	ol2220631 ol2220631
Тест начат	понедельник, 14 Февраль 2022, 10:04
Состояние	Завершено
Завершен	понедельник, 14 Февраль 2022, 14:04
Прошло времени	4 час.
Оценка	**60,00** из 100,00

Вопрос
Инфо

Уважаемый участник Олимпиады!

На выполнение теста Заключительного этапа отводится 230 минут плюс 15 минут на сохранение и прикрепление решений. Работа автоматически отправится в 14:05 по Московскому времени. Окно таймера Вы увидите в верхней части рабочего экрана.

Вопросы технического характера Вы можете задать наблюдателю в чате (окошко внизу в правой части экрана). Если Вам потребуется выйти в туалетную комнату, оставьте в чате с проктором сообщения о времени выхода и времени возвращения (например, "12:04 - вышел"). Ответ от проктора ждать при этом не нужно.

Вариант заключительного этапа состоит из 5 задач. Решение каждой задачи Вы можете

а) полностью записать в поле ответа (при необходимости можно прикрепить поясняющий рисунок),

б) полностью набрать в текстовом редакторе с редактором формул, преобразовать в формат pdf и прикрепить получившийся файл. Если у Вас нет возможности преобразовать решение в pdf, Вы можете сделать скриншот экрана (кнопка PrtScn на клавиатуре или встроенный сервис "Ножницы") и прикрепить его.

Обратите внимание, к каждой задаче можно прикрепить только один файл, название которого формируется по правилу ol22*****_N, где ol22***** - Ваш логин, N - номер задачи.

В текстах решений, прикрепленных изображениях и файлах не должно быть никакой персональной информации!

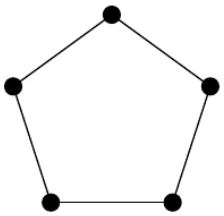
Во время выполнения варианта на компьютере можно пользоваться только текстовым редактором и встроенным сервисом создания изображений. Черновое решение можно выполнять на бумаге, расположенной в поле видимости веб-камеры.

Вопрос **1**

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

На картинке нарисовано несколько кружочков, соединенных отрезками. Костя выбирает натуральное число n и расставляет в кружочках различные натуральные числа так, чтобы для всех этих чисел выполнялось свойство:
если числа a и b не соединены отрезком, то сумма $a+b$ должна быть взаимно проста с n, а если соединены, то числа $a+b$ и n должны иметь общий натуральный делитель, больший 1.
При каком наименьшем n существует такая расстановка?



n = 15

Докажем, что для меньшего нельзя. Рассмотрим наименьшее подходящее число. Заметим, что n не делится на 2, т к иначе какая-то сумма делится на 2. Пусть а + б делится на 2. Тогда они оба сравнимы с 0 или 1 по модулю 2, Тогда оставшиеся 3 числа сравнимы с 1 или 0 соответственно, т к они не соединены с а или б. Получается три подряд одинаковых остатка по модулю 2 подряд. Но тогда посмотрим на не соседние. Они в сумме делятся на 2, т е не взаимно просты с n. Тогда посмотрим на другие простые делители числа. Пусть только 1 простой делитель. Тогда сумма соседних делится на p, значит чередуются остатки x и -x. Но в конце два остатка x встретятся, значит x = 0, но тогда и сумма не соседних поделится на p, т е не будет вз проста. Значит n >= pq >= 3*5=15

Пример на 15

В кружках подряд числа 10 17 16 9 15.

Тогда суммы соседних будут 27 42 25 24 25 не вз просты с 15

Не соседних 32 26 26 41 19 вз просты с 15

Комментарий:

Вопрос **2**

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

При $x, y, z \in (0, 1]$ найдите минимальное значение выражения

$$A = \frac{(x+2y)\sqrt{x+y-xy}+(y+2z)\sqrt{y+z-yz}+(z+2x)\sqrt{z+x-zx}}{xy+yz+zx}.$$

ответ 3

3 достигается при числах равных 1

"|" обозначим корень

Рассм (x+2y)|(x+y-xy)

x+y >= 2|(xy)

x + y - xy >= 2|(xy) - xy >= xy, т к xy <= 1

значит (x+y)|(x + y - xy) >= 2xy

докажем что y|(x + y - xy) >= xy

поделим на y, возведем в квадрат

x + y - xy >= x^2

x^2 + x(y-1) - y <= 0

у этого уравнения корни -y и 1, т е на (0;1] неравенство выполняется т к ветви параболы смотрят вверх

(x+2y)|(x + y - xy) >= 3xy значит A>=3

Комментарий:

Вопрос 3

Выполнен

Баллов: 0,00 из 20,00

На сторонах BC и AD вписанного четырехугольника $ABCD$ отмечены точки K и M соответственно, причем $BK : KC = AM : MD$. На отрезке KM выбрана такая точка L, что $KL : LM = BC : AD$. Найдите отношение площадей треугольников ACL и BDL, если известно, что $AC = p$ и $BD = q$.

Комментарий:

Вопрос **4**

Выполнен

Баллов: 0,00 из 20,00

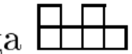
Натуральное число x в системе счисления с основанием r $(r > 3)$ имеет вид $\overline{ppqq}$, причем $q = 2p$. Оказалось, что r-ичная запись числа x^2 представляет собой семизначный палиндром с тремя одинаковыми средними цифрами. (Палиндромом называется число, которое читается одинаково слева направо и справа налево). При каких r такое возможно?

Комментарий:

Вопрос **5**

Выполнен

Баллов: 20,00 из 20,00

Доска $m \times n$ $(m, n > 5)$ разрезана на фигурки из шести единичных квадратиков вида  (фигурки можно поворачивать и переворачивать). При каких m и n такое возможно?

$m = 12k$, $n = 3, 4$, или 6 и больше k целое

$m = 3k$, $n = 4l$, k l целые

m n можно поменять местами

Рассмотрим шахматную раскраску, в фигурке либо на 2 больше черных либо белых, тогда фигурок разных видов будет поровну значит всего четное число то есть колво клеток делится на 12

Две фигурки можно сложить в прямоугольник 3 на 4

1 одна сторона делится на 12

тогда другую сторону мы должны представить в виде $3x + 4y$. Представляются числа 3 4 6 и больше. Такие подходят т к одну сторону мы заполняем полосой из прямоугольников 3 на 4. Полоса имеет ширину 3 или 4 значит другая сторона заполняется. Если ширина 1 2 или 5 то мы не сможем уместить

2 одна сторона делится ровно на 6 другая ровно на 2, обе не делятся на 4

Тогда сделаем шахматную раскраску квадратами 2 на 2

В каждой фигурке поровну черных и белых клеток а всего не поровну противоречие

3 одна сторона делится на 3 вторая на 4

заполняем таблицу прямоугольниками 3 на 4

Комментарий:

« ПРЕДЫДУЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 37

СЛЕДУЮЩИЙ АКТ. ЭЛЕМЕНТ
Вариант 28 »