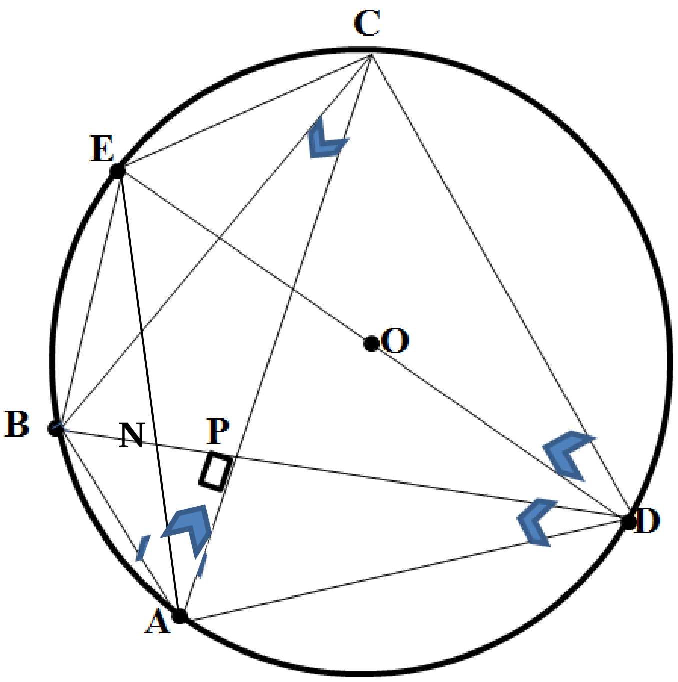
$$x=y=z=1$$

$$\frac{\sqrt{3*1^4+1}+\sqrt{3*1^4+1}+\sqrt{3*1^4+1}-3}{1*1+1*1+1*1}=1$$

Что и требовалось доказать.

Ответ: 1

Задача 3



Угол BPA = (дуга AB + дуга CD) / 2 = 90°. Тогда дуга AB + дуга CD = 180°.

Дуга ECD = дуга EC + дуга CD = 180°. (Диаметр) Тогда получили, что дуга AB = дуга EC. Пусть дуга AB = дуга EC = 2a. Тогда углы EAC = ECD = BDA = BCA = a (впис). S_{BCD}=(CP*BD)/2. S_{ABED} = (BD*AE * sin(BNA))/2 (P-точка пересечения AC и BD, N – точка пересечения AE и BD). Угол BNA = (дуга AB + дуга ED) / 2. (дуга ED = 180° доказано), значит угол BNA = (90 + a)°.

Тогда sin(BNA)) = sin((90 + a)°) = cos(a). S_{BCD}/ S_{ABED} = CP / (AE * cos(a)).

Cos(a) = PC / BC (прямоугольный BPC)=> S_{BCD}/ S_{ABED} = CP / (AE * CP/BC) = BC/AE. Заметим, что дуга BC = дуга AE = дуга BE + 2a, так как AB = дуга EC = 2a. Но тогда так как на равные дуги опираются равные хорды, то BC=AE=>

S_{BCD} = S_{ABED}. Тогда искомое отношение 1:1.

Ответ: 1:1.